Matematica più il vuoto

digressioni sul nulla

Maurizio Paolini

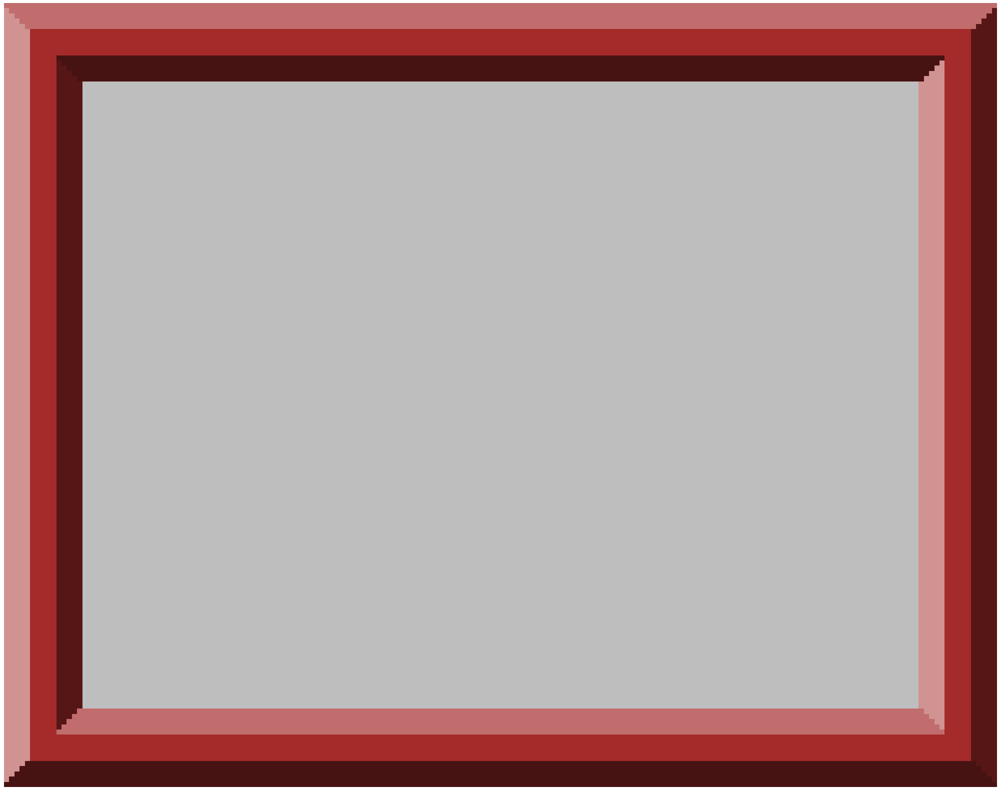
Università Cattolica di Brescia

Di cosa parliamo?

Parleremo di ...

