UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

# *TEORIA DELLA MISURA*

Prof. Marco Degiovanni

Anno Accademico 2011/2012

# Indice

# Capitolo 1

# Teoria della misura

## 1 Spazi di misura

**(1.1) Definizione** *Sia $X$ un insieme. Diciamo che una famiglia $\mathfrak{M}$ di sottoinsiemi di $X$* è una $\sigma-$algebra *in $X$, se le seguenti proprietà sono soddisfatte:*

(*a*) $\emptyset \in \mathfrak{M}$;

(*b*) *per ogni $E \in \mathfrak{M}$ si ha $X \setminus E \in \mathfrak{M}$;*

(*c*) *se $(E_h)$ è una successione in $\mathfrak{M}$, risulta $\bigcup\limits_{h=0}^{\infty} E_h \in \mathfrak{M}$.*

*Un sottoinsieme $E$ di $X$ si dice $\mathfrak{M}-$*misurabile *(o, più semplicemente,* misurabile*), se $E \in \mathfrak{M}$.*

**(1.2) Definizione** *Sia $X$ un insieme. Diciamo che una funzione $\mu : \mathfrak{P}(X) \to [0, +\infty]$* è una misura esterna *su $X$, se valgono i seguenti fatti:*

(*a*) $\mu(\emptyset) = 0$;

(*b*) *se $E \subseteq F \subseteq X$, si ha*

$$\mu(E) \leq \mu(F)\,;$$

(*c*) *se $(E_h)$ è una successione in $\mathfrak{P}(X)$, si ha*

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h)\,.$$

**(1.3) Definizione** *Sia $\mu$ una misura esterna su un insieme $X$. Un sottoinsieme $E$ di $X$ si dice* $\mu$-misurabile, *se per ogni $F \subseteq X$ si ha*

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E)\,.$$

**(1.4) Teorema** *Sia $\mu$ una misura esterna su un insieme $X$. Allora la famiglia dei sottoinsiemi $\mu-$misurabili di $X$ è una $\sigma-$algebra in $X$.*

**(1.5) Definizione** Uno spazio misurabile *è una coppia $(X, \mathfrak{M})$, in cui $X$ è un insieme e $\mathfrak{M}$ è una $\sigma-$algebra in $X$.*

**(1.6) Proposizione** *Sia $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile. Valgono allora i seguenti fatti:*

*$(a)$ $X \in \mathfrak{M}$;*

*$(b)$ se $(E_h)$ è una successione in $\mathfrak{M}$, risulta $\bigcap\limits_{h=0}^{\infty} E_h \in \mathfrak{M}$;*

*$(c)$ se $\{E_h : 0 \leq h \leq k\}$ è una famiglia finita con $E_h \in \mathfrak{M}$ per ogni $h = 0, \ldots, k$, si ha*

$$\bigcup_{h=0}^{k} E_h \in \mathfrak{M}\,, \qquad \bigcap_{h=0}^{k} E_h \in \mathfrak{M}\,;$$

*$(d)$ se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$, si ha $E_2 \setminus E_1 \in \mathfrak{M}$.*

*Dimostrazione.* L'affermazione $(a)$ segue dal fatto che $X = X \setminus \emptyset$. Inoltre, se $(E_h)$ è una successione in $\mathfrak{M}$, risulta

$$\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h = X \setminus \left( \bigcup_{h=0}^{\infty} (X \setminus E_h) \right)\,,$$

da cui la $(b)$.

Ponendo $E_h = \emptyset$ per ogni $h \geq k+1$, si ottiene

$$\bigcup_{h=0}^{k} E_h = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\,,$$

mentre, ponendo $E_h = X$ per ogni $h \geq k+1$, si ottiene

$$\bigcap_{h=0}^{k} E_h = \bigcap_{h=0}^{\infty} E_h\,.$$

Ne segue la $(c)$.

Infine si ha

$$E_2 \setminus E_1 = X \setminus ((X \setminus E_2) \cup E_1) \,,$$

da cui la $(d)$. ■

**(1.7) Proposizione** *Sia $\{\mathfrak{M}_j : j \in J\}$ una collezione non vuota di $\sigma-$algebre in un insieme $X$. Allora $\bigcap\limits_{j \in J} \mathfrak{M}_j$ è una $\sigma-$algebra in $X$.*

*Dimostrazione.* La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

**(1.8) Definizione** *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di un insieme $X$. Poiché $\mathfrak{P}(X)$ è una $\sigma-$algebra in $X$, la collezione di tutte le $\sigma-$algebre in $X$ contenenti $\mathfrak{F}$ non è vuota. L'intersezione di tali $\sigma-$algebre si chiama* $\sigma-$algebra generata *da $\mathfrak{F}$. Si tratta della più piccola $\sigma-$algebra in $X$ contenente $\mathfrak{F}$.*

**(1.9) Definizione** *Sia $X$ uno spazio metrico. Denotiamo con $\mathfrak{B}(X)$ la $\sigma-$algebra in $X$ generata dagli aperti di $X$. Gli elementi di $X$ si chiamano* sottoinsiemi boreliani *di $X$.*

Evidentemente ogni aperto ed ogni chiuso in $X$ è un boreliano in $X$.

**(1.10) Definizione** *Sia $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile. Diciamo che una funzione $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ è* una misura *su $\mathfrak{M}$, se valgono i seguenti fatti:*

$(a)$ *$\mu(\emptyset) = 0$;*

$(b)$ *se $(E_h)$ è una successione in $\mathfrak{M}$ costituita da insiemi a due a due disgiunti, si ha*

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h) \,.$$

Combinando la $(a)$ e la $(b)$, si deduce che, per ogni famiglia finita $\{E_h : 0 \leq h \leq k\} \subseteq \mathfrak{M}$ costituita da insiemi a due a due disgiunti, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{k} E_h\right) = \sum_{h=0}^{k} \mu(E_h) \,.$$

**(1.11) Definizione** Uno spazio di misura *(o* spazio mensurale*) è una terna* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, *in cui* $X$ *è un insieme,* $\mathfrak{M}$ *una* $\sigma-$*algebra in* $X$ *e* $\mu$ *una misura su* $\mathfrak{M}$.

