UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

APPROFONDIMENTI DI ANALISI MATEMATICA

Prof. Marco Degiovanni

Anno Accademico 2012/2013

Indice

Capitolo 1

Successioni e serie in ambito reale e complesso

1 Successioni e sottosuccessioni

(1.1) Teorema *Sia (x_h) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora esistono due sottosuccessioni $\left(x_{\nu(h)}\right)$ e $\left(x_{\lambda(h)}\right)$ di (x_h) tali che*

$$\lim_h x_{\nu(h)} = \limsup_h x_h \,,$$
$$\lim_h x_{\lambda(h)} = \liminf_h x_h \,.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\ell = \limsup_h x_h$$

e consideriamo anzitutto il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Costruiamo ricorsivamente una funzione $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo

$$\nu(0) = \min \{n \in \mathbb{N} :\, \ell - 1 \leq x_n \leq \ell + 1\} \,,$$
$$\forall h \in \mathbb{N} : \quad \nu(h+1) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} :\, n > \nu(h),\, \ell - \frac{1}{h+2} \leq x_n \leq \ell + \frac{1}{h+2} \right\} .$$

In effetti, poiché $\ell+1$ è un maggiorante definitivo per (x_h), esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \leq \ell+1$ per ogni $n \geq k_0$. Poiché $\ell - 1$ non è un maggiorante definitivo per (x_h), esiste $n_0 \geq k_0$ tale che $x_{n_0} > \ell - 1$. La definizione di $\nu(0)$ è quindi ben posta.

Supponiamo ora di aver costruito $\nu(h)$. Poiché $\ell + \frac{1}{h+2}$ è un maggiorante definitivo per (x_h), esiste $k_{h+1} \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \leq \ell + \frac{1}{h+2}$ per ogni $n \geq k_{h+1}$. Poiché $\ell - \frac{1}{h+2}$ non è un maggiorante definitivo per (x_h), esiste

$$n_{h+1} > \max \{k_{h+1}, \nu(h)\}$$

tale che $x_{n_{h+1}} > \ell - \frac{1}{h+2}$. Pertanto anche la definizione di $\nu(h+1)$ è ben posta.

Evidentemente risulta

$$\forall h \in \mathbb{N} : \, \nu(h) < \nu(h+1) \,, \qquad \ell - \frac{1}{h+1} \leq x_{\nu(h)} \leq \ell + \frac{1}{h+1} \,.$$

In particolare ν è strettamente crescente, per cui $\left(x_{\nu(h)}\right)$ è una sottosuccessione di (x_h).

Dal Teorema del confronto si deduce che

$$\lim_h x_{\nu(h)} = \ell \,.$$

Consideriamo ora il caso $\ell = +\infty$. Costruiamo ricorsivamente una funzione $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo

$$\nu(0) = \min \{ n \in \mathbb{N} : \, x_n \geq 0 \} \,,$$

$$\forall h \in \mathbb{N} : \quad \nu(h+1) = \min \{ n \in \mathbb{N} : \, n > \nu(h), \, x_n \geq h+1 \} \,.$$

In effetti, poiché 0 non è un maggiorante definitivo per (x_h), esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_0} \geq 0$. La definizione di $\nu(0)$ è quindi ben posta.

Supponiamo ora di aver costruito $\nu(h)$. Poiché $h+1$ non è un maggiorante definitivo per (x_h), esiste $n_{h+1} > \nu(h)$ tale che $x_{n_{h+1}} \geq h+1$. Pertanto anche la definizione di $\nu(h+1)$ è ben posta.

Evidentemente risulta

$$\forall h \in \mathbb{N} : \, \nu(h) < \nu(h+1) \,, \qquad x_{\nu(h)} \geq h \,.$$

In particolare ν è strettamente crescente, per cui $\left(x_{\nu(h)}\right)$ è una sottosuccessione di (x_h).

Per il Teorema del confronto si ha

$$\lim_h x_{\nu(h)} = +\infty \,.$$

Nel caso $\ell = -\infty$, infine, si ha

$$\lim_h x_h = -\infty \,,$$

per cui basta porre $\nu(h) = h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$.

La dimostrazione riguardante il limite inferiore è simile e può essere svolta per esercizio. ∎

(1.2) Corollario *Sia (x_h) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora esistono $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ed una sottosuccessione $\left(x_{\nu(h)}\right)$ tali che*

$$\lim_h x_{\nu(h)} = \ell\,.$$

In altre parole, $\overline{\mathbb{R}}$ è sequenzialmente compatto.

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del teorema precedente. ■

Ricordiamo che dal corollario precedente segue il seguente risultato generale.

(1.3) Teorema *Ogni successione limitata in $\mathbb{K}^n$ ammette una sottosuccessione convergente.*

Come conseguenza, si ottiene una fondamentale proprietà di $\mathbb{R}$.

(1.4) Teorema (Criterio di convergenza di Cauchy) *Una successione (x_h) in $\mathbb{R}$ è convergente se e solo se è di Cauchy. In altre parole, lo spazio metrico $\mathbb{R}$ è completo.*

Dimostrazione. È un fatto generale che ogni successione convergente è di Cauchy. Viceversa, sia (x_h) di Cauchy in $\mathbb{R}$. Ne segue che (x_h) è limitata. Per il Teorema (1.3) esiste una sottosuccessione $\left(x_{\nu(h)}\right)$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Essendo di Cauchy, (x_h) stessa è convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. ■

2 Serie

(2.1) Teorema (Prodotto secondo Cauchy di due serie) *Siano $\sum\limits_{h=0}^{\infty} x_h$ e $\sum\limits_{h=0}^{\infty} y_h$ due serie assolutamente convergenti in $\mathbb{C}$ e sia*

$$z_h = \sum_{j=0}^{h} x_j y_{h-j}\,.$$

Allora la serie $\sum\limits_{h=0}^{\infty} z_h$ è assolutamente convergente e

$$\sum_{h=0}^{\infty} z_h = \left(\sum_{h=0}^{\infty} x_h\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty} y_h\right)\,.$$

Dimostrazione. Risulta

$$\sum_{h=0}^{k} |z_h| \leq \sum_{h=0}^{k} \sum_{j=0}^{h} |x_j|\,|y_{h-j}| \leq \left(\sum_{h=0}^{k} |x_h|\right)\left(\sum_{h=0}^{k} |y_h|\right),$$

per cui la serie $\sum\limits_{h=0}^{\infty} |z_h|$ è assolutamente convergente, quindi convergente.

Risulta anche

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{h=0}^{2k} z_h - \left(\sum_{h=0}^{k} x_h\right)\left(\sum_{h=0}^{k} y_h\right)\right| &= \left|\sum_{h=0}^{k-1}\left(x_h \sum_{j=k+1}^{2k-h} y_j\right) + \sum_{h=k+1}^{2k}\left(x_h \sum_{j=0}^{2k-h} y_j\right)\right| \leq \\
&\leq \sum_{h=0}^{k-1}\left(|x_h| \sum_{j=k+1}^{2k-h} |y_j|\right) + \sum_{h=k+1}^{2k}\left(|x_h| \sum_{j=0}^{2k-h} |y_j|\right) \leq \\
&\leq \left(\sum_{h=0}^{\infty} |x_h|\right)\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} |y_j|\right) + \\
&\quad + \left(\sum_{h=k+1}^{\infty} |x_h|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} |y_j|\right).
\end{aligned}$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, ne segue che

$$\sum_{h=0}^{\infty} z_h - \left(\sum_{h=0}^{\infty} x_h\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty} y_h\right) = 0\,,$$

per cui la dimostrazione è completa. ■

(2.2) Teorema (Criterio di condensazione per le serie) *Sia* $\sum\limits_{h=0}^{\infty} x_h$ *una serie a termini reali positivi tale che la successione* (x_h) *sia decrescente. Poniamo* $y_h = 2^h\, x_{2^h}$.

Allora la serie $\sum\limits_{h=0}^{\infty} x_h$ *è convergente se e solo se la serie* $\sum\limits_{h=0}^{\infty} y_h$ *è convergente.*

Dimostrazione. Risulta

$$\forall n \geq 0 : \sum_{h=2^n}^{2^{n+1}-1} x_h \leq 2^n x_{2^n} = y_n\,,$$

$$\forall n \geq 1 : \sum_{h=2^{n-1}+1}^{2^n} x_h \geq 2^{n-1} x_{2^n} = \frac{1}{2} y_n\,,$$

per cui

$$\sum_{h=0}^{2^{n+1}-1} x_h \leq x_0 + \sum_{h=0}^{n} y_h\,,$$

$$\sum_{h=0}^{2^n} x_h \geq x_0 + x_1 - \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{n} y_h\,.$$

Se la serie $\sum_{h=0}^{\infty} y_h$ è convergente, si ha che la serie $\sum_{h=0}^{\infty} x_h$ non può essere positivamente divergente.

Se invece la serie $\sum_{h=0}^{\infty} y_h$ è positivamente divergente, si ha che la serie $\sum_{h=0}^{\infty} x_h$ non può essere convergente. ■

Esercizi

1. Sia

$$x_h = (-1)^h \frac{1}{\sqrt{h+1}}\,.$$

Si dimostri che la serie $\sum_{h=0}^{\infty} x_h$ è convergente, mentre la serie prodotto secondo Cauchy di $\sum_{h=0}^{\infty} x_h$ per se stessa non è convergente.

2. Siano $\sum_{h=0}^{\infty} x_h$ una serie assolutamente convergente, $\sum_{h=0}^{\infty} y_h$ una serie convergente e sia $\sum_{h=0}^{\infty} z_h$ la serie prodotto secondo Cauchy di $\sum_{h=0}^{\infty} x_h$ per $\sum_{h=0}^{\infty} y_h$.

Si dimostri che la serie $\sum_{h=0}^{\infty} z_h$ è convergente e che

$$\sum_{h=0}^{\infty} z_h = \left(\sum_{h=0}^{\infty} x_h\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty} y_h\right)\,.$$

3. Si studi con i criteri della radice, del rapporto e di condensazione la convergenza della serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^\alpha}\,, \qquad \alpha > 0\,.$$

Capitolo 2

Funzioni esponenziali e circolari

1 La funzione esponenziale

(1.1) Proposizione *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *la serie*

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^h}{h!}$$

è assolutamente convergente.

Dimostrazione. Se $z = 0$ il fatto è evidente. Se $z \neq 0$, risulta

$$\lim_h \frac{|z|^{h+1}}{(h+1)!} \frac{h!}{|z|^h} = \lim_h \frac{|z|}{h+1} = 0\,.$$

La tesi discende allora dal criterio del rapporto. ■

(1.2) Definizione *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *poniamo*

$$\exp z := \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^h}{h!}\,.$$

La funzione $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *si chiama* esponenziale complesso.

(1.3) Teorema *La funzione* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *è continua. Inoltre valgono i seguenti fatti:*

$$\exp 0 = 1\,,$$

$$\forall z, w \in \mathbb{C} : \ \exp(z+w) = (\exp z)(\exp w)\,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : \ \exp z \neq 0\,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : \exp(-z) = (\exp z)^{-1}\,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : \exp \bar{z} = \overline{\exp z}\,,$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\exp z - 1}{z} = 1\,.$$

Dimostrazione. Evidentemente $\exp 0 = 1$. Per la formula del binomio di Newton si ha

$$\frac{1}{h!}(z+w)^h = \frac{1}{h!}\sum_{j=0}^{h} \left(\begin{array}{c} h \\ j \end{array}\right) z^j w^{h-j} = \sum_{j=0}^{h} \frac{1}{j!} z^j \frac{1}{(h-j)!} w^{h-j}\,.$$

Per il teorema sul prodotto secondo Cauchy di due serie, ne segue

$$\exp(z+w) = (\exp z)(\exp w)\,.$$

Poiché

$$1 = \exp 0 = \exp(z + (-z)) = (\exp z)(\exp(-z))\,,$$

si ha $\exp z \neq 0$ ed $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$.

Risulta

$$\sum_{h=0}^{k} \frac{\bar{z}^h}{h!} = \overline{\sum_{h=0}^{k} \frac{z^h}{h!}}\,.$$

Passando al limite per $k \to +\infty$ e tenendo conto della continuità della funzione coniugato, si ottiene $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$.

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned} |(\exp z) - 1 - z| &= \left|\sum_{h=2}^{\infty} \frac{z^h}{h!}\right| = |z|^2 \left|\sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^h}{(h+2)!}\right| \leq \\ &\leq |z|^2 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{|z|^h}{(h+2)!} \leq |z|^2 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} = (\exp 1)|z|^2\,. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\left|\frac{\exp z - 1}{z} - 1\right| \leq (\exp 1)|z|\,,$$

da cui

$$\lim_{z\to 0} \frac{\exp z - 1}{z} = 1\,.$$

A maggior ragione si ha

$$\lim_{z\to 0} \exp z = 1\,,$$

per cui

$$\lim_{w\to z}\exp w = \lim_{w\to z}\exp(z+(w-z)) = \lim_{w\to z}\big(\exp z\exp(w-z)\big) = \exp z\,.$$

Pertanto la funzione exp è continua. ■

(1.4) Corollario *Sia $z \in \mathbb{C}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(x) = \exp(zx)$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} :\; f'(x) = z\exp(zx)\,.$$

Dimostrazione. Se $z = 0$, il fatto è ovvio. Altrimenti si ha

$$\lim_{\xi\to x}\frac{\exp(z\xi)-\exp(zx)}{\xi - x} = \lim_{\xi\to x}\left(z\exp(zx)\frac{\exp(z\xi - zx)-1}{z\xi - zx}\right) = z\exp(zx)\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.5) Proposizione *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\exp x \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Se $x \in \mathbb{R}$, si ha $\overline{x} = x$. Ne segue

$$\overline{\exp x} = \exp\overline{x} = \exp x\,.$$

Pertanto $\exp x \in \mathbb{R}$. ■

(1.6) Definizione *La funzione* $\exp_{|\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si chiama* esponenziale *(*reale*). Per semplicità viene denotata con lo stesso simbolo* exp.

(1.7) Teorema *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)\,,$$

$$\exp x \geq 1 + x\,.$$

Inoltre exp *è l'unica funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ con tali proprietà.*

Dimostrazione. La formula riguardante $\exp(x+y)$ discende dalla corrispondente formula in ambito complesso.

D'altronde, per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta

$$\exp x = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2 \geq 0\,.$$

Inoltre dal Corollario (1.4) segue che la funzione exp è derivabile con

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ (\exp)'(x) = \exp x\,,$$

per cui exp è derivabile due volte con

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ (\exp)''(x) = \exp x\,.$$

Se $x > 0$, dalla Formula di Taylor col resto di Lagrange si deduce che esiste $t \in]0, x[$ tale che

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2}\,(\exp t)x^2 \geq 1 + x\,.$$

Se $x < 0$, la dimostrazione è analoga.

Infine, sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un'altra funzione tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ g(x + y) = g(x)g(y)\,, \qquad g(x) \geq 1 + x\,.$$

Risulta che $g(0) = 1$ e che g è derivabile con $g'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Posto $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{\exp x}$, si ha che $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile con

$$\varphi'(x) = \frac{g'(x)\exp x - g(x)\exp x}{(\exp x)^2} = \frac{g(x)\exp x - g(x)\exp x}{(\exp x)^2} = 0\,.$$

Ne segue che φ è costante. Poiché $\exp 0 = g(0) = 1$, deve essere $\varphi = 1$, ossia $g = \exp$. ■

(1.8) Osservazione *Evidentemente risulta*

$$e = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\,.$$

Esercizi

1. Si dimostri che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x^k} = +\infty\,.$$

2. Si dimostri che il numero e è irrazionale.

2 Le funzioni circolari

(2.1) Definizione *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ poniamo*

$$\cos z := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}\,,$$

$$\sin z := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\,.$$

Le funzioni $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *e* $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *si chiamano rispettivamente* coseno *e* seno*.*

(2.2) Teorema *Le funzioni* $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *e* $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sono continue. Inoltre valgono i seguenti fatti:*

$$\forall z \in \mathbb{C}:\ \exp(iz) = \cos z + i \sin z\,,$$

$$\cos 0 = 1\,, \qquad \sin 0 = 0\,,$$

$$\forall z, w \in \mathbb{C}:\ \cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w\,,$$

$$\forall z, w \in \mathbb{C}:\ \sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w\,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C}:\ \cos(-z) = \cos z\,, \qquad \sin(-z) = -\sin z\,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C}:\ \cos^2 z + \sin^2 z = 1\,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C}:\ \cos \overline{z} = \overline{\cos z}\,, \qquad \sin \overline{z} = \overline{\sin z}\,,$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0\,, \qquad \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1\,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C}:\ \cos z = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h}}{(2h)!}\,, \qquad \sin z = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h+1}}{(2h+1)!}\,.$$

Dimostrazione. La continuità di coseno e seno segue per composizione dalla continuità dell'esponenziale complesso. Dalla definizione segue immediatamente che

$$\forall z \in \mathbb{C}: \ \exp(iz) = \cos z + i \sin z \,,$$

$$\cos 0 = 1 \,, \qquad \sin 0 = 0 \,.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\cos z \cos w - \sin z \sin w &= \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}\,\frac{\exp(iw)+\exp(-iw)}{2} + \\
&\quad - \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}\,\frac{\exp(iw)-\exp(-iw)}{2i} = \\
&= \frac{1}{4}\big(\exp(iz+iw)+\exp(iz-iw)+\exp(iw-iz)+ \\
&\quad + \exp(-iz-iw)+\exp(iz+iw)-\exp(iz-iw)+ \\
&\quad - \exp(iw-iz)+\exp(-iz-iw)\big) = \\
&= \frac{\exp(iz+iw)+\exp(-iz-iw)}{2} = \cos(z+w)\,.
\end{aligned}$$

In modo simile risulta

$$\begin{aligned}
\sin z \cos w + \cos z \sin w &= \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}\,\frac{\exp(iw)+\exp(-iw)}{2} + \\
&\quad + \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}\,\frac{\exp(iw)-\exp(-iw)}{2i} = \\
&= \frac{1}{4i}\big(\exp(iz+iw)+\exp(iz-iw)-\exp(iw-iz)+ \\
&\quad - \exp(-iz-iw)+\exp(iz+iw)-\exp(iz-iw)+ \\
&\quad + \exp(iw-iz)-\exp(-iz-iw)\big) = \\
&= \frac{\exp(iz+iw)-\exp(-iz-iw)}{2i} = \sin(z+w)\,.
\end{aligned}$$

Dalla definizione di cos e sin segue direttamente che

$$\forall z \in \mathbb{C}: \ \cos(-z) = \cos z \,, \qquad \sin(-z) = -\sin z \,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C}: \ \cos^2 z + \sin^2 z = 1 \,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C}: \ \cos \overline{z} = \overline{\cos z} \,, \qquad \sin \overline{z} = \overline{\sin z} \,.$$

Risulta

$$\frac{\cos z - 1}{z} = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)-2}{2z} = \frac{i}{2}\left(\frac{\exp(iz)-1}{iz} - \frac{\exp(-iz)-1}{-iz}\right),$$

per cui
$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos z - 1}{z} = 0\,.$$
In modo simile si ha
$$\frac{\sin z}{z} = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2iz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\exp(iz)-1}{iz} + \frac{\exp(-iz)-1}{-iz}\right)\,,$$
da cui
$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1\,.$$

Infine risulta
$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(iz)^h}{h!} + \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\,\frac{(iz)^h}{h!}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{\infty}2\frac{(iz)^{2h}}{(2h)!} = \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\,\frac{z^{2h}}{(2h)!}\,.\end{aligned}$$
Analogamente si ha
$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i} = \\ &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(iz)^h}{h!} - \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\,\frac{(iz)^h}{h!}\right) = \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{h=0}^{\infty}2\frac{(iz)^{2h+1}}{(2h+1)!} = \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\,\frac{z^{2h+1}}{(2h+1)!}\,,\end{aligned}$$
da cui la tesi. ■

(2.3) Proposizione *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\cos x \in \mathbb{R}$ e $\sin x \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Poiché $\overline{x} = x$, risulta
$$\overline{\cos x} = \cos\overline{x} = \cos x\,,$$
$$\overline{\sin x} = \sin\overline{x} = \sin x\,,$$
da cui $\cos x \in \mathbb{R}$ e $\sin x \in \mathbb{R}$ ■

(2.4) Definizione *Le funzioni* $\cos_{|\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\sin_{|\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vengono ancora chiamate con gli stessi nomi* coseno *e* seno *e denotate con gli stessi simboli* cos *e* sin.

(2.5) Teorema *Per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,,$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\,,$$

$$0 < |x| \leq 1 \implies \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1\,.$$

Inoltre $(\cos, \sin)$ *è l'unica coppia di funzioni da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *con tali proprietà.*

Dimostrazione. Le prime tre formule discendono dalle corrispondenti formule in ambito complesso.

Sia ora $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x| \leq 1$. Osserviamo anzitutto che per ogni $k \geq 1$ risulta

$$\sum_{h=2k-1}^{2k} (-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h)!} \leq \sum_{h=2k-1}^{2k} (-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h+1)!} \leq 0\,.$$

In effetti questo equivale a

$$-\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!} + \frac{x^{4k}}{(4k)!} \leq -\frac{x^{4k-2}}{(4k-1)!} + \frac{x^{4k}}{(4k+1)!} \leq 0$$

ossia

$$-(4k+1)4k(4k-1) + (4k+1)x^2 \leq -(4k+1)4k + x^2 \leq 0$$

che a sua volta equivale a

$$x^2 \leq (4k+1)(4k-2)\,.$$

Quest'ultima disuguaglianza è certamente vera per $|x| \leq 1$ e $k \geq 1$.

Risulta quindi

$$1 + \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h)!} \leq 1 + \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h+1)!} \leq 1\,,$$

ossia

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1\,.$$

Sia infine (f,g) una coppia di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ con le stesse proprietà. Risulta che $f(0)=1$, $g(0)=0$ e che f,g sono derivabili con $f'(x)=-g(x)$ e $g'(x)=f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Posto $\varphi(x)=\dfrac{f(x)+ig(x)}{\exp(ix)}$, si ha che $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ è derivabile con

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{(f'(x)+ig'(x))\exp(ix)-i(f(x)+ig(x))\exp(ix)}{(\exp(ix))^2}=\\ &= \frac{(-g(x)+if(x))\exp(ix)-(if(x)-g(x))\exp(ix)}{(\exp(ix))^2}=0\,.\end{aligned}$$

Ne segue che φ è costante. Poiché $\exp 0 = f(0)+ig(0)=1$, deve essere $\varphi(x)=1$, ossia $f(x)+ig(x)=\exp(ix)=\cos x+i\sin x$. Ne segue $f(x)=\cos x$ e $g(x)=\sin x$. ■

(2.6) Definizione *Per ogni $z\in\mathbb{C}$ con $\cos z\neq 0$ poniamo*

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}\,.$$

La funzione tan *si chiama* tangente.

(2.7) Osservazione *Se $z,z'\in\mathbb{C}$ e $\varrho,\varrho'\in[0,+\infty[$, $\vartheta,\vartheta'\in\mathbb{R}$ sono tali che*

$$z=\varrho\left(\cos\vartheta+i\sin\vartheta\right)\,,\qquad z'=\varrho'\left(\cos\vartheta'+i\sin\vartheta'\right)\,,$$

risulta

$$z=\varrho\exp(i\vartheta)\,,\qquad z'=\varrho'\exp(i\vartheta')\,,$$

$$zz'=(\varrho\varrho')\exp\left(i(\vartheta+\vartheta')\right)\,,$$

$$\overline{z}=\varrho\exp(-i\vartheta)\,,$$

$$z\neq 0 \implies z^{-1}=\varrho^{-1}\exp(-i\vartheta)\,,$$

$$z^n=\varrho^n\exp(in\vartheta)\,.$$

3 Il teorema fondamentale dell'algebra

(3.1) Teorema (fondamentale dell'algebra) *Sia*

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

una funzione polinomiale complessa con $n \geq 1$ *ed* $a_n \neq 0$.

Allora esiste $z \in \mathbb{C}$ *tale che* $P(z) = 0$.

Dimostrazione. Sia (ζ_h) una successione in $\mathbb{C}$ tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} : \, |P(\zeta_h)| < \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| + \frac{1}{h+1} \, .$$

Per ogni $z \neq 0$ risulta

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k = |z|^n \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^{k-n} \right) .$$

Poiché

$$\lim_{t \to +\infty} t^n \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| t^{k-n} \right) = +\infty \, ,$$

esiste $R > 0$ tale che

$$\forall t > R : \, t^n \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| t^{k-n} \right) > \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| + 1 \, .$$

Ne segue $|\zeta_h| \leq R$ per ogni h, per cui la successione (ζ_h) è limitata.

Sia $(\zeta_{\nu(h)})$ una sottosuccessione convergente a $z_0 \in \mathbb{C}$. Per la continuità della funzione $|P|$, risulta

$$|P(z_0)| = \lim_h |P(\zeta_{\nu(h)})| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| \, .$$

Pertanto

$$\forall z \in \mathbb{C} : \, |P(z_0)| \leq |P(z)| \, .$$

La tesi sarà dimostrata, se proviamo che $P(z_0) = 0$.

Sia Q il polinomio definito da $Q(z) = P(z + z_0)$. Sarà

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$$

con $b_n = a_n$ ed inoltre

$$\forall z \in \mathbb{C} : \, |Q(0)| \leq |Q(z)| \, .$$

Si tratta di dimostrare che $Q(0) = 0$, ossia che $b_0 = 0$.

Sia j tale che $1 \leq j \leq n$, $b_j \neq 0$ e

$$Q(z) = b_0 + \sum_{k=j}^{n} b_k z^k \, .$$

Sia $w \in \mathbb{C}$ tale che $b_0 + b_j w^j = 0$. Allora si ha

$$\lim_{t \to 0} \frac{Q(tw) - b_0 - b_j (tw)^j}{t^j} = 0\,.$$

Se per assurdo fosse $b_0 \neq 0$, esisterebbe $t \in]0, 1]$ tale che

$$|Q(tw) - b_0 - b_j (tw)^j| < \frac{1}{2} |b_0| t^j\,.$$

Ne seguirebbe

$$\begin{aligned} |Q(tw)| &\leq |Q(tw) - b_0 - b_j (tw)^j| + |b_0 + b_j (tw)^j| < \\ &< \frac{1}{2} |b_0| t^j + |b_0| (1 - t^j) = |b_0| - \frac{1}{2} |b_0| t^j < |Q(0)|\,, \end{aligned}$$

il che è assurdo. ■

Esercizi

1. Sia

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $P(z) = 0$. Si dimostri che $P(\overline{z}) = 0$.

2. Siano $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e sia

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

con $n \geq 1$ ed $a_n \neq 0$. Si dimostri che $P(x)$ è divisibile esattamente per $(x - \alpha)$ oppure per $(x^2 - \beta x + \gamma)$ per un'opportuna scelta di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $\beta^2 < 4\gamma$.

Capitolo 3

Calcolo integrale

1 Formula di Taylor col resto integrale

(1.1) Teorema (Formula di Taylor col resto integrale) *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$, $k \in \mathbb{N}$ *e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile* $(k+1)$*-volte con derivata* $(k+1)$*-esima continua.*

Allora per ogni $\xi \in [a, b]$ *si ha*

$$f(\xi) = \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} f^{(h)}(x)(\xi - x)^h + \frac{1}{k!} \int_x^\xi f^{(k+1)}(t)(\xi - t)^k \, dt \, .$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su k. Per $k = 0$ si ha

$$f(\xi) = f(x) + \int_x^\xi f'(t) \, dt \, .$$

Supponiamo ora che la tesi sia vera per un certo k. Si ha

$$f(\xi) - \sum_{h=0}^{k+1} \frac{1}{h!} f^{(h)}(x)(\xi - x)^h = \frac{1}{k!} \int_x^\xi f^{(k+1)}(t)(\xi - t)^k \, dt - \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x)(\xi - x)^{k+1} \, .$$

Poiché

$$\int_x^\xi (\xi - t)^k \, dt = \left[-\frac{(\xi - t)^{k+1}}{k+1} \right]_{t=x}^{t=\xi} = \frac{(\xi - x)^{k+1}}{k+1} \, ,$$

risulta

$$\begin{aligned}
f(\xi) - \sum_{h=0}^{k+1} \frac{1}{h!} f^{(h)}(x)(\xi - x)^h &= \frac{1}{k!} \int_x^\xi \left(f^{(k+1)}(t) - f^{(k+1)}(x)\right)(\xi - t)^k \, dt = \\
&= \frac{1}{k!} \left\{ \left[-\left(f^{(k+1)}(t) - f^{(k+1)}(x)\right) \frac{(\xi - t)^{k+1}}{k+1} \right]_{t=x}^{t=\xi} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{k+1} \int_x^\xi f^{(k+2)}(t)(\xi - t)^{k+1} \, dt \right\} = \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \int_x^\xi f^{(k+2)}(t)(\xi - t)^{k+1} \, dt \,,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(1.2) Corollario *Per ogni* $x \in]-1, 1]$ *si ha*

$$\log(1 + x) = \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} \frac{x^h}{h} \,.$$

Dimostrazione. Anzitutto la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} \frac{x^h}{h}$$

è assolutamente convergente per $|x| < 1$ per il criterio del rapporto e convergente per $x = 1$ per il criterio di Leibniz.

Sia $f(x) = -\log(1 - x)$. Si verifica facilmente per induzione che

$$\forall k \geq 1 : \, f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k} \,.$$

Ne segue per ogni $x \in [-1, 1[$

$$f(x) = \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} f^{(h)}(0) x^h + \frac{1}{k!} \int_0^x f^{(k+1)}(t)(x - t)^k \, dt = \sum_{h=1}^{k} \frac{1}{h} x^h + \int_0^x \frac{(x-t)^k}{(1-t)^{k+1}} \, dt \,.$$

Se $0 \leq x < 1$, si ha

$$\forall t \in [0, x] : \, 0 \leq \frac{x - t}{1 - t} \leq x \,,$$

per cui

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^k}{(1-t)^{k+1}} \, dt \leq \int_0^x \frac{x^k}{1-t} \, dt = -x^k \log(1 - x) \,.$$

Ne segue

$$\lim_k \int_0^x \frac{(x-t)^k}{(1-t)^{k+1}}\, dt = 0\,.$$

Se invece $-1 \leq x \leq 0$, si ha

$$\begin{aligned} \left|\int_0^x \frac{(x-t)^k}{(1-t)^{k+1}}\, dt\right| &= \int_x^0 \frac{(t-x)^k}{(1-t)^{k+1}}\, dt \leq \int_x^0 (t-x)^k\, dt = \\ &= \left[\frac{(t-x)^{k+1}}{k+1}\right]_{t=x}^{t=0} = \frac{(-x)^k}{k+1} \leq \frac{1}{k+1}\,. \end{aligned}$$

Ne segue anche in questo caso

$$\lim_k \int_0^x \frac{(x-t)^k}{(1-t)^{k+1}}\, dt = 0\,,$$

per cui

$$\forall x \in [-1,1[:\ -\log(1-x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^h}{h}\,.$$

Scambiando x in $-x$, si ottiene la tesi con facili passaggi. ■

(1.3) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f\right| < \varepsilon$$

ogniqualvolta $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ e

$$\forall j = 1, \cdots, n :\ x_j - x_{j-1} < \delta\,.$$

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi', \xi'' \in [a,b] :\ |\xi' - \xi''| < \delta \implies |f(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Se $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ è una qualunque suddivisione di $[a,b]$ tale che

$$\forall j = 1, \cdots, n :\ x_j - x_{j-1} < \delta$$

e se ξ_j', ξ_j'' sono punti di minimo e massimo per f su $[x_{j-1}, x_j]$, risulta $|\xi_j' - \xi_j''| < \delta$. Ne segue

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j'')(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j')(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon\,,$$

quindi

$$\begin{aligned}\int_a^b f-\varepsilon &\le \sum_{j=1}^n f(\xi_j'')(x_j-x_{j-1})-\varepsilon<\sum_{j=1}^n f(\xi_j')(x_j-x_{j-1})\le\\ &\le \sum_{j=1}^n f(\xi_j'')(x_j-x_{j-1})<\sum_{j=1}^n f(\xi_j')(x_j-x_{j-1})+\varepsilon\le\int_a^b f+\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Se ora $\xi_j\in[x_{j-1},x_j]$, si ha $f(\xi_j')\le f(\xi_j)\le f(\xi_j'')$, quindi

$$\begin{aligned}\int_a^b f-\varepsilon &< \sum_{j=1}^n f(\xi_j')(x_j-x_{j-1})\le\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})\le\\ &\le \sum_{j=1}^n f(\xi_j'')(x_j-x_{j-1})<\int_a^b f+\varepsilon\,,\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Si dimostri che il Teorema (1.3) continua a valere nell'ipotesi che f sia solo integrabile.

2 Integrazione delle funzioni razionali

(2.1) Teorema *Siano $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ con $\gamma\ne 0$ e $m\in\mathbb{N}$ con $m\ge 2$. Valgono allora i seguenti fatti:*

$$\int\frac{1}{x-\alpha}\,dx=\log|x-\alpha|+c\qquad su\ ]-\infty,\alpha[\ e\ su\ ]\alpha,+\infty[\,,$$

$$\int\frac{x-\beta}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx=\frac{1}{2}\log\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right)+c\,,$$

$$\int\frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx=\frac{1}{\gamma}\arctan\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right)+c\,,$$

$$\int\frac{1}{(x-\alpha)^m}\,dx=-\frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}}+c\qquad su\ ]-\infty,\alpha[\ e\ su\ ]\alpha,+\infty[\,,$$

$$\int \frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m}\,dx = -\frac{1}{2(m-1)((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}} + c\,,$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m}\,dx &= \frac{x-\beta}{2(m-1)\gamma^2((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}} + \\ &\quad + \frac{2m-3}{2(m-1)\gamma^2}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}}\,dx\,.\end{aligned}$$

Dimostrazione. La prima e la quarta primitiva sono immediate. Tenendo conto che

$$\int \frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-\beta)}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^n}\,dx\,,$$

si ottengono facilmente anche la seconda ed la quinta primitiva. Risulta

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx = \frac{1}{\gamma}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right)^2}\frac{1}{\gamma}\,dx = \frac{1}{\gamma}\arctan\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right) + c\,.$$

Infine si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m}\,dx &= \frac{1}{\gamma^2}\int \frac{(x-\beta)^2+\gamma^2-(x-\beta)^2}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m}\,dx = \\ &= \frac{1}{\gamma^2}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}}\,dx + \\ &\quad -\frac{1}{2\gamma^2}\int (x-\beta)\frac{2(x-\beta)}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m}\,dx = \\ &= \frac{1}{\gamma^2}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}}\,dx + \\ &\quad +\frac{x-\beta}{2(m-1)\gamma^2((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}} + \\ &\quad -\frac{1}{2(m-1)\gamma^2}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}}\,dx = \\ &= \frac{x-\beta}{2(m-1)\gamma^2((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}} + \\ &\quad +\frac{2m-3}{2(m-1)\gamma^2}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}}\,dx\,,\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(2.2) Definizione *Una funzione razionale P/Q si dice* propria*, se il grado del polinomio P è minore del grado del polinomio Q.*

Nel seguito denoteremo con $\mathrm{gr}\,(P)$ il grado di un polinomio P.

(2.3) Lemma *Sia P/Q una funzione razionale propria e siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$ tali che $Q(x) = (x-\alpha)^m \widetilde{Q}(x)$ con $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$.*

Allora esistono $a \in \mathbb{R}$ ed una funzione razionale propria P_1/Q_1 tali che

$$\mathrm{gr}\,(Q_1) \leq \mathrm{gr}\,(Q) - 1\,,$$
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{(x-\alpha)^m} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ risulta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{a}{(x-\alpha)^m} = \frac{P(x) - a\widetilde{Q}(x)}{(x-\alpha)^m \widetilde{Q}(x)}\,.$$

Poiché $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$, esiste uno ed un solo a tale che $P(\alpha) - a\widetilde{Q}(\alpha) = 0$. Risulta allora

$$\frac{P(x) - a\widetilde{Q}(x)}{(x-\alpha)^m \widetilde{Q}(x)} = \frac{(x-\alpha)P_1(x)}{(x-\alpha)^m \widetilde{Q}(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,,$$

dove $Q_1(x) = (x-\alpha)^{m-1}\widetilde{Q}(x)$. Poiché $\mathrm{gr}\left(P - a\widetilde{Q}\right) \leq \mathrm{gr}\,(Q) - 1$, la funzione razionale P_1/Q_1 è propria. ■

(2.4) Lemma *Sia P/Q una funzione razionale propria e siano $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$, e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, tali che $Q(x) = \left((x-\beta)^2 + \gamma^2\right)^m \widetilde{Q}(x)$ con $\widetilde{Q}(\beta \pm i\gamma) \neq 0$.*

Allora esistono $b, c \in \mathbb{R}$ ed una funzione razionale propria P_1/Q_1 tali che

$$\mathrm{gr}\,(Q_1) \leq \mathrm{gr}\,(Q) - 2\,,$$
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{bx + c}{\left((x-\beta)^2 + \gamma^2\right)^m} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $b, c \in \mathbb{R}$ risulta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{bx + c}{\left((x-\beta)^2 + \gamma^2\right)^m} = \frac{P(x) - (bx+c)\widetilde{Q}(x)}{\left((x-\beta)^2 + \gamma^2\right)^m \widetilde{Q}(x)}\,.$$

Poiché $\widetilde{Q}(\beta \pm i\gamma) \neq 0$ e $\gamma \neq 0$, il sistema

$$\begin{cases} (\beta + i\gamma)b + c &= \dfrac{P(\beta + i\gamma)}{\widetilde{Q}(\beta + i\gamma)} \\[2ex] (\beta - i\gamma)b + c &= \dfrac{P(\beta - i\gamma)}{\widetilde{Q}(\beta - i\gamma)} \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione (b, c) in ambito complesso. Tenendo conto che P e $\widetilde{Q}$ sono polinomi a coefficienti reali, si verifica facilmente che anche $(\overline{b}, \overline{c})$ è una soluzione del sistema. Per l'unicità, deve essere $(b, c) = (\overline{b}, \overline{c})$, ossia $b, c \in \mathbb{R}$.