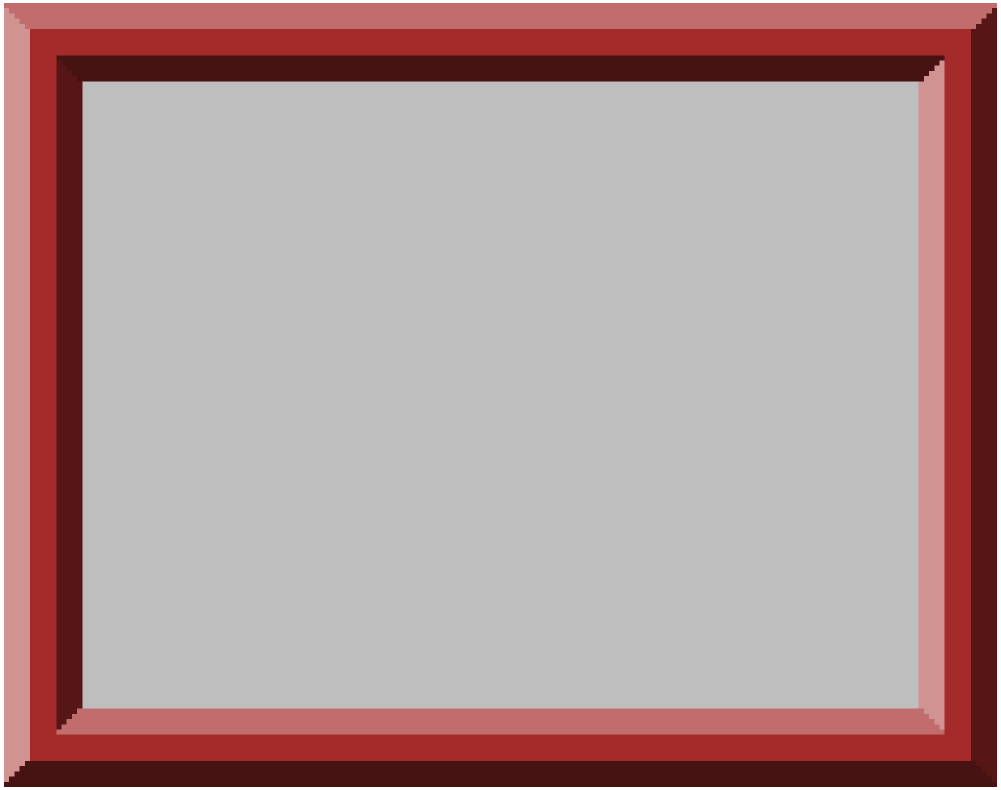
Di cosa parliamo?

Parleremo di ... **niente**:



Di cosa parliamo?

Parleremo di ... **niente**:



Mmmm, grammaticalmente non torna...

Di cosa parliamo?

Diciamo meglio: **Non** parleremo di **niente!**

Di cosa parliamo?

Diciamo meglio: **Non** parleremo di **niente!**

$\Rightarrow$ quindi $\boxed{\text{parleremo di qualcosa}}$ (direbbe un logico)

Di cosa parliamo?

Diciamo meglio: **Non** parleremo di **niente!**

$\Rightarrow$ quindi $\boxed{\text{parleremo di qualcosa}}$ (direbbe un logico)

- sacchi (insiemi)

Di cosa parliamo?

Diciamo meglio: **Non** parleremo di **niente!**

$\Rightarrow$ quindi $\boxed{\text{parleremo di qualcosa}}$ (direbbe un logico)

- sacchi (insiemi)
- pioli (numeri)

Di cosa parliamo?

Diciamo meglio: **Non** parleremo di **niente!**

$\Rightarrow$ quindi $\boxed{\text{parleremo di qualcosa}}$ (direbbe un logico)

- sacchi (insiemi)
- pioli (numeri)
- logicamente parleremo di logica...
  e di **strutture assiomatiche** (prima parolaccia)

Di cosa parliamo?

Diciamo meglio: **Non** parleremo di **niente!**

$\Rightarrow$ quindi $\boxed{\text{parleremo di qualcosa}}$ (direbbe un logico)

- sacchi (insiemi)
- pioli (numeri)
- logicamente parleremo di logica...
  e di **strutture assiomatiche** (prima parolaccia)
- l'insieme vuoto: mito o realtà?

C'è nessuuunoo?

Motivazione: *niente*, *vuoto*, *nessuno* sono concetti che provocano spesso situazioni paradossali

- Ulisse si fece chiamare "**Nessuno**" da Polifemo
  "*Nessuno* mi uccide!"
- - "**Niente** è meglio di una Ferrari"
  - "Un panino al prosciutto è meglio di **niente**"
  - Quindi un panino al prosciutto è meglio di una Ferrari!