**(1.12) Proposizione** *Sia* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *uno spazio di misura. Valgono allora i seguenti fatti:*

$(a)$ *se* $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ *ed* $E_1 \subseteq E_2$, *si ha* $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$; *se in più* $\mu(E_1) < +\infty$, *risulta*

$$\mu(E_2 \setminus E_1) = \mu(E_2) - \mu(E_1)\,;$$

$(b)$ *se* $(E_h)$ *è una successione in* $\mathfrak{M}$, *si ha*

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h)\,;$$

$(c)$ *se* $(E_h)$ *è una successione crescente in* $\mathfrak{M}$, *si ha*

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \lim_h \mu(E_h)\,;$$

$(d)$ *se* $(E_h)$ *è una successione decrescente in* $\mathfrak{M}$ *con*

$$\lim_h \mu(E_h) < +\infty\,,$$

*si ha*

$$\mu\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \lim_h \mu(E_h)\,.$$

*Dimostrazione.* $(a)$ La proprietà discende dalla formula

$$\mu(E_1) + \mu(E_2 \setminus E_1) = \mu(E_2)\,.$$

$(b)$ Se si pone

$$A_0 = E_0\,,$$

$$\forall h \geq 1:\ A_h = E_h \setminus (E_0 \cup \cdots \cup E_{h-1})\ ,$$

si ha che gli $A_h$ sono $\mathfrak{M}$−misurabili ed a due a due disgiunti con

$$\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\,,$$

$$A_h \subseteq E_h\,.$$

Ne segue

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(A_h) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h)\,.$$

$(c)$ Se si pone

$$A_0 = E_0\,,$$

$$\forall h \geq 1:\ A_h = E_h \setminus E_{h-1}\,,$$

si ha che gli $A_h$ sono $\mathfrak{M}$−misurabili ed a due a due disgiunti con

$$\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\,,$$

$$\mu(E_k) = \sum_{h=0}^{k} \mu(A_h)\,.$$

Ne segue

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(A_h) =$$

$$= \lim_k \left(\sum_{h=0}^{k} \mu(A_h)\right) = \lim_k \mu(E_k)\,.$$

$(d)$ Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(E_k) < +\infty$. Se si pone $A_h = E_k \setminus E_h$, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) = \lim_h \mu(A_h)\,.$$

D'altronde risulta

$$\forall h \geq k:\ E_h = E_k \setminus A_h\,,$$

$$\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h = E_k \setminus \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right)\,.$$

Ne segue

$$\mu\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \mu(E_k) - \mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) =$$

$$= \mu(E_k) - \lim_h \mu(A_h) = \lim_h \mu(E_h)\,,$$

da cui la tesi. ■

**(1.13) Definizione** *Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $E \subseteq X$. Diciamo che $E$ è* $\mu-$trascurabile, *se $E \in \mathfrak{M}$ e $\mu(E) = 0$.*

**(1.14) Definizione** *Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Diciamo che $\mu$ è* $\sigma-$finita, *se esiste una successione $(E_h)$ in $\mathfrak{M}$ con $\mu(E_h) < +\infty$ e $X = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} E_h$.*

A meno di sostituire $E_h$ con $\widehat{E}_h = E_0 \cup \cdots \cup E_h$, si può sempre supporre che $(E_h)$ sia crescente. A meno di sostituire $E_h$ con $\widetilde{E}_0 = \widehat{E}_0$, $\widetilde{E}_h = \widehat{E}_h \setminus \widehat{E}_{h-1}$ per $h \geq 1$, si può sempre supporre che gli $E_h$ siano a due a due disgiunti.

**(1.15) Esempio** *Sia $\mu$ una misura esterna su un insieme $X$ e sia $\mathfrak{M}$ una $\sigma-$algebra in $X$ costituita da sottoinsiemi $\mu-$misurabili.*

*Allora $\mu_{|\mathfrak{M}}$ è una misura.*

Il prossimo teorema mostra che ogni misura può essere ottenuta con tale procedura.

**(1.16) Teorema** *Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Per ogni $E \subseteq X$ poniamo*

$$\mu^*(E) := \inf\left\{\mu(G) :\, G \in \mathfrak{M},\, E \subseteq G\right\}\,.$$

*Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *$\mu^*$ è una misura esterna su $X$;*

(*b*) *per ogni $E \in \mathfrak{M}$ si ha che $E$ è $\mu^*-$misurabile e $\mu^*(E) = \mu(E)$;*

(*c*) *$\mu^*$ è $\sigma-$finita se e solo se $\mu$ è $\sigma-$finita;*

(*d*) *per ogni $E \subseteq X$ esiste $G \in \mathfrak{M}$ tale che $E \subseteq G$ e $\mu(G) = \mu^*(E)$.*

*Dimostrazione.*

(*d*) Sia $E \subseteq X$. Per ogni $h \geq 1$ sia $G_h \in \mathfrak{M}$ tale che $E \subseteq G_h$ e $\mu(G_h) \leq \mu^*(E) + 1/h$. Allora risulta

$$\bigcap_{h=1}^{\infty} G_h \in \mathfrak{M}\,, \qquad E \subseteq \bigcap_{h=1}^{\infty} G_h\,,$$

quindi

$$\mu^*(E) \leq \mu\left(\bigcap_{h=1}^{\infty} G_h\right) \leq \mu(G_h) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{h}$$

per ogni $h \geq 1$, per cui $G = \bigcap_{h=1}^{\infty} G_h$ ha i requisiti richiesti.

$(a)$ Evidentemente si ha $\mu^*(\emptyset) = 0$ e $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$ ogniqualvolta $E_1 \subseteq E_2 \subseteq X$. Sia $(E_h)$ una successione di sottoinsiemi di $X$. Per ogni $h \in \mathbb{N}$, sia $G_h \in \mathfrak{M}$ tale che $E_h \subseteq G_h$ e $\mu(G_h) = \mu^*(E_h)$. Tenuto conto che

$$\bigcup_{h=0}^{\infty} G_h \in \mathfrak{M}\,, \qquad \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} G_h\,,$$

ne segue

$$\mu^*\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) \leq \mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} G_h\right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu(G_h) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu^*(E_h)\,.$$

$(b)$ Sia $E \in \mathfrak{M}$. Dato $F \subseteq X$, sia $G \in \mathfrak{M}$ tale che $F \subseteq G$ e $\mu(G) = \mu^*(F)$. Allora risulta

$$G \cap E \in \mathfrak{M}\,, \quad F \cap E \subseteq G \cap E\,, \quad G \setminus E \in \mathfrak{M}\,, \quad F \setminus E \subseteq G \setminus E\,,$$

quindi

$$\mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \setminus E) \leq \mu(G \cap E) + \mu(G \setminus E) = \mu(G) = \mu^*(F)\,.$$

Ne segue la $\mu^*-$misurabilità di $E$.