Con tale scelta di b e c risulta allora

$$\frac{P(x) - (bx + c)\widetilde{Q}(x)}{((x-\beta)^2 + \gamma^2)^m \, \widetilde{Q}(x)} = \frac{((x-\beta)^2 + \gamma^2) \, P_1(x)}{((x-\beta)^2 + \gamma^2)^m \, \widetilde{Q}(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \, ,$$

dove $Q_1(x) = ((x-\beta)^2 + \gamma^2)^{m-1} \, \widetilde{Q}(x)$. Si verifica facilmente che la funzione razionale P_1/Q_1 è propria. ■

(2.5) Teorema *Ogni funzione razionale ammette una primitiva costituita da una combinazione lineare a coefficienti reali di una funzione razionale e di funzioni del tipo*

$$\log|x - \alpha| \, ,$$

$$\log\left((x-\beta)^2 + \gamma^2\right) \, ,$$

$$\arctan\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right) \, ,$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*,* $\gamma \neq 0$.

Dimostrazione. Sia P/Q una funzione razionale. Si può anzitutto eseguire la divisione fra polinomi ottenendo $P = QP_1 + R$, dove P_1 e R sono due polinomi ed il grado di R è minore del grado di Q. Ne segue

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \, .$$

Naturalmente P_1 ammette per primitiva un polinomio. È quindi sufficiente trattare il caso in cui la funzione razionale P/Q è propria.

A questo punto ragioniamo per induzione sul grado di Q. Se Q ha grado 1, deve essere

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{x - \alpha} \, ,$$

per cui la tesi discende dal Teorema (2.1).

Supponiamo ora che la tesi sia vera se $\mathrm{gr}\,(Q) \leq n$ e consideriamo il caso in cui $\mathrm{gr}\,(Q) = n + 1$.

Se Q ammette una radice reale α, si ha $Q(x) = (x-\alpha)^m \widetilde{Q}(x)$ con $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$. Dal Lemma (2.3) si deduce che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{(x-\alpha)^m} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

con $\mathrm{gr}\,(Q_1) \leq \mathrm{gr}\,(Q) - 1 \leq n$. Per l'ipotesi induttiva P_1/Q_1 ammette una primitiva nella classe desiderata. D'altronde per il Teorema (2.1) anche il primo addendo ammette primitiva nella stessa classe.

Se invece Q non ammette radici reali, deve esistere per il Teorema fondamentale dell'algebra una radice complessa $(\beta + i\gamma)$ con $\gamma \neq 0$. Dal momento che i coefficienti di Q sono reali, anche $(\beta - i\gamma)$ è una radice di Q. Ne segue che Q è divisibile per

$$(x-\beta-i\gamma)(x-\beta+i\gamma) = (x-\beta)^2 + \gamma^2 .$$

Allora si ha

$$Q(x) = \left((x-\beta)^2 + \gamma^2\right)^m \widetilde{Q}(x)$$

con $\widetilde{Q}(\beta \pm i\gamma) \neq 0$. Dal Lemma (2.4) si deduce che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{bx+c}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

con $\mathrm{gr}\,(Q_1) \leq \mathrm{gr}\,(Q) - 2 \leq n-1$. Per l'ipotesi induttiva P_1/Q_1 ammette una primitiva nella classe desiderata. D'altronde

$$\frac{bx+c}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m} = b\frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m} + (b\beta+c)\frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m} .$$

La tesi discende allora dal Teorema (2.1). ■

Esercizi

1. Sia R una funzione razionale di due variabili e sia $\varphi : [1,+\infty[\to [1,+\infty[$ definita da

$$\varphi(t) = \frac{t^2+1}{2t} .$$

Si dimostri che φ è biiettiva e

$$\sqrt{(\varphi(t))^2 - 1} = t - \varphi(t)\,,$$

$$\varphi^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}\,.$$

Inoltre per ogni $a, b \in [1, +\infty[$ si ha

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)\, dx = \int_a^b R\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right) \frac{t^2-1}{2t}\, dt\,.$$

2. Sia R una funzione razionale di due variabili e sia $\varphi : \mathbb{R} \to]-\pi, \pi[$ definita da

$$\varphi(t) = 2 \arctan t\,.$$

Si dimostri che

$$\cos(\varphi(t)) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,$$

$$\sin(\varphi(t)) = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

$$\varphi^{-1}(x) = \tan \frac{x}{2}\,.$$

Inoltre per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_a^b R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt\,.$$

Capitolo 4

Spazi metrici e spazi normati

1 Spazi metrici completi

(1.1) Teorema (delle contrazioni) *Sia X uno spazio metrico completo con $X \neq \emptyset$ e sia $f : X \to X$ un'applicazione lipschitziana di costante $c \in [0, 1[$.*

Allora esiste uno ed un solo ξ in X tale che $f(\xi) = \xi$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$ e sia (x_h) la successione definita ricorsivamente da

$$x_{h+1} = f(x_h)\,.$$

Dimostriamo che

$$\forall h \geq 0 : \; d(x_{h+1}, x_h) \leq c^h d(x_1, x_0)\,. \tag{1.2}$$

Per $h = 0$ la (1.2) è vera. Se la (1.2) è vera per un certo $h \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned} d(x_{h+2}, x_{h+1}) = d\left(f(x_{h+1}), f(x_h)\right) \leq c d(x_{h+1}, x_h) \leq \\ \leq c c^h d(x_1, x_0) = c^{h+1} d(x_1, x_0)\,, \end{aligned}$$

per cui la (1.2) è vera per $h + 1$. La (1.2) risulta quindi dimostrata per induzione su h.

Dimostriamo ora che per ogni $h \geq 0$ e per ogni $j \geq 1$ si ha

$$d(x_{h+j}, x_h) \leq c^h \left(\sum_{i=0}^{j-1} c^i\right) d(x_1, x_0)\,. \tag{1.3}$$

Per $j = 1$ la (1.3) equivale alla (1.2), che è vera. Se la (1.3) è vera per un certo $j \geq 1$, si ha

$$d(x_{h+j+1}, x_h) \leq d(x_{h+j+1}, x_{h+j}) + d(x_{h+j}, x_h) \leq$$

$$\leq c^{h+j} d(x_1, x_0) + c^h \left(\sum_{i=0}^{j-1} c^i \right) d(x_1, x_0) =$$

$$= c^h \left(c^j + \sum_{i=0}^{j-1} c^i \right) d(x_1, x_0) = c^h \left(\sum_{i=0}^{j} c^i \right) d(x_1, x_0) \,,$$

per cui la (1.3) è vera per $j + 1$. La (1.3) risulta quindi dimostrata per induzione su j.

In particolare, si ha per ogni $h \geq 0$ e per ogni $j \geq 1$

$$d(x_{h+j}, x_h) \leq \frac{c^h}{1-c} d(x_1, x_0) \,.$$

Dimostriamo allora che la successione (x_h) è di Cauchy. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{c^{\overline{h}}}{1-c} d(x_1, x_0) < \varepsilon \,.$$

Se $h, k \geq \overline{h}$ e, per esempio, $k > h$, si ha $k = h + j$, quindi

$$d(x_k, x_h) = d(x_{h+j}, x_h) \leq \frac{c^h}{1-c} d(x_1, x_0) \leq \frac{c^{\overline{h}}}{1-c} d(x_1, x_0) < \varepsilon \,.$$

Poiché X è completo, esiste $\xi \in X$ tale che

$$\lim_h x_h = \xi \,.$$

Dal momento che (x_{h+1}) è una sottosuccessione di (x_h), si ha

$$\lim_h f(x_h) = \lim_h x_{h+1} = \xi \,.$$

D'altra parte f è lipschitziana, quindi continua. Ne segue

$$\lim_h f(x_h) = f(\xi) \,,$$

da cui $f(\xi) = \xi$ per l'unicità del limite.

Se poi ξ' fosse un altro elemento in X tale che $f(\xi') = \xi'$, si avrebbe

$$d(\xi, \xi') = d(f(\xi), f(\xi')) \leq c d(\xi, \xi') \,,$$

da cui

$$(1 - c) d(\xi, \xi') \leq 0 \,,$$

quindi $\xi = \xi'$. ∎

(1.4) Definizione *Sia X un insieme non vuoto e sia (Y, d) uno spazio metrico. Denotiamo con $\mathcal{B}(X;Y)$ l'insieme delle applicazioni limitate da X a valori in Y e poniamo, per ogni $f, g \in \mathcal{B}(X;Y)$,*

$$d_\infty(f, g) := \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\} .$$

(1.5) Teorema *Sia X un insieme non vuoto e sia (Y, d) uno spazio metrico. Allora d_∞ è una metrica su $\mathcal{B}(X;Y)$. Inoltre, se (Y, d) è completo, risulta che anche $(\mathcal{B}(X;Y), d_\infty)$ è completo.*

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che, fissato $x_0 \in X$, si ha

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) + d(g(x_0), g(x)) \leq$$

$$\leq \mathrm{diam}\,(f(X)) + \mathrm{diam}\,(g(X)) + d(f(x_0), g(x_0)) .$$

Pertanto $d_\infty(f, g) < +\infty$. Inoltre gli assiomi (a), (b) e (c) di metrica sono evidentemente verificati. Siano ora $f, g, h \in \mathcal{B}(X;Y)$. Per ogni $x \in X$ risulta

$$d(f(x), h(x)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x)) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h) .$$

Ne segue

$$d_\infty(f, h) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h) ,$$

per cui d_∞ è una metrica su $\mathcal{B}(X;Y)$.

Supponiamo ora che (Y, d) sia completo e consideriamo una successione di Cauchy (f_h) in $(\mathcal{B}(X;Y), d_\infty)$. Poiché per ogni $x \in X$ si ha

$$d(f_h(x), f_k(x)) \leq d_\infty(f_h, f_k) ,$$

risulta che $(f_h(x))$ è una successione di Cauchy in Y. Allora per ogni $x \in X$ esiste uno ed un solo $f(x) \in Y$ tale che

$$\lim_h f_h(x) = f(x) .$$

Risulta così definita un'applicazione $f : X \to Y$.

Sia $h' \in \mathbb{N}$ tale che $d_\infty(f_h, f_k) < 1$ per ogni $h, k \geq h'$. Allora per ogni $x \in X$ e per ogni $h, k \geq h'$ si ha

$$d(f_h(x), f_k(x)) < 1$$

da cui, passando al limite per $k \to +\infty$, si ottiene

$$d(f_h(x), f(x)) \leq 1$$

per ogni $x \in X$ e per ogni $h \geq h'$. In particolare si ha per ogni $x, y \in X$

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_{h'}(x)) + d(f_{h'}(x), f_{h'}(y)) + d(f_{h'}(y), f(y)) \leq$$

$$\leq 2 + \mathrm{diam}\,(f_{h'}(X)) \;,$$

da cui si deduce che $f \in \mathcal{B}(X;Y)$.

Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che $d_\infty(f_h, f_k) < \varepsilon/2$ per ogni $h, k \geq \overline{h}$. Ripetendo il ragionamento precedente, si deduce che

$$d(f_h(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

per ogni $x \in X$ e per ogni $h \geq \overline{h}$. Allora per ogni $h \geq \overline{h}$ si ha

$$d_\infty(f_h, f) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \,,$$

per cui

$$\lim_h f_h = f$$

in $(\mathcal{B}(X;Y), d_\infty)$. Pertanto $(\mathcal{B}(X;Y), d_\infty)$ è completo. ■

(1.6) Definizione *Sia X un insieme non vuoto e sia $(Y, \|\ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Per ogni $f \in \mathcal{B}(X;Y)$, poniamo*

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| : \, x \in X\} \;.$$

(1.7) Teorema *Sia X un insieme non vuoto e sia $(Y, \|\ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$.*

Allora $\mathcal{B}(X;Y)$ è un sottospazio vettoriale di Y^X e $\|f\|_\infty$ è una norma su $\mathcal{B}(X;Y)$ che induce la metrica d_∞. Se poi $(Y, \|\ \|)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$, allora anche $(\mathcal{B}(X;Y), \|\ \|_\infty)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$.

Dimostrazione. Per ogni $f, g \in \mathcal{B}(X;Y)$ si ha

$$\|(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y))\| = \|(f(x)-f(y))+(g(x)-g(y))\| \leq$$

$$\leq \|f(x)-f(y)\|+\|g(x)-g(y)\| \leq \operatorname{diam}(f(X))+\operatorname{diam}(g(X)) ,$$

per cui $f+g \in \mathcal{B}(X;Y)$. Se poi $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha

$$\|\lambda f(x)-\lambda f(y)\| = |\lambda|\|f(x)-f(y)\| \leq |\lambda| \operatorname{diam}(f(X)) ,$$

per cui anche $\lambda f \in \mathcal{B}(X;Y)$. Pertanto $\mathcal{B}(X;Y)$ è un sottospazio vettoriale di Y^X.

Naturalmente si ha $\|f\|_\infty = d_\infty(f,0)$ e

$$d_\infty(f,g) = \sup\{\|f(x)-g(x)\| : x \in X\} = \|f-g\|_\infty .$$

Ne segue che gli assiomi (a) e (b) di norma sono verificati. Inoltre

$$\|f+g\|_\infty = \|f-(-g)\|_\infty = d_\infty(f,-g) \leq d_\infty(f,0)+d_\infty(0,-g) =$$

$$= d_\infty(f,0)+d_\infty(g,0) = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty ,$$

per cui anche la disuguaglianza triangolare della norma è verificata.

Siano infine $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{B}(X;Y)$. Se $\lambda = 0$, è evidente che $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$. Se invece $\lambda \neq 0$, si ha

$$\forall x \in X : \|\lambda f(x)\| = |\lambda|\|f(x)\| \leq |\lambda|\|f\|_\infty ,$$

da cui

$$\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\|f\|_\infty .$$

Risulta anche

$$\|f\|_\infty = \|(\lambda^{-1})(\lambda f)\|_\infty \leq |\lambda^{-1}|\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|^{-1}\|\lambda f\|_\infty ,$$

ossia

$$|\lambda|\|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty ,$$

per cui $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$. Se poi $(Y, \| \ \|)$ è completo, segue dal teorema precedente che anche $(\mathcal{B}(X;Y), \| \ \|_\infty)$ è completo. ■

(1.8) Lemma *Siano X_1 uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $(X_2, \| \, \|_2)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ e $\Phi : X_1 \to X_2$ un'applicazione lineare ed iniettiva. Per ogni x in X_1 si ponga*

$$\|x\|_1 = \|\Phi x\|_2 \,.$$

Allora $\| \, \|_1$ è una norma su X_1. Se poi $(X_2, \| \, \|_2)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ e $\Phi(X_1)$ è chiuso in X_2, allora $(X_1, \| \, \|_1)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che $\| \, \|_1$ è una norma su X_1 (il fatto che $\|x\|_1 = 0$ implichi $x = 0$ segue dall'iniettività di Φ).

Se poi X_2 è completo e $\Phi(X_1)$ è chiuso in X_2, allora $\Phi(X_1)$ è completo. D'altra parte si verifica facilmente che $\Phi : X_1 \to \Phi(X_1)$ è un'isometria suriettiva, per cui anche X_1 è completo. ∎

(1.9) Teorema *Siano $(X_1, \| \, \|_1)$ e $(X_2, \| \, \|_2)$ due spazi normati su $\mathbb{K}$. Per ogni L in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ poniamo*

$$\|L\| := \sup \left\{ \|Lx\|_2 : \, x \in X_1, \, \|x\|_1 \leq 1 \right\} \,.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *$\| \, \|$ è una norma su $\mathcal{L}(X_1; X_2)$;*

(b) *per ogni L in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ e per ogni x in X_1 si ha*

$$\|Lx\|_2 \leq \|L\| \|x\|_1 \,;$$

(c) *se $(X_2, \| \, \|_2)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$, anche $(\mathcal{L}(X_1; X_2), \| \, \|)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione.
(a) Poniamo $D = \{x \in X_1 : \, \|x\|_1 \leq 1\}$. Dal momento che ogni L in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ è limitata su D, possiamo definire l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(X_1; X_2) &\to \mathcal{B}(D; X_2) \\ L &\longmapsto L_{|D} \end{aligned}$$

che è evidentemente lineare. Se poi $L_{|D} = 0$ e $x \in X_1 \setminus \{0\}$, si ha

$$Lx = \|x\|_1 L\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) = 0\,,$$

per cui $L = 0$. L'applicazione Φ è quindi anche iniettiva.

Poiché $\|L\| = \|\Phi(L)\|_\infty$, si deduce dal Lemma (1.8) che $\|\ \|$ è una norma su $\mathcal{L}(X_1; X_2)$.

(b) Se $L \in \mathcal{L}(X_1; X_2)$ e $x \in X_1 \setminus \{0\}$, si ha

$$\frac{1}{\|x\|_1}\,\|Lx\|_2 = \left\|L\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2 \leq \|L\|\,,$$

da cui si deduce

$$\|Lx\|_2 \leq \|L\|\|x\|_1\,,$$

disuguaglianza evidentemente vera anche per $x = 0$.

(c) Dimostriamo che Φ ha immagine chiusa. Sia (L_h) una successione in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ tale che $(\Phi(L_h))$ sia convergente a f in $\mathcal{B}(D; X_2)$. In particolare

$$\forall x \in D:\ \lim_h L_h x = f(x)\,.$$

D'altronde per $\|x\|_1 > 1$ si ha

$$L_h x = \|x\|_1 L_h\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\,,$$

quindi

$$\lim_h L_h x = \|x\|_1 f\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\,.$$

In conclusione, per ogni $x \in X_1$ esiste uno ed un solo $L(x) \in X_2$ tale che

$$\lim_h L_h x = L(x)$$

e si ha $L(x) = f(x)$ per ogni $x \in D$. Rimane così definita un'applicazione $L : X_1 \to X_2$ tale che $L_{|D} = f$. Passando al limite per $h \to +\infty$ nelle relazioni

$$L_h(x + y) = L_h x + L_h y\,,$$

$$L_h(\lambda x) = \lambda L_h x\,,$$

si deduce che L è lineare.

Se poi $x \in X_1 \setminus \{0\}$, si ha

$$\frac{1}{\|x\|_1}\|Lx\|_2 = \left\|L\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2 = \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2 \leq \|f\|_\infty \,,$$

quindi

$$\forall x \in X_1 : \|Lx\|_2 \leq \|f\|_\infty \|x\|_1 \,.$$

Ne segue che L è continua, per cui $f = L_{|D}$ appartiene all'immagine di Φ. L'applicazione Φ ha pertanto immagine chiusa.

Per il Lemma (1.8) ed il Teorema (1.7) si conclude che $(\mathcal{L}(X_1; X_2), \| \ \|)$ è di Banach, quando $(X_2, \| \ \|_2)$ è di Banach. ∎

2 Spazi metrici compatti

Per uno studio approfondito della nozione di compattezza è opportuno disporre di alcune nozioni che ora introduciamo.

(2.1) Definizione *Siano X un insieme, $E \subseteq X$ e $\{F_j : j \in J\}$ una famiglia di sottoinsiemi di X.*

Diciamo che $\{F_j : j \in J\}$ è un ricoprimento *di E, se*

$$E \subseteq \bigcup_{j \in J} F_j \,.$$

(2.2) Definizione *Siano X un insieme, $E \subseteq X$, $\{F_j : j \in J\}$ un ricoprimento di E e $\{G_k : k \in K\}$ un'altra famiglia di sottoinsiemi di X.*

Diciamo che $\{G_k : k \in K\}$ è un ricoprimento di E subordinato a $\{F_j : j \in J\}$*, se*

$$E \subseteq \bigcup_{k \in K} G_k$$

e

$$\{G_k : k \in K\} \subseteq \{F_j : j \in J\} \,.$$

(2.3) Definizione *Uno spazio metrico X si dice* compatto *(*per ricoprimenti*), se ogni ricoprimento di X costituito da sottoinsiemi aperti ammette un ricoprimento subordinato finito.*

(2.4) Teorema *Sia X uno spazio metrico. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) X è sequenzialmente compatto;

(b) X è compatto per ricoprimenti;

(c) ogni ricoprimento numerabile di X costituito da sottoinsiemi aperti ammette un ricoprimento subordinato finito.

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Sia $\{A_j : j \in J\}$ un ricoprimento di X costituito da sottoinsiemi aperti.

Dimostriamo anzitutto che esiste $r > 0$ tale che ogni $\mathrm{B}\,(x, r)$ con $x \in X$ è contenuto in qualche A_j. Supponiamo per assurdo che l'affermazione sia falsa. Allora, posto $r_h = 1/(h + 1)$, esiste una successione (x_h) tale che ogni $\mathrm{B}\,(x_h, r_h)$ non è contenuto in nessun A_j. Sia $(x_{\nu(h)})$ una sottosuccessione convergente a ℓ in X. Sia $j_0 \in J$ tale che $\ell \in A_{j_0}$ e sia $\varrho > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(\ell, \varrho) \subseteq A_{j_0}$. Scegliamo $h \in \mathbb{N}$ in modo da avere $r_{\nu(h)} \leq \varrho/2$ e $d(x_{\nu(h)}, \ell) \leq \varrho/2$. Per ogni $y \in \mathrm{B}\left(x_{\nu(h)}, r_{\nu(h)}\right)$ risulta allora

$$d(y, \ell) \leq d(y, x_{\nu(h)}) + d(x_{\nu(h)}, \ell) < r_{\nu(h)} + \frac{\varrho}{2} \leq \varrho\,.$$

Pertanto si ha

$$\mathrm{B}\left(x_{\nu(h)}, r_{\nu(h)}\right) \subseteq \mathrm{B}\,(\ell, \varrho) \subseteq A_{j_0}\,.$$

Questo è assurdo, perché per costruzione $\mathrm{B}\left(x_{\nu(h)}, r_{\nu(h)}\right)$ non è contenuto in nessun A_j.

Dimostriamo ora che esistono $x_0, \ldots, x_k \in X$ tali che $X = \bigcup_{h=0}^{k} \mathrm{B}\,(x_h, r)$. Supponiamo per assurdo che l'affermazione sia falsa. Proviamo allora che esiste una successione (x_h) in X tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} :\ x_{h+1} \not\in \bigcup_{j=0}^{h} \mathrm{B}\,(x_j, r)\ .$$

Infatti, fissato x_0 a piacere e supposto di possedere $x_0, \ldots, x_h$, risulta

$$X \neq \bigcup_{j=0}^{h} \mathrm{B}\,(x_j, r)\ .$$

Esiste quindi

$$x_{h+1} \in X \setminus \bigcup_{j=0}^{h} \mathrm{B}\,(x_j, r)\ .$$

Evidentemente si ha $d(x_h, x_k) \geq r$ ogniqualvolta $h \neq k$. Pertanto (x_h) non ammette nessuna sottosuccessione di Cauchy, quindi nessuna sottosuccessione convergente, contro l'ipotesi che X sia sequenzialmente compatto.

A questo punto, per ogni $h = 0, \ldots, k$ sia $j_h \in J$ tale che $\mathrm{B}\,(x_h, r) \subseteq A_{j_h}$. Ne segue

$$X = \bigcup_{h=0}^{k} \mathrm{B}\,(x_h, r) \subseteq \bigcup_{h=0}^{k} A_{j_h}\,,$$

per cui $\{A_{j_0}, \ldots, A_{j_k}\}$ è un ricoprimento finito di X subordinato a $\{A_j : j \in J\}$.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Ovvio.

$(c) \Longrightarrow (a)$ Sia (x_h) una successione in X e sia C_k la chiusura di $\{x_h : h > k\}$. Evidentemente $C_{k+1} \subseteq C_k$ e $C_k \neq \emptyset$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, per cui ogni intersezione di un numero finito di C_k è non vuota. Allora $\{X \setminus C_k : k \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di aperti e X non può essere ricoperto con un numero finito di tali aperti. Per l'ipotesi (c) la famiglia $\{X \setminus C_k : k \in \mathbb{N}\}$ non può essere un ricoprimento di X, quindi esiste

$$\ell \in X \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X \setminus C_k)\,,$$

ossia

$$\ell \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k\,.$$

Dimostriamo che esiste un'applicazione strettamente crescente $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $d(x_{\nu(n)}, \ell) < 1/(n+1)$. Poiché ℓ è aderente a $\{x_h : h > 0\}$, esiste $\nu(0) > 0$ tale che $d(x_{\nu(0)}, \ell) < 1$.

Supponiamo ora di possedere $\nu(n)$. Poiché ℓ è aderente a $\{x_h : h > \nu(n)\}$, esiste $\nu(n+1) > \nu(n)$ tale che $d(x_{\nu(n+1)}, \ell) < 1/(n+2)$.

Evidentemente $(x_{\nu(n)})$ è una sottosuccessione convergente a ℓ. ■

3 Equivalenze fra metriche e fra norme

(3.1) Definizione *Due metriche d_1 e d_2 su un medesimo insieme X si dicono* topologicamente equivalenti*, se le applicazioni*

$$\mathrm{Id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$$

e

$$\mathrm{Id} : (X, d_2) \to (X, d_1)$$

sono continue.

(3.2) Teorema *Siano d_1 e d_2 due metriche topologicamente equivalenti su un insieme X e siano $U \subseteq X$ e $x \in X$.*

Allora U è un intorno di x rispetto alla metrica d_1 se e solo se è un intorno di x rispetto alla metrica d_2.

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza della definizione di continuità. ■

Se in uno spazio metrico (X, d) la metrica d viene sostituita da un'altra metrica d' topologicamente equivalente a d, non cambiano tutte quelle nozioni che sono riconducibili agli intorni, quali le nozioni di aperto, chiuso, limite, continuità, compattezza, connessione, etc.

(3.3) Definizione *Due metriche d_1 e d_2 su un medesimo insieme X si dicono* uniformemente equivalenti*, se le applicazioni*

$$\mathrm{Id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$$

e

$$\mathrm{Id} : (X, d_2) \to (X, d_1)$$

sono uniformemente continue.

(3.4) Teorema *Siano d_1 e d_2 due metriche uniformemente equivalenti su un insieme X.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *le metriche* d_1 *e* d_2 *sono topologicamente equivalenti;*

(*b*) *una successione* (x_h) *è di Cauchy rispetto alla metrica* d_1 *se e solo se è di Cauchy rispetto alla metrica* d_2*;*

(*c*) (X, d_1) *è completo se e solo se* (X, d_2) *è completo.*

Dimostrazione. La (*a*) e la (*b*) sono evidenti. La (*c*) è una conseguenza della (*a*) e della (*b*). ■

(3.5) Definizione *Due metriche* d_1 *e* d_2 *su un medesimo insieme* X *si dicono* equivalenti*, se le applicazioni*

$$\mathrm{Id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$$

e

$$\mathrm{Id} : (X, d_2) \to (X, d_1)$$

sono lipschitziane.

(3.6) Teorema *Siano* d_1 *e* d_2 *due metriche equivalenti su un insieme* X*.*
Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *le metriche* d_1 *e* d_2 *sono uniformemente equivalenti;*

(*b*) (X, d_1) *è limitato se e solo se* (X, d_2) *è limitato.*

Dimostrazione. Le affermazioni sono evidenti. ■

(3.7) Proposizione *Siano* $\| \ \|_1$ *e* $\| \ \|_2$ *due norme su un medesimo spazio vettoriale* X *su* $\mathbb{K}$ *e siano* d_1 *e* d_2 *le metriche indotte da* $\| \ \|_1$ *e da* $\| \ \|_2$*, rispettivamente.*
Allora sono fatti equivalenti:

(*a*) *le metriche* d_1 *e* d_2 *sono topologicamente equivalenti;*

(*b*) *le metriche* d_1 *e* d_2 *sono uniformemente equivalenti;*

(*c*) *le metriche* d_1 *e* d_2 *sono equivalenti;*

(*d*) *le norme* $\| \|_1$ *e* $\| \|_2$ *sono equivalenti.*

Dimostrazione. Le implicazioni $(c) \implies (b) \implies (a)$ sono evidenti. Essendo l'applicazione identica lineare, le implicazioni $(a) \implies (d) \implies (c)$ discendono dalla caratterizzazione della continuità nell'ambito delle applicazioni lineari. ■

Esercizi

1. Si dimostri che

(*a*) $\mathbb{R}$ è aperto in $\overline{\mathbb{R}}$;

(*b*) la metrica subordinata da $\overline{\mathbb{R}}$ su $\mathbb{R}$ è topologicamente equivalente alla metrica canonica di $\mathbb{R}$;

(*c*) la metrica subordinata da $\overline{\mathbb{R}}$ su $\mathbb{R}$ non è uniformemente equivalente alla metrica canonica di $\mathbb{R}$;

(*d*) $\overline{\mathbb{R}}$ è isometrico all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ munito della metrica canonica di $\mathbb{R}$;

(*e*) $\overline{\mathbb{R}}$ è compatto e connesso.

2. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia

$$d'(x, y) = \arctan(d(x, y)) .$$

Si dimostri che d' è una metrica su X uniformemente equivalente a d e che (X, d') è limitato.

3. Siano $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ degli spazi metrici e sia

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j .$$

Si dimostri che

$$d^{(1)}(x,y) = \sum_{j=1}^{n} d_j(x^{(j)}, y^{(j)})$$

e

$$d^{(\infty)}(x,y) = \max\left\{d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) : 1 \le j \le n\right\}$$

sono delle metriche su X.

Denotata con $d^{(2)}$ la metrica canonica di X, si provi anche che per ogni x, y in X si ha

$$d^{(\infty)}(x,y) \le d^{(2)}(x,y) \le d^{(1)}(x,y) \le n d^{(\infty)}(x,y)$$

e se ne deduca che $d^{(\infty)}$ e $d^{(1)}$ sono equivalenti a $d^{(2)}$.

4. Siano $X_1, \ldots, X_n$ degli insiemi e sia

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j\,.$$

Si supponga che su ogni X_j siano definite due metriche equivalenti d_j e d'_j e si considerino su X le metriche

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(d_j(x^{(j)}, y^{(j)})\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\,,$$

$$d'(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(d'_j(x^{(j)}, y^{(j)})\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Si dimostri che d e d' sono equivalenti.

5. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_2$ due norme equivalenti su X. Posto per ogni φ in X'

$$\|\varphi\|'_1 = \sup\left\{|\langle\varphi, x\rangle| : x \in X,\ \|x\|_1 \le 1\right\}\,,$$

$$\|\varphi\|'_2 = \sup\left\{|\langle\varphi, x\rangle| : x \in X,\ \|x\|_2 \le 1\right\}\,,$$

si dimostri che $\|\ \|'_1$ e $\|\ \|'_2$ sono due norme equivalenti su X'.

4 Spazi normati di dimensione finita

(4.1) Teorema *Siano X e Y due spazi normati su $\mathbb{K}$ di dimensione finita.*

Allora $\mathcal{LH}(X;Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X;Y)$ e l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{LH}(X;Y) &\to \mathcal{L}(Y;X) \\ L &\longmapsto L^{-1} \end{aligned}$$

è continua.

Dimostrazione. Se $\dim X \neq \dim Y$, si ha $\mathcal{LH}(X;Y) = \emptyset$, che è aperto in $\mathcal{L}(X;Y)$. Altrimenti sia $L \in \mathcal{LH}(X;Y)$. Per ogni $x \in X$ risulta

$$\|x\| = \|(L^{-1} \circ L)x\| \leq \|L^{-1}\| \, \|Lx\| \, .$$

Allora, se $M \in \mathcal{L}(X;Y)$ non è iniettiva, esiste $x \in X \setminus \{0\}$ tale che $Mx = 0$, da cui

$$\frac{1}{\|L^{-1}\|}\|x\| \leq \|Lx\| = \|Lx - Mx\| \leq \|M - L\| \, \|x\| \, .$$

Poiché $x \neq 0$, ne segue

$$\|M - L\| \geq \frac{1}{\|L^{-1}\|} \, .$$

Questo significa che ogni $M \in \mathrm{B}\left(L, \|L^{-1}\|^{-1}\right)$ è iniettiva, quindi biiettiva, dal momento che $\dim X = \dim Y < +\infty$. Pertanto risulta $\mathrm{B}\left(L, \|L^{-1}\|^{-1}\right) \subseteq \mathcal{LH}(X;Y)$, il che dimostra che $\mathcal{LH}(X;Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X;Y)$.

Sia ora $L \in \mathcal{LH}(X;Y)$ e sia $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2\|L^{-1}\|} \, , \, \frac{\varepsilon}{2\|L^{-1}\|^2}\right\} \, .$$

Se $M \in \mathcal{LH}(X;Y)$ e $\|M - L\| < \delta$, risulta anzitutto per ogni $x \in X$

$$\|x\| \leq \|L^{-1}\| \, \|Lx\| \leq \|L^{-1}\| \, \|L - M\| \, \|x\| + \|L^{-1}\| \, \|Mx\| \leq \frac{1}{2}\|x\| + \|L^{-1}\| \, \|Mx\| \, ,$$

da cui $\|x\| \leq 2\|L^{-1}\| \, \|Mx\|$, ossia $\|M^{-1}\| \leq 2\|L^{-1}\|$. Ne segue

$$\|M^{-1} - L^{-1}\| = \|M^{-1} \circ (L - M) \circ L^{-1}\| \leq \|M^{-1}\| \, \|L - M\| \, \|L^{-1}\| < 2\|L^{-1}\|^2\delta \leq \varepsilon \, ,$$

per cui l'applicazione $\{L \longmapsto L^{-1}\}$ è continua. ∎

5 Spazi metrici totalmente limitati

Uno studio ancora più approfondito della nozione di compattezza può essere effettuato per mezzo della nozione che ora introduciamo.

(5.1) Definizione *Uno spazio metrico X si dice* totalmente limitato*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di X costituito da sottoinsiemi di diametro minore o uguale ad ε.*

(5.2) Proposizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici isometrici. Allora X_1 è totalmente limitato se e solo se X_2 è totalmente limitato.*

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(5.3) Teorema *Sia X uno spazio metrico totalmente limitato. Allora X è limitato.*

Dimostrazione. Sia $\{E_1, \ldots, E_k\}$ un ricoprimento di X tale che $\operatorname{diam}(E_h) \leq 1$ per ogni $h = 1, \ldots, k$. Possiamo supporre $E_h \neq \emptyset$ per ogni h. Sia $x_h \in E_h$ per ogni h e sia

$$M = \max\{d(x_h, x_j) : 1 \leq h \leq k,\, 1 \leq j \leq k\}\,.$$

Allora per ogni $y_1, y_2 \in X$ si avrà $y_1 \in E_{h_1}$, $y_2 \in E_{h_2}$, quindi

$$d(y_1, y_2) \leq d(y_1, x_{h_1}) + d(x_{h_1}, x_{h_2}) + d(x_{h_2}, y_2) \leq$$

$$\leq 1 + M + 1 = M + 2\,.$$

Pertanto $\operatorname{diam}(X) \leq M + 2$. ■

(5.4) Teorema *Siano $X_1, \ldots, X_n$ degli spazi metrici totalmente limitati. Allora il prodotto cartesiano*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j$$

è totalmente limitato.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Siano X_1 e X_2 due spazi metrici totalmente limitati. Dato $\varepsilon > 0$, siano $\{E_1, \ldots, E_k\}$ un ricoprimento di X_1 e $\{F_1, \ldots, F_m\}$ un ricoprimento di X_2 tali che $\operatorname{diam}(E_h) \leq \varepsilon/\sqrt{2}$ e $\operatorname{diam}(F_j) \leq \varepsilon/\sqrt{2}$. Allora

$$\{E_h \times F_j : 1 \leq h \leq k,\, 1 \leq j \leq m\}$$

è un ricoprimento di $X_1 \times X_2$ e per ogni $(x^{(1)}, x^{(2)}), (y^{(1)}, y^{(2)}) \in E_h \times F_j$ si ha

$$\left(d_1(x^{(1)}, y^{(1)})\right)^2 + \left(d_2(x^{(2)}, y^{(2)})\right)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2\,,$$

per cui $\operatorname{diam}(E_h \times F_j) \leq \varepsilon$.

Supponiamo ora che la tesi sia vera per n. Poiché $\prod_{j=1}^{n} X_j$ è totalmente limitato, anche $\prod_{j=1}^{n+1} X_j$ è totalmente limitato, in quanto isometrico a

$$\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) \times X_{n+1}\,,$$

che è totalmente limitato per il passo precedente. ■

(5.5) Teorema *Sia X uno spazio metrico totalmente limitato e sia Y un sottoinsieme di X. Allora Y (munito della metrica subordinata) è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\{E_1, \ldots, E_k\}$ un ricoprimento di X con $\operatorname{diam}(E_h) \leq \varepsilon$.