Bandiere

Consideriamo le bandiere del mondo:

- Le bandiere tutte gialle le chiamiamo *GIALLE*
- Se contengono il colore giallo le chiamiamo *gialline*
- Le bandiere tutte verdi le chiamiamo *VERDI*
- Se contengono il colore verde le chiamiamo *verdine*

Bandiere

Consideriamo le bandiere del mondo:

- Le bandiere tutte gialle le chiamiamo *GIALLE*
- Se contengono il colore giallo le chiamiamo *galline*
- Le bandiere tutte verdi le chiamiamo *VERDI*
- Se contengono il colore verde le chiamiamo *verdine*

Chiaramente:
- Le *VERDI* sono anche *verdine*: $\{VERDI\} \subseteq \{verdine\}$
- Ci sono bandiere che sono sia *verdine* che *galline*

- Non ci sono bandiere sia *GIALLE* che *VERDI*

Astucci

Gli astucci nelle cartelle degli studenti italiani:

- Un astuccio che contiene solo matite blu è B
- Se contiene almeno una matita blu è un astuccio b
- Un astuccio che contiene solo matite rosse è R
- Se contiene almeno una matita rossa è un astuccio r

Astucci

Gli astucci nelle cartelle degli studenti italiani:

- Un astuccio che contiene solo matite blu è B
- Se contiene almeno una matita blu è un astuccio b
- Un astuccio che contiene solo matite rosse è R
- Se contiene almeno una matita rossa è un astuccio r

Chiaramente:
- $\{B\} \subseteq \{b\}$ e $\{R\} \subseteq \{r\}$
- $\{B\}$ e $\{R\}$ sono disgiunti
- $\{b\}$ e $\{r\}$ **non** sono disgiunti: ci sono astucci che hanno sia matite blu che matite rosse

Famiglie

Famiglie italiane (marito, moglie e figli):

- M: Insieme delle famiglie che hanno tutti figli maschi
- F: Insieme delle famiglie che hanno tutte figlie femmine
- m: Famiglie con almeno un figlio maschio
- f: Famiglie con almeno una figlia femmina

Famiglie

Famiglie italiane (marito, moglie e figli):

- M: Insieme delle famiglie che hanno tutti figli maschi
- F: Insieme delle famiglie che hanno tutte figlie femmine
- m: Famiglie con almeno un figlio maschio
- f: Famiglie con almeno una figlia femmina

Quindi:

$$M \subseteq m, \qquad F \subseteq f$$
$$m \cap f \neq \emptyset, \qquad M \cap F = \emptyset$$

Giusto?

Famiglie

Famiglie italiane (marito, moglie e figli):

- M: Insieme delle famiglie che hanno tutti figli maschi
- F: Insieme delle famiglie che hanno tutte figlie femmine
- m: Famiglie con almeno un figlio maschio
- f: Famiglie con almeno una figlia femmina

Quindi:

$$M \subseteq m, \qquad F \subseteq f$$
$$m \cap f \neq \emptyset, \qquad M \cap F = \emptyset$$

$\boxed{\text{Sbagliato!}}$ Dove mettiamo le famiglie senza figli?

Formalismi...

La *logica* ci viene in aiuto per risolvere la questione: diciamo che $\boxed{\text{figlio}(x,y)}$ è un modo abbreviato per dire "x *è figlio/a di* y":

$$\text{figlio}(x,y) := x \text{ è figlio (oppure figlia) di } \; y$$

Ad esempio $\text{figlio}(\text{Carla}, \text{Brambilla})$ è una affermazione (proposizione) che può essere vera o falsa:

- $\text{figlio}(\text{Caino}, \text{Eva})$ è vera
- $\text{figlio}(\text{Caino}, \text{Abramo})$ è falsa

Introduciamo anche $\boxed{\text{maschio}(x)}$ e $\boxed{\text{femmina}(x)}$

Formalismi (2)

Ora abbiamo gli strumenti per scrivere in modo *formale* l'affermazione che la famiglia Brambilla è una famiglia M

$$\forall x\ [\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \rightarrow \text{maschio}(x)]$$

Formalismi (2)

Ora abbiamo gli strumenti per scrivere in modo *formale* l'affermazione che la famiglia Brambilla è una famiglia M

$$\forall x\ [\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \rightarrow \text{maschio}(x)]$$