Ovviamente risulta $\mu^*(E) \leq \mu(E)$. D'altronde per ogni $G \in \mathfrak{M}$ con $E \subseteq G$ si ha $\mu(E) \leq \mu(G)$. Ne segue $\mu(E) \leq \mu^*(E)$.

$(c)$ Se $\mu$ è $\sigma-$finita, segue dalla $(b)$ che anche $\mu^*$ è $\sigma-$finita.

Viceversa, sia $\mu^*$ $\sigma-$finita e sia $(E_h)$ una successione di sottoinsiemi $\mu^*-$misurabili di $X$ con $\mu^*(E_h) < +\infty$ e $X = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$. Sia $G_h \in \mathfrak{M}$ tale che $E_h \subseteq G_h$ e $\mu(G_h) = \mu^*(E_h)$. Allora $X = \bigcup_{h=0}^{\infty} G_h$, per cui $\mu$ è $\sigma-$finita. ■

**(1.17) Definizione** *Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Denotiamo con $\mu^*$ la misura esterna introdotta nel teorema precedente.*

**(1.18) Definizione** *Sia $X$ uno spazio metrico.* Una misura boreliana *su $X$ è una misura definita su $\mathfrak{B}\,(X)$.*

**(1.19) Teorema** *Sia $\mu$ una misura esterna su uno spazio metrico $X$. Allora sono fatti equivalenti:*

$(a)$ *ogni aperto di $X$ è $\mu-$misurabile;*

$(b)$ *ogni boreliano di $X$ è $\mu-$misurabile;*

$(c)$ *per ogni coppia $E, F$ di sottoinsiemi non vuoti di $X$ con*

$$\inf \{d(x,y) : x \in E, \, y \in F\} > 0$$

*si ha $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.*

*Dimostrazione.*
$(a) \implies (b)$ Sia $\mathfrak{M}$ la famiglia dei sottoinsiemi $\mu-$misurabili di $X$. Allora $\mathfrak{M}$ è una $\sigma-$algebra in $X$ contenente gli aperti di $X$. Ne segue $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{M}$.
$(b) \implies (c)$ Siano $E, F$ come nella $(c)$ e sia

$$\varrho = \inf \{d(x,y) : x \in E, \, y \in F\} \, .$$

Posto

$$A = \{x \in X : d(x,E) < \varrho\} \, ,$$

risulta $E \subseteq A$ ed $A \cap F = \emptyset$. Essendo aperto, $A$ è $\mu-$misurabile. Ne segue

$$\mu(E \cup F) = \mu((E \cup F) \cap A) + \mu((E \cup F) \setminus A) = \mu(E) + \mu(F) \, .$$

$(c) \implies (a)$ Per la $(b)$ della Definizione (1.1), è sufficiente dimostrare che ogni chiuso è $\mu-$misurabile. Dato un chiuso non vuoto $C$ in $X$, basta provare che

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C)$$

per ogni $F \subseteq X$ con $\mu(F) < +\infty$.

Poniamo per ogni $h \geq 1$

$$A_h = \left\{x \in F : d(x,C) > \frac{1}{h}\right\} \, ,$$

$$S_h = \left\{x \in F : \frac{1}{h+1} < d(x,C) \leq \frac{1}{h}\right\} \, .$$

Poiché
$$\inf\{d(x,y):\ x \in S_h,\, y \in S_{h+2}\} \geq \frac{1}{h+1} - \frac{1}{h+2} > 0\,,$$
si ha
$$\forall h \geq 1:\ \mu(S_h) + \mu(S_{h+2}) = \mu(S_h \cup S_{h+2})\,.$$
Ne segue
$$\sum_{h=1}^{k} \mu(S_{2h}) = \mu\left(\bigcup_{h=1}^{k} S_{2h}\right) \leq \mu(F)\,,$$
$$\sum_{h=1}^{k} \mu(S_{2h-1}) = \mu\left(\bigcup_{h=1}^{k} S_{2h-1}\right) \leq \mu(F)\,,$$
quindi
$$\sum_{h=1}^{2k} \mu(S_h) \leq 2\mu(F)\,,$$
da cui si deduce che
$$\sum_{h=1}^{\infty} \mu(S_h) < +\infty\,.$$
Essendo $C$ chiuso, si ha
$$x \notin C \iff d(x,C) > 0\,,$$
quindi
$$\forall k \geq 1:\ F \setminus C = A_k \cup \left(\bigcup_{h=k}^{\infty} S_h\right)\,.$$
Pertanto risulta
$$\mu(F \setminus C) \leq \mu(A_k) + \sum_{h=k}^{\infty} \mu(S_h)\,.$$
Tenuto conto che
$$\inf\{d(x,y):\ x \in F \cap C,\, y \in A_k\} \geq \frac{1}{k} > 0\,,$$
ne segue
$$\mu(F) \geq \mu\left((F \cap C) \cup A_k\right) = \mu(F \cap C) + \mu(A_k) \geq$$
$$\geq \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C) - \sum_{h=k}^{\infty} \mu(S_h)\,.$$
Passando al limite per $k \to +\infty$, si ottiene
$$\mu(F) \geq \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C)\,,$$

da cui la $\mu-$misurabilità di $C$. ∎

**(1.20) Corollario** *Per ogni $m \geq 1$ i boreliani di $\mathbb{R}^n$ sono $\mathcal{H}^m-$misurabili. Pertanto $\mathcal{H}^m_{|\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}$ è una misura boreliana su $\mathbb{R}^n$.*

**(1.21) Teorema** *Sia $X$ uno spazio metrico e sia $\mu$ una misura boreliana su $X$. Allora per ogni $E \in \mathfrak{B}(X)$ con $\mu(E) < +\infty$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C$ in $X$ tale che $C \subseteq E$ e $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$.*

*Dimostrazione.* Sia $E \in \mathfrak{B}(X)$ con $\mu(E) < +\infty$ e sia $\mathfrak{M}$ la famiglia dei $G \in \mathfrak{B}(X)$ con la proprietà che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un chiuso $C$ ed un aperto $A$ in $X$ con $C \subseteq G \subseteq A$ e $\mu((A \setminus C) \cap E) < \varepsilon$.