Allora $\{E_1 \cap Y, \ldots, E_k \cap Y\}$ è un ricoprimento di Y con $\operatorname{diam}(E_h \cap Y) \leq \varepsilon$. ■

(5.6) Teorema *Sia X uno spazio metrico e sia $Y \subseteq X$. Allora Y è totalmente limitato se e solo se $\overline{Y}$ è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente $\overline{Y}$ totalmente limitato implica Y totalmente limitato.

Supponiamo viceversa che Y sia totalmente limitato. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\{E_1, \ldots, E_k\}$ un ricoprimento di Y con $\operatorname{diam}(E_h) \leq \varepsilon$. Poiché

$$E_h \times E_h \subseteq \{(x, y) : d(x, y) \leq \varepsilon\}\,,$$

ne segue

$$\overline{E_h} \times \overline{E_h} = \overline{E_h \times E_h} \subseteq \{(x,y) : d(x,y) \leq \varepsilon\} \ .$$

ossia $\operatorname{diam}\left(\overline{E_h}\right) \leq \varepsilon$. D'altronde $\overline{Y} = \overline{E_1} \cup \cdots \cup \overline{E_k}$, per cui $\left\{\overline{E_1}, \cdots, \overline{E_k}\right\}$ è un ricoprimento di $\overline{Y}$ con $\operatorname{diam}\left(\overline{E_h}\right) \leq \varepsilon$. ■

(5.7) Teorema *Sia X uno spazio metrico. Allora X è compatto se e solo se X è completo e totalmente limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia compatto, quindi sequenzialmente compatto. In particolare, X è completo.

Supponiamo per assurdo che X non sia totalmente limitato. Sia $\varepsilon > 0$ tale che non esista nessun ricoprimento finito di X costituito da sottoinsiemi di diametro minore o uguale ad ε. Allora esiste una successione (x_h) in X tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} : \ x_{h+1} \notin \bigcup_{j=0}^{h} \mathrm{B}\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) \ .$$

Infatti, fissato x_0 a piacere e supposto di possedere $x_0, \ldots, x_h$, deve essere

$$X \neq \bigcup_{j=0}^{h} \mathrm{B}\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) \ ,$$

perché $\operatorname{diam}\left(\mathrm{B}\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \leq \varepsilon$. Esiste quindi

$$x_{h+1} \in X \setminus \bigcup_{j=0}^{h} \mathrm{B}\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) \ .$$

Evidentemente si ha $d(x_h, x_k) \geq \varepsilon/2$ ogniqualvolta $h \neq k$. Pertanto (x_h) non ammette nessuna sottosuccessione di Cauchy, quindi nessuna sottosuccessione convergente, contro l'ipotesi.

Viceversa, supponiamo che X sia completo e totalmente limitato. Per assurdo, supponiamo che esista un ricoprimento aperto $\{A_j : j \in J\}$ di X che non ammette nessun ricoprimento subordinato finito. Dimostriamo che esiste una successione (E_h) di sottoinsiemi di X tale che $E_{h+1} \subseteq E_h$, $\operatorname{diam}(E_h) \leq 1/(h+1)$ e nessun E_h può essere ricoperto con un numero finito di A_j.

Infatti, per la totale limitatezza di X, esiste un ricoprimento finito $\left\{F_1^{(0)}, \ldots, F_n^{(0)}\right\}$ di X tale che $\operatorname{diam}\left(F_i^{(0)}\right) \leq 1$. Poiché X non può essere ricoperto con un numero finito di A_j, deve esistere un $F_i^{(0)}$ che non può essere ricoperto con un numero finito di A_j. Sia E_0 un tale $F_i^{(0)}$.

Supponiamo ora di possedere E_h. Per il Teorema (5.5) E_h è totalmente limitato. Sia $\left\{F_1^{(h+1)}, \ldots, F_m^{(h+1)}\right\}$ un ricoprimento finito di E_h tale che $\operatorname{diam}\left(F_i^{(h+1)}\right) \leq 1/(h+2)$. Poiché E_h non può essere ricoperto con un numero finito di A_j, deve esistere un $F_i^{(h+1)}$ che non può essere ricoperto con un numero finito di A_j. Sia E_{h+1} un tale $F_i^{(h+1)}$.

Sia ora $x_h \in E_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che $1/(\overline{h}+1) < \varepsilon$. Allora per ogni $h, k \geq \overline{h}$ si ha $x_h, x_k \in E_{\overline{h}}$, quindi $d(x_h, x_k) \leq 1/(\overline{h}+1) < \varepsilon$. La successione (x_h) è pertanto di Cauchy in X.

Poiché X è completo, (x_h) convergerà ad un certo $\ell \in X$. Sia A_j tale che $\ell \in A_j$ e sia $r > 0$ tale che $\mathrm{B}(\ell, r) \subseteq A_j$. Sia $h \in \mathbb{N}$ tale che $1/(h+1) < r/2$ e $d(x_h, \ell) < r/2$. Allora per ogni $y \in E_h$ si ha

$$d(y, \ell) \leq d(y, x_h) + d(x_h, \ell) < \frac{1}{h+1} + \frac{r}{2} < r\,,$$

per cui $E_h \subseteq \mathrm{B}(\ell, r) \subseteq A_j$. Questo è assurdo, perché E_h non può essere ricoperto con un numero finito di A_j. ■

(5.8) Teorema *Sia X uno spazio metrico completo e sia (x_h) una successione in X. Supponiamo che l'immagine $\{x_h : h \in \mathbb{N}\}$ sia totalmente limitata.*

Allora (x_h) ammette una sottosuccessione convergente in X.

Dimostrazione. Se Y denota la chiusura di $\{x_h : h \in \mathbb{N}\}$, Y è completo, perché chiuso in un completo, e totalmente limitato per il Teorema (5.6). Per il Teorema (5.7) Y è sequenzialmente compatto. Esistono quindi una sottosuccessione $(x_{\nu(h)})$ e $\ell \in Y$ tali che

$$\lim_h x_{\nu(h)} = \ell$$

in Y. Evidentemente $(x_{\nu(h)})$ è convergente a ℓ anche in X. ■

(5.9) Teorema *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e sia Y un sottoinsieme di X. Allora Y è totalmente limitato se e solo se Y è limitato.*

Dimostrazione. Per il Teorema (5.3) Y totalmente limitato implica Y limitato.

Viceversa, supponiamo che Y sia limitato. Allora $\overline{Y}$ è limitato e chiuso in X, quindi è compatto. Ne segue che $\overline{Y}$ è totalmente limitato per il Teorema (5.7). Dal Teorema (5.6) si deduce che Y è totalmente limitato. ∎

(5.10) Proposizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione uniformemente continua e Y un sottoinsieme di X_1 totalmente limitato.*

Allora $f(Y)$ è totalmente limitato.

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon .$$

Sia $\{E_1, \ldots, E_k\}$ un ricoprimento di Y con $\mathrm{diam}\,(E_h) \le \delta/2$. Per ogni $x, y \in E_h$ si ha $d_1(x, y) \le \delta/2 < \delta$, quindi $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Allora $\{f(E_1), \ldots, f(E_k)\}$ è un ricoprimento di $f(Y)$ tale che $\mathrm{diam}\,(f(E_h)) \le \varepsilon$. ∎

(5.11) Corollario *Siano d_1 e d_2 due metriche uniformemente equivalenti su un medesimo insieme X. Allora X è totalmente limitato rispetto a d_1 se e solo se X è totalmente limitato rispetto a d_2.*

Dimostrazione. Si tratta di un'immediata conseguenza della proposizione precedente. ∎

(5.12) Definizione *Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici. Un insieme di applicazioni $\mathcal{F} \subseteq C(X_1; X_2)$ si dice* equi-uniformemente continuo*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall f \in \mathcal{F},\, \forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon .$$

(5.13) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici totalmente limitati e sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme equi-uniformemente continuo di $C_b(X_1; X_2)$.*

Allora $(\mathcal{F}, d_\infty)$ *è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{F},\, \forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Siano $\{E_i : 1 \leq i \leq m\}$ un ricoprimento di X_1 con $\mathrm{diam}\,(E_i) < \delta$ e $\{F_j : 1 \leq j \leq n\}$ un ricoprimento di X_2 con $\mathrm{diam}\,(F_j) \leq \varepsilon/3$. Naturalmente possiamo supporre $E_i \neq \emptyset$. Siano $\xi_1 \in E_1, \ldots, \xi_m \in E_m$. Per ogni $j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\}$, sia

$$\mathcal{E}_{j_1 \cdots j_m} = \{f \in \mathcal{F} : f(\xi_i) \in F_{j_i} \text{ per ogni } i = 1, \ldots, m\}\,.$$

Poiché $\{F_j : 1 \leq j \leq n\}$ è un ricoprimento di X_2, risulta che

$$\{\mathcal{E}_{j_1 \cdots j_m} : 1 \leq j_1, \ldots, j_m \leq n\}$$

è un ricoprimento di $\mathcal{F}$.

Se $f, g \in \mathcal{E}_{j_1 \cdots j_m}$ e $x \in X_1$, si ha $x \in E_i$ per qualche $i = 1, \ldots, m$. Poiché $d_1(x, \xi_i) < \delta$ e $\mathrm{diam}\,(F_{j_i}) \leq \varepsilon/3$, risulta

$$d_2(f(x), g(x)) \leq d_2(f(x), f(\xi_i)) + d_2(f(\xi_i), g(\xi_i)) + d_2(g(\xi_i), g(x)) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,,$$

quindi $d_\infty(f, g) \leq \varepsilon$. Pertanto $\mathrm{diam}\,(\mathcal{E}_{j_1 \cdots j_m}) \leq \varepsilon$. ■

(5.14) Corollario (Teorema di Ascoli-Arzelà) *Siano X uno spazio metrico compatto e non vuoto e (f_h) una successione limitata in $(C(X; \mathbb{K}^n), \|\ \|_\infty)$ con immagine $\{f_h : h \in \mathbb{N}\}$ equi-uniformemente continua.*

Allora (f_h) ammette una sottosuccessione convergente in $(C(X; \mathbb{K}^n), \|\ \|_\infty)$.

Dimostrazione. Anzitutto risulta $C(X; \mathbb{K}^n) = C_b(X; \mathbb{K}^n)$. Essendo (f_h) limitata, esiste $R > 0$ tale che $\|f_h\|_\infty \leq R$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. In particolare, si ha $f_h(x) \in \overline{\mathrm{B}\,(0, R)} \subseteq \mathbb{K}^n$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e $x \in X$. Ne segue che (f_h) può essere pensata come una successione nello spazio metrico $\left(C(X; \overline{\mathrm{B}\,(0, R)}), d_\infty\right)$.

Gli spazi X e $\overline{\mathrm{B}\,(0, R)}$ sono totalmente limitati per i Teoremi (5.7) e (5.9). Dal teorema precedente si deduce che l'immagine $\{f_h : h \in \mathbb{N}\}$ è totalmente limitata in $\left(C(X; \overline{\mathrm{B}\,(0, R)}), d_\infty\right)$, quindi in $(C(X; \mathbb{K}^n), \|\ \|_\infty)$.

D'altronde $(C(X;\mathbb{K}^n), \| \|_\infty)$ è completo per il Teorema (1.7). La tesi discende allora dal Teorema (5.8). ∎

Esercizi

1. Sia (x_h) una successione di Cauchy in uno spazio metrico X. Si dimostri che l'immagine $\{x_h : h \in \mathbb{N}\}$ è totalmente limitata.

2. Sia X uno spazio metrico. Si dimostri che X è totalmente limitato se e solo se ogni successione in X ammette una sottosuccessione di Cauchy.

3. Siano X e Y due spazi metrici e $\mathcal{F} \subseteq C(X;Y)$ un insieme di applicazioni tutte lipschitziane della stessa costante c. Si dimostri che $\mathcal{F}$ è equi-uniformemente continuo.

4. Siano X uno spazio metrico compatto, Y uno spazio metrico, $f : X \to Y$ un'applicazione e (f_h) una successione in $C(X;Y)$ con immagine $\{f_h : h \in \mathbb{N}\}$ equi-uniformemente continua. Si supponga che (f_h) converga a f puntualmente. Si dimostri che f è continua e che (f_h) converge a f uniformemente.

5. Siano X uno spazio metrico compatto, Y uno spazio metrico e (f_h) una successione in $C(X;Y)$ convergente uniformemente a $f \in C(X;Y)$. Si dimostri che l'immagine $\{f_h : h \in \mathbb{N}\}$ è equi-uniformemente continua.

Capitolo 5

Calcolo differenziale

1 Serie di potenze

(1.1) Definizione *Si chiama* serie di potenze in $\mathbb{C}$ *ogni espressione formale*

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h (z-a)^h$$

dove (c_h) *è una successione in* $\mathbb{C}$ *ed* $a \in \mathbb{C}$.

Si chiama raggio di convergenza *della serie il numero reale esteso*

$$\left(\limsup_h \sqrt[h]{|c_h|}\right)^{-1}$$

con le convenzioni $0^{-1} = +\infty$ *e* $(+\infty)^{-1} = 0$.

(1.2) Teorema *Sia*

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h (z-a)^h$$

una serie di potenze in $\mathbb{C}$ *e sia* $R \in [0, +\infty]$ *il suo raggio di convergenza.*

Allora per ogni $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z-a| < R$ *la serie*

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h (z-a)^h$$

è assolutamente convergente in $\mathbb{C}$, *mentre per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z-a| > R$ *tale serie non è convergente.*

Inoltre, per ogni $r \in]0, R[$, *la corrispondente serie in* $\left(C\left(\overline{\mathrm{B}\,(a,r)}; \mathbb{C}\right), \| \, \|_\infty\right)$ *è totalmente convergente.*

Dimostrazione. Se $z \in \mathbb{C}$ e $|z-a| > R$, si ha

$$\limsup_h \sqrt[h]{|c_h(z-a)^h|} > 1\,,$$

per cui risulta $c_h(z-a)^h > 1$ per infiniti h. Allora non può essere

$$\lim_h c_h(z-a)^h = 0$$

e la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h(z-a)^h$$

non può quindi convergere in $\mathbb{C}$.

Sia ora $r \in]0, R[$. Risulta

$$\sup\left\{|c_h(z-a)^h| : \, z \in \overline{\mathrm{B}\,(a,r)}\right\} \leq |c_h| r^h\,.$$

Poiché

$$\limsup_h \sqrt[h]{|c_h| r^h} < 1\,,$$

la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} |c_h| r^h$$

è convergente in $\mathbb{R}$ per il criterio della radice. Ne segue la convergenza totale della serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h(z-a)^h$$

su $\overline{\mathrm{B}\,(a,r)}$.

In particolare, per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z-a| < R$ la serie in questione è assolutamente convergente in $\mathbb{C}$. ∎

(1.3) Teorema *Sia*

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h(z-a)^h$$

una serie di potenze in $\mathbb{C}$ *con raggio di convergenza* $R \in]0, +\infty]$, *sia*

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \, |z-a| < R\}$$

e sia $f : A \to \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h (z-a)^h \,.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *la serie di potenze*

$$\sum_{h=0}^{\infty} (h+1) c_{h+1} (z-a)^h$$

ha lo stesso raggio di convergenza R;

(b) *la funzione f è differenziabile (in senso complesso) e si ha*

$$\forall z \in A: \; f'(z) = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1) c_{h+1} (z-a)^h \,.$$

Dimostrazione.
(a) Si ha

$$\limsup_h \sqrt[h]{(h+1)|c_{h+1}|} =$$

$$= \limsup_h \left(\sqrt[h+1]{h+1} \; \sqrt[h+1]{|c_{h+1}|} \right)^{\frac{h+1}{h}} = \limsup_h \sqrt[h]{|c_h|} \,.$$

(b) Definiamo $g : A \to \mathbb{C}$ ponendo

$$\forall z \in A: \; g(z) = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1) c_{h+1} (z-a)^h \,.$$

Siano $z \in A$, $|z-a| < r < R$ e $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $|z-a| + |w| \leq r$. Per ogni $h \geq 0$, l'applicazione

$$\begin{aligned} &[0,1] \to \mathbb{C} \\ &s \mapsto (z+sw-a)^{h+1} - s(h+1)(z-a)^h w \end{aligned}$$

soddisfa le ipotesi della disuguaglianza di Lagrange. Sia $s_1 \in]0,1[$ tale che

$$\left| (z+w-a)^{h+1} - (z-a)^{h+1} - (h+1)(z-a)^h w \right| \leq$$

$$\leq (h+1)|w| \left| (z+s_1 w-a)^h - (z-a)^h \right| \,.$$

Riapplicando la disuguaglianza di Lagrange a

$$\begin{aligned} &[0,s_1] \to \mathbb{C} \\ &\sigma \mapsto (z+\sigma w-a)^h \end{aligned}$$

si ottiene $s_2 \in]0, s_1[$ tale che

$$\left|(z + s_1 w - a)^h - (z - a)^h\right| \leq h|w| \left|(z + s_2 w - a)^{h-1}\right| \leq h|w|r^{h-1}.$$

Ne segue

$$\left|\sum_{h=0}^{k+1} c_h(z + w - a)^h - \sum_{h=0}^{k+1} c_h(z - a)^h - \sum_{h=0}^{k} (h+1)c_{h+1}(z - a)^h w\right| =$$

$$= \left|\sum_{h=0}^{k} c_{h+1}(z + w - a)^{h+1} - \sum_{h=0}^{k} c_{h+1}(z - a)^{h+1} - \sum_{h=0}^{k} (h+1)c_{h+1}(z - a)^h w\right| \leq$$

$$\leq |w|^2 \sum_{h=0}^{k} h(h+1)|c_{h+1}|r^{h-1}.$$

Passando al limite per $k \to \infty$ e dividendo per $|w|$, si ottiene

$$\left|\frac{f(z+w) - f(z)}{w} - g(z)\right| \leq |w| \sum_{h=0}^{\infty} h(h+1)|c_{h+1}|r^{h-1}.$$

Passando infine al limite per $w \to 0$, si deduce che f è derivabile in z e che $f'(z) = g(z)$.

■

Esercizi

1. Si calcoli il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} z^h, \quad \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h)!} z^{2h}, \quad \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)!} z^{2h+1},$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h-1}}{h} z^h, \quad \sum_{h=0}^{\infty} z^h.$$

2. Sia

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h (z - a)^h$$

una serie di potenze in $\mathbb{C}$ con raggio di convergenza $R \in]0, +\infty]$, sia

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \, |z - a| < R\}$$

e sia $f : A \to \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h (z-a)^h \, .$$

Si supponga che a sia di accumulazione per $\{z \in A : \, f(z) = 0\}$.

Si dimostri che $c_h = 0$ per ogni $h \geq 0$.

3. Siano $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Si definisca $f : \mathbb{C} \setminus \partial \mathrm{B}\,(a, r) \to \mathbb{C}$ ponendo

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\eta(t)}{\gamma(t) - z} \, dt \, ,$$

dove $\gamma(t) = a + re^{it}$ e si ponga anche

$$\forall h \in \mathbb{Z} : \; c_h = \int_0^{2\pi} \frac{\eta(t)}{(\gamma(t) - a)^{h+1}} \, dt \, .$$

Si dimostri che

$$\forall z \in \mathrm{B}\,(a, r) : \; f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h (z-a)^h \, ,$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{B}\,(a, r)} : \; f(z) = -\sum_{h=1}^{\infty} c_{-h} (z-a)^{-h} \, .$$

(Suggerimento: si ricordi che

$$\sum_{h=0}^{\infty} z^h = \frac{1}{1-z}$$

per ogni $z \in \mathrm{B}\,(0, 1)$).

2 Il polinomio di Taylor

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Fissata una base in X, è possibile scrivere il polinomio di Taylor anche in funzione delle componenti. In questo modo si fanno però comparire delle espressioni dipendenti dalla scelta della base stessa.

(2.1) Definizione *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, A un aperto in X, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $y \in X$.*

Denotiamo con $\lambda \frac{\partial}{\partial y}$ l'applicazione lineare

$$\lambda \frac{\partial}{\partial y} : C^1(A) \to C(A)$$

definita da

$$\left(\lambda \frac{\partial}{\partial y}\right) f = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} .$$

Inoltre, se $\Lambda : C^1(A) \to C(A)$ è un'applicazione lineare e $1 \leq h \leq k$, definiamo

$$\Lambda^h : C^k(A) \to C(A)$$

ponendo $\Lambda^h := \Lambda \circ \cdots \circ \Lambda$ h volte. Poniamo infine $\Lambda^0 := \mathrm{Id}$.

(2.2) Teorema *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, A un aperto in X, $0 \leq h \leq k$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^k e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base in X.*

Allora per ogni $x \in A$ e per ogni $y \in X$ si ha

$$f^{(h)}(x)(y)^h = \left(\left(\sum_{j=1}^n y^{(j)} \frac{\partial}{\partial e_j}\right)^h f\right)(x) ,$$

dove $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ sono le componenti di y rispetto alla base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Di conseguenza si ha

$$\sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} f^{(h)}(x)(y)^h = \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} \left(\left(\sum_{j=1}^n y^{(j)} \frac{\partial}{\partial e_j}\right)^h f\right)(x) .$$

Dimostrazione. Se $g : A \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1, si ha

$$\left(\sum_{j=1}^n y^{(j)} \frac{\partial}{\partial e_j}\right) g = \sum_{j=1}^n y^{(j)} \frac{\partial g}{\partial e_j} = \frac{\partial g}{\partial y} .$$

Applicando ripetutamente questa relazione, si ottiene la tesi. ■

(2.3) Definizione *Si chiama* multi-indice *ogni elemento α di $\mathbb{N}^n$. Si pone*

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j ,$$

$$\alpha! := \prod_{j=1}^{n} \alpha_j! \,.$$

Il numero $|\alpha|$ *si chiama* lunghezza *del multi-indice* α*, mentre* $\alpha!$ *si chiama* fattoriale *del multi-indice* α*.*

(2.4) Definizione *Siano* X *uno spazio normato di dimensione finita,* A *un aperto in* X*,* $1 \leq k < \infty$*,* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^k *e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base in* X*.*

Per ogni $x \in A$ *e per ogni* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *con* $|\alpha| \leq k$ *poniamo*

$$f^\alpha(x) := f^{(|\alpha|)}(x)(\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\alpha_1 \text{ volte}}, \ldots, \underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{\alpha_n \text{ volte}}) \qquad \text{se } |\alpha| \geq 1\,,$$

$$f^\alpha(x) := f(x) \qquad \text{se } |\alpha| = 0\,.$$

Se poi $y \in X$ *ha componenti* $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ *rispetto alla base* $\{e_1, \ldots, e_n\}$*, poniamo*

$$y^\alpha := (y^{(1)})^{\alpha_1} \cdots (y^{(n)})^{\alpha_n}\,.$$

(2.5) Lemma *Sia* $\mathcal{A}$ *un anello commutativo con unità e siano* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n \in \mathcal{A}$*. Allora per ogni* $h \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \Lambda_j\right)^h = h! \sum_{|\alpha|=h} \frac{1}{\alpha!} \Lambda_1^{\alpha_1} \cdots \Lambda_n^{\alpha_n}\,.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su h. Per $h = 0$ la tesi è evidente. Supponiamo che la tesi sia vera per un certo $h \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \Lambda_j\right)^{h+1} = \left(\sum_{j=1}^{n} \Lambda_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \Lambda_j\right)^h =$$

$$= h! \left(\sum_{j=1}^{n} \Lambda_j\right)\left(\sum_{|\beta|=h} \frac{1}{\beta!} \Lambda_1^{\beta_1} \cdots \Lambda_n^{\beta_n}\right) =$$

$$= h! \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|=h} \frac{1}{\beta!} \Lambda_j \, \Lambda_1^{\beta_1} \cdots \Lambda_n^{\beta_n} =$$

$$= h! \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha|=h+1 \\ \alpha_j \geq 1}} \frac{1}{\alpha_1! \cdots (\alpha_j - 1)! \cdots \alpha_n!} \Lambda_1^{\alpha_1} \cdots \Lambda_n^{\alpha_n} =$$

$$= h! \sum_{|\alpha|=h+1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{1}{\alpha!} \Lambda_1^{\alpha_1} \cdots \Lambda_n^{\alpha_n} =$$

$$= (h+1)! \sum_{|\alpha|=h+1} \frac{1}{\alpha!} \Lambda_1^{\alpha_1} \cdots \Lambda_n^{\alpha_n} ,$$

da cui la tesi. ■

(2.6) Teorema *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, A un aperto in X, $0 \leq h \leq k < \infty$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^k e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base in X.*

Allora per ogni $x \in A$ e per ogni $y \in X$ si ha

$$f^{(h)}(x)(y)^h = h! \sum_{|\alpha|=h} \frac{1}{\alpha!} f^{\alpha}(x) y^{\alpha} ,$$

dove $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ sono le componenti di y rispetto alla base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Di conseguenza si ha

$$\sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} f^{(h)}(x)(y)^h = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} f^{\alpha}(x) y^{\alpha} .$$

Dimostrazione. Se g è di classe C^2, si deduce dal Teorema di Schwarz che

$$\left(y^{(j)} \frac{\partial}{\partial e_j} \right) \left(y^{(i)} \frac{\partial}{\partial e_i} \right) g = \left(y^{(i)} \frac{\partial}{\partial e_i} \right) \left(y^{(j)} \frac{\partial}{\partial e_j} \right) g .$$

Pertanto l'espressione

$$f^{(h)}(x)(y)^h = \left(\left(\sum_{j=1}^{n} y^{(j)} \frac{\partial}{\partial e_j} \right)^h f \right) (x)$$

può essere sviluppata formalmente come se $y^{(1)} \dfrac{\partial}{\partial e_1}, \ldots, y^{(n)} \dfrac{\partial}{\partial e_n}$ fossero elementi di un anello commutativo con unità.

Tenuto conto che per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq k$ si ha

$$\left(\left(y^{(1)} \frac{\partial}{\partial e_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(y^{(n)} \frac{\partial}{\partial e_n} \right)^{\alpha_n} f \right) (x) = f^{\alpha}(x) y^{\alpha} ,$$

la tesi discende dal lemma precedente. ■

3 I teoremi di inversione locale e delle funzioni implicite

(3.1) Lemma *Siano X uno spazio di Banach, $r > 0$ e $\psi : \mathrm{B}(0,r) \to X$ un'applicazione lipschitziana di costante $c \in [0,1[$ tale che $\psi(0) = 0$. Poniamo $\varphi = \mathrm{Id} + \psi$.*

Allora φ è iniettiva,

$$\varphi^{-1} : \varphi(\mathrm{B}(0,r)) \to \mathrm{B}(0,r)$$

è lipschitziana di costante $1/(1-c)$ e

$$\varphi(\mathrm{B}(0,r)) \supseteq \mathrm{B}(0,r(1-c)) \,.$$

Dimostrazione. Se $x, y \in \mathrm{B}(0,r)$, si ha

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \geq \|x - y\| - \|\psi(x) - \psi(y)\| \geq$$

$$\geq \|x - y\| - c\|x - y\| = (1-c)\|x - y\| \,.$$

Pertanto φ è iniettiva e φ^{-1} è lipschitziana di costante $1/(1-c)$.

Se $z \in \mathrm{B}(0,r(1-c))$, sia $r' > 0$ tale che

$$\frac{1}{1-c}\|z\| \leq r' < r \,.$$

Se $\|x\| \leq r'$, risulta allora

$$\|z - \psi(x)\| \leq \|z\| + \|\psi(x)\| = \|z\| + \|\psi(x) - \psi(0)\| \leq$$

$$\leq \|z\| + c\|x\| \leq (1-c)r' + cr' = r' \,.$$

Pertanto è possibile definire un'applicazione

$$\vartheta : \overline{\mathrm{B}(0,r')} \to \overline{\mathrm{B}(0,r')}$$

ponendo $\vartheta(x) = z - \psi(x)$. Evidentemente ϑ è lipschitziana di costante c e $\overline{\mathrm{B}(0,r')}$ è completo, perché chiuso nello spazio completo X. Per il Teorema delle contrazioni esiste $x \in \overline{\mathrm{B}(0,r')} \subseteq \mathrm{B}(0,r)$ tale che $\vartheta(x) = x$, ossia $\varphi(x) = z$. ∎

(3.2) Teorema (di inversione locale) *Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione di classe C^1 e $x_0 \in A$. Supponiamo che l'applicazione lineare*

$$df(x_0) : X_1 \to X_2$$

sia biiettiva.

Allora esiste un intorno aperto U di x_0 in A tale che $f(U)$ è aperto in X_2 e

$$f_{|U} : U \longrightarrow f(U)$$

è un diffeomorfismo.

Inoltre per ogni $y \in f(U)$ si ha

$$d(f^{-1})(y) = \left(df(f^{-1}(y))\right)^{-1} .$$

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo il caso $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$. Definiamo $\psi : A \to X_1$ ponendo

$$\psi(x) = (df(0))^{-1}f(x) - x \, .$$

L'applicazione ψ è differenziabile e

$$d\psi(x) = (df(0))^{-1} \circ df(x) - \mathrm{Id} \, .$$

Inoltre le applicazioni df e $d\psi$ sono continue e $d\psi(0) = 0$.

Il sottoinsieme delle applicazioni lineari e biiettive è aperto in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$. Poiché 0 appartiene alla controimmagine attraverso df di tale aperto, esiste $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(0, r) \subseteq A$ e

$$\forall x \in \mathrm{B}\,(0, r) : \; df(x) \text{ è biiettivo} \, ,$$
$$\forall x \in \mathrm{B}\,(0, r) : \; \|d\psi(x)\| \leq \frac{1}{2} \, .$$

Evidentemente $\psi(0) = 0$. Inoltre l'applicazione $\psi_{|\mathrm{B}(0,r)}$ è lipschitziana di costante $\frac{1}{2}$.

Essendo di dimensione finita, X_1 è uno spazio di Banach. Posto

$$\varphi(x) = x + \psi(x) = (df(0))^{-1}f(x) \, ,$$

si ha per il Lemma (3.1)

$$\varphi\,(\mathrm{B}\,(0, r)) \supseteq \mathrm{B}\left(0, \frac{r}{2}\right) \, .$$

Se poniamo

$$U = \varphi^{-1}\left(\mathrm{B}\left(0, \frac{r}{2}\right)\right), \quad V = df(0)\left(\mathrm{B}\left(0, \frac{r}{2}\right)\right) = f(U),$$

risulta che $\varphi : U \to \mathrm{B}(0, r/2)$ è biiettiva con inversa lipschitziana e V è aperto in X_2. Allora anche $f = df(0) \circ \varphi : U \to V$ è biiettiva con inversa lipschitziana.

Dimostriamo che f^{-1} è differenziabile in ogni $y \in V$ e che

$$d(f^{-1})(y) = df(f^{-1}(y))^{-1}.$$

Per ogni $\eta \in V$, posto $x = f^{-1}(y)$ e $\xi = f^{-1}(\eta)$, si ha

$$f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y) - df(f^{-1}(y))^{-1}(\eta - y) =$$

$$= \xi - x - df(x)^{-1}(f(\xi) - f(x)) =$$

$$= -df(x)^{-1}\left(f(\xi) - f(x) - df(x)(\xi - x)\right) =$$

$$= -\|\xi - x\|_1 df(x)^{-1}\left(\omega(\xi)\right) =$$

$$= -\left\|f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y)\right\|_1 df(x)^{-1}\left(\omega\left(f^{-1}(\eta)\right)\right).$$

Essendo f^{-1} lipschitziana su V, esiste $c \geq 0$ tale che

$$\left\|f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y) - df\left(f^{-1}(y)\right)^{-1}(\eta - y)\right\|_1 \leq$$

$$\leq c\|\eta - y\|_2 \left\|df(x)^{-1}\left(\omega\left(f^{-1}(\eta)\right)\right)\right\|_1.$$

La differenziabilità di f^{-1} in y discende allora dal fatto che f^{-1} è continua in y, ω è continua in x e $df(x)^{-1}$ è continua in 0.

Per composizione si deduce infine che l'applicazione

$$\left\{y \longmapsto df\left(f^{-1}(y)\right)^{-1}\right\}$$

è continua, per cui f^{-1} è di classe C^1. ■

(3.3) Teorema *Siano X e Y due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X, $f : A \to Y$ un'applicazione di classe C^1 ed $x \in A$. Siano X_1 e X_2 due sottospazi vettoriali di X tali che $X = X_1 \oplus X_2$. Supponiamo che $f(x) = 0$ e che l'applicazione lineare*

$$df(x)_{|X_2} : X_2 \to Y$$

sia biiettiva. Poniamo $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ *con* $x^{(1)} \in X_1$ *e* $x^{(2)} \in X_2$.

Allora esistono un intorno aperto U_1 *di* $x^{(1)}$ *in* X_1, *un intorno aperto* U_2 *di* $x^{(2)}$ *in* X_2 *ed un'applicazione* $\varphi : U_1 \to X_2$ *di classe* C^1 *tale che* $\varphi(U_1) \subseteq U_2$, $\varphi(x_1) = x_2$ *e*

$$\forall \xi^{(1)} \in U_1,\, \forall \xi^{(2)} \in U_2 :\; f\left(\xi^{(1)} + \xi^{(2)}\right) = 0 \Longleftrightarrow \xi^{(2)} = \varphi(\xi^{(1)})\,.$$

Inoltre si ha per ogni $\xi^{(1)} \in U_1$ *e per ogni* $y^{(1)} \in X_1$

$$df\left(\xi^{(1)} + \varphi(\xi^{(1)})\right)\left(d\varphi(\xi^{(1)})(y^{(1)})\right) = -df\left(\xi^{(1)} + \varphi(\xi^{(1)})\right)(y^{(1)})\,.$$

Dimostrazione. Siano $p_1 : X \to X_1$ e $p_2 : X \to X_2$ le applicazioni lineari tali che

$$\forall \xi \in X :\; \xi = p_1\xi + p_2\xi\,.$$

Definiamo un'applicazione $g : A \to X_1 \times Y$ ponendo

$$g(\xi) = (p_1\xi, f(\xi))\;.$$

Si verifica facilmente che g è di classe C^1 e che

$$dg(\xi)(y) = (p_1 y, df(\xi)(y))\;.$$

Allora l'applicazione

$$dg(x) : X \to X_1 \times Y$$

è biiettiva. Per il Teorema di inversione locale, esistono un intorno aperto V di x in X ed un intorno aperto W di $(x^{(1)}, 0)$ in $X_1 \times Y$ tali che $g : V \to W$ sia un diffeomorfismo.

Siano U_1 un intorno aperto di $x^{(1)}$ in X_1 ed U_2 un intorno aperto di $x^{(2)}$ in X_2 tali che

$$\forall \xi^{(1)} \in U_1,\, \forall \xi^{(2)} \in U_2 :\; \xi^{(1)} + \xi^{(2)} \in V$$

e $U_1 \times \{0\} \subseteq W$. Si può allora definire un'applicazione $\varphi : U_1 \to X_2$ di classe C^1 ponendo

$$\varphi(\xi^{(1)}) = p_2\left(g^{-1}(\xi^{(1)}, 0)\right)\;.$$

Poiché $\varphi(x^{(1)}) = x^{(2)}$, a meno di rimpicciolire U_1 si può ottenere anche l'inclusione $\varphi(U_1) \subseteq U_2$.

Osserviamo che, se $\xi^{(1)} \in U_1$, $\xi^{(2)} \in U_2$ e $\xi^{(2)} = p_2\left(g^{-1}(\xi^{(1)}, 0)\right)$, si ha

$$g^{-1}(\xi^{(1)}, 0) = y^{(1)} + \xi^{(2)}$$

con $y^{(1)} \in X_1$. Ne segue $g\left(y^{(1)} + \xi^{(2)}\right) = (\xi^{(1)}, 0)$, da cui $y^{(1)} = \xi^{(1)}$. Pertanto risulta

$$\xi^{(1)} + \xi^{(2)} = g^{-1}(\xi^{(1)}, 0)\,.$$

Allora per ogni $\xi^{(1)} \in U_1$ e $\xi^{(2)} \in U_2$ si ha

$$f(\xi^{(1)} + \xi^{(2)}) = 0 \Leftrightarrow g(\xi^{(1)} + \xi^{(2)}) = (\xi^{(1)}, 0) \Leftrightarrow (\xi^{(1)} + \xi^{(2)}) = g^{-1}(\xi^{(1)}, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \xi^{(2)} = p_2\left(g^{-1}(\xi^{(1)}, 0)\right) \Leftrightarrow \xi^{(2)} = \varphi(\xi^{(1)})\,.$$

La formula sui differenziali è una conseguenza del teorema di composizione. ■

(3.4) Corollario (Teorema delle funzioni implicite o di Dini) *Siano X, Y e Z tre spazi normati di dimensione finita, A un aperto in $X \times Y$, $f : A \to Z$ un'applicazione di classe C^1 e $(x, y) \in A$. Supponiamo che $f(x, y) = 0$ e che l'applicazione lineare*

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z \\ w & \mapsto & df(x, y)(0, w) \end{array}$$

sia biiettiva.