Più in generale x è una famiglia M, F, m, f se

$$M(x) := \forall y\ [\text{figlio}(y, x) \rightarrow \text{maschio}(y)]$$

$$F(x) := \forall y\ [\text{figlio}(y, x) \rightarrow \text{femmina}(y)]$$

$$m(x) := \exists y\ [\text{figlio}(y, x) \wedge \text{maschio}(y)]$$

$$f(x) := \exists y\ [\text{figlio}(y, x) \wedge \text{femmina}(y)]$$

Per ragionare senza rischi

$\boxed{\text{Connettivi logici}}$

- $\wedge$ **(e/and)** ; $\vee$ **(o/or)** ; $\neg$ **(non/not)**

Per ragionare senza rischi

Connettivi logici

- $\wedge$ **(e/and)** ; $\vee$ **(o/or)** ; $\neg$ **(non/not)**
- $\rightarrow$ **(implica)**

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

"Gli elefanti volano" $\rightarrow$ "Io sono il papa" è **vera**

Per ragionare senza rischi

Connettivi logici

- $\wedge$ **(e/and)** ; $\vee$ **(o/or)** ; $\neg$ **(non/not)**
- $\longrightarrow$ **(implica)**

P	Q	$P \longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

“Gli elefanti volano” $\longrightarrow$ “Io sono il papa” è **vera**

- $\longleftrightarrow$ **(se e solo se)**

Per ragionare senza rischi (2)

$\boxed{\text{Quantificatori}}$

- $\forall$ **(per ogni)**
  - Sintassi: $\forall x\ (P(x))$ (x è un *segnaposto*)
  - Esempio: $\forall a\ (a$ è un mammifero $\rightarrow a$ è un animale $)$

Per ragionare senza rischi (2)

$\boxed{\text{Quantificatori}}$

- $\forall$ **(per ogni)**
  - Sintassi: $\forall x\ (P(x))$ (x è un *segnaposto*)
  - Esempio: $\forall a\ (a$ è un mammifero $\rightarrow a$ è un animale $)$
- $\exists$ **(esiste)**
  - Sintassi: $\exists x\ (P(x))$
  - Esempio: $\exists a\ (a$ è tedesco $\wedge\ a$ è papa $)$

Per ragionare senza rischi (2)

Quantificatori

- $\forall$ **(per ogni)**
  - Sintassi: $\forall x\ (P(x))$ (x è un *segnaposto*)
  - Esempio: $\forall a$ (a è un mammifero $\rightarrow a$ è un animale)
- $\exists$ **(esiste)**
  - Sintassi: $\exists x\ (P(x))$
  - Esempio: $\exists a$ (a è tedesco $\wedge\ a$ è papa)

Definizione di limite ($\lim_{y \rightarrow x} f(y) = l$):

$$\forall \epsilon(\epsilon > 0 \rightarrow \exists \delta(\delta > 0 \wedge \forall y(|y - x| < \delta \rightarrow |f(y) - l| < \epsilon)))$$

AAARGH

La famiglia Brambilla

Ripasso: La famiglia Brambilla è una famiglia M se

$$\forall x\ [\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \to \text{maschio}(x)]$$

Cosa succede se la famiglia Brambilla non ha figli?

La famiglia Brambilla

Ripasso: La famiglia Brambilla è una famiglia M se

$$\forall x \ [\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \rightarrow \text{maschio}(x)]$$

Cosa succede se la famiglia Brambilla non ha figli?

- figlio$(x, \text{Brambilla})$ è sempre falso...

La famiglia Brambilla

Ripasso: La famiglia Brambilla è una famiglia M se

$$\forall x\ [\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \rightarrow \text{maschio}(x)]$$

Cosa succede se la famiglia Brambilla non ha figli?

- $\text{figlio}(x, \text{Brambilla})$ è sempre falso...
- ... quindi $\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \rightarrow \text{maschio}(x)$ è sempre vero (!)

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La famiglia Brambilla

Ripasso: La famiglia Brambilla è una famiglia M se

$$\forall x \ [\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \rightarrow \text{maschio}(x)]$$

Cosa succede se la famiglia Brambilla non ha figli?

- $\text{figlio}(x, \text{Brambilla})$ è sempre falso...
- ... quindi $\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \rightarrow \text{maschio}(x)$ è sempre vero (!)
- ... quindi la famiglia Brambilla è M (!!)