Evidentemente $\emptyset \in \mathfrak{M}$. Se $G \in \mathfrak{M}$ ed $\varepsilon > 0$, siano $C$ ed $A$ come da definizione di $\mathfrak{M}$. Allora $X \setminus A$ è un chiuso e $X \setminus C$ è un aperto con

$$X \setminus A \subseteq X \setminus G \subseteq X \setminus C\,,$$

$$\mu\left(((X \setminus C) \setminus (X \setminus A)) \cap E\right) = \mu((A \setminus C) \cap E) < \varepsilon\,,$$

per cui $X \setminus G \in \mathfrak{M}$. Sia infine $(G_h)$ una successione in $\mathfrak{M}$. Dato $\varepsilon > 0$, esistono una successione $(C_h)$ di chiusi ed una successione $(A_h)$ di aperti in $X$ con $C_h \subseteq G_h \subseteq A_h$ e $\mu((A_h \setminus C_h) \cap E) < \varepsilon 2^{-h-1}$. Poiché

$$\left(\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) \setminus \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} C_h\right)\right) \cap E \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} (A_h \setminus C_h) \cap E\,,$$

risulta

$$\mu\left(\left(\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) \setminus \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} C_h\right)\right) \cap E\right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu((A_h \setminus C_h) \cap E) < \varepsilon\,.$$

D'altronde

$$\left(\left(\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) \setminus \left(\bigcup_{h=0}^{k} C_h\right)\right) \cap E\right)$$

è una successione decrescente in $\mathfrak{B}(X)$, su cui $\mu$ è finita, avente per intersezione

$$\left(\left(\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) \setminus \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} C_h\right)\right) \cap E\right)\,.$$

Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\left(\left(\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) \setminus \left(\bigcup_{h=0}^{k} C_h\right)\right) \cap E\right) < \varepsilon\,.$$

Allora $C = \bigcup_{h=0}^{k} C_h$ ed $A = \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h$ sono rispettivamente un chiuso ed un aperto in $X$ con $C \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} G_h \subseteq A$ e $\mu((A \setminus C) \cap E) < \varepsilon$. Pertanto $\mathfrak{M}$ è una $\sigma-$algebra in $X$.

Se $G$ è un aperto in $X$ con $G \neq X$, sia

$$C_h = \left\{x \in X : \, d(x, X \setminus G) \geq \frac{1}{h+1}\right\}.$$

Allora $(C_h)$ è una successione crescente di chiusi in $X$ la cui unione è $G$, per cui $((G \setminus C_h) \cap E)$ è una successione decrescente di boreliani, su cui $\mu$ è finita, avente intersezione vuota. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $\mu((G \setminus C_h) \cap E) < \varepsilon$. Allora, posto $C = C_h$ ed $A = G$, si ha $C \subseteq G \subseteq A$ e $\mu((A \setminus C) \cap E) < \varepsilon$. Pertanto $G \in \mathfrak{M}$.

Dal momento che $\mathfrak{M}$ contiene gli aperti, si ha $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}(X)$. In particolare risulta $E \in \mathfrak{M}$. Pertanto, dato $\varepsilon > 0$ e dati $C$ ed $A$ come da definizione, si ha $C \subseteq E$ e $\mu(E \setminus C) = \mu((A \setminus C) \cap E) < \varepsilon$. ■

**(1.22) Definizione** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^n$. Denotiamo con $\mathcal{M}(\Omega)$ la famiglia delle misure boreliane su $\Omega$ che siano finite sui compatti di $\Omega$. Gli elementi di $\mathcal{M}(\Omega)$ si chiamano anche* misure di Radon (positive) *su $\Omega$.*

Come è noto, la misura $\mathcal{L}^n_{|\mathfrak{B}(\Omega)}$ appartiene a $\mathcal{M}(\Omega)$. Poiché $\Omega$ è unione numerabile di compatti, ogni $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ è $\sigma-$finita.

**(1.23) Teorema** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Allora per ogni $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ valgono i seguenti fatti:*

(a) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A$ in $\Omega$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$;*

(b) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C$ in $\Omega$ tale che $C \subseteq E$ e $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$;*

(c) *esistono una successione decrescente $(A_h)$ di aperti in $\Omega$ ed $E_0 \in \mathfrak{B}(\Omega)$ $\mu-$trascurabile tali che*

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h\,,$$

$$\lim_h \mu(A_h) = \mu(E)\,;$$

(*d*) *esistono una successione crescente* $(K_h)$ *di compatti in* $\Omega$ *ed* $E_0 \in \mathfrak{B}(\Omega)$ $\mu-$*trascurabile tali che*

$$E = \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} K_h\right) \cup E_0\,.$$

*Dimostrazione.*

(*a*) Sia $(D_h)$ una successione esaustiva di compatti in $\Omega$. Dato $\varepsilon > 0$, per il Teorema (1.21) esiste una successione di chiusi $(C_h)$ in $\Omega$ con $C_h \subseteq \mathrm{int}\,(D_h) \setminus E$ e

$$\mu\left((\mathrm{int}\,(D_h) \setminus C_h) \setminus E\right) = \mu\left((\mathrm{int}\,(D_h) \setminus E) \setminus C_h\right) < \varepsilon 2^{-h-1}\,.$$

Ne segue $\mathrm{int}\,(D_h) \cap E \subseteq \mathrm{int}\,(D_h) \setminus C_h$, per cui $A = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} (\mathrm{int}\,(D_h) \setminus C_h)$ è un aperto in $\Omega$ tale che $E \subseteq A$. Inoltre risulta

$$\mu(A \setminus E) \le \sum_{h=0}^{\infty} \mu\left((\mathrm{int}\,(D_h) \setminus C_h) \setminus E\right) < \varepsilon\,.$$

(*b*) Sia $A$ un aperto in $\Omega$ contenente $\Omega \setminus E$ tale che $\mu(A \setminus (\Omega \setminus E)) < \varepsilon$. Allora $\Omega \setminus A$ è un chiuso in $\Omega$ contenuto in $E$ tale che

$$\mu(E \setminus (\Omega \setminus A)) = \mu(A \setminus (\Omega \setminus E)) < \varepsilon\,.$$

(*c*) Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $A_h$ un aperto in $\Omega$ contenente $E$ tale che

$$\mu(A_h \setminus E) < \frac{1}{h+1}\,.$$

A meno di sostituire $A_h$ con $A_0 \cap \cdots \cap A_h$, possiamo supporre che la successione $(A_h)$ sia decrescente. Poniamo

$$E_0 = \left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h\right) \setminus E\,.$$

Allora è ovvio che

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h$$

ed inoltre

$$\mu(E_0) = \mu\left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} (A_h \setminus E)\right) \le \mu(A_h \setminus E) < \frac{1}{h+1}\,,$$

per cui $\mu(E_0) = 0$.