Allora esistono un intorno aperto V di x in X, un intorno aperto W di y in Y ed un'applicazione $\varphi : V \to Y$ di classe C^1 tale che $\varphi(V) \subseteq W$, $\varphi(x) = y$ e

$$\forall \xi \in V, \forall \eta \in W : \; f(\xi, \eta) = 0 \Longleftrightarrow \eta = \varphi(\xi)\,.$$

Inoltre si ha per ogni $\xi \in V$ e per ogni $v \in X$

$$df\left(\xi, \varphi(\xi)\right)\left(0, d\varphi(\xi)(v)\right) = -df\left(\xi, \varphi(\xi)\right)(v, 0)\,.$$

Dimostrazione. Poiché

$$X \times Y = (X \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times Y)\,,$$

si tratta di un'immediata conseguenza del Teorema (3.3). ■

4 Sottovarietà

(4.1) Teorema *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M una sottovarietà in X di classe C^1 e $x \in M$. Siano U un intorno aperto di x e $g : U \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^1 conforme alla definizione di sottovarietà.*

Allora si ha

$$T_x M = \mathcal{N}\left(dg(x)\right) .$$

In particolare, $T_x M$ è un sottospazio vettoriale di X.

Dimostrazione. Proviamo l'inclusione

$$T_x M \subseteq \mathcal{N}\left(dg(x)\right) .$$

Sia $y \in T_x M$ e sia $\gamma :]-\delta, \delta[\to X$ conforme alla definizione di spazio tangente. A meno di rimpicciolire δ, si può supporre che $\gamma(]-\delta, \delta[) \subseteq U$. Allora $g \circ \gamma$ è derivabile e si ha

$$(g \circ \gamma)'(t) = dg(\gamma(t))(\gamma'(t)) .$$

Essendo $g \circ \gamma$ identicamente nulla, si deduce che

$$dg(x)(y) = dg(\gamma(0))(\gamma'(0)) = 0 ,$$

ossia $y \in \mathcal{N}\left(dg(x)\right)$.

Proviamo ora l'inclusione

$$\mathcal{N}\left(dg(x)\right) \subseteq T_x M .$$

Sia $X_1 = \mathcal{N}\left(dg(x)\right)$, sia X_2 un sottospazio vettoriale di X tale che $X = X_1 \oplus X_2$ e sia $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ con $x^{(1)} \in X_1$ e $x^{(2)} \in X_2$. Ne segue che l'applicazione

$$dg(x)_{|X_2} : X_2 \to \mathbb{R}^m$$

è biiettiva. Allora per il Teorema (3.3) esistono un intorno U_1 di $x^{(1)}$ in X_1, un intorno U_2 di $x^{(2)}$ in X_2 ed un'applicazione $\varphi : U_1 \to X_2$ di classe C^1 tale che $\varphi(U_1) \subseteq U_2$, $\varphi(x^{(1)}) = x^{(2)}$ e $g(\xi^{(1)} + \varphi(\xi^{(1)})) = 0$ per ogni $\xi^{(1)} \in U_1$.

Dato $y \in \mathcal{N}\left(dg(x)\right) = X_1$, sia $\delta > 0$ tale che $(x^{(1)} + ty) \in U_1$ per ogni $t \in]-\delta, \delta[$. Allora

$$\gamma(t) = x^{(1)} + ty + \varphi(x^{(1)} + ty)$$

definisce un'applicazione $\gamma :]-\delta,\delta[\to X$ di classe C^1 tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(t) \in M$ per ogni $t \in]-\delta,\delta[$. Inoltre si ha

$$dg(x)\left(d\varphi(x^{(1)})y\right) = -dg(x)y = 0\,.$$

Poiché $d\varphi(x^{(1)})y \in X_2$, risulta $d\varphi(x^{(1)})y = 0$. Allora si conclude che

$$\gamma'(0) = y + d\varphi(x^{(1)})y = y\,,$$

per cui $y \in T_xM$. ■

Capitolo 6

Equazioni differenziali ordinarie

1 Equazioni del primo ordine in forma normale

(1.1) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione, I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $u : I \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione.*

Diciamo che u è una soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = f(t, u)\,,$$

se u è derivabile, $(t, u(t)) \in E$ per ogni $t \in I$ e si ha

$$\forall t \in I :\ u'(t) = f(t, u(t))\,.$$

Se poi $(t_0, u_0) \in E$, diciamo che u è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

se si ha anche $t_0 \in I$ ed $u(t_0) = u_0$.

Le equazioni differenziali del tipo

$$u' = f(t, u)$$

si dicono del primo ordine in forma normale.

(1.2) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Poniamo*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx := \left(\int_a^b f^{(1)}, \ldots, \int_a^b f^{(n)}\right)\,.$$

(1.3) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ due funzioni continue e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *si ha*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,;$$

(b) *si ha*

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f\,;$$

(c) *per ogni $c \in]a, b[$ si ha*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,;$$

(d) *si ha*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,;$$

(e) *se $F : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è una funzione derivabile tale che $F' = f$, risulta*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

Dimostrazione.
Le affermazioni (a), (b), (c) ed (e) sono facilmente riconducibili alle proprietà dell'integrale per funzioni a valori reali.

Per dimostrare la (d), poniamo $y = \int_a^b f$. Risulta allora

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f\right|^2 &= y \cdot y = y^{(1)} \int_a^b f^{(1)} + \cdots + y^{(n)} \int_a^b f^{(n)} = \\ &= \int_a^b \left(y^{(1)} f^{(1)} + \cdots + y^{(n)} f^{(n)}\right) \leq \\ &\leq \int_a^b |y||f| = |y| \int_a^b |f|\,,\end{aligned}$$

da cui la tesi. ∎

(1.4) Lemma *Siano $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua, I un intervallo non vuoto in $\mathbb{R}$ ed $u : I \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione tale che $(t, u(t)) \in E$ per ogni $t \in I$.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *u risolve l'equazione differenziale*

$$u' = f(t, u)\,;$$

(b) *u è continua e per ogni* $t_0 \in I$ *si ha*

$$\forall t \in I:\; u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau\,;$$

(c) *u è continua ed esiste* $t_0 \in I$ *tale che*

$$\forall t \in I:\; u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau\,.$$

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Evidentemente u ed u' sono continue. Inoltre per ogni $t_0, t \in I$ si ha

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(\tau)\, d\tau = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau\,.$$

$(b) \Longrightarrow (c)$ Ovvio.
$(c) \Longrightarrow (a)$ Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, ogni componente $u^{(j)}$ è derivabile e si ha $(u^{(j)})'(t) = f^{(j)}(t, u(t))$ per ogni $t \in I$. Ne segue che u è derivabile e soddisfa $u'(t) = f(t, u(t))$. ■

(1.5) Teorema *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *(*$a < b$*),* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $r > 0$ *e*

$$f : [a, b] \times \overline{\mathrm{B}\,(x, r)} \to \mathbb{R}^n$$

un'applicazione continua verificante le seguenti condizioni:

(a) *esiste* $c \in]0, +\infty[$ *tale che*

$$\forall \tau \in [a, b],\, \forall \xi_1, \xi_2 \in \overline{\mathrm{B}\,(x, r)}:\; |f(\tau, \xi_1) - f(\tau, \xi_2)| \leq c|\xi_1 - \xi_2|\,;$$

(b) *risulta*

$$2(b - a) \max\left\{|f(\tau, \xi)|:\; \tau \in [a, b],\, \xi \in \overline{\mathrm{B}\,(x, r)}\right\} \leq r\,.$$

Allora per ogni $(t_0, u_0) \in [a,b] \times \overline{\mathrm{B}\,(x, r/2)}$ *esiste una ed una sola soluzione*

$$u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t,u)\,, \\ u(t_0) = u_0\,. \end{cases}$$

Inoltre l'applicazione

$$\begin{gathered} [a,b] \times \overline{\mathrm{B}\,(x, r/2)} \to C([a,b];\mathbb{R}^n) \\ (t_0, u_0) \longmapsto u \end{gathered}$$

è lipschitziana.

Dimostrazione. Poniamo

$$M = \max\left\{|f(\tau,\xi)| : \tau \in [a,b],\, \xi \in \overline{\mathrm{B}\,(x,r)}\right\}\,.$$

Dal momento che $\mathbb{R}^n$ è completo, risulta che $C([a,b];\mathbb{R}^n)$, munito della norma $\|\ \|_\infty$, è completo. Per ogni $v \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$ poniamo

$$\|v\|_{t_0} = \max\left\{e^{-c|t-t_0|}\,|v(t)| : a \le t \le b\right\}\,.$$

Si verifica facilmente che $\|\ \|_{t_0}$ è una norma su $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ equivalente a $\|\ \|_\infty$, tenuto conto che

$$\|v\|_{t_0} \le \|v\|_\infty \le e^{c(b-a)}\,\|v\|_{t_0}\,.$$

In particolare, $(C([a,b];\mathbb{R}^n), \|\ \|_{t_0})$ è completo. D'altronde

$$Y = \left\{v \in C([a,b];\mathbb{R}^n) : v(t) \in \overline{\mathrm{B}\,(x,r)} \text{ per ogni } t \in [a,b]\right\}$$

è un sottoinsieme chiuso di $C([a,b];\mathbb{R}^n)$, quindi completo nella metrica subordinata.

Fissata $(t_0,u_0) \in [a,b] \times \overline{\mathrm{B}\,(x,r/2)}$, per ogni $v \in Y$ definiamo $\Phi(v) \in Y$ ponendo

$$\forall t \in [a,b] : (\Phi(v))\,(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, v(\tau))\,d\tau\,.$$

Evidentemente $\Phi(v) \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$. Inoltre per ogni $t \in]t_0, b]$ si ha

$$|\Phi(v)(t) - u_0| = \left|\int_{t_0}^t f(\tau,v(\tau))\,d\tau\right| \le \int_{t_0}^t |f(\tau,v(\tau))|\,d\tau \le (b-a)M \le \frac{r}{2}\,.$$

Un'analoga disuguaglianza vale anche per ogni $t \in [a, t_0[$, per cui

$$\forall t \in [a,b] : \, |\Phi(v)(t) - x| \le |\Phi(v)(t) - u_0| + |u_0 - x| \le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \, .$$

Quindi si ha effettivamente $\Phi(v) \in Y$.

Per ogni $v, w \in Y$ e per ogni $t \in]t_0, b]$ risulta anche

$$|\Phi(v)(t) - \Phi(w)(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, v(\tau)) - f(\tau, w(\tau)) \right) \, d\tau \right| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} |f(\tau, v(\tau)) - f(\tau, w(\tau))| \, d\tau \le \int_{t_0}^{t} c|v(\tau) - w(\tau)| \, d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} c \, e^{c(\tau - t_0)} \, e^{-c(\tau - t_0)} \, |v(\tau) - w(\tau)| \, d\tau \le \|v - w\|_{t_0} \int_{t_0}^{t} c \, e^{c(\tau - t_0)} \, d\tau =$$

$$= \left(e^{c(t - t_0)} - 1 \right) \, \|v - w\|_{t_0} \, .$$

Ne segue

$$e^{-c(t - t_0)} \, |\Phi(v)(t) - \Phi(w)(t)| \le \left(1 - e^{-c(t - t_0)} \right) \, \|v - w\|_{t_0} \le$$

$$\le \left(1 - e^{-c(b - a)} \right) \, \|v - w\|_{t_0} \, .$$

In modo simile si prova che per ogni $t \in [a, t_0[$ si ha

$$e^{-c(t_0 - t)} \, |\Phi(v)(t) - \Phi(w)(t)| \le \left(1 - e^{-c(b - a)} \right) \, \|v - w\|_{t_0} \, ,$$

per cui

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{t_0} \le \left(1 - e^{-c(b - a)} \right) \, \|v - w\|_{t_0} \, .$$

Pertanto l'applicazione $\Phi : Y \to Y$ è lipschitziana con costante di Lipschitz strettamente minore di 1. Per il Teorema delle contrazioni esiste una ed una sola $u \in Y$ tale che $\Phi(u) = u$, ossia tale che

$$\forall t \in [a,b] : \, u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau)) \, d\tau \, .$$

D'altronde per il Lemma (1.4) si ha $\Phi(u) = u$ se e solo se u è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

che ammette quindi una ed una sola soluzione $u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Siano ora $(t_0, u_0), (s_0, v_0) \in [a,b] \times \overline{\mathrm{B}\,(x, r/2)}$ e siano $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ le soluzioni dell'equazione differenziale tali che $u(t_0) = u_0$ e $v(s_0) = v_0$. Poiché

$$\forall t \in [a,b] : \; u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau \,,$$

$$\forall t \in [a,b] : \; v(t) = v_0 + \int_{s_0}^{t} f(\tau, v(\tau))\, d\tau \,,$$

si ha che

$$|u(t) - v(t)| \le |u_0 - v_0| +$$
$$+ \left| \int_{s_0}^{t_0} f(\tau, v(\tau))\, d\tau \right| + \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau)) \right)\, d\tau \right| \le$$
$$\le |u_0 - v_0| + M|t_0 - s_0| + \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau)) \right)\, d\tau \right| .$$

Ragionando come in precedenza, si deduce che

$$\forall t \in [a,b] : \; \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau)) \right)\, d\tau \right| \le \left(e^{c|t-t_0|} - 1 \right) \|u - v\|_{t_0} .$$

Pertanto si ha

$$e^{-c|t-t_0|} |u(t) - v(t)| \le |u_0 - v_0| + M|t_0 - s_0| + \left(1 - e^{-c(b-a)} \right) \|u - v\|_{t_0} ,$$

quindi

$$\|u - v\|_{t_0} \le |u_0 - v_0| + M|t_0 - s_0| + \left(1 - e^{-c(b-a)} \right) \|u - v\|_{t_0} .$$

In conclusione risulta

$$\|u - v\|_\infty \le e^{c(b-a)} \|u - v\|_{t_0} \le e^{2c(b-a)} \left(|u_0 - v_0| + M|t_0 - s_0| \right) \le$$

$$\le (1 + M) \sqrt{2}\, e^{2c(b-a)} \sqrt{|u_0 - v_0|^2 + |t_0 - s_0|^2} \,,$$

da cui la tesi. ■

Nel seguito di questa sezione considereremo un intervallo non vuoto J in $\mathbb{R}$, un aperto A in $J \times \mathbb{R}^n$ ed un'applicazione continua $f : A \to \mathbb{R}^n$. Supporremo che per ogni $(t, x) \in A$ esistano un intorno U di (t, x) in A ed una $c \in]0, +\infty[$ tali che

$$\forall (\tau, \xi_1), (\tau, \xi_2) \in U : \; |f(\tau, \xi_1) - f(\tau, \xi_2)| \le c|\xi_1 - \xi_2| . \tag{1.6}$$

Il collegamento fra questo quadro di ipotesi e quello del Teorema (1.5) è costituito dal risultato seguente.

(1.7) Proposizione *Per ogni* $(t,x) \in A$ *esistono un intorno* $[a,b]$ *di* t *in* J, $r > 0$ *e* $c \in]0,+\infty[$ *tali che* $[a,b] \times \overline{\mathrm{B}\,(x,r)} \subseteq A$,

$$\forall \tau \in [a,b],\, \forall \xi_1, \xi_2 \in \overline{\mathrm{B}\,(x,r)}:\; |f(\tau,\xi_1) - f(\tau,\xi_2)| \leq c|\xi_1 - \xi_2|\,,$$

$$2(b-a)\max\left\{|f(\tau,\xi)|:\; \tau \in [a,b],\, \xi \in \overline{\mathrm{B}\,(x,r)}\right\} \leq r\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $(t,x) \in A$ esistono un intorno $[\alpha,\beta]$ di t in J, $r > 0$ e $c > 0$ tali che $[\alpha,\beta] \times \overline{\mathrm{B}\,(x,r)} \subseteq A$ e

$$\forall \tau \in [\alpha,\beta],\, \forall \xi_1, \xi_2 \in \overline{\mathrm{B}\,(x,r)}:\; |f(\tau,\xi_1) - f(\tau,\xi_2)| \leq c|\xi_1 - \xi_2|\,.$$

Sia $[a,b]$ un intorno di t in J tale che $[a,b] \subseteq [\alpha,\beta]$ e

$$2(b-a)\max\left\{|f(\tau,\xi)|:\; \tau \in [\alpha,\beta],\, \xi \in \overline{\mathrm{B}\,(x,r)}\right\} \leq r\,.$$

Con tali scelte di r, c, a e b la tesi è verificata. ∎

(1.8) Lemma *Siano* $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ *ed* $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ *due soluzioni dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t,u)\,.$$

Supponiamo che esista $\overline{t} \in I_1 \cap I_2$ *tale che* $u_1(\overline{t}) = u_2(\overline{t})$.

Allora $u_1 = u_2$ *su* $I_1 \cap I_2$ *e l'applicazione* $u : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}^n$ *definita da*

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \textit{se } t \in I_1 \\ u_2(t) & \textit{se } t \in I_2 \end{cases}$$

è una soluzione della stessa equazione differenziale.

Dimostrazione. Poniamo

$$C = \{t \in I_1 \cap I_2 :\; u_1(t) = u_2(t)\}\,.$$

Evidentemente C è un chiuso non vuoto nell'intervallo $I_1 \cap I_2$, che è connesso. Dimostriamo che C è aperto in $I_1 \cap I_2$. Dato $s \in C$, siano $[a,b]$ un intorno di s in J, $r > 0$ e $c > 0$

relativi a $(s, u_1(s)) \in A$ in conformità con la Proposizione (1.7). Sia $[\alpha, \beta]$ un intorno di s in $I_1 \cap I_2$ tale che $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$. Allora $u_{1|[\alpha,\beta]}$ ed $u_{2|[\alpha,\beta]}$ sono due soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

con $(t_0, u_0) = (s, u_1(s))$. Per il Teorema (1.5) si ha $u_1 = u_2$ su $[\alpha, \beta]$, ossia $[\alpha, \beta] \subseteq C$. Ne segue che C è aperto in $I_1 \cap I_2$, per cui $C = I_1 \cap I_2$.

L'applicazione u è evidentemente continua e per ogni $t \in I_1 \cup I_2$ si ha

$$u(t) = u(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau\,.$$

Dal Lemma (1.4) si deduce che u risolve l'equazione differenziale $u' = f(t, u)$. ■

(1.9) Definizione *Diciamo che* $u : I \to \mathbb{R}^n$ *è una* soluzione massimale *dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t, u)\,, \tag{1.10}$$

se u risolve (1.10) e se non esiste nessuna soluzione $\tilde{u} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ di (1.10) con $I \subseteq \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$ ed $\tilde{u} = u$ su I.

(1.11) Teorema *Per ogni $(t_0, u_0) \in A$ esiste una ed una sola soluzione massimale $u : I \to \mathbb{R}^n$ dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t, u)$$

tale che $u(t_0) = u_0$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{I}$ l'insieme degli intervalli $\tilde{I}$ in $\mathbb{R}$ tali che esiste una soluzione $\tilde{u} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u)\,, \\ u(t_0) = u_0\,. \end{cases} \tag{1.12}$$

L'insieme $\mathcal{I}$ non è vuoto per la Proposizione (1.7) ed il Teorema (1.5). Sia $I = \bigcup \mathcal{I}$. Se $t \in I_1 \cap I_2$ con $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ ed $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ ed $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ sono due soluzioni di (1.12), si ha $u_1(t) = u_2(t)$ per il Lemma (1.8). Si può quindi definire un'applicazione $u : I \to \mathbb{R}^n$ ponendo $u(t) = \tilde{u}(t)$ se $t \in \tilde{I}$, $\tilde{I} \in \mathcal{I}$ ed $\tilde{u} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ è una soluzione di (1.12). Evidentemente u è continua e

$$\forall t \in I : \, u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau \, .$$

Pertanto u è una soluzione di (1.12) ed è massimale per costruzione.

Se poi $\hat{u} : \hat{I} \to \mathbb{R}^n$ è un'altra soluzione massimale con $\hat{u}(t_0) = u_0$, si ha $\hat{I} \in \mathcal{I}$, da cui $\hat{I} \subseteq I$ ed $\hat{u} = u$ su $\hat{I}$. Per la massimalità di $\hat{u}$ ne segue $\hat{I} = I$ e quindi $\hat{u} = u$. ■

(1.13) Osservazione *L'intervallo I può effettivamente dipendere da (t_0, u_0). Si consideri in $J \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il problema*

$$\begin{cases} u' = 1 + u^2 \, , \\ u(t_0) = u_0 \, . \end{cases}$$

Si verifica facilmente che la soluzione massimale è la funzione

$$u(t) = \tan\left(t - t_0 + \arctan(u_0)\right)$$

definita sull'intervallo

$$I = \left] t_0 - \frac{\pi}{2} - \arctan(u_0), t_0 + \frac{\pi}{2} - \arctan(u_0) \right[\, .$$

Nel risultato seguente forniamo una condizione sufficiente affinché la (1.6) sia verificata.

(1.14) Proposizione *Si supponga che per ogni $(t, x) \in A$ l'applicazione $f(t, \cdot)$ ammetta derivate parziali prime in x e che per ogni $j = 1, \ldots, n$ l'applicazione*

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(t, x) \end{aligned}$$

sia continua.

Allora la condizione (1.6) è verificata per f.

Dimostrazione. Per ogni $(t,x) \in A$ l'applicazione $f(t,\cdot)$ è differenziabile in x per il Teorema del differenziale totale e si ha

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \, d_{\mathbb{R}^n} f(t,x)(v) = \sum_{j=1}^{n} v^{(j)} \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(t,x)\,.$$

Inoltre per ogni $(t,x) \in A$ esistono un intorno $[a,b] \times \mathrm{B}\,(x,r)$ di (t,x) in A e $c > 0$ tali che

$$\forall (\tau,\xi) \in [a,b] \times \mathrm{B}\,(x,r) : \, \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(\tau,\xi) \right|^2 \leq c^2\,,$$

per cui

$$|d_{\mathbb{R}^n} f(\tau,\xi)(v)| \leq \sum_{j=1}^{n} |v^{(j)}| \left| \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(\tau,\xi) \right| \leq c|v|\,.$$

Ne segue che $\|d_{\mathbb{R}^n} f(\tau,\xi)\| \leq c$, per cui

$$\forall \tau \in [a,b],\ \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathrm{B}\,(x,r) : \, |f(\tau,\xi_1) - f(\tau,\xi_2)| \leq c|\xi_1 - \xi_2|\,.$$

Pertanto la (1.6) è verificata. ■

(1.15) Teorema *Sia $u : I \to \mathbb{R}^n$ una soluzione massimale dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t,u)\,.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

(*a*) *l'intervallo I è aperto in J;*

(*b*) *per ogni compatto K in A esiste $s \in I$ tale che $(t,u(t)) \notin K$ per ogni $t \in I \cap]s,+\infty[$;*

(*c*) *per ogni compatto K in A esiste $s \in I$ tale che $(t,u(t)) \notin K$ per ogni $t \in I \cap]-\infty,s[$.*

Dimostrazione.
(*a*) Sia $\sigma \in I$ e siano $[a,b]$ un intorno di σ in J, $r > 0$ e $c > 0$ relativi a $(\sigma,u(\sigma)) \in A$ conformemente alla Proposizione (1.7). Dal Teorema (1.5) si deduce che esiste una soluzione $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t,v) \\ v(\sigma) = u(\sigma) \end{cases}$$

e, per il Lemma (1.8) e la massimalità di u, si ha $[a, b] \subseteq I$. Ne segue che I è aperto in J.
(b) Consideriamo un compatto K in A e supponiamo per assurdo che per ogni $s \in I$ esista $t \in I \cap]s, +\infty[$ tale che $(t, u(t)) \in K$. Allora $\sup I \notin I$ ed esiste una successione (t_h) crescente a $\sup I$ tale che $(t_h, u(t_h)) \in K$. Sia $(t_{h_k}, u(t_{h_k}))$ una sottosuccessione convergente a $(\bar{t}, x) \in K$. Evidentemente $\bar{t} = \sup I$. Siano $[a, b]$ un intorno di $\bar{t}$ in J, $r > 0$ e $c > 0$ relativi a $(\bar{t}, x) \in A$, conformemente alla Proposizione (1.7). Sia k tale che $(t_{h_k}, u(t_{h_k})) \in [a, b] \times \overline{\mathrm{B}\,(x, r/2)}$ e sia $v : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t, v)\,, \\ v(t_{h_k}) = u(t_{h_k})\,. \end{cases}$$

Per il Lemma (1.8) e la massimalità di u, si ha $[a, b] \subseteq I$, il che è assurdo, perché $\bar{t} \in [a, b]$.
(c) Si tratta di una semplice variante della (b). ■

(1.16) Teorema *Sia $(t_{0,h}, u_{0,h})$ una successione in A convergente a $(t_0, u_0) \in A$ e siano $u_h : I_h \to \mathbb{R}^n$ ed $u : I \to \mathbb{R}^n$ le soluzioni massimali dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t, u)$$

tali che $u_h(t_{0,h}) = u_{0,h}$ ed $u(t_0) = u_0$.

Allora per ogni $[\alpha, \beta] \subseteq I$ si ha $[\alpha, \beta] \subseteq I_h$ definitivamente per $h \to \infty$ e

$$\lim_h u_h = u$$

uniformemente su $[\alpha, \beta]$.

Dimostrazione. Sia $[\alpha, \beta] \subseteq I$. Possiamo supporre che $t_0 \in [\alpha, \beta]$.

Consideriamo anzitutto un intorno $[a, b]$ di t_0 in J, $r > 0$ e $c > 0$ relativi a $(t_0, u_0) \in A$ conformemente alla Proposizione (1.7). Per ogni h sufficientemente grande si ha

$$(t_{0,h}, u_{0,h}) \in [a, b] \times \overline{\mathrm{B}\,(u_0, r/2)}\,.$$

Tenendo conto della massimalità di u_h ed u e del Teorema (1.5), si deduce che $[a, b] \subseteq I_h$, $[a, b] \subseteq I$ e

$$\lim_h u_h = u$$

uniformemente su $[a, b]$.

Possiamo allora porre $T = \sup \mathcal{S}$, dove $\mathcal{S}$ è l'insieme degli $s \in [t_0, \beta]$ tali che $[t_0, s] \subseteq I_h$ definitivamente per $h \to \infty$ e tali che

$$\lim_h u_h = u$$

uniformemente su $[t_0, s]$. L'osservazione precedente garantisce che $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Siano ora $[a, b]$ un intorno di T in J, $r > 0$ e $c > 0$ relativi a $(T, u(T)) \in A$, conformemente alla Proposizione (1.7). Sia $s \in \mathcal{S} \cap [a, b]$ tale che $u(s) \in \mathrm{B}\,(u(T), r/2)$. Per ogni h sufficientemente grande si ha $u_h(s) \in \overline{\mathrm{B}\,(u(T), r/2)}$, quindi $[a, b] \subseteq I_h$, $[a, b] \subseteq I$ e

$$\lim_h u_h = u$$

uniformemente su $[a, b]$. Per definizione di T, questo è possibile solo se $T = \beta$ e $\beta \in \mathcal{S}$.

In maniera simile si prova che $[\alpha, t_0] \subseteq I_h$ definitivamente per $h \to \infty$ e che

$$\lim_h u_h = u$$

uniformemente su $[\alpha, t_0]$, da cui la tesi. ■

(1.17) Lemma (di Gronwall) *Siano $P \in [0, +\infty[$, $Q \in \mathbb{R}$ e sia $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che*

$$\forall t \in [a, b] : \; v(t) \leq Q + P \int_a^t v(\tau)\, d\tau \,.$$

Allora si ha

$$\forall t \in [a, b] : \; v(t) \leq Q \exp(P(t - a)) \,.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$V(t) = Q + P \int_a^t v(\tau)\, d\tau \,.$$

Allora V è derivabile e si ha

$$V'(t) = P\, v(t) \leq P\, V(t) \,.$$

Ne segue che

$$V'(t) \exp(-Pt) - P\, V(t) \exp(-Pt) \leq 0 \,,$$

ossia

$$(V(t)\,\exp(-Pt))' \leq 0\,.$$

Allora si ha

$$V(t)\,\exp(-Pt) \leq V(a)\,\exp(-Pa) = Q\,\exp(-Pa)\,,$$

quindi

$$v(t) \leq V(t) \leq Q\,\exp(P(t-a))\,,$$

da cui la tesi. ∎

(1.18) Teorema *Supponiamo che* $A = J \times \mathbb{R}^n$ *e che per ogni* $[\alpha, \beta] \subseteq J$ *esista* $P \in [0, +\infty[$ *tale che*

$$\forall (t, x) \in [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n : \, |f(t, x)| \leq P(1 + |x|)\,.$$

Allora ogni soluzione massimale dell'equazione differenziale

$$u' = f(t, u)$$

è definita su J*.*

Dimostrazione. Sia $u : I \to \mathbb{R}^n$ una soluzione massimale. Fissiamo $\alpha \in I$ e consideriamo un qualunque $\beta \in J$. Se $\beta \geq \alpha$, per ogni $t \in I \cap [\alpha, \beta]$ si ha

$$|u(t)| \leq |u(\alpha)| + \int_\alpha^t |f(\tau, u(\tau))|\,d\tau \leq |u(\alpha)| + P(\beta - \alpha) + P\int_\alpha^t |u(\tau)|\,d\tau\,.$$

Dal Lemma di Gronwall si deduce che

$$|u(t)| \leq (|u(\alpha)| + P(\beta - \alpha))\,\exp(P(\beta - \alpha))\,.$$

Consideriamo il compatto di A

$$K = [\alpha, \beta] \times \overline{\mathrm{B}\,(0, R)}\,,$$

dove $R = (|u(\alpha)| + P(\beta - \alpha))\,\exp(P(\beta - \alpha))$. Per il Teorema (1.15) esiste $s \in I$ tale che $(t, u(t)) \notin K$ per ogni $t \in I \cap]s, +\infty[$. Allora deve essere $s \geq \alpha$. Inoltre, essendo I aperto in J, non può essere $s < \beta$. Ne segue che $\beta \in I$.

Se $\beta \leq \alpha$, si prova in modo simile che $\beta \in I$. Ne segue $I = J$. ∎

(1.19) Teorema *Siano J un intervallo non vuoto in $\mathbb{R}$ ed $A : J \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$, $B : J \to \mathbb{K}^n$ due applicazioni continue. Sia inoltre $f : J \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definita da*

$$f(t,x) = A(t)x + B(t)\,.$$

Allora f è continua, verifica la (1.6) e per ogni $[\alpha,\beta] \subseteq J$ esiste $P \in [0,+\infty[$ tale che

$$\forall (t,x) \in [\alpha,\beta] \times \mathbb{K}^n : \ |f(t,x)| \leq P(1+|x|)\,.$$

Ne segue che ogni soluzione massimale dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t)$$

è definita su J.

Inoltre, per ogni $(t_0,u_0) \in J \times \mathbb{K}^n$, esiste una ed una sola soluzione $u : J \to \mathbb{K}^n$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = A(t)u + B(t)\,, \\ u(t_0) = u_0\,. \end{cases}$$

Dimostrazione. L'applicazione f è continua, perché composizione di applicazioni continue. Se $[\alpha,\beta] \subseteq J$, poniamo

$$c = \max\left\{\|A(t)\| : \ t \in [\alpha,\beta]\right\}\,.$$

Allora per ogni $(t,x_1), (t,x_2) \in [\alpha,\beta] \times \mathbb{K}^n$ si ha

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |A(t)(x_1 - x_2)| \leq$$

$$\leq \|A(t)\|\,|x_1 - x_2| \leq c|x_1 - x_2|\,.$$

Pertanto la condizione (1.6) è verificata.

Inoltre per ogni $(t,x) \in [\alpha,\beta] \times \mathbb{K}^n$ si ha

$$|f(t,x)| \leq |f(t,0)| + |f(t,x) - f(t,0)| \leq$$

$$\leq |B(t)| + c|x| \leq \left(\max_{\alpha \leq t \leq \beta} |B(t)| + c\right)(1+|x|)\,.$$

L'affermazione riguardante il problema di Cauchy discende dal Teorema (1.11). ■

Esercizi

1. Sia $f : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua verificante la (1.6), sia $u : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = f(t, u)$$

e sia $v : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che

$$\begin{cases} v' \leq f(t, v)\,, \\ v(\alpha) \leq u(\alpha)\,. \end{cases}$$

Si dimostri che $v(t) \leq u(t)$ per ogni $t \in [\alpha, \beta]$.

2. Si verifichi che le funzioni $v(t) = 0$ e $w(t) = t^3$ sono entrambe soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3\sqrt[3]{u^2}\,, \\ u(0) = 0\,. \end{cases}$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t, u) = \begin{cases} \dfrac{3u}{t} & \text{se } u^2 < t^6\,, \\ 3t\sqrt[3]{u} & \text{se } u^2 \geq t^6\,. \end{cases}$$

Si dimostri che f è continua, di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e che $v(t) = 0$ e $w(t) = t^3$ sono entrambe soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u)\,, \\ u(0) = 0\,. \end{cases}$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente lipschitziana e decrescente e sia $u : I \to \mathbb{R}$ una soluzione massimale dell'equazione differenziale

$$u' = f \circ u\,.$$

Si dimostri che $\sup I = +\infty$.

5. Siano $u, v : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ due applicazioni continue tali che

$$-\int_\alpha^\beta (u(t)|\varphi'(t))\, dt = \int_\alpha^\beta (v(t)|\varphi(t))\, dt$$

per ogni $\varphi \in C^1([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$ con $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$. Si dimostri che u è derivabile e che $u' = v$.

6. Sia $L : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si supponga che per ogni $t \in [\alpha, \beta]$ la funzione $\{(q, v) \mapsto L(t, q, v)\}$ sia di classe C^1 e che le applicazioni $\nabla_q L, \nabla_v L : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ siano continue.

Sia $Y = \{u \in C^1([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n) :\ u(\alpha) = u(\beta) = 0\}$ e sia $\mathcal{L} : Y \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathcal{L}(u) = \int_\alpha^\beta L(t, u(t), u'(t))\, dt\,.$$

Si dimostri che

(a) $\mathcal{L}$ è derivabile in ogni $u \in Y$ rispetto ad ogni $w \in Y$ e

$$\mathcal{L}'(u)(w) = \int_\alpha^\beta [(\nabla_q L(t, u(t), u'(t))|w(t)) + (\nabla_v L(t, u(t), u'(t))|w'(t))]\, dt\,;$$

(b) si ha $\mathcal{L}'(u)(w) = 0$ per ogni $w \in Y$ se e solo se l'applicazione

$$\{t \mapsto \nabla_v L(t, u(t), u'(t))\}$$

è di classe C^1 e

$$\nabla_q L(t, u(t), u'(t)) - \frac{d}{dt}\,(\nabla_v L(t, u(t), u'(t))) = 0\,.$$

2 Il caso lineare a coefficienti costanti

In questa sezione consideriamo equazioni lineari di ordine n *a coefficienti costanti*, ossia del tipo

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u + b(t)\,,$$

dove $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ e $b : J \to \mathbb{K}$ è una funzione continua.

(2.1) Definizione *Se*

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$$

è un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$*, definiamo un'applicazione lineare*

$$P(D) : C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$$

ponendo

$$P(D)(u) := \sum_{j=0}^{n} a_j D^j u \,.$$

(2.2) Teorema *Se* P *e* Q *sono due polinomi a coefficienti in* $\mathbb{C}$*, si ha*

$$(P + Q)(D) = P(D) + Q(D)\,,$$

$$(PQ)(D) = P(D) \circ Q(D)\,.$$

In particolare, risulta $P(D) \circ Q(D) = Q(D) \circ P(D)$*.*

Dimostrazione. Si verifica facilmente che

$$\forall u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : \; ((P + Q)(D))\,(u) = (P(D) + Q(D))\,(u)\,.$$

Siano

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j\,,$$

$$Q(z) = z + b\,.$$

Allora risulta

$$(PQ)(z) = a_n z^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} (b a_j + a_{j-1}) z^j + b a_0$$

ed anche

$$P(D)\,(Q(D)(u)) = P(D)\,(Du + bu) =$$

$$= a_n D^{n+1} u + \sum_{j=1}^{n} (b a_j + a_{j-1}) D^j u + b a_0 u\,.$$

Pertanto si ha

$$((PQ)(D))\,(u) = (P(D) \circ Q(D))\,(u)\,.$$

In generale, per dimostrare che

$$(PQ)(D) = P(D) \circ Q(D)\,,$$

ragioniamo per induzione sul grado di Q. Se Q è costante, la tesi è evidente. Se Q ha grado maggiore o uguale ad uno, si può scrivere $Q = Q_1 Q_2$ con $Q_2(z) = z + b$. Allora si ha

$$((PQ)(D))\,(u) = ((PQ_1Q_2)(D))\,(u) = (PQ_1)(D)\,(Q_2(D)(u)) =$$

$$= P(D)\,(Q_1(D) \circ Q_2(D)(u)) = (P(D) \circ Q(D))\,(u)\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.3) Lemma *Siano P un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $m \geq 0$.*

Allora

$$(D - \lambda \mathrm{Id})^m\,(\exp(\lambda t)\,P(t)) = \exp(\lambda t) D^m P(t)\,.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su m. Se $m = 0$, la tesi è evidente. Consideriamo $m \geq 1$ e supponiamo che la tesi sia vera per $m - 1$. Allora si ha

$$(D - \lambda \mathrm{Id})^m\,(\exp(\lambda t)\,P(t)) = (D - \lambda \mathrm{Id})(D - \lambda \mathrm{Id})^{m-1}\,(\exp(\lambda t)\,P(t)) =$$

$$= (D - \lambda \mathrm{Id})\,\big(\exp(\lambda t)\,D^{m-1}P(t)\big) =$$

$$= \lambda \exp(\lambda t)\,D^{m-1}P(t) + \exp(\lambda t)\,D^m P(t) - \lambda \exp(\lambda t)\,D^{m-1}P(t) =$$

$$= \exp(\lambda t)\,D^m P(t)\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.4) Lemma *Siano P un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $m \geq 0$.*

Allora esiste un polinomio Q a coefficienti in $\mathbb{C}$ dello stesso grado di P tale che

$$D^m\,(\exp(\lambda t)\,P(t)) = \exp(\lambda t)\,Q(t)\,.$$

In particolare, Q è identicamente nullo se e solo se P è identicamente nullo.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su m. Se $m = 0$, la tesi è evidente. Consideriamo $m \geq 1$ e supponiamo che la tesi sia vera per $m-1$. Sia $\widetilde{Q}$ un polinomio dello stesso grado di P tale che

$$D^{m-1}\left(\exp(\lambda t)\, P(t)\right) = \exp(\lambda t)\, \widetilde{Q}(t)\,.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} D^m\left(\exp(\lambda t)\, P(t)\right) &= D\, D^{m-1}\left(\exp(\lambda t)\, P(t)\right) = \\ = D\left(\exp(\lambda t)\, \widetilde{Q}(t)\right) &= \exp(\lambda t)\, \left(\lambda\widetilde{Q}(t) + \widetilde{Q}'(t)\right)\,. \end{aligned}$$

Essendo $\lambda \neq 0$, il polinomio $\lambda\widetilde{Q}(t) + \widetilde{Q}'(t)$ ha lo stesso grado di $\widetilde{Q}$. ■

(2.5) Teorema *Siano $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ e sia*

$$z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j = (z-\lambda_1)^{m_1} \cdots (z-\lambda_k)^{m_k}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ distinti e $m_1, \ldots, m_k \geq 1$.