La famiglia Brambilla

Ripasso: La famiglia Brambilla è una famiglia M se

$$\forall x\ [\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \rightarrow \text{maschio}(x)]$$

Cosa succede se la famiglia Brambilla non ha figli?

- $\text{figlio}(x, \text{Brambilla})$ è sempre falso...
- ... quindi $\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \rightarrow \text{maschio}(x)$ è sempre vero (!)
- ... quindi la famiglia Brambilla è M (!!)
- e per la stessa ragione è anche F

La famiglia Brambilla (2)

La famiglia Brambilla è una famiglia m se

$$\exists x\ [\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \wedge \text{maschio}(x)]$$

Ma allora...

La famiglia Brambilla (2)

La famiglia Brambilla è una famiglia m se

$$\exists x \ [\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \wedge \text{maschio}(x)]$$

Ma allora...

- $\text{figlio}(x, \text{Brambilla})$ è sempre falso...

La famiglia Brambilla (2)

La famiglia Brambilla è una famiglia m se

$$\exists x \; [\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \wedge \text{maschio}(x)]$$

Ma allora...

- $\text{figlio}(x, \text{Brambilla})$ è sempre falso...
- ... quindi $\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \wedge \text{maschio}(x)$ è sempre falso

La famiglia Brambilla (2)

La famiglia Brambilla è una famiglia m se

$$\exists x\ [\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \wedge \text{maschio}(x)]$$

Ma allora...

- $\text{figlio}(x, \text{Brambilla})$ è sempre falso...
- ... quindi $\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \wedge \text{maschio}(x)$ è sempre falso
- ... quindi la famiglia Brambilla *non* è m

La famiglia Brambilla (2)

La famiglia Brambilla è una famiglia m se

$$\exists x\ [\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \wedge \text{maschio}(x)]$$

Ma allora...

- $\text{figlio}(x, \text{Brambilla})$ è sempre falso...
- ... quindi $\text{figlio}(x, \text{Brambilla}) \wedge \text{maschio}(x)$ è sempre falso
- ... quindi la famiglia Brambilla *non* è m
- e non è nemmeno f

Astucci vuoti

Un astuccio vuoto è sia B che R; ma non è ne b ne r
Quindi **non è vero** che

- $\{B\}$ e $\{R\}$ sono disgiunti
- Né che $\{B\} \subseteq \{b\}$ e nemmeno $\{R\} \subseteq \{r\}$

Astucci vuoti

Un astuccio vuoto è sia B che R; ma non è ne b ne r
Quindi **non è vero** che

- $\{B\}$ e $\{R\}$ sono disgiunti
- Né che $\{B\} \subseteq \{b\}$ e nemmeno $\{R\} \subseteq \{r\}$

$$\forall x \in \varnothing\ (P(x)) \qquad \text{cioè } \forall x\ (x \in \varnothing \to P(x))$$

è sempre vera (anche se $P(x)$ fosse una affermazione assurda)

$$\exists x \in \varnothing\ (P(x)) \qquad \text{cioè } \exists x\ (x \in \varnothing \wedge P(x))$$

è sempre falsa

Strutture assiomatiche

- Geometria euclidea
  - Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta
  - Si può prolungare una retta oltre i due punti indefinitamente
  - Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio
  - ...

Strutture assiomatiche

- Geometria euclidea
- Assiomi di Peano
  - Esiste un numero naturale, 0 (o 1)
  - Ogni numero naturale ha un numero naturale successore
  - Numeri diversi hanno successori diversi
  - 0 (o 1) non è il successore di alcun numero naturale
  - Ogni insieme di numeri naturali che contenga lo zero (o l'uno) e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'intero insieme dei numeri naturali (assioma dell'induzione)

Strutture assiomatiche

- Geometria euclidea
- Assiomi di Peano
- Logica del primo ordine
  Per ogni *formula ben formata* A, B, C:
  - $A \to (B \to A)$
  - $((A \to B) \to C) \to (A \to (B \to C))$
  - $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
  - ...