Poiché

$$\mu(E) \leq \mu(A_h) \leq \mu(E) + \frac{1}{h+1},$$

risulta anche

$$\lim_h \mu(A_h) = \mu(E).$$

$(d)$ Sia $(A_h)$ una successione decrescente di aperti in $\Omega$ contenenti $\Omega \setminus E$ tale che

$$\left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h\right) \setminus (\Omega \setminus E) = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} (A_h \cap E)$$

sia $\mu-$trascurabile e sia $C_h = \Omega \setminus A_h$. Allora $(C_h)$ è una successione crescente di chiusi in $\Omega$ contenuti in $E$ tale che

$$E \setminus \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h\right) = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} (A_h \cap E)$$

sia $\mu-$trascurabile. Se poniamo

$$K_h = C_h \cap D_h,$$

$$E_0 = E \setminus \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} K_h\right) = E \setminus \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h\right),$$

si ha che $(K_h)$ è una successione crescente di compatti in $\Omega$, $E_0$ è $\mu-$trascurabile e

$$E = \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} K_h\right) \cup E_0,$$

da cui la tesi. ■

**(1.24) Corollario** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Allora per ogni $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A$ in $\Omega$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A) \leq \mu(E) + \varepsilon$.*

*Dimostrazione.* Sia $A$ un aperto in $\Omega$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$. Allora risulta

$$\mu(A) = \mu(E) + \mu(A \setminus E) \leq \mu(E) + \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

**(1.25) Corollario** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^n$ e siano $\lambda, \mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Supponiamo che si abbia $\lambda(A) = \mu(A)$ per ogni aperto $A$ in $\Omega$.*

*Allora risulta $\lambda(E) = \mu(E)$ per ogni $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$.*

*Dimostrazione.* Sia $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ e sia $\varepsilon > 0$. Sia $A$ un aperto in $\Omega$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A) \leq \mu(E) + \varepsilon$. Allora risulta

$$\lambda(E) \leq \lambda(A) = \mu(A) \leq \mu(E) + \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, deve essere $\lambda(E) \leq \mu(E)$.

Scambiando $\lambda$ con $\mu$, si ottiene la disuguaglianza opposta. ■

# 2 Funzioni misurabili

Nel corso di questa sezione, $(X, \mathfrak{M})$ denoterà uno spazio misurabile.

**(2.1) Definizione** *Sia $Y$ uno spazio metrico. Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice* $\mathfrak{M}-$misurabile *(o, più semplicemente,* misurabile*), se per ogni aperto $A$ in $Y$ l'insieme $f^{-1}(A)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.*

**(2.2) Proposizione** *Siano $Y$ uno spazio metrico e $f : X \to Y$ un'applicazione. Allora sono fatti equivalenti:*

$(a)$ *$f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile;*

$(b)$ *per ogni chiuso $C$ in $Y$ l'insieme $f^{-1}(C)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile;*

$(c)$ *per ogni boreliano $B$ in $Y$ l'insieme $f^{-1}(B)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.*

*Dimostrazione.*
$(a) \Longrightarrow (c)$ Sia

$$\mathfrak{N} = \left\{E \subseteq Y : \, f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}\right\}\,.$$

Si verifica facilmente che $\mathfrak{N}$ è una $\sigma-$algebra in $Y$ contenente gli aperti di $Y$. Ne segue $\mathfrak{B}(Y) \subseteq \mathfrak{N}$.

$(c) \Longrightarrow (b)$ È sufficiente osservare che ogni chiuso è boreliano.

$(b) \Longrightarrow (a)$ Se $A$ è aperto in $Y$, l'insieme

$$f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus A)$$

è $\mathfrak{M}-$misurabile. ■

**(2.3) Proposizione** *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Allora sono fatti equivalenti:*

$(a)$ *$f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile;*

$(b)$ *per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ è $\mathfrak{M}-$misurabile;*

$(c)$ *per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([c, +\infty])$ è $\mathfrak{M}-$misurabile;*

$(d)$ *per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([-\infty, c[)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile;*

$(e)$ *per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([-\infty, c])$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.*

*Dimostrazione.*

$(b) \Longrightarrow (c)$ Si ha

$$[c, +\infty] = \bigcap_{h=1}^{\infty} \left] c - \frac{1}{h}, +\infty \right] ,$$

per cui

$$f^{-1}\left([c, +\infty]\right) = \bigcap_{h=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left] c - \frac{1}{h}, +\infty \right]\right)$$

è $\mathfrak{M}-$misurabile.

$(c) \Longrightarrow (d)$ Si ha

$$f^{-1}([-\infty, c[) = X \setminus f^{-1}([c, +\infty])\,.$$

$(d) \Longrightarrow (e)$ Si ha

$$[-\infty, c] = \bigcap_{h=1}^{\infty} \left[ -\infty, c + \frac{1}{h} \right[ ,$$

per cui

$$f^{-1}\left([-\infty, c]\right) = \bigcap_{h=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[ -\infty, c + \frac{1}{h} \right[\right)$$

è $\mathfrak{M}-$misurabile.

$(e) \Longrightarrow (b)$ Si ha

$$f^{-1}(]c,+\infty]) = X \setminus f^{-1}([-\infty,c]) .$$

$(a) \Longrightarrow (d)$ È sufficiente osservare che $[-\infty, c[$ è aperto in $\overline{\mathbb{R}}$.