Allora una base nell'insieme delle soluzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dell'equazione differenziale omogenea

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u$$

è costituita dalle funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \ldots, t^{m_1-1}\exp(\lambda_1 t), \ldots, \exp(\lambda_k t), \ldots, t^{m_k-1}\exp(\lambda_k t)\,.$$

Dimostrazione. Posto

$$P(z) = z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j\,,$$

si ha che $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ risolve l'equazione differenziale

$$D^n u - \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u = 0$$

se e solo se $P(D)(u) = 0$.

Se Q è un polinomio di grado al più $m_j - 1$, si deduce dal Lemma (2.3) che

$$(D - \lambda_j \mathrm{Id})^{m_j}\left(\exp(\lambda_j t)\, Q(t)\right) = 0\,.$$

Allora per il Teorema (2.2) si ha

$$P(D)\left(\exp(\lambda_j t)\, Q(t)\right) =$$

$$= (D-\lambda_1 \mathrm{Id})^{m_1} \cdots (D-\lambda_k \mathrm{Id})^{m_k} \left(\exp(\lambda_j t)\, Q(t)\right) = 0\,.$$

Ne segue che le funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \ldots, t^{m_1-1}\exp(\lambda_1 t), \ldots, \exp(\lambda_k t), \ldots, t^{m_k-1}\exp(\lambda_k t)$$

sono tutte soluzioni dell'equazione differenziale

$$D^n u - \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u = 0\,.$$

Dimostriamo ora che, se $Q_1, \ldots, Q_k$ sono dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$ e

$$\forall t \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^{k} \exp(\lambda_j t)\, Q_j(t) = 0\,,$$

allora ogni Q_j è identicamente nullo. Ragioniamo per induzione su k. Se $k = 1$, il risultato è evidente. Consideriamo $k \geq 2$ e supponiamo che la tesi sia vera per $k-1$. Se d è il grado di Q_k, deriviamo $d+1$ volte la relazione

$$\sum_{j=1}^{k-1} \exp\left((\lambda_j - \lambda_k)t\right)\, Q_j(t) + Q_k(t) = 0\,.$$

Tenendo conto del Lemma (2.4), si ottiene

$$\sum_{j=1}^{k-1} \exp\left((\lambda_j - \lambda_k)t\right)\, \widetilde{Q}_j(t) = 0\,,$$

dove $\widetilde{Q}_1, \ldots, \widetilde{Q}_{k-1}$ sono dei polinomi dello stesso grado di $Q_1, \ldots, Q_{k-1}$, rispettivamente. Per l'ipotesi induttiva, ogni $\widetilde{Q}_1, \ldots, \widetilde{Q}_{k-1}$ è identicamente nullo, per cui anche $Q_1, \ldots, Q_{k-1}$ sono identicamente nulli. Ne segue che anche Q_k è identicamente nullo.

Ora possiamo dimostrare che le funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \ldots, t^{m_1-1}\exp(\lambda_1 t), \ldots, \exp(\lambda_k t), \ldots, t^{m_k-1}\exp(\lambda_k t)$$

sono linearmente indipendenti. Se $\mu_{j,h} \in \mathbb{C}$ sono tali che

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{h=0}^{m_j-1} \mu_{j,h} t^h\, \exp(\lambda_j t) = 0\,,$$

risulta dal ragionamento precedente che ogni polinomio

$$\sum_{h=0}^{m_j-1} \mu_{j,h} t^h$$

è identicamente nullo, per cui $\mu_{j,h} = 0$ per ogni h, j.

Poiché $m_1 + \cdots + m_k = n$, le funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \ldots, t^{m_1-1} \exp(\lambda_1 t), \ldots, \exp(\lambda_k t), \ldots, t^{m_k-1} \exp(\lambda_k t)$$

sono esattamente n e costituiscono quindi una base nell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale data. ■

(2.6) Corollario *Siano $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ e sia*

$$z^n - \sum_{j=0}^{n} a_j z^j =$$

$$= (z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_h)^{m_h} (z - \mu_{h+1} - i\omega_{h+1})^{m_{h+1}}$$

$$(z - \mu_{h+1} + i\omega_{h+1})^{m_{h+1}} \cdots (z - \mu_k - i\omega_k)^{m_k} (z - \mu_k + i\omega_k)^{m_k}$$

con

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_h, \mu_{h+1} + i\omega_{h+1}, \mu_{h+1} - i\omega_{h+1}, \cdots, \mu_k + i\omega_k, \mu_k - i\omega_k \in \mathbb{C}$$

distinti ($\lambda_j, \mu_j, \omega_j \in \mathbb{R}$) e $m_1, \ldots, m_k \geq 1$.

Allora una base nell'insieme delle soluzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ dell'equazione differenziale omogenea

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u$$

è costituita dalle funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \ldots, t^{m_1-1} \exp(\lambda_1 t), \ldots, \exp(\lambda_h t), \ldots, t^{m_h-1} \exp(\lambda_h t),$$

$$\exp(\mu_{h+1} t) \cos(\omega_{h+1} t), \exp(\mu_{h+1} t) \sin(\omega_{h+1} t), \cdots, t^{m_{h+1}-1} \exp(\mu_{h+1} t) \cos(\omega_{h+1} t),$$

$$t^{m_{h+1}-1} \exp(\mu_{h+1} t) \sin(\omega_{h+1} t), \cdots, \exp(\mu_k t) \cos(\omega_k t),$$

$$\exp(\mu_k t) \sin(\omega_k t), \cdots, t^{m_k-1} \exp(\mu_k t) \cos(\omega_k t), t^{m_k-1} \exp(\mu_k t) \sin(\omega_k t)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Per il teorema precedente le funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \dots, t^{m_1-1}\exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_h t), \dots, t^{m_h-1}\exp(\lambda_h t),$$

$$\exp((\mu_{h+1} + i\omega_{h+1})t), \cdots, t^{m_{h+1}-1}\exp((\mu_{h+1} + i\omega_{h+1})t),$$

$$\exp((\mu_{h+1} - i\omega_{h+1})t), \cdots, t^{m_{h+1}-1}\exp((\mu_{h+1} - i\omega_{h+1})t), \cdots,$$

$$\exp((\mu_k + i\omega_k)t), \cdots, t^{m_k-1}\exp((\mu_k + i\omega_k)t),$$

$$\exp((\mu_k - i\omega_k)t), \cdots, t^{m_k-1}\exp((\mu_k - i\omega_k)t)$$

costituiscono una base nell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u\,.$$

D'altronde si ha

$$\exp((\mu + i\omega)t) = \exp(\mu t)\cos(\omega t) + i\exp(\mu t)\sin(\omega t)\,,$$

$$\exp((\mu - i\omega)t) = \exp(\mu t)\cos(\omega t) - i\exp(\mu t)\sin(\omega t)\,,$$

$$\exp(\mu t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\exp((\mu + i\omega)t) + \frac{1}{2}\exp((\mu - i\omega)t)\,,$$

$$\exp(\mu t)\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\exp((\mu + i\omega)t) - \frac{1}{2i}\exp((\mu - i\omega)t)\,.$$

Pertanto anche le funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \dots, t^{m_1-1}\exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_h t), \dots, t^{m_h-1}\exp(\lambda_h t),$$

$$\exp(\mu_{h+1}t)\cos(\omega_{h+1}t), \exp(\mu_{h+1}t)\sin(\omega_{h+1}t), \cdots, t^{m_{h+1}-1}\exp(\mu_{h+1}t)\cos(\omega_{h+1}t),$$

$$t^{m_{h+1}-1}\exp(\mu_{h+1}t)\sin(\omega_{h+1}t), \cdots, \exp(\mu_k t)\cos(\omega_k t),$$

$$\exp(\mu_k t)\sin(\omega_k t), \cdots, t^{m_k-1}\exp(\mu_k t)\cos(\omega_k t), t^{m_k-1}\exp(\mu_k t)\sin(\omega_k t)$$

generano lo stesso spazio vettoriale e, essendo n, costituiscono una base.

Consideriamo ora il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Le n funzioni appena considerate sono a valori reali e soddisfano l'equazione differenziale data. Essendo linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$, esse sono a maggior ragione linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Poiché l'insieme delle soluzioni reali dell'equazione differenziale è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$, esse costituiscono una base. ■

Capitolo 7

Teoria della misura

1 La misura di Hausdorff

(1.1) Lemma *Siano $I, I_0, \ldots, I_k$ degli $n-$intervalli chiusi e limitati in $\mathbb{R}^n$ tali che*

$$I \subseteq \bigcup_{h=0}^{k} I_h \,.$$

Allora si ha

$$m_n(I) \leq \sum_{h=0}^{k} m_n(I_h) \,.$$

Dimostrazione. Per semplicità faremo la dimostrazione nel caso $n = 2$. Possiamo inoltre supporre $I \neq \emptyset$.

Ragioniamo per induzione su k. Se $k = 0$, la tesi è ovvia. Consideriamo $k \geq 1$ e supponiamo che la tesi sia vera per $k - 1$.

Se $I = I^{(1)} \times I^{(2)}$, il punto $\left(\max I^{(1)}, \max I^{(2)}\right)$ appartiene a qualche I_h. A meno di riordinare gli I_h, si può supporre che appartenga ad I_k. Se $I_k = I_k^{(1)} \times I_k^{(2)}$, si ha quindi $\max I^{(1)} \leq \max I_k^{(1)}$ e $\max I^{(2)} \leq \max I_k^{(2)}$. Posto $a_1 = \min I_k^{(1)}$ ed $a_2 = \min I_k^{(2)}$, risulta

$$m_2(I) = m_2(J_1) + m_2(J_2) + m_2(J_3) \,,$$

dove

$$J_1 = I \cap (]-\infty, a_1] \times \mathbb{R}) \,,$$

$$J_2 = I \cap ([a_1, +\infty[\times]-\infty, a_2]) \,,$$

$$J_3 = I \cap ([a_1, +\infty[\times [a_2, +\infty[) \,.$$

Per $h = 0, \ldots, k-1$ poniamo

$$I'_h = I_h \cap (]-\infty, a_1] \times \mathbb{R}),$$

$$I''_h = I_h \cap ([a_1, +\infty[\times \mathbb{R}).$$

Evidentemente $m_2(I_h) = m_2(I'_h) + m_2(I''_h)$ e

$$J_1 \subseteq \bigcup_{h=0}^{k-1} I'_h,$$

$$J_2 \subseteq \bigcup_{h=0}^{k-1} I''_h,$$

$$J_3 \subseteq I_k.$$

Tenendo conto dell'ipotesi induttiva, si deduce che

$$m_2(I) = m_2(J_1) + m_2(J_2) + m_2(J_3) \leq$$

$$\leq \sum_{h=0}^{k-1} m_2(I'_h) + \sum_{h=0}^{k-1} m_2(I''_h) + m_2(I_k) =$$

$$= \sum_{h=0}^{k-1} (m_2(I'_h) + m_2(I''_h)) + m_2(I_k) = \sum_{h=0}^{k} m_2(I_h),$$

da cui la tesi. ■

(1.2) Proposizione *Per ogni $m \geq 1$, $\delta > 0$ e per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha*

$$\inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{diam}\,(E_h))^m :\, E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\, \mathrm{diam}\,(E_h) < \delta\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{diam}\,(A_h))^m :\, A_h \text{ è aperto in } \mathbb{R}^n,\, E \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h,\, \mathrm{diam}\,(A_h) < \delta\right\}.$$

Dimostrazione. Se $E \subseteq \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} A_h$ con A_h aperto in $\mathbb{R}^n$ e $\mathrm{diam}\,(A_h) < \delta$, si ha

$$E = \bigcup_{h=0}^{\infty}(A_h \cap E)$$

con $\operatorname{diam}(A_h \cap E) < \delta$, quindi

$$\inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h))^m : E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\ \operatorname{diam}(E_h) < \delta\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(A_h \cap E))^m \leq \sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(A_h))^m .$$

È pertanto evidente che

$$\inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h))^m : E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\ \operatorname{diam}(E_h) < \delta\right\} \leq$$

$$\leq \inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(A_h))^m : A_h \text{ è aperto in } \mathbb{R}^n,\ E \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h,\ \operatorname{diam}(A_h) < \delta\right\} .$$

Sia ora

$$M > \inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h))^m : E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\ \operatorname{diam}(E_h) < \delta\right\}$$

e sia $E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$ con $\operatorname{diam}(E_h) < \delta$ e

$$\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h))^m < M .$$

Sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h))^m \leq M - \varepsilon$$

e sia $\sigma_h > 0$ tale che $\operatorname{diam}(E_h) + 2\sigma_h < \delta$ e

$$(\operatorname{diam}(E_h) + 2\sigma_h)^m \leq (\operatorname{diam}(E_h))^m + \varepsilon 2^{-h-1} .$$

Poniamo

$$A_h = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E_h) < \sigma_h\}$$

se $E_h \neq \emptyset$, altrimenti poniamo $A_h = \emptyset$. Allora A_h è aperto in $\mathbb{R}^n$, $E \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h$ e si ha

$$\operatorname{diam}(A_h) \leq \operatorname{diam}(E_h) + 2\sigma_h < \delta ,$$

$$\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(A_h))^m \leq \sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h) + 2\sigma_h)^m \leq$$

$$\leq \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(E_h))^m + \varepsilon \sum_{h=0}^{\infty} 2^{-h-1} \leq (M-\varepsilon) + \varepsilon = M\,.$$

Pertanto

$$M \geq \inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(A_h))^m : \, A_h \text{ è aperto in } \mathbb{R}^n,\, E \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h,\, \mathrm{diam}\,(A_h) < \delta \right\}.$$

Per l'arbitrarietà di M, deve essere

$$\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(E_h))^m : \, E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\, \mathrm{diam}\,(E_h) < \delta \right\} \geq$$

$$\geq \inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(A_h))^m : \, A_h \text{ è aperto in } \mathbb{R}^n,\, E \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h,\, \mathrm{diam}\,(A_h) < \delta \right\},$$

da cui la tesi. ■

(1.3) Proposizione *Per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$0 < \sup_{\delta>0} \left(\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(E_h))^n : \, [0,1]^n = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\, \mathrm{diam}\,(E_h) < \delta \right\} \right) < +\infty\,.$$

Dimostrazione. Dato $\delta > 0$, sia $k \geq 1$ tale che $k^{-1}\sqrt{n} < \delta$. Dividendo ogni intervallo [0,1] in k parti uguali, si ottiene una famiglia $\{I_h : 1 \leq h \leq k^n\}$ di $n-$intervalli chiusi e limitati che ricoprono $[0,1]^n$ e soddisfano $\mathrm{diam}\,(I_h) = k^{-1}\sqrt{n} < \delta$. Allora si ha

$$\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(E_h))^n : \, [0,1]^n = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\, \mathrm{diam}\,(E_h) < \delta \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{h=1}^{k^n} (\mathrm{diam}\,(I_h))^n = k^n k^{-n} n^{n/2} = n^{n/2}\,.$$

Pertanto

$$\sup_{\delta>0} \left(\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(E_h))^n : \, [0,1]^n = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\, \mathrm{diam}\,(E_h) < \delta \right\} \right) \leq n^{n/2}\,.$$

Sia ora (A_h) una successione di aperti in $\mathbb{R}^n$ tale che $[0,1]^n \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h$. Possiamo supporre $A_h \neq \emptyset$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Per la compattezza di $[0,1]^n$, si avrà

$$[0,1]^n \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} A_{h_i}$$

per certi $h_0, \dots, h_k \in \mathbb{N}$. Sia $x_h \in A_h$ e sia

$$I_h = \prod_{j=1}^{n} \left[x_h^{(j)} - \operatorname{diam}(A_h)\,, x_h^{(j)} + \operatorname{diam}(A_h) \right] .$$

Evidentemente risulta

$$m_n(I_h) = 2^n (\operatorname{diam}(A_h))^n$$

ed $A_h \subseteq I_h$, per cui

$$[0,1]^n \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} I_{h_i} .$$

Tenendo conto del Lemma (1.1), si deduce che

$$\sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_h))^n \geq \sum_{i=0}^{k} (\operatorname{diam}(A_{h_i}))^n =$$

$$= 2^{-n} \sum_{i=0}^{k} m_n(I_{h_i}) \geq 2^{-n} .$$

Risulta quindi

$$\sup_{\delta>0} \left(\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_h))^n :\ A_h \text{ è aperto in } \mathbb{R}^n,\ [0,1]^n \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h,\ \operatorname{diam}(A_h) < \delta \right\} \right) \geq$$

$$\geq 2^{-n} .$$

Tenuto conto della proposizione precedente, ne segue

$$\sup_{\delta>0} \left(\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_h))^n :\ [0,1]^n = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\ \operatorname{diam}(E_h) < \delta \right\} \right) \geq 2^{-n} ,$$

da cui la tesi. ■

(1.4) Teorema *Per ogni $m \geq 1$ e per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ esiste una successione (A_h) di aperti in $\mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq \bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h$ e*

$$\mathcal{H}^m(E) = \mathcal{H}^m \left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h \right) .$$

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che per ogni $\delta > 0$ esiste un aperto A in $\mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq A$ e $\mathcal{H}^m_\delta(A) \leq \mathcal{H}^m(E) + \delta$.

Sia (A_h) una successione di aperti in $\mathbb{R}^n$ tali che $E \subseteq \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} A_h$, $\operatorname{diam}(A_h) < \delta$ e

$$\alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_h))^m \leq \mathcal{H}_\delta^m(E) + \delta \leq \mathcal{H}^m(E) + \delta\,.$$

Se poniamo

$$A = \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\,,$$

risulta che A è un aperto contenente E e

$$\mathcal{H}_\delta^m(A) \leq \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_h))^m \leq \mathcal{H}^m(E) + \delta\,.$$

Dimostriamo ora la tesi. Sia $\delta_h = \frac{1}{h+1}$ e sia A_h un aperto in $\mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq A_h$ e

$$\mathcal{H}_{\delta_h}^m(A_h) \leq \mathcal{H}^m(E) + \delta_h\,.$$

Risulta $E \subseteq \bigcap\limits_{h=0}^{\infty} A_h$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}_{\delta_k}^m\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\right) \leq \mathcal{H}_{\delta_k}^m(A_k) \leq \mathcal{H}^m(E) + \delta_k\,.$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, si ottiene

$$\mathcal{H}^m\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\right) \leq \mathcal{H}^m(E)\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.5) Teorema *Se $n \geq 1$ ed $I = \prod\limits_{j=1}^{n} I^{(j)}$ è un $n-$intervallo limitato e non vuoto in $\mathbb{R}^n$ con*

$$\sup I^{(1)} - \inf I^{(1)} = \cdots = \sup I^{(n)} - \inf I^{(n)}\,,$$

si ha

$$\mathcal{H}^n(I) = m_n(I)\,.$$

Dimostrazione. Evidentemente $\mathcal{H}^n([0,1]^n) = 1$. Essendo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ isometrico a $[0,1]^n$, si ha

$$\mathcal{H}^n\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n\right) = 1\,.$$

Applicando un'omotetia di coefficiente $2\lambda > 0$, si deduce che $\mathcal{H}^n([-\lambda,\lambda]^n) = (2\lambda)^n$. Poiché per ogni $\varepsilon \in]0,\lambda[$

$$(2\lambda - 2\varepsilon)^n = \mathcal{H}^n([-\lambda+\varepsilon,\lambda-\varepsilon]^n) \leq$$

$$\leq \mathcal{H}^n(]-\lambda,\lambda[^n) \leq \mathcal{H}^n([-\lambda,\lambda]^n) = (2\lambda)^n\,,$$

risulta anche $\mathcal{H}^n(]-\lambda,\lambda[^n) = (2\lambda)^n$.

Attraverso un'opportuna traslazione, I è isometrico ad un $n-$intervallo J con

$$\sup J^{(j)} = \lambda\,, \quad \inf J^{(j)} = -\lambda\,.$$

Poiché

$$]-\lambda,\lambda[^n \subseteq J \subseteq [-\lambda,\lambda]^n\,,$$

si ha $\mathcal{H}^n(I) = \mathcal{H}^n(J) = (2\lambda)^n = m_n(I)$. ■

Esercizi

1. Sia I un $n-$intervallo limitato in $\mathbb{R}^n$. Si dimostri che $\mathcal{L}^n(I) = m_n(I)$.

2 Misure esterne

(2.1) Teorema *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che per ogni coppia E,F di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}^n$ con*

$$\inf\{|x-y| : x \in E,\, y \in F\} > 0$$

si abbia $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

Allora ogni aperto ed ogni chiuso di $\mathbb{R}^n$ è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che ogni chiuso è $\mu-$misurabile. Dato un chiuso non vuoto C in $\mathbb{R}^n$, basta provare che

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C)$$

per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mu(F) < +\infty$.

Poniamo per ogni $h \geq 1$

$$A_h = \left\{ x \in F : \, d(x, C) > \frac{1}{h} \right\},$$

$$S_h = \left\{ x \in F : \, \frac{1}{h+1} < d(x, C) \leq \frac{1}{h} \right\}.$$

Poiché

$$\inf \{|x - y| : \, x \in S_h, \, y \in S_{h+2}\} \geq \frac{1}{(h+1)(h+2)} > 0 \,,$$

si ha

$$\forall h \geq 1 : \, \mu(S_h) + \mu(S_{h+2}) = \mu(S_h \cup S_{h+2}) \,.$$

Ne segue

$$\sum_{h=1}^{k} \mu(S_{2h}) = \mu\left(\bigcup_{h=1}^{k} S_{2h}\right) \leq \mu(F) \,,$$

$$\sum_{h=1}^{k} \mu(S_{2h-1}) = \mu\left(\bigcup_{h=1}^{k} S_{2h-1}\right) \leq \mu(F) \,,$$

quindi

$$\sum_{h=1}^{2k} \mu(S_h) \leq 2\mu(F) \,,$$

da cui si deduce che

$$\sum_{h=1}^{\infty} \mu(S_h) < +\infty \,.$$

Essendo C chiuso, si ha

$$x \notin C \Longleftrightarrow d(x, C) > 0 \,,$$

quindi

$$\forall k \geq 1 : \, F \setminus C = A_k \cup \left(\bigcup_{h=k}^{\infty} S_h \right).$$

Pertanto risulta

$$\mu(F \setminus C) \leq \mu(A_k) + \sum_{h=k}^{\infty} \mu(S_h) \,.$$

Tenuto conto che

$$\inf \{|x - y| : \, x \in F \cap C, \, y \in A_k\} \geq \frac{1}{k} > 0 \,,$$

ne segue

$$\mu(F) \geq \mu\left((F \cap C) \cup A_k\right) = \mu(F \cap C) + \mu(A_k) \geq$$
$$\geq \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C) - \sum_{h=k}^{\infty} \mu(S_h)\,.$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, si ottiene

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C)\,,$$

da cui la $\mu-$misurabilità di C. ■

(2.2) Teorema *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che:*

(i) *ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ sia $\mu-$misurabile;*

(ii) *ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ sia contenuto in un'intersezione numerabile di aperti $\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h$ tale che*

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h\right)\,;$$

(iii) *si abbia $\mu(K) < +\infty$ per ogni compatto K di $\mathbb{R}^n$.*

Allora per ogni sottoinsieme $\mu-$misurabile E di $\mathbb{R}^n$ valgono i seguenti fatti:

(a) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A in $\mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$;*

(b) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso C in $\mathbb{R}^n$ tale che $C \subseteq E$ e $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$;*

(c) *esistono una successione decrescente (A_h) di aperti in $\mathbb{R}^n$ ed un sottoinsieme E_0 $\mu-$trascurabile in $\mathbb{R}^n$ tali che*

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h\,,$$
$$\lim_h \mu(A_h) = \mu(E)\,;$$

(d) *esistono una successione crescente (K_h) di compatti in $\mathbb{R}^n$ ed un sottoinsieme E_0 $\mu-$trascurabile in $\mathbb{R}^n$ tali che*

$$E = \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} K_h\right) \cup E_0\,.$$

Dimostrazione.

(a) Sia $E_h = E\cap]-h,h[^n$ e sia $(A_{h,j})$ una successione di aperti in $\mathbb{R}^n$ tale che

$$E_h \subseteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{h,j}\,,$$

$$\mu(E_h) = \mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{h,j}\right)\,.$$

Se poniamo

$$G_{h,j} =]-h,h[^n \cap A_{h,0}\cap\cdots\cap A_{h,j}\,,$$

risulta che $(G_{h,j})$ è una successione decrescente di aperti di misura finita tali che

$$E_h \subseteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} G_{h,j} \subseteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{h,j}\,,$$

$$\mu(E_h) = \mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} G_{h,j}\right)\,.$$

Dato $\varepsilon > 0$, esiste un $G_{h,j}$ tale che

$$\mu(G_{h,j}) < \mu(E_h) + \varepsilon 2^{-h-1}\,.$$

Chiamiamo A_h un tale $G_{h,j}$. Allora si ha $E_h \subseteq A_h$ e

$$\mu(A_h \setminus E_h) = \mu(A_h) - \mu(E_h) < \varepsilon 2^{-h-1}\,.$$

Se poniamo $A = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} A_h$, risulta che A è un aperto contenente E e

$$A \setminus E \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty}(A_h \setminus E_h)\,,$$

per cui

$$\mu(A\setminus E) \le \sum_{h=0}^{\infty}\mu(A_h\setminus E_h) < \sum_{h=0}^{\infty}\varepsilon 2^{-h-1} = \varepsilon\,.$$

(b) Sia A un aperto contenente $\mathbb{R}^n \setminus E$ tale che $\mu(A\setminus(\mathbb{R}^n\setminus E)) < \varepsilon$. Allora $\mathbb{R}^n \setminus A$ è un chiuso contenuto in E tale che

$$\mu(E\setminus(\mathbb{R}^n\setminus A)) = \mu(A\setminus(\mathbb{R}^n\setminus E)) < \varepsilon\,.$$

(c) Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia A_h un aperto contenente E tale che

$$\mu(A_h \setminus E) < \frac{1}{h+1}\,.$$

A meno di sostituire A_h con $A_0 \cap \cdots \cap A_h$, possiamo supporre che la successione (A_h) sia decrescente. Poniamo

$$E_0 = \left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h\right) \setminus E\,.$$

Allora è ovvio che

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h$$

ed inoltre

$$\mu(E_0) = \mu\left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} (A_h \setminus E)\right) \leq \mu(A_h \setminus E) < \frac{1}{h+1}\,,$$

per cui $\mu(E_0) = 0$.

Poiché

$$\mu(E) \leq \mu(A_h) \leq \mu(E) + \frac{1}{h+1}\,,$$

risulta anche

$$\lim_h \mu(A_h) = \mu(E)\,.$$

(d) Sia (A_h) una successione decrescente di aperti contenenti $\mathbb{R}^n \setminus E$ tale che

$$\left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h\right) \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E) = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} (A_h \cap E)$$

sia $\mu-$trascurabile e sia $C_h = \mathbb{R}^n \setminus A_h$. Allora (C_h) è una successione crescente di chiusi contenuti in E tale che

$$E \setminus \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h\right) = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} (A_h \cap E)$$

sia $\mu-$trascurabile. Se poniamo

$$K_h = C_h \cap [-h, h]^n\,,$$

$$E_0 = E \setminus \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} K_h\right) = E \setminus \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h\right)\,,$$

si ha che (K_h) è una successione crescente di compatti, E_0 è $\mu-$trascurabile e

$$E = \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} K_h\right) \cup E_0\,,$$

da cui la tesi. ■

3 Funzioni misurabili

(3.1) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione $\mu-$misurabile.*

Allora esistono una successione (t_h) in $[0, +\infty[$ ed una successione (E_h) di sottoinsiemi $\mu-$misurabili di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_h = \sup f \,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) \,.$$

In particolare,

$$\left(\sum_{h=0}^{k} t_h \chi_{E_h} \right)$$

è una successione crescente di funzioni $\mu-$semplici positive convergente puntualmente a f.

Dimostrazione. Se $\sup f = +\infty$, poniamo $t_h = 1/(h+1)$. Se invece $c = \sup f < +\infty$, poniamo $t_h = 2^{-h-1}c$. In ogni caso si ha

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_h = \sup f \,,$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : \, t_k \leq \sum_{h=k+1}^{\infty} t_h \,.$$

Definiamo ricorsivamente E_h ponendo

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) \geq t_0\} \,,$$

$$E_{h+1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) - \sum_{j=0}^{h} t_j \chi_{E_j}(x) \geq t_{h+1} \right\} \,.$$

Ragionando per induzione su h, si verifica facilmente che

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) \geq \sum_{j=0}^{h} t_j \chi_{E_j}(x)\,,$$

per cui

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) \geq \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x)\,.$$

Inoltre, dato $x \in \mathbb{R}^n$, non può esistere $k \in \mathbb{N}$ con $x \notin E_k$ e $x \in E_h$ per ogni $h \geq k+1$, perché ne seguirebbe

$$f(x) < \sum_{h=0}^{k-1} t_h \chi_{E_h}(x) + t_k \leq$$

$$\leq \sum_{h=0}^{k-1} t_h \chi_{E_h}(x) + \sum_{h=k+1}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x)\,.$$

Si possono quindi verificare due possibilità: se $x \in \bigcap\limits_{h=0}^{\infty} E_h$, è ovvio che

$$f(x) \leq \sup f = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x)\,;$$

se invece $x \notin E_{k_j}$ con $k_j \to +\infty$, risulta

$$f(x) < \sum_{h=0}^{k_j-1} t_h \chi_{E_h}(x) + t_{k_j}\,.$$

Tenuto conto che $t_{k_j} \to 0$, anche in questo caso risulta

$$f(x) \leq \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x)\,,$$

da cui la tesi. ∎

(3.2) Teorema (di Lusin) *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^n$−misurabile.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione continua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{L}^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che per ogni sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile E di $\mathbb{R}^n$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione continua $g : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ tale che $g^{-1}(1) \subseteq E$ e

$$\mathcal{L}^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_E(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon\,.$$

Infatti esistono un chiuso $C \subseteq E$ ed un aperto $A \supseteq E$ tali che $\mathcal{L}^n(E \setminus C) < \varepsilon/2$ e $\mathcal{L}^n(A \setminus E) < \varepsilon/2$. Se $E \neq \mathbb{R}^n$, possiamo supporre $A \neq \mathbb{R}^n$. Poniamo

$$g(x) = 0 \text{ se } C = \emptyset,$$

$$g(x) = 1 \text{ se } E = \mathbb{R}^n,$$

$$g(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus A)}{d(x, C) + d(x, \mathbb{R}^n \setminus A)}$$

altrimenti. In ogni caso risulta

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_E(x) \neq g(x)\} \subseteq (A \setminus C) = (A \setminus E) \cup (E \setminus C)\,,$$

per cui g ha le proprietà richieste.

Sia ora $f : \mathbb{R}^n \to [0, \pi/2[$ una funzione $\mathcal{L}^n-$misurabile e sia $\varepsilon > 0$. Dimostriamo che esiste $g : \mathbb{R}^n \to [0, \pi/2[$ con le proprietà indicate nella tesi. Sia

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x)$$

con

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_h = \sup f \leq \frac{\pi}{2}\,,$$

conformemente al Teorema (3.1). Siano $g_h : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ delle funzioni continue ottenute dal passo precedente in modo che

$$\mathcal{L}^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_{E_h}(x) \neq g_h(x)\}\right) < 2^{-h-1}\varepsilon\,.$$

Se definiamo $g : \mathbb{R}^n \to [0, \pi/2]$ ponendo

$$g(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h g_h(x)\,,$$

si ha che la serie converge totalmente, per cui g è continua.

Se si avesse $g(x) = \pi/2$ per qualche $x \in \mathbb{R}^n$, risulterebbe anzitutto $\sum\limits_{h=0}^{\infty} t_h = \pi/2$. Inoltre per ogni $h \in \mathbb{N}$ si avrebbe $t_h = 0$ oppure $g_h(x) = 1$, quindi $t_h g_h(x) = t_h \chi_{E_h}(x)$, dal momento che $g_h(x) = 1$ implica $x \in E_h$. Ne seguirebbe $f(x) = \pi/2$, il che è assurdo. Pertanto $g : \mathbb{R}^n \to [0, \pi/2[$.

Inoltre da $f(x) \neq g(x)$ segue $\chi_{E_h}(x) \neq g_h(x)$ per almeno un $h \in \mathbb{N}$, per cui

$$\mathcal{L}^n \left(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}\right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \left(\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_{E_h}(x) \neq g_h(x)\}\right) < \varepsilon \,.$$

Consideriamo ora una qualunque funzione $\mathcal{L}^n-$misurabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le funzioni

$$\arctan \circ (f^+), \arctan \circ (f^-) : \mathbb{R}^n \to [0, \pi/2[$$

sono $\mathcal{L}^n-$misurabili. Per il passo precedente esistono due funzioni continue

$$g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \to [0, \pi/2[$$

tali che

$$\mathcal{L}^n \left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \arctan(f^+(x)) \neq g_1(x)\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \,,$$
$$\mathcal{L}^n \left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \arctan(f^-(x)) \neq g_2(x)\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Allora la funzione

$$g(x) = \tan(g_1(x)) - \tan(g_2(x))$$

ha le proprietà richieste. ■

4 Funzioni integrabili

(4.1) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ due funzioni $\mu-$semplici.*

Allora valgono i seguenti fatti:

(*a*) *si ha*

$$\int (f + g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \,;$$

(*b*) *per ogni $\lambda \in [0, +\infty[$ si ha*

$$\int (\lambda f)\, d\mu = \lambda \int f\, d\mu \,;$$

(*c*) *se* $f \leq g$*, si ha*

$$\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu\,;$$

(*d*) *risulta*

$$\int f\,d\mu = \sup\left\{\int \varphi\,d\mu : \varphi \text{ è } \mu\text{−semplice e } 0 \leq \varphi \leq f\right\}.$$

Dimostrazione.