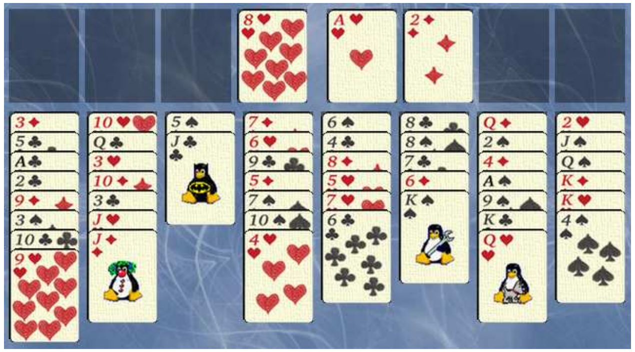
Strutture assiomatiche

- Geometria euclidea
- Assiomi di Peano
- Logica del primo ordine
- Dichiarazione Universale dei diritti dell'uomo
  - Tutti gli esseri umani nascono liberi ed eguali in dignità e diritti. Essi sono dotati di ragione di coscienza e devono agire gli uni verso gli altri in spirito di fratellanza
  - Ad ogni individuo spettano tutti i diritti e tutte le libertà enunciati nella presente Dichiarazione, senza distinzione alcuna, per ragioni di razza, di colore, di sesso [...]
  - Ogni individuo ha diritto alla vita, alla libertà ed alla sicurezza della propria persona
  - ...

Strutture assiomatiche

- Geometria euclidea
- Assiomi di Peano
- Logica del primo ordine
- Dichiarazione Universale dei diritti dell'uomo
- Solitario *freecell*

  Gli assiomi sono le posizioni finali con le 4 pile ordinate, i teoremi sono le posizioni *vincenti*, da cui è possibile raggiungere un assioma senza violare le *regole del gioco*



Strutture assiomatiche

- Geometria euclidea
- Assiomi di Peano
- Logica del primo ordine
- Dichiarazione Universale dei diritti dell'uomo
- Solitario *freecell*
- $\boxed{\text{Teoria degli insiemi}}$ (di Zermelo-Fraenkel)
  - Oggetti: *insiemi*
  - Relazioni: $=$, $\in$
  - 9 assiomi

Sacchi e napapi

- In una teoria assiomatica, gli oggetti non hanno un *significato*, ma sono semplicemente dei segni sulla carta, anche se spesso è utile *associare* gli oggetti a qualcosa di concreto

Sacchi e napapi

- In una teoria assiomatica, gli oggetti non hanno un *significato*, ma sono semplicemente dei segni sulla carta, anche se spesso è utile *associare* gli oggetti a qualcosa di concreto
- Nel caso della teoria degli insiemi, possiamo immaginare gli insiemi come *sacchi*. Questo può aiutare molto l'intuizione, ma l'analogia funziona solo fino ad un certo punto

Sacchi e napapi

- In una $\boxed{\text{teoria assiomatica}}$, gli oggetti non hanno un *significato*, ma sono semplicemente dei segni sulla carta, anche se spesso è utile *associare* gli oggetti a qualcosa di concreto
- Nel caso della teoria degli insiemi, possiamo immaginare gli insiemi come $\boxed{\textit{sacchi}}$. Questo può aiutare molto l'intuizione, ma l'analogia funziona solo fino ad un certo punto
- In certe situazioni conviene pensare agli insiemi come fossero dei $\boxed{\textit{napapi}}$, oggetti misteriosi di cui conosciamo solo le proprietà affermate dagli assiomi

Sacchi e napapi

- In una $\boxed{\text{teoria assiomatica}}$, gli oggetti non hanno un *significato*, ma sono semplicemente dei segni sulla carta, anche se spesso è utile *associare* gli oggetti a qualcosa di concreto
- Nel caso della teoria degli insiemi, possiamo immaginare gli insiemi come $\boxed{\textit{sacchi}}$. Questo può aiutare molto l'intuizione, ma l'analogia funziona solo fino ad un certo punto
- In certe situazioni conviene pensare agli insiemi come fossero dei $\boxed{\textit{napapi}}$, oggetti misteriosi di cui conosciamo solo le proprietà affermate dagli assiomi
- In caso di dubbio dobbiamo basarci sugli assiomi, e non sull'intuizione

L'insieme vuoto

Seguendo l'intuizione diremo che l'insieme vuoto è un *sacco* che non contiene nulla. Usando gli *attrezzi* di cui disponiamo, A è **un** insieme vuoto se

$$\forall x\ (\neg(x \in A)) \qquad [\forall x\ (x \notin A)]$$

Nota: Non abbiamo dimostrato nulla, abbiamo solo dato un nome a oggetti (insiemi) che verificano una certa proprietà.
Al momento non sappiamo né se tali oggetti esistono, né quanti ce ne sono.
Abbiamo bisogno di un paio di assiomi!