$(d) \Longrightarrow (a)$ Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}([a,b[) = f^{-1}([-\infty,b[) \setminus f^{-1}([-\infty,a[)$$

è $\mathfrak{M}-$misurabile. Se $P = \bigcup\limits_{h=0}^{k} [a_h, b_h[$ è un pluri-intervallo regolare in $\mathbb{R}$, anche

$$f^{-1}(P) = \bigcup_{h=0}^{k} f^{-1}([a_h, b_h[)$$

è $\mathfrak{M}-$misurabile. Se $A$ è un aperto in $\mathbb{R}$, si ha $A = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} P_h$, dove $(P_h)$ è una successione crescente di pluri-intervalli regolari. Ne segue che

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{h=0}^{\infty} f^{-1}(P_h)$$

è $\mathfrak{M}-$misurabile. Sia infine $A$ un aperto in $\overline{\mathbb{R}}$. Anzitutto

$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{h=0}^{\infty} f^{-1}([-\infty,-h[) , \qquad f^{-1}(+\infty) = X \setminus \bigcup_{h=0}^{\infty} f^{-1}([-\infty,h[)$$

sono $\mathfrak{M}-$misurabili. Inoltre $A \cap \mathbb{R}$ è aperto in $\mathbb{R}$, per cui $f^{-1}(A \cap \mathbb{R})$ è $\mathfrak{M}-$misurabile. Allora anche $f^{-1}(A)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile, essendo uguale a $f^{-1}(A \cap \mathbb{R})$ eventualmente unito a $f^{-1}(-\infty)$ e $f^{-1}(+\infty)$. ■

**(2.4) Corollario** *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathfrak{M}-$misurabile. Allora per ogni $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ gli insiemi $f^{-1}(]a,b[)$, $f^{-1}([a,b])$, $f^{-1}(]a,b])$ e $f^{-1}([a,b[)$ sono $\mathfrak{M}-$misurabili.*

*Dimostrazione.* Per ogni $c \in \overline{\mathbb{R}}$ gli insiemi

$$f^{-1}(]c,+\infty]), \quad f^{-1}([c,+\infty]), \quad f^{-1}([-\infty,c[), \quad f^{-1}([-\infty,c])$$

sono $\mathfrak{M}-$misurabili, in quanto controimmagini di un aperto o di un chiuso in $\overline{\mathbb{R}}$. Ne segue che per ogni $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ gli insiemi

$$\begin{aligned} f^{-1}(]a,b[) &= f^{-1}(]a,+\infty]) \cap f^{-1}([-\infty,b[)\,, \\ f^{-1}([a,b]) &= f^{-1}([a,+\infty]) \cap f^{-1}([-\infty,b])\,, \\ f^{-1}(]a,b]) &= f^{-1}(]a,+\infty]) \cap f^{-1}([-\infty,b])\,, \\ f^{-1}([a,b[) &= f^{-1}([a,+\infty]) \cap f^{-1}([-\infty,b[) \end{aligned}$$

sono tutti $\mathfrak{M}-$misurabili. ■

**(2.5) Definizione** *Siano $Y_1$ ed $Y_2$ due spazi metrici. Un'applicazione $f : Y_1 \to Y_2$ si dice* boreliana*, se è $\mathfrak{B}(Y_1)-$misurabile.*

**(2.6) Teorema** *Siano $Y_1$, $Y_2$ due spazi metrici e sia $f : Y_1 \to Y_2$ un'applicazione continua.*

*Allora $f$ è boreliana.*

*Dimostrazione.* Per ogni aperto $A$ in $Y_2$, l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto in $Y_1$, quindi boreliano. ■

**(2.7) Teorema** *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione boreliana. Allora $f$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile per ogni $m \geq 1$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c,+\infty])$ è boreliano in $\mathbb{R}^n$, quindi $\mathcal{H}^m-$misurabile per il Corollario (1.20). ■

**(2.8) Teorema** *Siano $Y_1, Y_2$ due spazi metrici, $f : X \to Y_1$ un'applicazione $\mathfrak{M}-$misurabile e $g : Y_1 \to Y_2$ un'applicazione boreliana.*

*Allora $(g \circ f)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.*

*Dimostrazione.* Se $A$ è aperto in $Y_2$, la controimmagine $g^{-1}(A)$ è boreliana in $Y_1$. Dalla Proposizione (2.2) si deduce che $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ è $\mathfrak{M}-$misurabile, per cui $(g \circ f)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile. ■

**(2.9) Teorema** *Siano $Y$ uno spazio metrico e $f : X \to Y$ un'applicazione costante. Allora $f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.*

*Dimostrazione.* Per ogni aperto $A$ in $Y$, la controimmagine $f^{-1}(A)$ può essere solo $\emptyset$ o $X$. In ogni caso $f^{-1}(A)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile. ■

**(2.10) Definizione** *Sia $(f_h)$ una successione di funzioni da $X$ in $\overline{\mathbb{R}}$. Definiamo le funzioni $\sup\limits_h f_h$, $\inf\limits_h f_h$, $\limsup\limits_h f_h$, $\liminf\limits_h f_h$ da $X$ in $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo per ogni $x \in X$:*

$$
\begin{aligned}
\left(\sup_h f_h\right)(x) &:= \sup_h f_h(x)\,, \\
\left(\inf_h f_h\right)(x) &:= \inf_h f_h(x)\,, \\
\left(\limsup_h f_h\right)(x) &:= \limsup_h f_h(x)\,, \\
\left(\liminf_h f_h\right)(x) &:= \liminf_h f_h(x)\,.
\end{aligned}
$$

**(2.11) Teorema** *Sia $(f_h)$ una successione di funzioni $\mathfrak{M}-$misurabili da $X$ in $\overline{\mathbb{R}}$.*

*Allora le funzioni $\sup\limits_h f_h$, $\inf\limits_h f_h$, $\limsup\limits_h f_h$ e $\liminf\limits_h f_h$ sono $\mathfrak{M}-$misurabili.*

*Dimostrazione.* Per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\left(\sup_h f_h\right)^{-1}([-\infty, c]) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} f_h^{-1}([-\infty, c])$$

è $\mathfrak{M}-$misurabile. Dalla Proposizione (2.3) si deduce che $\sup\limits_h f_h$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.