(*a*) Siano $f(\mathbb{R}^n) = \{s_0, \ldots, s_k\}$, $g(\mathbb{R}^n) = \{t_0, \ldots, t_m\}$, $(f+g)(\mathbb{R}^n) = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_p\}$,

$$E_h = f^{-1}(s_h)\,,$$

$$F_i = g^{-1}(t_i)\,,$$

$$G_j = (f+g)^{-1}(\sigma_j)\,.$$

Per ogni h, i, j si ha $E_h \cap F_i \cap G_j = \emptyset$ oppure $\sigma_j = s_h + t_i$. Ne segue in ogni caso

$$\sigma_j \mu\left(E_h \cap F_i \cap G_j\right) = (s_h + t_i)\,\mu\left(E_h \cap F_i \cap G_j\right)\,.$$

Poiché $\{E_0, \ldots, E_k\}$, $\{F_0, \ldots, F_m\}$ e $\{G_0, \ldots, G_p\}$ sono ricoprimenti di $\mathbb{R}^n$ costituiti da insiemi μ−misurabili a due a due disgiunti, si ha

$$\mu\left(E_h\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{p} \mu\left(E_h \cap F_i \cap G_j\right)\,,$$

$$\mu\left(F_i\right) = \sum_{h=0}^{k}\sum_{j=0}^{p} \mu\left(E_h \cap F_i \cap G_j\right)\,,$$

$$\mu\left(G_j\right) = \sum_{h=0}^{k}\sum_{i=0}^{m} \mu\left(E_h \cap F_i \cap G_j\right)\,.$$

Allora risulta

$$\int (f+g)\,d\mu = \sum_{j=0}^{p} \sigma_j \mu\left(G_j\right) = \sum_{h=0}^{k}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{p} \sigma_j \mu\left(E_h \cap F_i \cap G_j\right) =$$

$$= \sum_{h=0}^{k}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{p} s_h \mu\left(E_h \cap F_i \cap G_j\right) + \sum_{h=0}^{k}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{p} t_i \mu\left(E_h \cap F_i \cap G_j\right) =$$

$$= \sum_{h=0}^{k} s_h \mu\left(E_h\right) + \sum_{i=0}^{m} t_i \mu\left(F_i\right) = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu\,.$$

(b) Se $\lambda = 0$, la tesi è evidente. Se invece $\lambda > 0$ e $f(\mathbb{R}^n) = \{t_0, \dots, t_k\}$, si ha

$$(\lambda f)(\mathbb{R}^n) = \{\lambda t_0, \dots, \lambda t_k\} \, ,$$

$$(\lambda f)^{-1}(\lambda t_h) = f^{-1}(t_h) \, .$$

Ne segue che

$$\int (\lambda f) \, d\mu = \sum_{h=0}^{k} (\lambda t_h) \mu \left(f^{-1}(t_h) \right) =$$

$$= \lambda \sum_{h=0}^{k} t_h \mu \left(f^{-1}(t_h) \right) = \lambda \int f \, d\mu \, .$$

(c) La funzione $g - f$ è $\mu-$semplice e positiva. Per la proprietà (a) si ha allora

$$\int f \, d\mu \leq \int f \, d\mu + \int (g - f) \, d\mu = \int g \, d\mu \, .$$

(d) Essendo f una funzione $\mu-$semplice tale che $0 \leq f \leq f$, è evidente che

$$\int f \, d\mu \leq \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu : \, \varphi \text{ è } \mu-\text{semplice e } 0 \leq \varphi \leq f \right\} \, .$$

D'altra parte per ogni funzione $\mu-$semplice φ tale che $0 \leq \varphi \leq f$ si ha

$$\int \varphi \, d\mu \leq \int f \, d\mu \, .$$

Ne segue

$$\sup \left\{ \int \varphi \, d\mu : \, \varphi \text{ è } \mu-\text{semplice e } 0 \leq \varphi \leq f \right\} \leq \int f \, d\mu \, ,$$

da cui la tesi. ■

(4.2) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni tali che $f(x) = g(x)$ per $\mu-$q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *f è $\mu-$misurabile se e solo se g è $\mu-$misurabile;*

(b) *f è $\mu-$integrabile se e solo se g è $\mu-$integrabile, nel qual caso si ha*

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu \, .$$

Dimostrazione. Poniamo

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\} .$$

(a) Se f è μ−misurabile e $c \in \mathbb{R}$, si ha

$$f^{-1}(]c,+\infty]) \setminus g^{-1}(]c,+\infty]) \subseteq E ,$$

$$g^{-1}(]c,+\infty]) \setminus f^{-1}(]c,+\infty]) \subseteq E ,$$

per cui $f^{-1}(]c,+\infty]) \setminus g^{-1}(]c,+\infty])$ e $g^{-1}(]c,+\infty]) \setminus f^{-1}(]c,+\infty])$ sono entrambi μ−trascurabili, quindi μ−misurabili. Poiché

$$g^{-1}(]c,+\infty]) =$$

$$= \left(f^{-1}(]c,+\infty]) \setminus \left(f^{-1}(]c,+\infty]) \setminus g^{-1}(]c,+\infty])\right)\right) \cup \left(g^{-1}(]c,+\infty]) \setminus f^{-1}(]c,+\infty])\right) ,$$

l'insieme $g^{-1}(]c,+\infty])$ è μ−misurabile. Ne segue che g è μ−misurabile.

Essendo le ipotesi simmetriche rispetto a f e g, è evidente che la μ−misurabilità di g implica quella di f.

(b) Supponiamo anzitutto che f e g siano positive. In tal caso la μ−integrabilità è equivalente alla μ−misurabilità. Pertanto f è μ−integrabile se e solo se g lo è, a causa della (a).

Inoltre si ha

$$\int (+\infty)\chi_E \, d\mu = (+\infty) \int \chi_E \, d\mu = (+\infty)\mu(E) = 0 .$$

Pertanto, se f e g sono μ−integrabili, risulta

$$0 \leq \int f\chi_E \, d\mu \leq \int (+\infty)\chi_E \, d\mu = 0$$

e, similmente,

$$\int g\chi_E \, d\mu = 0 .$$

Ne segue

$$\int f \, d\mu = \int f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus E} \, d\mu + \int f\chi_E \, d\mu =$$

$$= \int f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus E} \, d\mu = \int g\chi_{\mathbb{R}^n \setminus E} \, d\mu =$$

$$= \int g\chi_{\mathbb{R}^n\setminus E}\, d\mu + \int g\chi_E\, d\mu = \int g\, d\mu\,.$$

Nel caso generale, si ha $f^+ = g^+$ e $f^- = g^-$ per $\mu-$q.o. $x \in \mathbb{R}^n$, per cui la tesi discende dal caso precedente. ■

(4.3) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione $\mu-$misurabile tale che*

$$\int f\, d\mu < +\infty\,.$$

Allora $f(x) < +\infty$ per $\mu-$q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia $E_h = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \geq h\}$. Allora E_h è $\mu-$misurabile e si ha

$$\int f\, d\mu \geq \int f\chi_{E_h}\, d\mu \geq \int h\chi_{E_h}\, d\mu = h\mu\left(E_h\right)\,.$$

Ne segue che per ogni $h \geq 1$

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) = +\infty\}\right) \leq \mu\left(E_h\right) \leq \frac{1}{h}\int f\, d\mu\,,$$

per cui l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) = +\infty\}$ è $\mu-$trascurabile. ■

(4.4) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione $\mu-$misurabile tale che*

$$\int f\, d\mu = 0\,.$$

Allora $f(x) = 0$ per $\mu-$q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia $E_h = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \geq 1/h\}$. Allora si ha

$$\mu\left(E_h\right) = h\int \frac{1}{h}\chi_{E_h}\, d\mu \leq h\int f\, d\mu = 0\,.$$

Ne segue che l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h$$

è $\mu-$trascurabile. ■

(4.5) Teorema *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^n-$sommabile. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\int |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\vartheta_h(x) = \min\left\{(h - |x|)^+, 1\right\}\,,$$

$$f_h(x) = \vartheta_h(x) \min\{\max\{f(x), -h\}, h\}\,.$$

Poiché $|f(x) - f_h(x)| \leq |f(x)|$ e

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_h f_h(x) = f(x)\,,$$

si deduce dal Teorema della convergenza dominata che

$$\lim_h \int |f(x) - f_h(x)|\, dx = 0\,.$$

Esiste quindi $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int |f(x) - f_h(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Per il Teorema di Lusin esiste una funzione continua $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{L}^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \neq \varphi(x)\}\right) < \frac{\varepsilon}{4h}\,.$$

Se poniamo

$$g(x) = \vartheta_h(x) \min\{\max\{\varphi(x), -h\}, h\}\,,$$

si ha $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e

$$\mathcal{L}^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n :\ f_h(x) \neq g(x)\}\right) < \frac{\varepsilon}{4h}\,.$$

Poiché $|f_h(x) - g(x)| \leq 2h$, risulta

$$\int |f_h(x) - g(x)|\, dx \leq 2h\frac{\varepsilon}{4h} = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ne segue

$$\int |f(x) - g(x)|\, dx \leq \int |f(x) - f_h(x)|\, dx + \int |f_h(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon\,.$$

da cui la tesi. ■

5 Il teorema di Fubini-Tonelli

(5.1) Definizione *Sia $\lambda > 0$. Chiamiamo* suddivisione regolare di $\mathbb{R}^n$ di passo λ *la partizione $\mathcal{I}$ di $\mathbb{R}^n$ costituita dagli $n-$intervalli I della forma*

$$I = [k_1\lambda, (k_1+1)\lambda[\times \cdots \times [k_n\lambda, (k_n+1)\lambda[$$

con $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$.

(5.2) Definizione *Diciamo che un sottoinsieme P di $\mathbb{R}^n$ è* un pluri-intervallo regolare*, se*

$$P = \bigcup_{I\in\mathcal{J}} I\,,$$

dove $\mathcal{J}$ è un sottoinsieme finito di una suddivisione regolare $\mathcal{I}$ di $\mathbb{R}^n$.

(5.3) Lemma *Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è unione di una successione crescente di pluri-intervalli regolari.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{I}_h$ la suddivisione regolare di $\mathbb{R}^n$ di passo 2^{-h}. Se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$, poniamo

$$\mathcal{J}_h = \{I \in \mathcal{I}_h :\, I \subseteq A \cap [-h-1, h+1[^n\}\ ,$$

$$P_h = \bigcup_{I\in\mathcal{J}_h} I\,.$$

Si verifica facilmente che (P_h) è una successione crescente di pluri-intervalli regolari in $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\bigcup_{h=0}^{\infty} P_h \subseteq A\,.$$

D'altronde, per ogni $x \in A$ esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $h \geq |x|$ e

$$]x^{(1)} - 2^{-h}, x^{(1)} + 2^{-h}[\times \cdots \times]x^{(n)} - 2^{-h}, x^{(n)} + 2^{-h}[\subseteq A\,.$$

Siano $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ tali che

$$x \in [k_1 2^{-h}, (k_1+1)2^{-h}[\times \cdots \times [k_n 2^{-h}, (k_n+1)2^{-h}[\,.$$

Poiché

$$[k_1 2^{-h}, (k_1+1)2^{-h}[\times \cdots \times [k_n 2^{-h}, (k_n+1)2^{-h}[\subseteq$$

$$\subseteq]x^{(1)} - 2^{-h}, x^{(1)} + 2^{-h}[\times \cdots \times]x^{(n)} - 2^{-h}, x^{(n)} + 2^{-h}[\subseteq A \cap [-h-1, h+1[^n \,,$$

si ha

$$[k_1 2^{-h}, (k_1+1)2^{-h}[\times \cdots \times [k_n 2^{-h}, (k_n+1)2^{-h}[\subseteq P_h \,,$$

quindi $x \in \bigcup_{h=0}^{\infty} P_h$. Risulta pertanto

$$A \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} P_h \,,$$

da cui la tesi. ■

(5.4) Lemma *Sia A un aperto in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^n(A_x)\}$ è $\mathcal{L}^m-$misurabile e la funzione $\{y \mapsto \mathcal{L}^m(A^y)\}$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile;*

(b) *risulta*

$$\mathcal{L}^{m+n}(A) = \int \mathcal{L}^n(A_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \int \mathcal{L}^m(A^y)\, d\mathcal{L}^n(y) \,.$$

Dimostrazione. Per semplicità trattiamo il caso $m = n = 1$. Consideriamo anzitutto un pluri-intervallo regolare

$$P = \bigcup_{I \in \mathcal{J}} I \,,$$

dove $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ ed $\mathcal{I}$ è una suddivisione regolare di $\mathbb{R}^2$ di passo λ. Allora per un opportuno k sufficientemente grande si ha

$$\mathcal{L}^1(P_x) = \sum_{h=-k}^{k} (j_h \lambda) \chi_{[h\lambda,(h+1)\lambda[}(x) \,,$$

dove j_h è il numero di $I \in \mathcal{J}$ della forma $[h\lambda, (h+1)\lambda[\times [a, b[$. In particolare, la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^1(P_x)\}$ è $\mathcal{L}^1-$misurabile. D'altronde

$$\mathcal{L}^2(P) = \sum_{h=-k}^{k} j_h \lambda^2 \,,$$

per cui

$$\int \mathcal{L}^1(P_x)\, d\mathcal{L}^1(x) = \sum_{h=-k}^{k} j_h \lambda^2 = \mathcal{L}^2(P) \,.$$

Consideriamo ora una successione crescente (P_h) di pluri-intervalli regolari in $\mathbb{R}^2$ la cui unione sia A. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $(P_h)_x \subseteq (P_{h+1})_x$ ed $A_x = \bigcup_{h=0}^{\infty} (P_h)_x$, per cui

$$\mathcal{L}^1(A_x) = \lim_h \mathcal{L}^1((P_h)_x)\,.$$

Ne segue che la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^1(A_x)\}$ è $\mathcal{L}^1-$misurabile e, per il Teorema della convergenza monotona, si ha

$$\int \mathcal{L}^1(A_x)\, d\mathcal{L}^1(x) = \lim_h \int \mathcal{L}^1((P_h)_x)\, d\mathcal{L}^1(x) =$$

$$= \lim_h \mathcal{L}^2(P_h) = \mathcal{L}^2(A)\,.$$

In modo simile si prova che la funzione $\{y \mapsto \mathcal{L}^1(A^y)\}$ è $\mathcal{L}^1-$misurabile e che

$$\int \mathcal{L}^1(A^y)\, d\mathcal{L}^1(y) = \mathcal{L}^2(A)\,,$$

da cui la tesi. ■

(5.5) Teorema *Sia E un sottoinsieme $\mathcal{L}^{m+n}-$trascurabile di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.*

Allora si ha

$$\mathcal{L}^n(E_x) = 0 \text{ per } \mathcal{L}^m-\text{q.o. } x \in \mathbb{R}^m,$$

$$\mathcal{L}^m(E^y) = 0 \text{ per } \mathcal{L}^n-\text{q.o. } y \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Esiste una successione decrescente (A_h) di aperti in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ con $E \subseteq A_h$ e $\lim_h \mathcal{L}^{m+n}(A_h) = 0$. Posto

$$\forall x \in \mathbb{R}^m :\ \varphi(x) = \lim_h \mathcal{L}^n((A_h)_x)\,,$$

si deduce dal Lemma di Fatou e dal lemma precedente che

$$\int \varphi(x)\, d\mathcal{L}^m(x) \le \lim_h \int \mathcal{L}^n((A_h)_x)\, d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \lim_h \mathcal{L}^{m+n}(A_h) = 0\,.$$

Ne segue $\varphi(x) = 0$ per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$. D'altronde da $E_x \subseteq (A_h)_x$ segue $\mathcal{L}^n(E_x) \le \varphi(x)$. Pertanto $\mathcal{L}^n(E_x) = 0$ per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$.

In modo simile si prova che $\mathcal{L}^m(E^y) = 0$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $y \in \mathbb{R}^n$. ■

(5.6) Teorema *Sia E un sottoinsieme $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$ l'insieme E_x è $\mathcal{L}^n-$misurabile e per $\mathcal{L}^n-$q.o. $y \in \mathbb{R}^n$ l'insieme E^y è $\mathcal{L}^m-$misurabile;*

(*b*) *la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^n(E_x)\}$ è $\mathcal{L}^m-$misurabile e la funzione $\{y \mapsto \mathcal{L}^m(E^y)\}$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile;*

(*c*) *si ha*

$$\mathcal{L}^{m+n}(E) = \int \mathcal{L}^n(E_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \int \mathcal{L}^m(E^y)\, d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso in cui E è anche limitato. Sia (A_h) una successione decrescente di aperti in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq A_h$,

$$\mathcal{L}^{m+n}\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h \setminus E\right) = 0\,,$$

$$\lim_h \mathcal{L}^{m+n}(A_h) = \mathcal{L}^{m+n}(E)\,.$$

Se $E \subseteq]-k,k[^{m+n}$, possiamo sostituire ogni A_h con $A_h \cap]-k,k[^{m+n}$. Possiamo quindi supporre che gli A_h siano anche limitati.

Posto $B = \bigcap\limits_{h=0}^{\infty} A_h$, si ha che B_x è l'intersezione degli aperti $(A_h)_x$, quindi $\mathcal{L}^n-$misurabile. Inoltre per il teorema precedente $(B_x \setminus E_x) = (B \setminus E)_x$ è $\mathcal{L}^n-$trascurabile per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$. Ne segue che

$$E_x = B_x \setminus (B_x \setminus E_x)$$

è $\mathcal{L}^n-$misurabile per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$.

Poiché A_0 è limitato, si ha $\mathcal{L}^n((A_0)_x) < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^m$. D'altronde per il Lemma (5.4) risulta

$$\int \mathcal{L}^n((A_0)_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \mathcal{L}^{m+n}(A_0) < +\infty\,.$$

Ne segue che la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^n((A_0)_x)\}$ è $\mathcal{L}^m-$sommabile. Inoltre si ha

$$\forall x \in \mathbb{R}^m : \lim_h \mathcal{L}^n((A_h)_x) = \mathcal{L}^n(B_x)\,.$$

Tenuto conto del Lemma (5.4), si deduce dal Teorema della convergenza dominata che la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^n(B_x)\}$ è $\mathcal{L}^m-$sommabile e che

$$\int \mathcal{L}^n(B_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \lim_h \int \mathcal{L}^n((A_h)_x)\, d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \lim_h \mathcal{L}^{m+n}(A_h) = \mathcal{L}^{m+n}(E)\,.$$

Poiché $\mathcal{L}^n(E_x) = \mathcal{L}^n(B_x)$ per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$, si deduce che la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^n(E_x)\}$ è $\mathcal{L}^m-$integrabile e che

$$\int \mathcal{L}^n(E_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \int \mathcal{L}^n(B_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \mathcal{L}^{m+n}(E)\,.$$

Consideriamo ora il caso generale. Poniamo $E_h = E \cap]-h, h[^{m+n}$. Poiché E_h è $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile e limitato, l'insieme $(E_h)_x$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$. Dal momento che

$$E_x = \bigcup_{h=0}^{\infty} (E_h)_x\,,$$

ne segue che E_x è $\mathcal{L}^n-$misurabile per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$. Inoltre risulta

$$\mathcal{L}^n(E_x) = \lim_h \mathcal{L}^n((E_h)_x) \text{ per } \mathcal{L}^m-\text{q.o. } x \in \mathbb{R}^m.$$

Pertanto la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^n(E_x)\}$ è $\mathcal{L}^m-$misurabile e, per il Teorema della convergenza monotona, si ha

$$\int \mathcal{L}^n(E_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \lim_h \int \mathcal{L}^n((E_h)_x)\, d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \lim_h \mathcal{L}^{m+n}(E_h) = \mathcal{L}^{m+n}(E)\,.$$

In modo simile si prova che E^y è $\mathcal{L}^m-$misurabile per $\mathcal{L}^n-$q.o. $y \in \mathbb{R}^n$, che la funzione $\{y \mapsto \mathcal{L}^m(E^y)\}$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile e che

$$\int \mathcal{L}^m(E^y)\, d\mathcal{L}^n(y) = \mathcal{L}^{m+n}(E)\,,$$

da cui la tesi. ■

(5.7) Lemma *Siano E un sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$trascurabile di $\mathbb{R}^m$ e F un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$trascurabile di $\mathbb{R}^n$.*

Allora gli insiemi $E \times \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m \times F$ sono $\mathcal{L}^{m+n}-$trascurabili.

Dimostrazione. Sia (A_h) una successione decrescente di aperti in $\mathbb{R}^m$ contenenti E con $\lim\limits_h \mathcal{L}^m(A_h) = 0$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme $A_h \times]-k, k[^n$ è aperto, quindi $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile. Dal teorema precedente si deduce che

$$\mathcal{L}^{m+n}\left(A_h \times]-k,k[^n\right) = \int (2k)^n \chi_{A_h}(x)\, d\mathcal{L}^m(x) = (2k)^n \mathcal{L}^m(A_h)\,.$$

Poiché

$$\forall h \in \mathbb{N}: \, \mathcal{L}^{m+n}\left(E \times]-k,k[^n\right) \leq (2k)^n \mathcal{L}^m(A_h)\,,$$

deve essere $\mathcal{L}^{m+n}\left(E \times]-k,k[^n\right) = 0$. Tenuto conto che

$$E \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(E \times]-k,k[^n\right)\,,$$

ne segue $\mathcal{L}^{m+n}\left(E \times \mathbb{R}^n\right) = 0$.

In modo simile si prova che $\mathcal{L}^{m+n}\left(\mathbb{R}^m \times F\right) = 0$. ■

(5.8) Teorema *Siano E un sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$misurabile di $\mathbb{R}^m$ e F un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile di $\mathbb{R}^n$.*

Allora $(E \times F)$ è $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile e

$$\mathcal{L}^{m+n}(E \times F) = \mathcal{L}^m(E)\, \mathcal{L}^n(F)\,.$$

Dimostrazione. Siano (A_h) una successione decrescente di aperti in $\mathbb{R}^m$ e (B_h) una successione decrescente di aperti in $\mathbb{R}^n$ tali che $E \subseteq A_h$, $F \subseteq B_h$ e

$$\mathcal{L}^m\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h \setminus E\right) = \mathcal{L}^n\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} B_h \setminus F\right) = 0\,.$$

Posto $G = \bigcap\limits_{h=0}^{\infty} A_h$ e $H = \bigcap\limits_{h=0}^{\infty} B_h$, si ha

$$G \times H = \bigcap_{h=0}^{\infty} (A_h \times B_h)\,,$$

per cui $(G \times H)$ è $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile, in quanto intersezione di una successione di aperti. Inoltre per il lemma precedente gli insiemi $(G \setminus E) \times \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m \times (H \setminus F)$ sono $\mathcal{L}^{m+n}-$trascurabili. Ne segue che

$$E \times F = (G \times H) \setminus (((G \setminus E) \times \mathbb{R}^n) \cup (\mathbb{R}^m \times (H \setminus F)))$$

è $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile.

Allora per il Teorema (5.6) si ha

$$\mathcal{L}^{m+n}(E \times F) = \int \mathcal{L}^m(E)\chi_F(y)\, d\mathcal{L}^n(y) = \mathcal{L}^m(E)\, \mathcal{L}^n(F)\,,$$

da cui la tesi. ∎

(5.9) Corollario *Sia I un $n-$intervallo limitato in $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathcal{L}^n(I) = m_n(I)$.*

Dimostrazione. Il caso $n = 1$ è contenuto nel Teorema (1.5). Tenuto conto del teorema precedente, la tesi segue facilmente ragionando per induzione su n. ∎

(5.10) Teorema (di Fubini-Tonelli) *Sia $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{L}^{m+n}-$integrabile.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$ la funzione $f(x,\cdot)$ è $\mathcal{L}^n-$integrabile e per $\mathcal{L}^n-$q.o. $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(\cdot, y)$ è $\mathcal{L}^m-$integrabile;*

(b) *la funzione*

$$\left\{x \longmapsto \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$integrabile e la funzione

$$\left\{y \longmapsto \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^m(x)\right\}$$

è $\mathcal{L}^n-$integrabile;

(c) *si ha*

$$\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) =$$

$$= \int \left(\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right) d\mathcal{L}^m(x) = \int \left(\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^m(x)\right) d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso $f = t\chi_E$ con $t \geq 0$ ed E sottoinsieme $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Posto

$$F = \{x \in \mathbb{R}^m : \, E_x \text{ è } \mathcal{L}^n-\text{misurabile}\} \,,$$

risulta dal Teorema (5.6) che $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus F) = 0$. Poiché

$$f(x,y) = t\chi_E(x,y) = t\chi_{E_x}(y) \,,$$

ne segue che $f(x,\cdot)$ è $\mathcal{L}^n-$integrabile per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$. D'altronde

$$\forall x \in F : \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y) = t\mathcal{L}^n(E_x) \,.$$

Si deduce che la funzione

$$\left\{ x \longmapsto \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y) \right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$integrabile e che

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y) \right) d\mathcal{L}^m(x) = t \int \mathcal{L}^n(E_x)\, d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= t\mathcal{L}^{m+n}(E) = \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) \,.$$

Se $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ è $\mathcal{L}^{m+n}-$integrabile, esistono una successione (t_h) in $[0,+\infty[$ ed una successione (E_h) di sottoinsiemi $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabili di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ tali che

$$f(x,y) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x,y) \,.$$

Poniamo $f_h = t_h \chi_{E_h}$,

$$F = \{x \in \mathbb{R}^m : \, f_h(x,\cdot) \text{ è } \mathcal{L}^n-\text{integrabile per ogni } h \in \mathbb{N}\} \,.$$

Per il passo precedente, si ha $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus F) = 0$. Poiché

$$f(x,y) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h(x,y) \,,$$

$$\forall x \in F : \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y) = \sum_{h=0}^{\infty} \int f_h(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y) \,,$$

risulta che $f(x,\cdot)$ è $\mathcal{L}^n-$integrabile per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\left\{x \longmapsto \int f(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$integrabile e

$$\int \left(\int f(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)\,d\mathcal{L}^m(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \int \left(\int f_h(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)\,d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \int f_h(x,y)\,d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) = \int f(x,y)\,d\mathcal{L}^{m+n}(x,y)\,.$$

Consideriamo infine una funzione $\mathcal{L}^{m+n}-$integrabile $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Se, ad esempio,

$$\int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) = \int \left(\int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)\,d\mathcal{L}^m(x) < +\infty\,,$$

si ha

$$\int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y) < +\infty$$

per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$. Ne segue che, per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$, $f^+(x,\cdot)$ è $\mathcal{L}^n-$integrabile e $f^-(x,\cdot)$ è $\mathcal{L}^n-$integrabile con

$$\int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y) < +\infty\,.$$

Pertanto $f(x,\cdot)$ è $\mathcal{L}^n-$integrabile per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$.

Posto

$$F = \Bigg\{x \in \mathbb{R}^m : \; f^+(x,\cdot) \text{ e } f^-(x,\cdot) \text{ sono}$$

$$\mathcal{L}^n-\text{integrabili e } \int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y) < +\infty\Bigg\}\,,$$

si ha che $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus F) = 0$ e

$$\left\{x \longmapsto \chi_F(x) \int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$sommabile. Poiché

$$\forall x \in F : \int f(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y) = \int f^+(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y) - \int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\,,$$

ne segue che

$$\left\{x \longmapsto \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$integrabile e

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right) d\mathcal{L}^m(x) = \int \left(\chi_F(x) \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right) d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \int \left(\chi_F(x) \int f^+(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right) d\mathcal{L}^m(x) - \int \left(\chi_F(x) \int f^-(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right) d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \int \left(\int f^+(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right) d\mathcal{L}^m(x) - \int \left(\int f^-(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right) d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \int f^+(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) - \int f^-(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) = \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y)\,.$$

Se

$$\int f^+(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) < +\infty\,,$$

il ragionamento è analogo.

In modo simile si dimostra poi che per $\mathcal{L}^n-$q.o. $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(\cdot, y)$ è $\mathcal{L}^m-$integrabile, che la funzione

$$\left\{y \longmapsto \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^m(x)\right\}$$

è $\mathcal{L}^n-$integrabile e che si ha

$$\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^m(x)\right) d\mathcal{L}^n(y)\,,$$

da cui la tesi. ■

6 La formula dell'area

(6.1) Lemma *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^m$. Allora esiste una successione (K_h) di compatti in $\mathbb{R}^m$ con $K_h \subseteq \mathrm{int}\,(K_{h+1})$ e $\Omega = \bigcup_{h=0}^{\infty} K_h$.*

Dimostrazione. Se poniamo per ogni $h \in \mathbb{N}$

$$K_h = \left\{x \in \mathbb{R}^m : \, d\,(x, \mathbb{R}^m \setminus \Omega) \geq \frac{1}{h+1}\right\} \cap \overline{\mathrm{B}\,(0, h+1)} \quad \text{se } \Omega \neq \mathbb{R}^m \,,$$
$$K_h = \overline{\mathrm{B}\,(0, h+1)} \quad \text{se } \Omega = \mathbb{R}^m \,,$$

si verifica facilmente che K_h ha i requisiti richiesti. ■

(6.2) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \to X_2$ un'applicazione di classe C^1.*

Allora per ogni $x \in A$ esiste un intorno U di x in A tale che $f_{|U}$ è lipschitziana. Di conseguenza, $f_{|K}$ è lipschitziana per ogni compatto $K \subseteq A$.

Dimostrazione. Sia $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x, r) \subseteq A$ e

$$\forall \xi \in \mathrm{B}\,(x, r) : \, \|df(\xi)\| \leq \|df(x)\| + 1 \,.$$

Ne segue che $f_{|\mathrm{B}(x,r)}$ è lipschitziana.

Sia ora K un compatto in A. Supponiamo per assurdo che $f_{|K}$ non sia lipschitziana. Siano (x_h) e (y_h) due successioni in K tali che

$$\|f(x_h) - f(y_h)\| > h\|x_h - y_h\| \,.$$

Per la compattezza di K, esiste una sottosuccessione (x_{h_k}) convergente a qualche $x \in K$. Poiché

$$\|x_h - y_h\| < \frac{1}{h}\left(\|f(x_h)\| + \|f(y_h)\|\right) \leq \frac{2}{h} \max_K \|f\| \,,$$

risulta che anche (y_{h_k}) converge a x. Siano $r > 0$ e $c \geq 0$ tali che $f_{|\mathrm{B}(x,r)}$ sia lipschitziana di costante c. Per k abbastanza grande si ha $x_{h_k}, y_{h_k} \in \mathrm{B}\,(x, r)$, quindi

$$h_k\|x_{h_k} - y_{h_k}\| < \|f(x_{h_k}) - f(y_{h_k})\| \leq c\|x_{h_k} - y_{h_k}\| \,.$$

Ne segue $h_k < c$ per ogni k sufficientemente grande, il che è assurdo. ■

(6.3) Teorema *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^m$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^1.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *se* $E \subseteq \Omega$ *è* $\mathcal{L}^m-$*trascurabile,* $\varphi(E)$ *è* $\mathcal{H}^m-$*trascurabile;*

(*b*) *se* $E \subseteq \Omega$ *è* $\mathcal{L}^m-$*misurabile,* $\varphi(E)$ *è* $\mathcal{H}^m-$*misurabile;*

(*c*) *se* $f : \varphi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ *è una funzione e* $(f \circ \varphi)$ *è* $\mathcal{L}^m-$*misurabile,* f *è* $\mathcal{H}^m-$*misurabile.*

Dimostrazione.

(*a*) Sia (K_h) una successione di compatti come nel Lemma (6.1). Per il Teorema (6.2), l'applicazione $\varphi_{|K_h}$ è lipschitziana di una certa costante c_h. Si deduce che

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E \cap K_h)) \leq c_h^m \mathcal{L}^m(E \cap K_h) = 0\,,$$

per cui

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{H}^m(\varphi(E \cap K_h)) = 0\,.$$

(*b*) Esistono una successione crescente (K_h) di compatti ed un sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$trascurabile $E_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ tali che

$$E = \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} K_h\right) \cup E_0\,.$$

Essendo compatto, l'insieme $\varphi(K_h)$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile. D'altronde $\varphi(E_0)$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile, perché $\mathcal{H}^m-$trascurabile. Ne segue che

$$\varphi(E) = \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} \varphi(K_h)\right) \cup \varphi(E_0)$$

è $\mathcal{H}^m-$misurabile.

(*c*) Se $c \in \mathbb{R}$, $(f \circ \varphi)^{-1}(]c, +\infty]) = ((f \circ \varphi)^*)^{-1}(]c, +\infty]) \cap \Omega$ è $\mathcal{L}^m-$misurabile. Allora

$$f^{-1}(]c, +\infty]) = \varphi\left((f \circ \varphi)^{-1}(]c, +\infty])\right)$$

è $\mathcal{H}^m-$misurabile per la proprietà (*b*). Poiché $(f^*)^{-1}(]c, +\infty])$ è uguale a $f^{-1}(]c, +\infty])$ oppure a $f^{-1}(]c, +\infty]) \cup (\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\Omega))$, ne segue che $(f^*)^{-1}(]c, +\infty])$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile, per cui f è $\mathcal{H}^m-$misurabile. ■

(6.4) Lemma *Siano* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione lineare e biiettiva ed* E *un sottoinsieme* $\mathcal{L}^n-$*misurabile di* $\mathbb{R}^n$.

Allora

$$\mathcal{L}^n(L(E)) = |\det L|\mathcal{L}^n(E)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso particolare in cui L è diagonale. Sia quindi $L(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda_1 x_1,\ldots,\lambda_n x_n)$. Se I è un $n-$intervallo limitato in $\mathbb{R}^n$, si ha che anche $L(I)$ è un $n-$intervallo limitato in $\mathbb{R}^n$ e dal Corollario (5.9) segue subito che

$$\mathcal{L}^n(L(I)) = |\lambda_1\cdot\cdots\cdot\lambda_n|\mathcal{L}^n(I) = |\det L|\mathcal{L}^n(I)\,.$$

Se P è un pluri-intervallo regolare in $\mathbb{R}^n$, risulta allora

$$\mathcal{L}^n(L(P)) = |\det L|\mathcal{L}^n(P)\,.$$

Se A è un aperto in $\mathbb{R}^n$, sia (P_h) una successione crescente di pluri-intervalli regolari la cui unione sia A. Risulta

$$\mathcal{L}^n(L(A)) = \lim_h \mathcal{L}^n(L(P_h)) = |\det L|\lim_h \mathcal{L}^n(P_h) = |\det L|\mathcal{L}^n(A)\,.$$

Sia infine E un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile di $\mathbb{R}^n$. Sia (A_h) una successione decrescente di aperti in $\mathbb{R}^n$ tale che $E\subseteq A_h$ e

$$\lim_h \mathcal{L}^n(A_h) = \mathcal{L}^n(E)\,.$$

Poiché

$$\mathcal{L}^n(L(E)) \leq \mathcal{L}^n(L(A_h)) = |\det L|\mathcal{L}^n(A_h)\,,$$

passando al limite per $h\to\infty$ si deduce che $\mathcal{L}^n(L(E)) \leq |\det L|\mathcal{L}^n(E)$. D'altronde anche L^{-1} è diagonale con $\det(L^{-1}) = (\det L)^{-1}$. Pertanto

$$\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(L^{-1}(L(E))) \leq |\det L^{-1}|\mathcal{L}^n(L(E)) = \frac{1}{|\det L|}\mathcal{L}^n(L(E))\,,$$

da cui la disuguaglianza opposta.

Nel caso generale si ha $L = U_2 D U_1$, dove U_1 ed U_2 sono trasformazioni ortogonali e D è diagonale e biiettiva. Tenuto conto che U_1 ed U_2 sono isometrie, si ha

$$\mathcal{L}^n(L(E)) = \mathcal{L}^n\left((U_2DU_1)(E)\right) = \mathcal{L}^n\left((DU_1)(E)\right) =$$

$$= |\det D|\mathcal{L}^n(U_1(E)) = |\det L|\mathcal{L}^n(E)\,,$$

da cui la tesi. ■

(6.5) Lemma *Siano* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^m$ *e* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione di classe* C^1 *con* $m \leq n$.

Allora per ogni $\varepsilon \in]0,1[$ *e per ogni* $x_0 \in \Omega$ *tale che* $d\varphi(x_0)$ *sia iniettivo esiste* $r > 0$ *tale che* $\mathrm{B}\,(x_0, r) \subseteq \Omega$ *e*

$$(1-\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E)) \leq \int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E))$$

per ogni sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$*misurabile* E *contenuto in* $\mathrm{B}\,(x_0, r)$.

Dimostrazione. Esistono una matrice L $m \times m$ ed una matrice U $n \times m$ con $U^t\,U = \mathrm{Id}$ tali che $d\varphi(x_0) = UL$. Essendo $d\varphi(x_0)$iniettivo, risulta che L è iniettiva, quindi biiettiva. Inoltre si ha

$$d\varphi(x_0)^t\, d\varphi(x_0) = L^t\, U^t\, UL = L^t\, L\,,$$

quindi

$$\sqrt{\det\left(d\varphi(x_0)^t\, d\varphi(x_0)\right)} = |\det L|\,.$$

Sia ora $c \in]0,1[$ tale che

$$(1+c) \leq (1-c)^m(1+\varepsilon)\,, \quad (1+c)^m(1-\varepsilon) \leq 1-c\,.$$

Sia $r > 0$ tale che si abbia $\mathrm{B}\,(x_0, r) \subseteq \Omega$ e, per ogni $x \in \mathrm{B}\,(x_0, r)$,

$$\|d\varphi(x) - d\varphi(x_0)\| \leq c\|L^{-1}\|^{-1}\,,$$

$$(1-c)|\det L| \leq \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \leq (1+c)|\det L|\,.$$

Consideriamo l'applicazione

$$(\varphi \circ L^{-1}) - U : L(\mathrm{B}\,(x_0, r)) \to \mathbb{R}^n\,.$$

Poiché per ogni $y \in L(\mathrm{B}\,(x_0, r))$ si ha

$$\|d(\varphi \circ L^{-1})(y) - U\| = \|d\varphi(L^{-1}y) \circ L^{-1} - d\varphi(x_0) \circ L^{-1}\| \leq$$

$$\leq \|d\varphi(L^{-1}y) - d\varphi(x_0)\|\|L^{-1}\| \leq c\,,$$

si deduce che l'applicazione $(\varphi \circ L^{-1} - U)$ è lipschitziana di costante c. Allora per ogni $y_1, y_2 \in L(\mathrm{B}\,(x_0, r))$ si ha

$$|(\varphi \circ L^{-1})(y_1) - (\varphi \circ L^{-1})(y_2)| \leq$$

$$\leq |Uy_1 - Uy_2| + \left|\left((\varphi \circ L^{-1})(y_1) - Uy_1\right) - \left((\varphi \circ L^{-1})(y_2) - Uy_2\right)\right| \leq$$

$$\leq (1+c)|y_1 - y_2|$$

e, similmente,

$$|(\varphi \circ L^{-1})(y_1) - (\varphi \circ L^{-1})(y_2)| \geq$$

$$\geq |Uy_1 - Uy_2| - \left|\left((\varphi \circ L^{-1})(y_1) - Uy_1\right) - \left((\varphi \circ L^{-1})(y_2) - Uy_2\right)\right| \geq$$

$$\geq (1-c)|y_1 - y_2|\,.$$

Pertanto $(\varphi \circ L^{-1})$ è lipschitziana di costante $(1+c)$, iniettiva con inversa lipschitziana di costante $(1-c)^{-1}$. Tenendo conto del Lemma (6.4), si ha per ogni sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$misurabile $E \subseteq \mathrm{B}\,(x_0, r)$

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \mathcal{H}^m\left((\varphi \circ L^{-1})(L(E))\right) \leq (1+c)^m \mathcal{L}^m(L(E)) =$$

$$= (1+c)^m |\det L| \mathcal{L}^m(E)$$

e

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \mathcal{H}^m\left((\varphi \circ L^{-1})(L(E))\right) \geq (1-c)^m \mathcal{L}^m(L(E)) =$$

$$= (1-c)^m |\det L| \mathcal{L}^m(E)\,.$$

Allora risulta

$$\int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) \leq (1+c)|\det L| \mathcal{L}^m(E) \leq$$

$$\leq (1-c)^{-m}(1+c)\mathcal{H}^m(\varphi(E)) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E))$$

e

$$\int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) \geq (1-c)|\det L| \mathcal{L}^m(E) \geq$$

$$\geq (1+c)^{-m}(1-c)\mathcal{H}^m(\varphi(E)) \geq (1-\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E))\,,$$

da cui la tesi. ■

(6.6) Teorema (Formula dell'area) *Siano* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^m$ *e* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione iniettiva e di classe* C^1 *con* $m \leq n$.