L'insieme vuoto (2)

- **Assioma** (insieme vuoto): $\boxed{\exists X\ (\forall Y\ (\neg(Y \in X)))}$

  In altre parole esiste un insieme che non contiene nessun altro insieme: un sacco vuoto

- **Assioma** (estensionalità):

  $\boxed{(\forall x((x \in A) \leftrightarrow (x \in B))) \to A = B}$

  In altre parole, se due insiemi contengono gli stessi elementi (oops...) (sono indistinguibili) allora sono uguali

- **Teorema** (unicità dell'insieme vuoto): Mettendo insieme i due assiomi si **dimostra** che l'insieme vuoto è unico. Lo chiamiamo $\boxed{\varnothing}$

Qui l'analogia con i sacchi comincia a vacillare...

Altri insiemi?

Alcuni altri assiomi permettono di costruire nuovi insiemi a partire da insiemi gia ottenuti, ad esempio

- l'unione $A \cup B$: un sacco che contiene gli oggetti contenuti in A e in B
- la coppia (non ordinata) $\{A, B\}$: un sacco con dentro due sacchi
- l'insieme delle parti: un sacco con dentro tanti altri sacchi
- perfino insiemi infiniti (grazie all'**assioma di infinito**)

Interi di Von Neumann

Su un insieme A definiamo una operazione s un po' strana (chiamiamola *successore*)

$$s(A) := A \cup \{A\}$$

(e qui l'analogia con i sacchi crolla definitivamente)

- $\{A\}$ è l'insieme che ha l'insieme A come unico elemento (ci serve un assioma per poter far questo!)
- Il simbolo $\cup$ indica l'unione tra insiemi che abbiamo gia nominato (anche qui serve un assioma!)

L'assioma di **fondazione** ci garantisce che $\neg(A = s(A))$, cioè $A \neq s(A)$

Costruire sul vuoto

Costruiamo il *successore* del solo insieme di cui disponiamo: cos'è $s(\varnothing)$?

$$s(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$$

Attenzione: $\{\varnothing\}$ non è vuoto; contiene un unico elemento, che è il sacco vuoto.

Costruire sul vuoto

Costruiamo il *successore* del solo insieme di cui disponiamo: cos'è $s(\varnothing)$?

$$s(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$$

Attenzione: $\{\varnothing\}$ non è vuoto; contiene un unico elemento, che è il sacco vuoto.
Il gioco si può ripetere:

$$s(s(\varnothing)) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
$$s(s(s(\varnothing))) = ... = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

Costruire sul vuoto

Costruiamo il *successore* del solo insieme di cui disponiamo: cos'è $s(\varnothing)$?

$$s(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$$

Attenzione: $\{\varnothing\}$ non è vuoto; contiene un unico elemento, che è il sacco vuoto.
Il gioco si può ripetere:

$$s(s(\varnothing)) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
$$s(s(s(\varnothing))) = ... = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

Questi insiemi li chiamiamo: $0 := \varnothing$, $1 := s(\varnothing)$, $2 := s(s(\varnothing))$, ...; sono i pioli di una scala che sale sul fagiolo magico

Abbiamo gli **interi di Von Neumann**, ovvero... $\mathbb{N}$

Interi di V.N. e assiomi di Peano

Gli interi che abbiamo costruito verificano tutti e 5 gli assiomi di Peano:

- Esiste un numero naturale, $0 = \varnothing$
- Ogni numero naturale n ha un numero naturale successore $s(n)$
- Numeri diversi hanno successori diversi (si tratta di dimostrare che se $n \neq m$ allora $s(n) \neq s(m)$
- 0 (il $\varnothing$) non è il successore di alcun numero naturale (facile: $s(A)$ non può mai essere vuoto)
- Ogni insieme di numeri naturali che contenga lo zero e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'intero insieme dei numeri naturali (assioma dell'induzione)

Ma se sono verificati tutti gli assiomi, allora risultano automaticamente veri tutti i risultati sui numeri naturali usuali (conseguenza degli assiomi), quindi abbiamo costruito un *modello* che può tranquillamente essere usato a tutti gli effetti

Il vuoto nelle formule

Un esempio di sommatoria:

$$\sum_{n=1}^{10} n^2 = \sum_{n\in\{1,\ldots,10\}} n^2 = 1 + 4 + 3^2 + \ldots + 10^2$$

Se A è un insieme di numeri possiamo fare

$$\sum_{n\in A} n^2$$

che se ad esempio $A = \{4, 6, 7\}$ vorrebbe dire $4^2 + 6^2 + 7^2$

Proprietà: Se A e B sono insiemi disgiunti si ha

$$\sum_{n\in A\cup B} n^2 = \sum_{n\in A} n^2 + \sum_{n\in B} n^2$$

Ancora sommatorie

che si può scrivere:

$$\sum_{n \in B} n^2 = \sum_{n \in A \cup B} n^2 - \sum_{n \in A} n^2$$

Se $B = \varnothing$ e A è un insieme qualunque, chiaramente A e $\varnothing$ sono disgiunti e $A \cup \varnothing = A$. Quindi, se vogliamo che la formula sopra valga ancora, otteniamo

$$\sum_{n \in \varnothing} n^2 = 0$$

e più in generale

$$\sum_{n \in \varnothing} f(n) = 0$$

Produttorie e altro

Cosa cambia per una *produttoria*?

$$\prod_{\heartsuit \in A \cup B} f(\heartsuit) = \left[\prod_{\clubsuit \in A} f(\clubsuit) \right] \cdot \left[\prod_{\spadesuit \in B} f(\spadesuit) \right]$$

da cui (sorpresa?):

$$\prod_{\heartsuit \in \varnothing} f(\heartsuit) = 1$$

Perché 1 e non 0? Ancora:

$$\bigcup_{X \in \varnothing} X = \varnothing \qquad \bigcap_{X \in \varnothing} X = ?$$

L'elemento neutro dell'intersezione

Se ci fosse un insieme U per $\bigcap_{X \in \varnothing} X$ tale insieme dovrebbe verificare

$$\forall x \; (x \in U)$$

(Insieme universo)... Sfortunatamente l'esistenza di un tale insieme porterebbe a contraddizioni con gli altri assiomi della teoria di Zermelo-Fraenkel, quindi si preferisce lasciare indefinita l'intersezione tra zero insiemi

Quanto fa 0^0?

Se A e B si indica con B^A l'insieme delle *applicazioni* $f : A \to B$, cioè tutti i possibili modi a cui è possibile associare a ciascun elemento di A uno ed un solo elemento di B.

Se A e B sono insiemi finiti (con un numero non infinito di elementi, $\#(A)$ e $\#(B)$) si dimostra che il numero di elementi di B^A è dato da

$$\#(B^A) = (\#(B))^{\#(A)}$$

almeno fintanto che gli insiemi non sono vuoti

Quanto fa 0^0? 1!

Se B è vuoto, ma A non lo è, allora non cè alcun modo per associare qualcosa agli elementi di A e l'insieme delle applicazioni risulta vuoto. Questo è consistente con il fatto che $0^n = 0$

Più delicato è il caso in cui A è vuoto, infatti in tal caso una applicazione tra i due insiemi esiste, ed è l'applicazione vuota! Per districarsi dall'ingarbuglio mentale è necessario identificare le applicazione con opportuni sottoinsiemi del prodotto cartesiano $A \times B$. Si conclude quindi $A^B = \{\emptyset\}$ da cui $n^0 = 0^0 = 1$

C'è nessuuunoo?