In maniera simile si prova che $\inf\limits_h f_h$ è $\mathfrak{M}-$misurabile. Di conseguenza anche le funzioni

$$\liminf_h f_h = \sup_k \left(\inf_{h \ge k} f_h\right)$$

e

$$\limsup_h f_h = \inf_k \left(\sup_{h \ge k} f_h\right)$$

sono $\mathfrak{M}-$misurabili. ■

**(2.12) Corollario** *Sia $(f_h)$ una successione di funzioni $\mathfrak{M}-$misurabili da $X$ in $\overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che la successione $(f_h)$ converga puntualmente ad una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

*Allora $f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.*

*Dimostrazione.* Dal momento che $f = \liminf\limits_h f_h$, si tratta di un caso particolare del teorema precedente. ∎

**(2.13) Teorema** *Siano $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni $\mathfrak{M}-$misurabili. Allora valgono i seguenti fatti:*

$(a)$ *le funzioni* $\max\{f, g\}$ *e* $\min\{f, g\}$ *sono $\mathfrak{M}-$misurabili;*

$(b)$ *esiste una funzione $\mathfrak{M}-$misurabile $s : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che*

$$s(x) = f(x) + g(x)$$

*in ogni $x \in X$ in cui la somma $f(x) + g(x)$ è definita;*

$(c)$ *la funzione $fg$ è $\mathfrak{M}-$misurabile;*

$(d)$ *le funzioni $f^+ := \max\{f, 0\}$ e $f^- := \max\{-f, 0\}$ sono $\mathfrak{M}-$misurabili;*

$(e)$ *la funzione $|f|$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.*

*Dimostrazione.*
$(a)$ Se poniamo $f_0 = f$ e $f_h = g$ per $h \geq 1$, la $\mathfrak{M}-$misurabilità di $\max\{f, g\}$ discende dal Teorema (2.11).

In maniera simile si dimostra che $\min\{f, g\}$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.
$(b)$ Consideriamo prima il caso $f, g : X \to \mathbb{R}$. Se $f(x) + g(x) > c$, ossia $f(x) > c - g(x)$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$f(x) > q > c - g(x)\,.$$

Pertanto per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$(f+g)^{-1}(]c, +\infty]) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(f^{-1}(]q, +\infty]) \cap g^{-1}(]c - q, +\infty])\right)\,.$$

Tenuto conto della numerabilità di $\mathbb{Q}$, ne segue la $\mathfrak{M}-$misurabilità di $(f+g)^{-1}(]c,+\infty])$, quindi la $\mathfrak{M}-$misurabilità di $(f+g)$.

Nel caso generale, poniamo

$$s(x) = \begin{cases} f(x)+g(x) & \text{se } f(x)+g(x) \text{ è definita,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_h &= \min\{\max\{f,-h\},h\}\,, \\ g_h &= \min\{\max\{g,-h\},h\}\,. \end{aligned}$$

Le funzioni $f_h, g_h : X \to \mathbb{R}$ sono $\mathfrak{M}-$misurabili per il Teorema (2.9) e la $(a)$. Per il passo precedente anche $(f_h + g_h)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile. Poiché

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_h \left(f_h(x) + g_h(x)\right) = s(x)\,,$$

la $\mathfrak{M}-$misurabilità di $s$ discende dal Corollario (2.12).

$(c)$ Anche qui trattiamo prima il caso $f, g : X \to \mathbb{R}$. Anzitutto per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \{x \in X : \quad & f^2(x) > c\} = \\ &= \begin{cases} X & \text{se } c \in ]-\infty,0[, \\ \{x \in X : f(x) < -\sqrt{c}\} \cup \{x \in X : f(x) > \sqrt{c}\} & \text{se } c \in [0,+\infty[. \end{cases} \end{aligned}$$

In ogni caso si ottiene un insieme $\mathfrak{M}-$misurabile, per cui la funzione $f^2$ è $\mathfrak{M}-$misurabile. In modo simile si prova che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $\lambda f^2$ è $\mathfrak{M}-$misurabile. Tenuto conto della $(b)$, è allora $\mathfrak{M}-$misurabile anche la funzione

$$fg = \frac{1}{2}(f+g)^2 + \left(-\frac{1}{2}f^2\right) + \left(-\frac{1}{2}g^2\right)\,.$$

Nel caso generale, definiamo $f_h$ e $g_h$ come nel punto precedente. Allora risulta

$$\forall x \in X : \lim_h \left(f_h(x) g_h(x)\right) = f(x)g(x)\,,$$

da cui la $\mathfrak{M}-$misurabilità di $fg$.

$(d)$ Si tratta di una conseguenza del Teorema (2.9), della $(a)$ e della $(c)$.

$(e)$ Risulta $|f| = f^+ + f^-$. La $\mathfrak{M}-$misurabilità di $|f|$ discende quindi dalla $(b)$ e dalla $(d)$.

■

**(2.14) Teorema** *Siano $Y$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base in $Y$, $f : X \to Y$ un'applicazione e $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ le componenti di $f$ rispetto a tale base.*

*Allora sono fatti equivalenti:*

$(a)$ *$f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile;*

$(b)$ *per ogni $\varphi \in Y'$ la funzione $(\varphi \circ f) : X \to \mathbb{K}$ è $\mathfrak{M}-$misurabile;*

$(c)$ *ogni componente $f^{(j)} : X \to \mathbb{K}$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.*

*Dimostrazione.*

$(a) \Longrightarrow (b)$ Se $\varphi : Y \to \mathbb{K}$ è lineare e continua, $\varphi \circ f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile per il Teorema (2.8).

$(b) \Longrightarrow (c)$ Poiché $e^j \in Y'$, $f^{(j)} = e^j \circ f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.

$(c) \Longrightarrow (a)$ Consideriamo prima il caso in cui $Y = \mathbb{R}^m$ ed $\{e_1, \ldots, e_m\}$ è la base canonica in $\mathbb{R}^m$. Se $a^{(1)}, b^{(1)}, \ldots, a^{(m)}, b^{(m)} \in \mathbb{R}$, si ha che

$$f^{-1}\left(\prod_{j=1}^m [a^{(j)}, b^{(j)}[\right) = \bigcap_{j=1}^m (f^{(j)})^{-1}([a^{(j)}, b^{(j)}[)$$

è $\mathfrak{M}-$misurabile. Ne segue che, per ogni pluri-intervallo regolare $P \subseteq \mathbb{R}^m$, l'insieme $f^{-1}(P)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile. Infine, se $A$ è un aperto in $\mathbb{R}^m$, si ha $A = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} P_h$, dove $(P_h)$ è una successione crescente di pluri-intervalli regolari in $\mathbb{R}^m$. Ne segue che

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{h=0}^{\infty} f^{-1}(P_h)$$

è $\mathfrak{M}-$misurabile.