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *se* $E \subseteq \Omega$, *risulta che* $\varphi(E)$ *è* $\mathcal{H}^m-$*misurabile se e solo se la funzione*

$$\begin{gathered} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \end{gathered}$$

è $\mathcal{L}^m-$*misurabile, nel qual caso*

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,;$$

(b) *se* $f : \varphi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ *è una funzione, risulta che* f *è* $\mathcal{H}^m-$*misurabile se e solo se la funzione*

$$\begin{gathered} \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x \mapsto f(\varphi(x))\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \end{gathered}$$

è $\mathcal{L}^m-$*misurabile;*

(c) *se* $f : \varphi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ *è una funzione, risulta che* f *è* $\mathcal{H}^m-$*integrabile se e solo se la funzione*

$$\begin{gathered} \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x \mapsto f(\varphi(x))\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \end{gathered}$$

è $\mathcal{L}^m-$*integrabile, nel qual caso si ha*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\, d\mathcal{H}^m(y) = \int_\Omega f(\varphi(x))\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

Dimostrazione.

(a) Sia

$$C = \left\{x \in \Omega :\ \det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right) = 0\right\}$$

e sia K un compatto in $\Omega \setminus C$. Per ogni $\varepsilon \in]0,1[$ e per ogni $x \in K$ esiste per il Lemma (6.5) $r(x) > 0$ tale che

$$(1-\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E)) \leq \int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(\xi)^t\, d\varphi(\xi)\right)}\, d\mathcal{L}^m(\xi) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E))$$

per ogni sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$misurabile $E \subseteq \mathrm{B}\,(x, r(x))$. Per la compattezza di K esistono $x_1, \ldots, x_k \in K$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{B}\,(x_j, r(x_j)) \ .$$

Posto

$$E_1 = K \cap \mathrm{B}\,(x_1, r(x_1)) \ ,$$

$$E_j = (K \cap \mathrm{B}\,(x_j, r(x_j))) \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{j-1}) \qquad (2 \leq j \leq k)\,,$$

si ha che K è l'unione disgiunta degli E_j ed $E_j \subseteq \mathrm{B}\,(x_j, r(x_j))$, per cui

$$(1-\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E_j)) \leq \int_{E_j} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E_j))\,.$$

Per l'iniettività di φ, $\varphi(K)$ è l'unione disgiunta dei $\varphi(E_j)$, che sono $\mathcal{H}^m-$misurabili per il Teorema (6.3). Ne segue

$$(1-\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(K)) \leq \int_{K} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(K))\,.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon \in]0,1[$, deve essere

$$\mathcal{H}^m(\varphi(K)) = \int_{K} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

Sia ora K un compatto in C, sia $\varphi_h : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definita da $\varphi_h(x) = (\varphi(x), h^{-1}x)$ e sia $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la proiezione canonica sul primo fattore. Poiché

$$d\varphi_h(x) = \left(d\varphi(x), \frac{1}{h}\mathrm{Id}\right) \ ,$$

risulta che $d\varphi_h(x)$ è iniettivo per ogni $x \in \Omega$. Tenendo conto del fatto che π è lipschitziana di costante 1 e del passo precedente, si ha

$$\mathcal{H}^m(\varphi(K)) = \mathcal{H}^m\left((\pi \circ \varphi_h)(K)\right) \leq \mathcal{H}^m(\varphi_h(K)) =$$

$$= \int_{K} \sqrt{\det\left(d\varphi_h(x)^t\, d\varphi_h(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) \leq \mathcal{L}^m(K) \max_{x \in K} \sqrt{\det\left(d\varphi_h(x)^t\, d\varphi_h(x)\right)}\,.$$

Sia $x_h \in K$ tale che

$$\sqrt{\det\left(d\varphi_h(x_h)^t\, d\varphi_h(x_h)\right)} = \max_{x \in K} \sqrt{\det\left(d\varphi_h(x)^t\, d\varphi_h(x)\right)}$$

e sia (x_{h_k}) una sottosuccessione convergente a $\xi \in K$. Si verifica facilmente che

$$\lim_k \max_{x\in K} \sqrt{\det\left(d\varphi_{h_k}(x)^t\, d\varphi_{h_k}(x)\right)} = \lim_k \sqrt{\det\left(d\varphi_{h_k}(x_{h_k})^t\, d\varphi_{h_k}(x_{h_k})\right)} =$$

$$= \sqrt{\det\left(d\varphi(\xi)^t\, d\varphi(\xi)\right)} = 0\,.$$

Ne segue $\mathcal{H}^m(\varphi(K)) = 0$.

Esistono una successione crescente di compatti (K_h) ed un sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$trascurabile E_0 tali che

$$C = \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} K_h\right) \cup E_0\,.$$

Per il Teorema (6.3) si ha $\mathcal{H}^m(\varphi(E_0)) = 0$, per cui

$$\mathcal{H}^m(\varphi(C)) = \mathcal{H}^m\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} \varphi(K_h)\right) = 0\,.$$

Sia ora $E \subseteq \Omega$ tale che la funzione

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \end{aligned}$$

sia $\mathcal{L}^m-$misurabile, ossia tale che

$$\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^m \setminus E \end{cases}$$

sia $\mathcal{L}^m-$misurabile. Allora $E \setminus C$, che è l'insieme su cui tale funzione è strettamente positiva, è $\mathcal{L}^m-$misurabile. Esistono una successione crescente di compatti (K_h) ed un sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$trascurabile E_0 tali che

$$E \setminus C = \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} K_h\right) \cup E_0\,.$$

Per il Teorema (6.3) si ha che $\varphi(E\setminus C)$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile, $\mathcal{H}^m(\varphi(E_0)) = 0$ e per il Teorema della convergenza monotona risulta

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E \setminus C)) = \mathcal{H}^m\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} \varphi(K_h)\right) = \lim_h \mathcal{H}^m(\varphi(K_h)) =$$

$$= \lim_h \int_{K_h} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) = \int_{E\setminus C} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

D'altronde, poiché $E \cap C \subseteq C$, si ha $\mathcal{H}^m(\varphi(E \cap C)) = 0$. Pertanto $\varphi(E)$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile e risulta

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \mathcal{H}^m(\varphi(E \setminus C)) = \int_{E \setminus C} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

Viceversa, consideriamo anzitutto il caso in cui $\varphi(E)$ è $\mathcal{H}^m-$trascurabile. Sia (A_h) una successione di aperti in $\mathbb{R}^n$ con $\varphi(E) \subseteq A_h$ e $\mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \mathcal{H}^m\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\right) = 0$. Allora

$$G = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\right) = \bigcap_{h=0}^{\infty} \varphi^{-1}(A_h)$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile e dal passo precedente si deduce che

$$\int_G \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) = \mathcal{H}^m(\varphi(G)) = 0\,.$$

Ne segue

$$\chi_G(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} = 0 \qquad \text{per } \mathcal{L}^m\text{−q.o. } x \in \Omega\,.$$

Poiché $E \subseteq G$, risulta a maggior ragione

$$\chi_E(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} = 0 \qquad \text{per } \mathcal{L}^m\text{−q.o. } x \in \Omega\,.$$

Supponiamo infine che $\varphi(E)$ sia $\mathcal{H}^m-$misurabile. Consideriamo prima il caso particolare in cui $\mathcal{H}^m(\varphi(E)) < +\infty$. Sia (A_h) una successione di aperti in $\mathbb{R}^n$ con

$$\varphi(E) \subseteq \bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\,, \qquad \mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \mathcal{H}^m\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\right)\,.$$

Posto

$$G = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\right)\,, \qquad E_0 = G \setminus E\,,$$

si ha che G è $\mathcal{L}^m-$misurabile e $\mathcal{H}^m(\varphi(E_0)) = 0$. Ne segue che la funzione

$$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \chi_G(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile, mentre

$$\chi_{E_0}(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} = 0 \qquad \text{per } \mathcal{L}^m\text{−q.o. } x \in \Omega$$

per il passo precedente. Poiché G è l'unione disgiunta di E ed E_0, si ha che

$$\chi_E(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} =$$

$$= \chi_G(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} - \chi_{E_0}(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile.

Nel caso generale, sia (K_h) una successione crescente di compatti conforme al Lemma (6.1). Poiché

$$\mathcal{H}^m(\varphi(K_h)) = \int_{K_h} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,,$$

risulta $\varphi(\Omega) = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} \varphi(K_h)$ con $\varphi(K_h)$ compatto e $\mathcal{H}^m(\varphi(K_h)) < +\infty$. Allora $\varphi(E) \cap \varphi(K_h)$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile con $\mathcal{H}^m(\varphi(E) \cap \varphi(K_h)) < +\infty$. Dal passo precedente segue che

$$\left\{x \mapsto \chi_{E\cap K_h}(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile. D'altronde E è l'unione crescente degli $E \cap K_h$, per cui

$$\forall x \in \Omega:\ \chi_E(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} = \lim_h \chi_{E\cap K_h}(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\,.$$

Si conclude che la funzione

$$\left\{x \mapsto \chi_E(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile.

(b) *e* (c) Consideriamo dapprima $f : \varphi(\Omega) \to [0, +\infty]$.

Se f è $\mathcal{H}^m-$misurabile, si ha $f = \sum\limits_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{\varphi(E_h)}$ con $t_h \geq 0$ e $\varphi(E_h)$ $\mathcal{H}^m-$misurabile. Ne segue $f \circ \varphi = \sum\limits_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}$. Inoltre dalla (a) si deduce che

$$\left\{x \mapsto \chi_{E_h}(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile, per cui anche

$$f(\varphi(x))\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} = \sum_{h=0}^{\infty}\left(t_h \chi_{E_h}(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\right)$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile.

Infine dalla (a) si deduce che

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\, d\mathcal{H}^m(y) = \sum_{h=0}^{\infty} \int_{\varphi(\Omega)} t_h \chi_{\varphi(E_h)}(y)\, d\mathcal{H}^m(y) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \mathcal{H}^m(\varphi(E_h)) =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \int_{\Omega} t_h \chi_{E_h}(x) \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \int_{\Omega} f(\varphi(x)) \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

Supponiamo viceversa che

$$\left\{x \mapsto f(\varphi(x)) \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\right\}$$

sia $\mathcal{L}^m-$misurabile. Allora tale funzione è $\mathcal{L}^m-$misurabile anche su $\Omega \setminus C$, il che equivale a dire che $f \circ \varphi$ è $\mathcal{L}^m-$misurabile su $\Omega \setminus C$. Dal Teorema (6.3) si deduce che f è $\mathcal{H}^m-$misurabile su $\varphi(\Omega \setminus C)$. D'altronde $\mathcal{H}^m(\varphi(C)) = 0$, per cui f è $\mathcal{H}^m-$misurabile anche su $\varphi(\Omega)$.

Nel caso generale, in cui $f : \varphi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$, è sufficiente ragionare su f^+ e f^-, ricordando che $f = f^+ - f^-$. ■

Esercizi

1. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^m$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^1 (non necessariamente iniettiva) con $m \leq n$.

Si dimostri che per ogni $E \subseteq \Omega$ tale che

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \end{aligned}$$

sia $\mathcal{L}^m-$misurabile risulta

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) \leq \int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

(Suggerimento: si ripercorra la dimostrazione della Formula dell'area).

2. Se I è un intervallo in $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione ed $a, b \in I$ $(a \leq b)$, si ponga

$$V_a^b(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{h=1}^{k} |\gamma(t_h) - \gamma(t_{h-1})| : \, a \leq t_0 \leq \cdots \leq t_k \leq b \right\} .$$

Se $a > b$, si ponga $V_a^b(\gamma) := -V_b^a(\gamma)$. L'elemento $V_a^b(\gamma)$ di $\overline{\mathbb{R}}$ si chiama *variazione di* γ *da* a *a* b.

Si dimostri che per ogni $a, b, c \in I$ si ha

$$V_a^b(\gamma) = V_a^c(\gamma) + V_c^b(\gamma) \,,$$

purché a secondo membro non si presenti l'espressione $(+\infty) + (-\infty)$ o $(-\infty) + (+\infty)$.

3. Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione continua e γ è di classe C^1 su $]a, b[$, si dimostri che

$$V_a^b(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, d\mathcal{L}^1(t) \,.$$

4. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\gamma(t) = t^2 \cos(t^{-2})$ per $t \neq 0$, $\gamma(0) = 0$. Si dimostri che γ è derivabile e che $V_0^1(\gamma) = +\infty$.

5. Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua tale che $V_a^b(\gamma) < +\infty$ per ogni $[a, b] \subseteq I$. Si definisca una funzione $\sigma : I \to \mathbb{R}$ ponendo $\sigma(t) = V_{t_0}^t(\gamma)$.

Si dimostri che σ è continua, crescente (in generale, non strettamente) e che

$$\forall t_1, t_2 \in I : \, |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \leq |\sigma(t_1) - \sigma(t_2)| \,.$$

Posto $J = \sigma(I)$, sia $\eta : J \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione definita da $\eta \circ \sigma = \gamma$.

Si dimostri che η è lipschitziana di costante 1, $\eta(0) = \gamma(t_0)$ e

$$\forall s_1, s_2 \in J : \, V_{s_1}^{s_2}(\eta) = s_2 - s_1 \,.$$

Se poi γ è di classe C^1 su $\mathrm{int}\,(I)$ e $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathrm{int}\,(I)$, si dimostri che η è di classe C^1 su $\mathrm{int}\,(J)$ e

$$\forall s \in \mathrm{int}\,(J) : \, |\eta'(s)| = 1 \,.$$

7 I teoremi della divergenza e di Stokes

(7.1) Lemma *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e K un compatto contenuto in Ω. Allora esiste $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$ e $\psi(x) = 1$ su K.*

Dimostrazione. Sia $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\begin{aligned} \varrho(t) &= \frac{\exp((t^2-1)^{-1})}{\int_{-1}^{1} \exp((t^2-1)^{-1})\, dt} \qquad &&\text{se } |t| < 1\,, \\ \varrho(t) &= 0 &&\text{se } |t| \geq 1\,. \end{aligned}$$

Risulta che $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varrho(t) \geq 0$ su $\mathbb{R}$, $\varrho(t) = 0$ fuori da $[-1, 1]$ e $\int \varrho(t)\, dt = 1$.

Sia ora $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\eta(t) = \int_{-3}^{t} (\varrho(s+2) - \varrho(s-2))\, ds\,.$$

Allora $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta(t) \leq 1$ su $\mathbb{R}$, $\eta(t) = 1$ su $[-1, 1]$ e $\eta(t) = 0$ fuori da $[-3, 3]$.

Per ogni $x \in K$ sia $r(x) > 0$ tale che $\overline{\mathrm{B}\,(x, 2r(x))} \subseteq \Omega$. Per la compattezza di K esistono $x_1, \ldots, x_k \in K$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{B}\,(x_j, r_j)\ ,$$

dove $r_j = r(x_j)$. Sia $\psi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$\psi_j(x) = \eta\left(\frac{|x - x_j|^2}{r_j^2}\right)\,.$$

Allora $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \psi_j(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$, $\psi_j(x) = 1$ su $\mathrm{B}\,(x_j, r_j)$ e $\psi_j(x) = 0$ fuori da $\overline{\mathrm{B}\,(x_j, 2r_j)}$. Posto

$$\psi(x) = 1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - \psi_j(x))\,,$$

si ha che $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$, $\psi(x) = 1$ su K e $\psi(x) = 0$ fuori da

$$\bigcup_{j=1}^{k} \overline{\mathrm{B}\,(x_j, 2r_j)}\,,$$

per cui $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. ∎

(7.2) Teorema (Formula di Gauss-Green I) *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega)$ e $g \in C^1_c(\Omega)$.*

Allora per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha

$$\int_\Omega D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = -\int_\Omega f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso $\Omega = \mathbb{R}^n$. Sia $M > 0$ tale che $g(x) = 0$ fuori da $[-M, M]^n$. Ne segue che $D_j g(x) = 0$ fuori da $[-M, M]^n$. Per il Teorema di Fubini-Tonelli e la formula di integrazione per parti, si ha

$$\int D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$= \int \left(\int D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(j)}) \right) d\mathcal{L}^{n-1}(x^{(1)}, \ldots, x^{(j-1)}, x^{(j+1)}, \ldots, x^{(n)}) =$$

$$= \int \left(\int_{-M}^{M} D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(j)}) \right) d\mathcal{L}^{n-1}(x^{(1)}, \ldots, x^{(j-1)}, x^{(j+1)}, \ldots, x^{(n)}) =$$

$$= -\int \left(\int_{-M}^{M} f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(j)}) \right) d\mathcal{L}^{n-1}(x^{(1)}, \ldots, x^{(j-1)}, x^{(j+1)}, \ldots, x^{(n)}) =$$

$$= -\int \left(\int f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(j)}) \right) d\mathcal{L}^{n-1}(x^{(1)}, \ldots, x^{(j-1)}, x^{(j+1)}, \ldots, x^{(n)}) =$$

$$= -\int f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

In generale, sia K un compatto in Ω tale che $g(x) = 0$ fuori da K e sia $\psi \in C^\infty_c(\Omega)$ tale che $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$ e $\psi(x) = 1$ su K. Allora la funzione $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \psi(x) f(x) & \text{se } x \in \Omega\,, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\,, \end{cases}$$

è di classe C^1. Tenuto conto che $D_j g(x) = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus K$ e che $D_j \psi(x) = 0$ su K, dal passo precedente si deduce che

$$\int_\Omega D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int D_j \tilde{f}(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$= -\int \tilde{f}(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = -\int_\Omega f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,,$$

da cui la tesi. ■

(7.3) Proposizione *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $x \in \partial\Omega$ e ν_1,ν_2 due versori normali esterni ad Ω in x.*

Allora $\nu_1 = \nu_2$.

Dimostrazione. A meno di una traslazione, possiamo supporre che $x = 0$. L'insieme

$$A_r = \{\xi \in \mathrm{B}\,(0,r) : \, \xi \cdot \nu_1 < 0 < \xi \cdot \nu_2\}$$

è aperto in $\mathbb{R}^n$. Se per assurdo $\nu_1 \neq \nu_2$, si ha $A_2 \neq \emptyset$, perché $\nu_2 - \nu_1 \in A_2$, quindi $\mathcal{L}^n(A_2) > 0$. D'altronde

$$A_r \subseteq \{\xi \in \mathrm{B}\,(0,r) \cap \Omega : \, \xi \cdot \nu_2 > 0\} \cup \{\xi \in \mathrm{B}\,(0,r) \setminus \Omega : \, \xi \cdot \nu_1 < 0\} \,,$$

per cui

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(A_r)}{r^n} = 0 \,.$$

D'altronde si ha

$$\frac{\mathcal{L}^n(A_r)}{r^n} = \frac{\mathcal{L}^n(A_2)}{2^n} > 0 \,,$$

per cui si ha una contraddizione. ■

(7.4) Teorema *Siano Ω ed U due aperti in $\mathbb{R}^n$, $g : U \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che*

$$\Omega \cap U = \{\xi \in U : \, g(\xi) < 0\}$$

e sia $x \in U \cap \partial\Omega$ tale che $\nabla g(x) \neq 0$.

Allora $g(x) = 0$ e

$$\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|}$$

è il versore normale esterno ad Ω in x.

Dimostrazione. Tenuto conto della continuità di g, è ovvio che $g(x) = 0$. Sia $\omega : U \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in U : \, g(\xi) = \nabla g(x) \cdot (\xi - x) + |\xi - x|\omega(\xi) \,.$$

Sia (r_h) una successione in $]0,+\infty[$ decrescente a 0 e sia

$$\varepsilon_h = \sup\left\{\frac{|\omega(\xi)|}{|\nabla g(x)|}\,:\,\xi \in \mathrm{B}\,(x,r_h)\right\}.$$

Evidentemente anche (ε_h) è decrescente a 0. Se $\xi \in \mathrm{B}\,(x,r_h)\cap\Omega$, si ha

$$\nabla g(x)\cdot(\xi - x) + |\xi - x|\omega(\xi) < 0\,,$$

da cui

$$\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|}\cdot(\xi - x) < \varepsilon_h|\xi - x|\,.$$

Ne segue

$$r_h^{-n}\mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r_h)\cap\Omega\,:\,(\xi - x)\cdot\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} > 0\right\}\right) \le$$
$$\le r_h^{-n}\mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r_h)\,:\,0 < (\xi - x)\cdot\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h|\xi - x|\right\}\right) =$$
$$= \mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,1)\,:\,0 < (\xi - x)\cdot\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h|\xi - x|\right\}\right).$$

Poiché

$$\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,1)\,:\,0 < (\xi - x)\cdot\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h|\xi - x|\right\}\right)$$

costituisce una successione decrescente di sottoinsiemi $\mathcal{L}^n-$misurabili di misura finita con intersezione vuota, si ha

$$\lim_h \mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,1)\,:\,0 < (\xi - x)\cdot\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h|\xi - x|\right\}\right) = 0\,.$$

In modo simile si prova che

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}\mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r)\setminus\Omega\,:\,(\xi - x)\cdot\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < 0\right\}\right) = 0\,,$$

da cui la tesi. ∎

(7.5) Teorema (Formula di Gauss-Green II) *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ e $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ due funzioni lipschitziane. Supponiamo che f e g siano di classe C^1 in Ω e sia $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ la normale esterna ad Ω.*

Allora valgono i seguenti fatti:

(*a*) *ogni $\nu^{(j)}$ è $\mathcal{H}^{n-1}-$misurabile e limitata, dove $\nu^{(j)}$ denota la $j-$esima componente di ν;*

(b) *per ogni* $j = 1, \dots, n$ *si ha*

$$\int_\Omega D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} f(s)\, g(s)\, \nu^{(j)}(s)\, d\mathcal{H}^{n-1}(s) - \int_\Omega f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Dimostrazione. Limitiamoci al caso particolare in cui $n = 2$ e

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\, -1 < x^{(1)} < 1\,,\, 0 < x^{(2)} < \beta(x^{(1)})\right\}$$

con $\beta : [-1, 1] \to]0, +\infty[$ lipschitziana su $[-1, 1]$ e di classe C^1 su $]-1, 1[$. Si verifica facilmente che

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \{(1, 0), (1, \beta(1)), (-1, \beta(-1)), (-1, 0)\}\ ,$$

dove

$$\Gamma_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\, -1 < x^{(1)} < 1\,,\, x^{(2)} = 0\right\}\ ,$$

$$\Gamma_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\, x^{(1)} = 1\,,\, 0 < x^{(2)} < \beta(1)\right\}\ ,$$

$$\Gamma_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\, -1 < x^{(1)} < 1\,,\, x^{(2)} = \beta(x^{(1)})\right\}\ ,$$

$$\Gamma_4 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\, x^{(1)} = -1\,,\, 0 < x^{(2)} < \beta(-1)\right\}\ .$$

Se definiamo $\gamma :]-1, 1[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ponendo

$$\gamma(x) = x^{(2)} - \beta(x^{(1)})\,,$$

si ha che γ è di classe C^1,

$$\Omega = \{x \in]-1, 1[\times]0, +\infty[:\, \gamma(x) < 0\}$$

e $\nabla\gamma(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Gamma_3$. Dal Teorema (7.4) si deduce che

$$\forall x \in \Gamma_3 :\, \nu(x) = \left(-\frac{\beta'(x^{(1)})}{\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2 + 1}}\right)\,.$$

Utilizzando nuovamente il Teorema (7.4), si dimostra anche che

$$\nu(x) = \begin{cases} (0, -1) & \text{se } x \in \Gamma_1\,, \\ (1, 0) & \text{se } x \in \Gamma_2\,, \\ (-1, 0) & \text{se } x \in \Gamma_4\,. \end{cases}$$

In particolare, risulta che $\nu^{(1)}, \nu^{(2)} : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ sono $\mathcal{H}^1-$misurabili e limitate.

Supponiamo inizialmente che g sia costantemente uguale a 1. Risulta allora

$$\int_\Omega D_{x^{(2)}} f(x)\, d\mathcal{L}^2(x) =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\beta(x^{(1)})} D_{x^{(2)}} f(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(2)}) \right) d\mathcal{L}^1(x^{(1)}) =$$

$$= \int_{-1}^{1} \big(f(x^{(1)}, \beta(x^{(1)})) - f(x^{(1)}, 0) \big)\, d\mathcal{L}^1(x^{(1)}) =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x^{(1)}, \beta(x^{(1)}))\nu^{(2)}(x^{(1)}, \beta(x^{(1)})) \sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2 + 1}\, d\mathcal{L}^1(x^{(1)}) +$$

$$+ \int_{-1}^{1} f(x^{(1)}, 0)\nu^{(2)}(x^{(1)}, 0)\, d\mathcal{L}^1(x^{(1)})\,.$$

Se poniamo $\varphi_1(t) = (t, 0)$, $\varphi_3(t) = (t, \beta(t))$, otteniamo

$$\int_\Omega D_{x^{(2)}} f(x)\, d\mathcal{L}^2(x) =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(\varphi_3(t))\nu^{(2)}(\varphi_3(t))|\varphi_3{}'(t)|\, d\mathcal{L}^1(t) + \int_{-1}^{1} f(\varphi_1(t))\nu^{(2)}(\varphi_1(t))|\varphi_1{}'(t)|\, d\mathcal{L}^1(t) =$$

$$= \int_{\Gamma_3} f(s)\nu^{(2)}(s)\, d\mathcal{H}^1(s) + \int_{\Gamma_1} f(s)\nu^{(2)}(s)\, d\mathcal{H}^1(s) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} f(s)\, \nu^{(2)}(s)\, d\mathcal{H}^1(s)\,.$$

Tenuto conto del Teorema di derivazione sotto il segno di integrale, risulta anche

$$D_{x^{(1)}} \left(\int_0^{\beta(x^{(1)})} f(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(2)}) \right) =$$

$$= f(x^{(1)}, \beta(x^{(1)}))\beta'(x^{(1)}) + \int_0^{\beta(x^{(1)})} D_{x^{(1)}} f(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(2)})\,.$$

Ne segue

$$\int_\Omega D_{x^{(1)}} f(x)\, d\mathcal{L}^2(x) = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\beta(x^{(1)})} D_{x^{(1)}} f(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(2)}) \right) d\mathcal{L}^1(x^{(1)}) =$$

$$= \int_{-1}^{1} D_{x^{(1)}} \left(\int_0^{\beta(x^{(1)})} f(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(2)}) \right) d\mathcal{L}^1(x^{(1)}) +$$

$$-\int_{-1}^{1} f(x^{(1)},\beta(x^{(1)}))\beta'(x^{(1)})\,d\mathcal{L}^1(x^{(1)}) =$$

$$= \int_0^{\beta(1)} f(1,x^{(2)})\,d\mathcal{L}^1(x^{(2)}) - \int_0^{\beta(-1)} f(-1,x^{(2)})\,d\mathcal{L}^1(x^{(2)}) +$$

$$+ \int_{-1}^{1} f(x^{(1)},\beta(x^{(1)}))\nu^{(1)}(x^{(1)},\beta(x^{(1)}))\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2+1}\,d\mathcal{L}^1(x^{(1)})\,.$$

Se poniamo anche $\varphi_2(t) = (1,t)$, $\varphi_4(t) = (-1,t)$, otteniamo

$$\int_\Omega D_{x^{(1)}} f(x)\,d\mathcal{L}^2(x) =$$

$$= \int_0^{\beta(1)} f(\varphi_2(t))\nu^{(1)}(\varphi_2(t))|\varphi_2{}'(t)|\,d\mathcal{L}^1(t) + \int_0^{\beta(-1)} f(\varphi_4(t))\nu^{(1)}(\varphi_4(t))|\varphi_4{}'(t)|\,d\mathcal{L}^1(t) +$$

$$+ \int_{-1}^{1} f(\varphi_3(t))\nu^{(1)}(\varphi_3(t))|\varphi_3{}'(t)|\,d\mathcal{L}^1(t) =$$

$$= \int_{\Gamma_2} f(s)\nu^{(1)}(s)\,d\mathcal{H}^1(s) + \int_{\Gamma_4} f(s)\nu^{(1)}(s)\,d\mathcal{H}^1(s) + \int_{\Gamma_3} f(s)\nu^{(1)}(s)\,d\mathcal{H}^1(s) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} f(s)\,\nu^{(1)}(s)\,d\mathcal{H}^1(s)\,,$$

da cui la tesi.

Se g non è costantemente uguale a 1, è sufficiente applicare il caso precedente alla funzione $\tilde{f}(x) = f(x)g(x)$. ■

Il prossimo risultato è una variante della formula dell'area.

(7.6) Teorema *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^2$ con $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < +\infty$, sia $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ la normale esterna ad Ω e sia $\tau : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ definita da*

$$(\tau^{(1)}(x), \tau^{(2)}(x)) = (-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))\,.$$

Siano A un aperto in $\mathbb{R}^2$, $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione iniettiva e di classe C^1 e $f : \varphi(A) \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.

Allora f è $\mathcal{H}^1-$integrabile su $\varphi(A\cap\partial\Omega)$ se e solo se la funzione

$$\Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \mapsto f(\varphi(x))\,|d\varphi(x)\tau(x)|$$

è $\mathcal{H}^1-$integrabile su $A\cap\partial\Omega$, nel qual caso si ha

$$\int_{\varphi(A\cap\partial\Omega)} f(y)\,d\mathcal{H}^1(y) = \int_{A\cap\partial\Omega} f(\varphi(x))\,|d\varphi(x)\tau(x)|\,d\mathcal{H}^1(x)\,.$$

Dimostrazione. Limitiamoci al caso particolare in cui

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \, -1 < x^{(1)} < 1 \, , \, 0 < x^{(2)} < \beta(x^{(1)}) \right\} \, ,$$

con $\beta : [-1, 1] \to]0, +\infty[$ lipschitziana su $[-1, 1]$ e di classe C^1 su $] - 1, 1[$, e

$$A \cap \partial\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \, -1 < x^{(1)} < 1 \, , \, x^{(2)} = \beta(x^{(1)}) \right\} \, .$$

Inoltre supponiamo a priori che $\{t \mapsto (f \circ \varphi)(t, \beta(t))\}$ sia $\mathcal{L}^1-$misurabile su $] - 1, 1[$.

Poiché

$$\forall x \in A \cap \partial\Omega : \, \nu(x) = \left(-\frac{\beta'(x^{(1)})}{\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2 + 1}} \right) \, ,$$

risulta

$$\forall x \in A \cap \partial\Omega : \, \tau(x) = - \left(\frac{1}{\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2 + 1}}, \frac{\beta'(x^{(1)})}{\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2 + 1}} \right) \, .$$

Se poniamo $\gamma(t) = (t, \beta(t))$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(A \cap \partial\Omega)} f(y) \, d\mathcal{H}^1(y) &= \int_{(\varphi \circ \gamma)(]-1,1[)} f(y) \, d\mathcal{H}^1(y) = \\
&= \int_{-1}^{1} f(\varphi(\gamma(t))) \, |(\varphi \circ \gamma)'(t)| \, d\mathcal{L}^1(t) = \\
&= \int_{-1}^{1} f(\varphi(\gamma(t))) \, |d\varphi(\gamma(t))(1, \beta'(t))| \, d\mathcal{L}^1(t) = \\
&= \int_{-1}^{1} f(\varphi(\gamma(t))) \, |d\varphi(\gamma(t))\tau(\gamma(t))| \, |\gamma'(t)| \, d\mathcal{L}^1(t) = \\
&= \int_{\gamma(]-1,1[)} f(\varphi(x)) \, |d\varphi(x)\tau(x)| \, d\mathcal{H}^1(x) = \\
&= \int_{A \cap \partial\Omega} f(\varphi(x)) \, |d\varphi(x)\tau(x)| \, d\mathcal{H}^1(x) \, ,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(7.7) Teorema (di Stokes) *Siano A un aperto in $\mathbb{R}^2$, B un aperto in $\mathbb{R}^3$, $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione iniettiva e di classe C^1 con $\varphi(A) \subseteq B$ e $f : B \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione di classe C^1. Sia Ω un aperto limitato tale che $\overline{\Omega} \subseteq A$ e $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < +\infty$ e sia $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ la normale esterna ad Ω.*

Poniamo, per ogni $y \in \varphi(\partial\Omega)$ *con* $y = \varphi(x)$,

$$\begin{aligned} \tau(y) &= \frac{d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))}{|d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))|} && \textit{se } d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x)) \neq 0\,, \\ \tau(y) &= 0 && \textit{se } d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x)) = 0\,, \end{aligned}$$

e, per ogni $y \in \varphi(\Omega)$ *con* $y = \varphi(x)$,

$$\begin{aligned} \eta(y) &= \frac{D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)}{|D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)|} && \textit{se } D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x) \neq 0\,, \\ \eta(y) &= 0 && \textit{se } D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x) = 0\,. \end{aligned}$$

Allora ogni $\tau^{(j)} : \varphi(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ *è* $\mathcal{H}^1-$*misurabile e limitata, ogni* $\eta^{(j)} : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ *è* $\mathcal{H}^2-$*misurabile e limitata e si ha*

$$\int_{\varphi(\partial\Omega)} f(s) \cdot \tau(s)\, d\mathcal{H}^1(s) = \int_{\varphi(\Omega)} (\mathrm{curl}\, f(y)) \cdot \eta(y)\, d\mathcal{H}^2(y)\,.$$

Dimostrazione. Limitiamoci al caso particolare in cui $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$ è di classe C^2 e non dimostriamo che ogni $\tau^{(j)} : \varphi(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{H}^1-$misurabile ed ogni $\eta^{(j)} : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{H}^2-$misurabile.

Consideriamo dapprima una qualunque applicazione $g : A \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1. Dalla formula di Gauss-Green segue che

$$\int_{\partial\Omega} g^{(1)}(s)\nu^{(2)}(s)\, d\mathcal{H}^1(s) = \int_{\Omega} D_{x^{(2)}} g^{(1)}(x)\, d\mathcal{L}^2(x)\,,$$

$$\int_{\partial\Omega} g^{(2)}(s)\nu^{(1)}(s)\, d\mathcal{H}^1(s) = \int_{\Omega} D_{x^{(1)}} g^{(2)}(x)\, d\mathcal{L}^2(x)\,,$$

da cui

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} g(s) \cdot \left(-\nu^{(2)}(s), \nu^{(1)}(s)\right)\, d\mathcal{H}^1(s) = \\ &= \int_{\Omega} \left(D_{x^{(1)}} g^{(2)}(x) - D_{x^{(2)}} g^{(1)}(x)\right)\, d\mathcal{L}^2(x)\,. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Definiamo ora un'applicazione $g : A \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 ponendo

$$g(x) = d\varphi(x)^t\, f(\varphi(x)) = \left(f(\varphi(x)) \cdot D_{x^{(1)}}\varphi(x), f(\varphi(x)) \cdot D_{x^{(2)}}\varphi(x)\right)\,.$$

Dal Teorema (7.6) si deduce che

$$\int_{\varphi(\partial\Omega)} f(s) \cdot \tau(s)\, d\mathcal{H}^1(s) = \int_{\partial\Omega} f(\varphi(x)) \cdot \tau(\varphi(x))\, |d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))|\, d\mathcal{H}^1(x) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} f(\varphi(x)) \cdot \left(d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))\right) \, d\mathcal{H}^1(x) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(d\varphi(x)^t \; f(\varphi(x))\right) \cdot (-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x)) \, d\mathcal{H}^1(x) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} g(x) \cdot (-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x)) \, d\mathcal{H}^1(x) \, .$$

D'altronde si ha

$$\int_{\varphi(\Omega)} (\mathrm{curl}\, f(y)) \cdot \eta(y) \, d\mathcal{H}^2(y) =$$

$$= \int_{\Omega} (\mathrm{curl}\, f)(\varphi(x)) \cdot \eta(\varphi(x)) \; |D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)| \; d\mathcal{L}^2(x) =$$

$$= \int_{\Omega} (\mathrm{curl}\, f)(\varphi(x)) \cdot (D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)) \; d\mathcal{L}^2(x) \, .$$

Peraltro risulta

$$(\mathrm{curl}\, f)(\varphi(x)) \cdot (D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)) =$$

$$= \sum_{i,j,k,m,n=1}^{3} \varepsilon_{ijk} D_{y^{(j)}} f^{(k)}(\varphi(x)) \, \varepsilon_{imn} D_{x^{(1)}}\varphi^{(m)} D_{x^{(2)}}\varphi^{(n)} =$$

$$= \sum_{j,k,m,n=1}^{3} \left(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\right) \; D_{y^{(j)}} f^{(k)}(\varphi(x)) D_{x^{(1)}}\varphi^{(m)} D_{x^{(2)}}\varphi^{(n)} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{3} D_{y^{(j)}} f^{(k)}(\varphi(x)) D_{x^{(1)}}\varphi^{(j)} D_{x^{(2)}}\varphi^{(k)} - \sum_{j,k=1}^{3} D_{y^{(j)}} f^{(k)}(\varphi(x)) D_{x^{(1)}}\varphi^{(k)} D_{x^{(2)}}\varphi^{(j)} =$$

$$= D_{x^{(1)}} \left(f \circ \varphi\right) \cdot D_{x^{(2)}}\varphi - D_{x^{(2)}} \left(f \circ \varphi\right) \cdot D_{x^{(1)}}\varphi =$$

$$= D_{x^{(1)}} \left((f \circ \varphi) \cdot D_{x^{(2)}}\varphi\right) - D_{x^{(2)}} \left((f \circ \varphi) \cdot D_{x^{(1)}}\varphi\right) = D_{x^{(1)}} g^{(2)} - D_{x^{(2)}} g^{(1)} \, .$$

Ne segue

$$\int_{\varphi(\Omega)} (\mathrm{curl}\, f(y)) \cdot \eta(y) \, d\mathcal{H}^2(y) = \int_{\Omega} \left(D_{x^{(1)}} g^{(2)} - D_{x^{(2)}} g^{(1)}\right) \; d\mathcal{L}^2(x) \, .$$

La tesi discende allora dalla (7.8). ■

8 Applicazioni a valori vettoriali

(8.1) Proposizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.*

Allora f è $\mu-$misurabile se e solo se per ogni aperto A in $\overline{\mathbb{R}}$ la controimmagine $f^{-1}(A)$ è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia $\mu-$misurabile. Gli insiemi $f^{-1}(-\infty)$, $f^{-1}(+\infty)$ e $f^{-1}([a, b[)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ sono $\mu-$misurabili. Ne segue che per ogni pluri-intervallo regolare P in $\mathbb{R}$ la controimmagine $f^{-1}(P)$ è $\mu-$misurabile. Per il Lemma (5.3), per ogni aperto A in $\mathbb{R}$ la controimmagine $f^{-1}(A)$ è $\mu-$misurabile. Consideriamo infine un aperto A in $\overline{\mathbb{R}}$. Dal momento che $A \cap \mathbb{R}$ è aperto in $\mathbb{R}$, si ha che $f^{-1}(A \cap \mathbb{R})$ è $\mu-$misurabile. D'altronde $f^{-1}(A)$ è uguale a $f^{-1}(A \cap \mathbb{R})$ unito eventualmente a $f^{-1}(-\infty)$ e $f^{-1}(+\infty)$. Ne segue che $f^{-1}(A)$ è in ogni caso $\mu-$misurabile.

Viceversa, supponiamo che per ogni aperto A in $\overline{\mathbb{R}}$ la controimmagine $f^{-1}(A)$ sia $\mu-$misurabile. In particolare, per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ è $\mu-$misurabile, per cui f è $\mu-$misurabile. ■

(8.2) Definizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ ed Y uno spazio metrico. Un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to Y$ si dice $\mu-$*misurabile*, se per ogni aperto A in Y la controimmagine $f^{-1}(A)$ è $\mu-$misurabile.*

Per la proposizione precedente, tale definizione è consistente con la definizione nel caso $Y = \overline{\mathbb{R}}$.

(8.3) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, Y uno spazio metrico e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione costante.*

Allora f è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Per ogni aperto A in Y, la controimmagine $f^{-1}(A)$ può essere solo $\emptyset$ o $\mathbb{R}^n$. In ogni caso $f^{-1}(A)$ è $\mu-$misurabile. ■

(8.4) Teorema *Siano Y uno spazio metrico e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione continua.*

Allora f è $\mathcal{H}^m-$misurabile per ogni $m \geq 1$.

Dimostrazione. Per ogni aperto A in Y l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$, quindi $\mathcal{H}^m-$misurabile. ■

(8.5) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, Y_1, Y_2 due spazi metrici, $f:\mathbb{R}^n \to Y_1$ un'applicazione $\mu-$misurabile e $g : Y_1 \to Y_2$ un'applicazione continua.*

Allora $(g \circ f)$ è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Se A è aperto in Y_2, la controimmagine $g^{-1}(A)$ è aperta in Y_1. Ne segue che

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$$

è $\mu-$misurabile, per cui $(g \circ f)$ è $\mu-$misurabile. ■

(8.6) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $(Y, \| \ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita, $\{a_1, \ldots, a_m\}$ una base in Y, $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione e $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ le componenti di f rispetto a tale base.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *f è $\mu-$misurabile;*

(b) *ogni componente $f^{(j)}$ è $\mu-$misurabile;*

(c) *per ogni $\varphi \in Y'$ la funzione $(\varphi \circ f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è $\mu-$misurabile.*

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ La funzione $a^j : Y \to \mathbb{R}$ è lineare e continua, per cui $f^{(j)} = a^j \circ f$ è $\mu-$misurabile per il teorema precedente.
$(b) \Longrightarrow (c)$ Se $\varphi \in Y'$, si ha

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a^j$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Ne segue

$$\varphi \circ f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f^{(j)} ,$$

per cui $(\varphi \circ f)$ è $\mu-$misurabile.

$(c) \Longrightarrow (a)$ Consideriamo prima il caso $Y = \mathbb{R}^n$. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica in $\mathbb{R}^n$ e $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$ sono le componenti di f, si ha $f^{(j)} = e^j \circ f$, per cui le componenti di f sono tutte $\mu-$misurabili.

Se $a^{(1)}, b^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, b^{(n)} \in \mathbb{R}$, si ha che

$$f^{-1}\left(\prod_{j=1}^{n}[a^{(j)}, b^{(j)}[\right) = \bigcap_{j=1}^{n}(f^{(j)})^{-1}([a^{(j)}, b^{(j)}[)$$

è $\mu-$misurabile. Ne segue che, per ogni pluri-intervallo regolare $P \subseteq \mathbb{R}^n$, l'insieme $f^{-1}(P)$ è $\mu-$misurabile. Per il Lemma (5.3), si conclude che per ogni aperto A in $\mathbb{R}^n$ la controimmagine $f^{-1}(A)$ è $\mu-$misurabile, per cui f è $\mu-$misurabile.

Nel caso generale sia $\Psi : Y \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare e biiettiva. Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è lineare, si ha che $\varphi \circ \Psi : Y \to \mathbb{R}$ è lineare. Ne segue che

$$\varphi \circ (\Psi \circ f) = (\varphi \circ \Psi) \circ f$$

è $\mu-$misurabile. Per il passo precedente si ha che $(\Psi \circ f)$ è $\mu-$misurabile. Essendo Ψ^{-1} continua, si conclude che $f = \Psi^{-1} \circ (\Psi \circ f)$ è $\mu-$misurabile. ■

(8.7) Corollario *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione.*

Allora f è $\mu-$misurabile se e solo se le funzioni $\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono $\mu-$misurabili.

Dimostrazione. Consideriamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e scegliamo $\{1, i\}$ come base in $\mathbb{C}$. La tesi discende allora dal teorema precedente. ■

(8.8) Corollario *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $(Y, \| \ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ e $f, g : \mathbb{R}^n \to Y$ delle applicazioni $\mu-$misurabili.*

Allora le applicazioni $(f + g)$, λf e $\|f\|$ sono $\mu-$misurabili.

Dimostrazione. Consideriamo Y come spazio normato su $\mathbb{R}$. Per ogni funzione $\mathbb{R}-$lineare $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ si ha

$$\varphi \circ (f + g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g\,,$$

$$\varphi \circ (\lambda f) = \lambda(\varphi \circ f)\,.$$

La $\mu-$misurabilità di $(f+g)$ e λf discende quindi dal Teorema (8.6).

La funzione $\|f\|$ è $\mu-$misurabile, in quanto composizione dell'applicazione $\mu-$misurabile f con la funzione continua $\|\ \|$. ■

(8.9) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $(Y, \|\ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e (f_h) una successione di applicazioni $\mu-$misurabili da $\mathbb{R}^n$ in Y. Supponiamo che la successione (f_h) converga puntualmente ad un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to Y$.*

Allora f è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Consideriamo Y come spazio normato su $\mathbb{R}$. Per ogni funzione $\mathbb{R}-$lineare $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ si ha

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \ (\varphi \circ f)(x) = \lim_h (\varphi \circ f_h)(x)\,,$$

per cui $(\varphi \circ f)$ è $\mu-$misurabile. La $\mu-$misurabilità di f discende allora dal Teorema (8.6).
■

(8.10) Definizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $(Y, \|\ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to Y$ si dice* $\mu-$sommabile, *se f è $\mu-$misurabile e*

$$\int \|f\|\, d\mu < +\infty\,.$$

Si noti che la nozione di sommabilità ora introdotta è consistente con quella introdotta nel caso $Y = \mathbb{R}$.

(8.11) Proposizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, Y uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione $\mu-$sommabile.*

Allora esiste uno ed un solo $y \in Y$ tale che

$$\forall \varphi \in Y' : \ \langle \varphi, y\rangle = \int \langle \varphi, f(x)\rangle\, d\mu(x)\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varphi \in Y'$, la funzione $\varphi \circ f$ è $\mu-$misurabile per il Teorema (8.5) e si ha

$$|\langle \varphi, f(x)\rangle| \leq \|\varphi\|\, \|f(x)\|\,.$$

Ne segue che la funzione $\varphi \circ f$ è $\mu-$sommabile.

Inoltre la funzione

$$\begin{aligned} &Y' \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\varphi \mapsto \int \langle \varphi, f(x) \rangle \, d\mu(x) \end{aligned}$$

è evidentemente lineare. Avendo Y dimensione finita, esiste uno ed un solo $y \in Y$ tale che

$$\forall \varphi \in Y' : \langle \varphi, y \rangle = \int \langle \varphi, f(x) \rangle \, d\mu(x) \,,$$

da cui la tesi. ■

(8.12) Definizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, Y uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione $\mu-$sommabile. Poniamo*

$$\int f(x) \, d\mu(x) = \int f \, d\mu := y \,,$$

dove $y \in Y$ è l'elemento individuato dalla proposizione precedente.

Se Y è uno spazio normato su $\mathbb{C}$ di dimensione finita e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ è un'applicazione $\mu-$sommabile, $\int f(x) \, d\mu(x)$ viene definito considerando Y come spazio normato su $\mathbb{R}$.

Nel caso reale, l'integrale di f rispetto a μ è quindi, per definizione, l'unico elemento $\int f(x) \, d\mu(x)$ di Y tale che

$$\forall \varphi \in Y' : \langle \varphi, \int f(x) \, d\mu(x) \rangle = \int \langle \varphi, f(x) \rangle \, d\mu(x) \,.$$

Nel caso complesso, l'integrale di f rispetto a μ è l'unico elemento $\int f(x) \, d\mu(x)$ di Y tale che

$$\varphi\left(\int f(x) \, d\mu(x) \right) = \int \varphi(f(x)) \, d\mu(x)$$

per ogni funzione $\mathbb{R}-$lineare $\varphi : Y \to \mathbb{R}$.

(8.13) Lemma *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Allora per ogni $x \in X$ esiste $\varphi \in X'$ tale che*

$$\|\varphi\| = \|x\| \,,$$

$$\langle \varphi, x \rangle = \|x\|^2 \,.$$

Dimostrazione. Introduciamo un qualunque prodotto scalare su X e denotiamo con $\| \; \|_1$ la norma indotta.

Consideriamo anzitutto il caso $\|x\| = 1$. Sia $D = \{y \in X : \|y\| \leq 1\}$. Essendo chiuso e limitato, D è compatto. Posto

$$x_h = \frac{h+1}{h} x \,,$$

esiste $\xi_h \in D$ tale che

$$\forall y \in D : \|x_h - \xi_h\|_1 \leq \|x_h - y\|_1 \,.$$

Scegliendo $y = x$, si deduce che (ξ_h) converge a x. Inoltre si verifica facilmente che D è convesso, per cui risulta

$$\forall y \in D, \forall t \in]0,1] : \|x_h - \xi_h\|_1^2 \leq \|x_h - \xi_h - t(y - \xi_h)\|_1^2 =$$

$$= \|x_h - \xi_h\|_1^2 - 2t(x_h - \xi_h) \cdot (y - \xi_h) + t^2 \|y - \xi_h\|_1^2 \,,$$

da cui

$$\forall y \in D : (x_h - \xi_h) \cdot (y - \xi_h) \leq 0 \,.$$

Sia

$$\nu_h = \frac{x_h - \xi_h}{\|x_h - \xi_h\|_1}$$

e sia (ν_{h_k}) una sottosuccessione convergente a $\nu \in X$. Evidentemente $\nu \neq 0$. Risulta

$$\forall y \in D : \nu_{h_k} \cdot (y - \xi_{h_k}) \leq 0 \,,$$

da cui

$$\forall y \in D : \nu \cdot (y - x) \leq 0 \,,$$

ossia, potendo scambiare y con $-y$,

$$\forall y \in D : |\nu \cdot y| \leq \nu \cdot x \,.$$

In particolare $\nu \cdot x > 0$.

Definiamo $\varphi \in X'$ ponendo

$$\langle \varphi, y \rangle = \frac{1}{\nu \cdot x} (\nu \cdot y) \,.$$

Risulta

$$\forall y \in D : |\langle \varphi, y \rangle| \leq 1 \,,$$

per cui $\|\varphi\| \leq 1$. Inoltre si ha $\langle \varphi, x \rangle = 1$, da cui $\|\varphi\| = 1$.

Se $x \neq 0$ e $\|x\| \neq 1$, esiste $\varphi \in X'$ con $\|\varphi\| = 1$ e

$$\langle \varphi, \frac{x}{\|x\|} \rangle = 1\,.$$

Allora $\|x\|\varphi$ ha i requisiti richiesti. Se poi $x = 0$, basta scegliere $\varphi = 0$. ■

Il lemma precedente vale anche se X non ha dimensione finita. In tal caso la dimostrazione è però assai più complessa.

(8.14) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $(Y, \|\ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *se $f, g : \mathbb{R}^n \to Y$ sono $\mu-$sommabili, $(f+g)$ è $\mu-$sommabile e si ha*

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu\,;$$

(b) *se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ è $\mu-$sommabile, λf è $\mu-$sommabile e si ha*

$$\int (\lambda f)\, d\mu = \lambda \int f\, d\mu\,;$$

(c) *se $f : \mathbb{R}^n \to Y$ è $\mu-$sommabile, si ha*

$$\left\| \int f\, d\mu \right\| \leq \int \|f\|\, d\mu\,;$$

(d) *se $\{a_1, \ldots, a_m\}$ è una base in Y, $f : \mathbb{R}^n \to Y$ è un'applicazione e $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ sono le componenti di f rispetto alla base $\{a_1, \ldots, a_m\}$, si ha che f è $\mu-$sommabile se e solo se tutte le componenti sono $\mu-$sommabili, nel qual caso*

$$\int f\, d\mu = \sum_{j=1}^{m} \left(\int f^{(j)}\, d\mu \right) a_j\,.$$

Dimostrazione.

(a) L'applicazione $(f+g)$ è $\mu-$misurabile e $\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$. Ne segue che $(f+g)$ è $\mu-$sommabile.

Se $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ è una funzione $\mathbb{R}-$lineare, risulta

$$\varphi\left(\int f\, d\mu + \int g\, d\mu \right) = \varphi\left(\int f\, d\mu \right) + \varphi\left(\int g\, d\mu \right) =$$

$$= \int (\varphi \circ f)\, d\mu + \int (\varphi \circ g)\, d\mu = \int (\varphi \circ (f+g))\, d\mu\,.$$

La tesi discende allora dall'arbitrarietà di φ.

(b) L'applicazione λf è $\mu-$misurabile e $\|\lambda f(x)\| = |\lambda|\|f(x)\|$. Ne segue che λf è $\mu-$sommabile.

Sia $L : Y \to Y$ l'applicazione definita da $L(y) = \lambda y$. Evidentemente L è $\mathbb{K}-$lineare, quindi $\mathbb{R}-$lineare. Se $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ è una funzione $\mathbb{R}-$lineare, anche $\varphi \circ L : Y \to \mathbb{R}$ è $\mathbb{R}-$lineare, per cui

$$\varphi\left(\lambda \int f\, d\mu\right) = (\varphi \circ L)\left(\int f\, d\mu\right) =$$

$$= \int (\varphi \circ (L \circ f))\, d\mu = \int (\varphi \circ (\lambda f))\, d\mu\,.$$

La tesi discende allora dall'arbitrarietà di φ.

(c) Per il lemma precedente esiste una funzione $\mathbb{R}-$lineare $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ tale che

$$\|\varphi\| = \left\|\int f\, d\mu\right\|,$$

$$\varphi\left(\int f\, d\mu\right) = \left\|\int f\, d\mu\right\|^2.$$

Allora si ha

$$\left\|\int f\, d\mu\right\|^2 = \varphi\left(\int f\, d\mu\right) = \int (\varphi \circ f)\, d\mu \leq$$

$$\leq \int \|\varphi\|\, \|f\|\, d\mu = \|\varphi\| \int \|f\|\, d\mu =$$

$$= \left\|\int f\, d\mu\right\| \int \|f\|\, d\mu\,,$$

da cui la tesi.

(d) Per il Teorema (8.6) f è $\mu-$misurabile se e solo se ogni componente $f^{(j)}$ è $\mu-$misurabile. Inoltre si ha

$$|f^{(j)}(x)| = |a^j(f(x))| \leq \|a^j\|\|f(x)\|$$

e

$$\|f(x)\| \leq \sum_{j=1}^m \|a_j\|\, |f^{(j)}(x)|\,,$$

per cui f è $\mu-$sommabile se e solo se ogni componente $f^{(j)}$ è $\mu-$sommabile.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si ha per definizione di integrale

$$a^j \left(\int f d\mu \right) = \int (a^j \circ f)\, d\mu = \int f^{(j)}\, d\mu \,,$$

ossia

$$\int f\, d\mu = \sum_{j=1}^{m} \left(\int f^{(j)}\, d\mu \right) a_j \,.$$

Se invece $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, risulta che le funzioni $\mathrm{Re}\,, \mathrm{Im}\, : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ e $\mathrm{Re} \circ a^j, \mathrm{Im} \circ a^j : Y \to \mathbb{R}$ sono $\mathbb{R}-$lineari, per cui

$$\mathrm{Re} \left(a^j \left(\int f\, d\mu \right) \right) = \int \mathrm{Re}\, \left(a^j \circ f \right)\, d\mu = \mathrm{Re} \left(\int f^{(j)}\, d\mu \right)$$

e, similmente,

$$\mathrm{Im} \left(a^j \left(\int f\, d\mu \right) \right) = \int \mathrm{Im}\, \left(a^j \circ f \right)\, d\mu = \mathrm{Im} \left(\int f^{(j)}\, d\mu \right) \,.$$

Ne segue che

$$a^j \left(\int f\, d\mu \right) = \int f^{(j)}\, d\mu \,,$$

da cui la tesi. ■

(8.15) Teorema (della convergenza dominata o di Lebesgue) *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $(Y, \|\ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e (f_h) una successione di applicazioni $\mu-$sommabili da $\mathbb{R}^n$ in Y. Supponiamo che (f_h) converga puntualmente ad un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to Y$ e che esista una funzione $\mu-$sommabile $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\|f_h\| \leq g$.*

Allora f è $\mu-$sommabile e si ha

$$\lim_h \int \|f_h - f\|\, d\mu = 0 \,,$$

$$\lim_h \int f_h\, d\mu = \int f\, d\mu \,.$$

Dimostrazione. L'applicazione f è $\mu-$misurabile e $\|f\| \leq g$. Ne segue che f è $\mu-$sommabile.

Inoltre $(\|f_h - f\|)$ è una successione di funzioni $\mu-$sommabili convergente puntualmente a 0 tale che $\|f_h - f\| \leq 2g$. Dal teorema della convergenza dominata nel caso reale si deduce che

$$\lim_h \int \|f_h - f\| \, d\mu = 0 \,.$$

Poiché per il teorema precedente si ha

$$\left\| \int f_h \, d\mu - \int f \, d\mu \right\| = \left\| \int (f_h - f) \, d\mu \right\| \leq$$

$$\leq \int \|f_h - f\| \, d\mu \,,$$

risulta anche

$$\lim_h \int f_h \, d\mu = \int f \, d\mu \,,$$

da cui la tesi. ■

(8.16) Definizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, Y uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, E un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $f : E \to Y$ un'applicazione.*

*Diciamo che f è $\mu-$*misurabile*, se l'applicazione $f^* : \mathbb{R}^n \to Y$, definita da*

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \in E \,, \\ 0 & se\ x \in \mathbb{R}^n \setminus E \,, \end{cases}$$

è $\mu-$misurabile.

*Similmente, f si dice $\mu-$*sommabile*, se f^* è $\mu-$sommabile, nel qual caso si pone*

$$\int_E f(x) \, d\mu(x) = \int_E f \, d\mu := \int f^* \, d\mu \,.$$

(8.17) Teorema *Siano $m \geq 1$, E un sottoinsieme $\mathcal{H}^m-$misurabile di $\mathbb{R}^n$, Y uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e $f : E \to Y$ un'applicazione continua.*

Allora f è $\mathcal{H}^m-$misurabile.

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia variante del risultato con f a valori reali. ■

(8.18) Teorema *Siano K un compatto in $\mathbb{R}^n$, Y uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e $f : K \to Y$ un'applicazione continua.*

Allora f è $\mathcal{L}^n-$sommabile.

Dimostrazione. Per il teorema precedente f è $\mathcal{L}^n-$misurabile. Inoltre esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $\|f(x)\| \leq M$ per ogni $x \in K$. Allora si ha

$$\int \|f^*\| \, d\mu \leq \int M\chi_K \, d\mu = M\mathcal{L}^n(K) < +\infty \, ,$$

per cui f è $\mathcal{L}^n-$sommabile. ■

Esercizi

1. Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, Y_1 e Y_2 due spazi normati su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $f : \mathbb{R}^n \to Y_1$ un'applicazione $\mu-$sommabile e $L : Y_1 \to Y_2$ un'applicazione lineare.

Si dimostri che $L \circ f$ è $\mu-$sommabile e che

$$\int (L \circ f) \, d\mu = L \left(\int f \, d\mu \right) .$$

2. Siano Y uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e $\gamma : [a, b] \to Y$ un'applicazione continua. Se γ è di classe C^1 su $]a, b[$ e γ' è sommabile, si dimostri che

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t) \, d\mathcal{L}^1(t) \, .$$

3. Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, E un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ con $\mu(E) < +\infty$, Y uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e (f_h) una successione di applicazioni da E in Y $\mu-$misurabili e limitate convergente uniformemente ad un'applicazione $f : E \to Y$ limitata. Si dimostri che f_h e f sono $\mu-$sommabili e che

$$\lim_h \int_E f_h \, d\mu = \int_E f \, d\mu \, .$$

Capitolo 8

Forme differenziali lineari

1 Aperti 1- e 2-aciclici

(1.1) Definizione *Sia A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Diciamo che A è* $1-$aciclico, *se ogni $1-$forma $\omega : A \to X'$ di classe C^1 e chiusa è esatta.*

Evidentemente ogni aperto stellato è $1-$aciclico.

(1.2) Teorema *Siano A_0, A_1 due aperti in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Supponiamo che A_0, A_1 siano entrambi $1-$aciclici e che $A_0 \cap A_1$ sia connesso (eventualmente vuoto).*

Allora $A_0 \cup A_1$ è $1-$aciclico.

Dimostrazione. Sia $\omega : A_0 \cup A_1 \to X'$ una $1-$forma di classe C^1 e chiusa e siano $f_0 : A_0 \to \mathbb{K}$ e $f_1 : A_1 \to \mathbb{K}$ due primitive di ω su A_0 ed A_1 rispettivamente. Esiste $c \in \mathbb{K}$ tale che $f_1(x) = f_0(x) + c$ per ogni $x \in A_0 \cap A_1$. Possiamo allora definire $f : A_0 \cup A_1 \to \mathbb{K}$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) + c & \text{se } x \in A_0\,, \\ f_1(x) & \text{se } x \in A_1\,. \end{cases}$$

Evidentemente f è una primitiva di ω su $A_0 \cup A_1$. ■

(1.3) Esempio *Si ha che $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è $1-$aciclico.*

Dimostrazione. Poniamo

$$A_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \, x^{(1)} = x^{(2)} = 0, \, x^{(3)} \geq 0\right\}\,,$$

$$A_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\, x^{(1)} = x^{(2)} = 0,\, x^{(3)} \leq 0\right\} .$$

Si verifica facilmente che A_0 è stellato rispetto a $x_0 = (0,0,-1)$, mentre A_1 è stellato rispetto a $x_0 = (0,0,1)$. Pertanto A_0 ed A_1 sono $1-$aciclici.

D'altronde l'applicazione $\Phi :]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\Phi(\varrho,\vartheta,z) = (\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta, z)$$

è continua ed ha per immagine $A_0 \cap A_1$. Si deduce che $A_0 \cap A_1$ è connesso.

La tesi discende allora dal Teorema (1.2). ■

(1.4) Definizione *Sia A un aperto in uno spazio unitario X su $\mathbb{R}$ di dimensione* 3 *orientato. Diciamo che A è* $2-$aciclico, *se ogni campo di vettori $F : A \to X$ di classe C^1 e solenoidale ammette potenziale vettore.*

Evidentemente ogni aperto stellato è $2-$aciclico.

(1.5) Teorema *Siano A_0, A_1 due aperti in X. Supponiamo che A_0, A_1 siano entrambi $2-$aciclici e che $A_0 \cap A_1$ sia $1-$aciclico (eventualmente vuoto).*

Allora $A_0 \cup A_1$ è $2-$aciclico.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(1.6) Esempio *Si ha che*

$$\mathbb{R}^3 \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\, x^{(1)} = x^{(2)} = 0\right\}$$

è $2-$aciclico.

Dimostrazione. Siano anzitutto

$$B_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\, x^{(1)} > 0\right\} , \qquad B_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\, x^{(1)} < 0\right\} .$$

Evidentemente B_1 e B_2 sono due aperti stellati e disgiunti. Dal Teorema (1.2) si deduce che $B_0 \cup B_1$ è $1-$aciclico.

Siano ora

$$A_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\, x^{(1)} = 0,\, x^{(2)} \geq 0\right\} ,$$

$$A_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \, x^{(1)} = 0, \, x^{(2)} \leq 0\right\} \,.$$

Evidentemente A_0 è un aperto stellato rispetto a $x_0 = (0, -1, 0)$, mentre A_1 è un aperto stellato rispetto a $x_0 = (0, 1, 0)$. Inoltre $A_0 \cap A_1 = B_0 \cup B_1$ è $1-$aciclico. Dal Teorema (1.5) si deduce che

$$A_0 \cup A_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \, x^{(1)} = x^{(2)} = 0\right\}$$

è $2-$aciclico. ■

Esercizi

1. Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $1-$aciclico per ogni $n \geq 3$.

2. Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $2-$aciclico per ogni $n \geq 4$.

2 Aperti semplicemente connessi

(2.1) Proposizione *Siano A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita ed $\omega : A \to X'$ una $1-$forma di classe C^1.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) la $1-$forma ω è chiusa;

(b) per ogni $x \in A$ esiste un intorno aperto U di x in A tale che $\omega_{|U}$ sia esatta.

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x, r) \subseteq A$. Essendo $\mathrm{B}\,(x, r)$ stellato, segue che ω è esatta su $\mathrm{B}\,(x, r)$.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Se $x \in A$ ed U è un intorno di x conforme alla (b), segue che

$$\forall v, w \in X : \, \langle d\omega(x)v, w\rangle = \langle d\omega(x)w, v\rangle \,.$$

Per l'arbitrarietà di x, ω è chiusa. ■

(2.2) Definizione *Sia A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Una $1-$forma $\omega : A \to X'$ si dice* chiusa, *se ω è localmente esatta, ossia se per ogni $x \in A$ esiste un intorno aperto U di x in A tale che $\omega_{|U}$ sia esatta.*

Per la proposizione precedente, la definizione è consistente con quella introdotta per ω di classe C^1.

(2.3) Proposizione *Siano A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\omega : A \to X'$ una $1-$forma continua e chiusa e $\gamma : [a, b] \to A$ una curva.*

Allora valgono i seguenti fatti:

(a) *esiste una suddivisione $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ di $[a, b]$ tale che ogni $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ sia contenuto in un aperto convesso su cui ω è esatta;*

(b) *se $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ è una suddivisione conforme alla (a), se $\eta : [a, b] \to A$ è la poligonale definita da*

$$\eta(t) = \frac{t_j - t}{t_j - t_{j-1}}\gamma(t_{j-1}) + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\gamma(t_j) \qquad \text{per } t_{j-1} \leq t \leq t_j$$

e se γ è di classe C^1 a tratti, si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega\,;$$

(c) *se $a = s_0 < \cdots < s_k = b$ ed $a = t_0 < \cdots < t_m = b$ sono due suddivisioni conformi alla (a) e ξ e η sono le poligonali associate, si ha*

$$\int_\xi \omega = \int_\eta \omega\,.$$

Dimostrazione.

(a) Per ogni $x \in \gamma([a, b])$ esiste $r(x) > 0$ tale che ω sia esatta su $\mathrm{B}\,(x, r(x))$. Per la compattezza di $\gamma([a, b])$, esistono $x_1, \ldots, x_m \in \gamma([a, b])$ tali che

$$\gamma([a, b]) \subseteq \bigcup_{h=1}^{m} \mathrm{B}\left(x_h, \frac{1}{2}r(x_h)\right)\,.$$

Per l'uniforme continuità di γ, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall s, t \in [a, b] : |t - s| < \delta \Longrightarrow \|\gamma(t) - \gamma(s)\| < \min \left\{ \frac{1}{2} r(x_h) : 1 \leq h \leq m \right\} .$$

Sia $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ una suddivisione di $[a, b]$ con $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ per ogni $j = 1, \ldots, k$. Allora per ogni j esiste h tale che $\gamma(t_{j-1}) \in \mathrm{B}\left(x_h, \frac{1}{2} r(x_h)\right)$, per cui

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq \mathrm{B}\left(x_h, r(x_h)\right) .$$

(b) Sia $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j$, con U_j aperto convesso su cui ω è esatta. Allora si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle \omega(\eta(t)), \eta'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \langle \omega(\eta(t)), \eta'(t) \rangle \, dt = \int_\eta \omega \, .$$

(c) Sia ψ la poligonale associata alla suddivisione di $[a, b]$ che si ottiene considerando i punti di entrambe le suddivisioni. Evidentemente ogni $\psi([s_{h-1}, s_h])$ è contenuto in un aperto convesso su cui ω è esatta. Inoltre ξ è la poligonale che si ottiene dalla curva C^1 a tratti ψ considerando la suddivisione $a = s_0 < \cdots < s_k = b$. Per la (b) ne segue

$$\int_\psi \omega = \int_\xi \omega \, .$$

In modo simile si prova che

$$\int_\psi \omega = \int_\eta \omega \, ,$$

da cui la tesi. ■

(2.4) Definizione *Siano A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\omega : A \to X'$ una $1-$forma continua e chiusa e $\gamma : [a, b] \to A$ una curva.*

Definiamo l'integrale di ω lungo γ, *ponendo*

$$\int_\gamma \omega := \int_\eta \omega \, ,$$

dove $\eta : [a, b] \to A$ è la poligonale associata ad una suddivisione $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ di $[a, b]$ conforme alla (a) della proposizione precedente.

Tale definizione è ben posta, a causa della (a) e della (c), ed è consistente con con quella introdotta nel caso C^1 a tratti, a causa della (b) della proposizione precedente.

(2.5) Definizione *Sia Y uno spazio metrico. Due curve chiuse $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to Y$ si dicono* omotope*, se esiste un'applicazione continua*

$$\mathcal{H} : [a,b] \times [0,1] \to Y$$

tale che

$$\forall t \in [a,b] : \mathcal{H}(t,0) = \gamma_0(t) \text{ e } \mathcal{H}(t,1) = \gamma_1(t);$$

$$\forall s \in [0,1] : \mathcal{H}(a,s) = \mathcal{H}(b,s)\,.$$

Un'applicazione $\mathcal{H}$ con tali proprietà è detta un'omotopia *fra γ_0 e γ_1.*

(2.6) Definizione *Sia Y uno spazio metrico. Una curva chiusa $\gamma : [a,b] \to Y$ si dice* contrattile*, se è omotopa ad una curva costante da $[a,b]$ in Y.*

(2.7) Teorema *Siano A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\omega : A \to X'$ una $1-$forma continua e chiusa e $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to A$ due curve chiuse omotope.*

Allora si ha

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega\,.$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{H} : [a,b] \times [0,1] \to A$ un'omotopia fra γ_0 e γ_1.

Per ogni $x \in \mathcal{H}([a,b] \times [0,1])$ esiste $r(x) > 0$ tale che ω sia esatta su $\mathrm{B}\,(x, r(x))$. Per la compattezza di $\mathcal{H}([a,b] \times [0,1])$ esistono $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{H}([a,b] \times [0,1])$ tali che

$$\mathcal{H}([a,b] \times [0,1]) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{B}\left(x_j, \frac{1}{2} r(x_j)\right)\,.$$

Per l'uniforme continuità di $\mathcal{H}$, esistono una suddivisione $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ di $[a,b]$ ed una suddivisione $0 = s_0 < \cdots < s_m = 1$ di $[0,1]$ tali che ogni $\mathcal{H}([t_{h-1}, t_h] \times [s_{i-1}, s_i])$ sia contenuto in qualche $\mathrm{B}\,(x_j, r(x_j))$.

Sia $\eta : [0,1] \to A$ la curva definita da $\eta(s) = \mathcal{H}(b,s)$ e siano $\xi_{h,i} : [0,4] \to A$ le curve chiuse definite da

$$\xi_{h,i}(\tau) = \begin{cases} \mathcal{H}\left(t_{h-1} + \tau(t_h - t_{h-1}), s_{i-1}\right) & \text{se } 0 \leq \tau \leq 1\,, \\ \mathcal{H}\left(t_h, s_{i-1} + (\tau - 1)(s_i - s_{i-1})\right) & \text{se } 1 \leq \tau \leq 2\,, \\ \mathcal{H}\left(t_h + (\tau - 2)(t_{h-1} - t_h), s_i\right) & \text{se } 2 \leq \tau \leq 3\,, \\ \mathcal{H}\left(t_{h-1}, s_i + (\tau - 3)(s_{i-1} - s_i)\right) & \text{se } 3 \leq \tau \leq 4\,. \end{cases}$$

Allora si ha

$$0 = \sum_{h=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} \int_{\xi_{h,i}} \omega = \int_{\gamma_0} \omega + \int_{\eta} \omega - \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\eta} \omega = \int_{\gamma_0} \omega - \int_{\gamma_1} \omega \,,$$

da cui la tesi. ■

(2.8) Definizione *Un aperto A in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita si dice* semplicemente connesso *(o* $1-$connesso*), se A è connesso ed ogni curva chiusa a valori in A è contrattile in A.*

(2.9) Teorema *Sia A un aperto stellato in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita.*

Allora A è semplicemente connesso.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in A$ conforme alla definizione di aperto stellato. Anzitutto, l'aperto A è connesso. Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva chiusa e sia $\mathcal{H} : [a, b] \times [0, 1] \to A$ l'applicazione continua definita da

$$\mathcal{H}(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + s x_0 \,.$$

Risulta che γ è omotopa alla curva costantemente uguale a x_0. ■

(2.10) Teorema *Siano A un aperto semplicemente connesso in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita ed $\omega : A \to X'$ una $1-$forma continua e chiusa.*

Allora ω è esatta.

Dimostrazione. Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva chiusa di classe C^1 a tratti e sia $\eta : [a, b] \to A$ una curva costante a cui γ sia omotopa. Per il Teorema (2.7) si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\eta} \omega = 0 \,.$$

Ne segue che ω è esatta. ■

(2.11) Corollario *Sia A un aperto semplicemente connesso in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Allora A è $1-$aciclico.*

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del teorema precedente. ■

Esercizi

1. Siano A e B due aperti semplicemente connessi in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Si dimostri che, se $A \cap B$ è connesso e non vuoto, allora $A \cup B$ è semplicemente connesso.

2. Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso per ogni $n \geq 3$.

Elenco dei simboli

Indice analitico