Consideriamo ora il caso in cui $Y = \mathbb{C}^m$ ed $\{e_1, \ldots, e_m\}$ è la base canonica in $\mathbb{C}^m$. Per il Teorema (2.8) le funzioni $\mathrm{Re}\, f^{(j)}, \mathrm{Im}\, f^{(j)} : X \to \mathbb{R}$ sono tutte $\mathfrak{M}-$misurabili. Se $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ è l'isomorfismo canonico, si deduce dal passo precedente che $\Phi \circ f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile. Per il Teorema (2.8) si conclude che $f = \Phi^{-1} \circ (\Phi \circ f)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.

Nel caso generale, sia $\Phi : Y \to \mathbb{K}^m$ l'isomorfismo indotto dalla base $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Dai passi precedenti si deduce che $\Phi \circ f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile. Per il Teorema (2.8) si conclude che $f = \Phi^{-1} \circ (\Phi \circ f)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile. ■

**(2.15) Corollario** *Sia* $f : X \to \mathbb{C}$ *una funzione. Allora* $f$ *è* $\mathfrak{M}-$*misurabile se e solo se* $\operatorname{Re} f$ *ed* $\operatorname{Im} f$ *sono entrambe* $\mathfrak{M}-$*misurabili.*

*Dimostrazione.* Consideriamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e scegliamo $\{1, i\}$ come base in $\mathbb{C}$. La tesi discende allora dal Teorema (2.14). ■

**(2.16) Corollario** *Siano* $Y$ *uno spazio normato su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita e* $\lambda : X \to \mathbb{K}$ *e* $f, g : X \to Y$ *delle applicazioni* $\mathfrak{M}-$*misurabili.*

*Allora le applicazioni* $(f + g)$, $\lambda f$ *e* $\|f\|$ *sono* $\mathfrak{M}-$*misurabili.*

*Dimostrazione.* Consideriamo $Y$ come spazio normato su $\mathbb{R}$. Per ogni funzione $\mathbb{R}-$lineare $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ definiamo $\psi : Y \to \mathbb{R}$, pure $\mathbb{R}-$lineare, ponendo $\psi(y) = \varphi(iy)$. Allora risulta

$$\varphi \circ (f + g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g \,,$$

$$\varphi \circ (\lambda f) = (\operatorname{Re} \lambda)(\varphi \circ f) + (\operatorname{Im} \lambda)(\psi \circ f) \,,$$

da cui la $\mathfrak{M}-$misurabilità di $(f + g)$ e $\lambda f$.

La funzione $\|f\|$ è $\mathfrak{M}-$misurabile, in quanto composizione dell'applicazione $\mathfrak{M}-$misurabile $f$ con la funzione continua $\| \ \|$. ■

**(2.17) Corollario** *Siano* $Y$ *uno spazio normato su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita e* $(f_h)$ *una successione di applicazioni* $\mathfrak{M}-$*misurabili da* $X$ *in* $Y$*. Supponiamo che la successione* $(f_h)$ *converga puntualmente ad un'applicazione* $f : X \to Y$*.*

*Allora* $f$ *è* $\mathfrak{M}-$*misurabile.*

*Dimostrazione.* Consideriamo $Y$ come spazio normato su $\mathbb{R}$. Per ogni funzione $\mathbb{R}-$lineare $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ si ha

$$\forall x \in X : \ (\varphi \circ f)(x) = \lim_h (\varphi \circ f_h)(x) \,,$$

per cui $(\varphi \circ f)$ è $\mathfrak{M}-$misurabile per il Corollario (2.12). La $\mathfrak{M}-$misurabilità di $f$ discende allora dal Teorema (2.14). ■

**(2.18) Definizione** *Sia $E$ un sottoinsieme di $X$. Si chiama* funzione caratteristica di $E$ *la funzione $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ definita da*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus E. \end{cases}$$

**(2.19) Proposizione** *Sia $E \subseteq X$. Allora la funzione $\chi_E$ è $\mathfrak{M}-$misurabile se e solo se l'insieme $E$ è $\mathfrak{M}-$misurabile.*

*Dimostrazione.* Se $\chi_E$ è $\mathfrak{M}-$misurabile,

$$E = \chi_E^{-1}(]0, +\infty])$$

è $\mathfrak{M}-$misurabile.

Viceversa, se $E$ è $\mathfrak{M}-$misurabile e $c \in \mathbb{R}$, l'insieme $\chi_E^{-1}(]c, +\infty])$ può essere solo $X$, $E$ o $\emptyset$. In ogni caso $\chi_E^{-1}(]c, +\infty])$ è $\mathfrak{M}-$misurabile, per cui $\chi_E$ è $\mathfrak{M}-$misurabile. ■

**(2.20) Definizione** *Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice $\mathfrak{M}-$*semplice *(o, quando non c'è rischio di confusione,* semplice*), se $f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile e l'immagine $f(X)$ è un insieme finito.*

**(2.21) Teorema** *Valgono allora i seguenti fatti:*

$(a)$ *se $f, g : X \to \mathbb{R}$ sono $\mathfrak{M}-$semplici, $f + g$ e $fg$ sono $\mathfrak{M}-$semplici;*

$(b)$ *se $f : X \to \mathbb{R}$ è costante, $f$ è $\mathfrak{M}-$semplice;*

$(c)$ *se $E \subseteq X$ è $\mathfrak{M}-$misurabile, $\chi_E$ è $\mathfrak{M}-$semplice;*

$(d)$ *se $f : X \to \mathbb{R}$ è $\mathfrak{M}-$semplice, esistono $t_0, \ldots, t_k \in f(X)$ ed $E_0, \ldots, E_k \in \mathfrak{M}$ tali che*

$$f = \sum_{h=0}^{k} t_h \chi_{E_h} .$$

*Dimostrazione.* Le proprietà $(a)$, $(b)$ e $(c)$ sono evidenti. Per provare la $(d)$, sia $f$ una funzione $\mathfrak{M}-$semplice, sia $f(X) = \{t_0, \ldots, t_k\}$ e sia

$$E_h = f^{-1}(t_h) .$$

Allora $E_h$ è $\mathfrak{M}-$misurabile e si ha

$$f = \sum_{h=0}^{k} t_h \chi_{E_h} ,$$

da cui la tesi. ■

**(2.22) Teorema** *Sia $f : X \to [0, +\infty]$ una funzione $\mathfrak{M}-$misurabile. Allora esistono una successione $(t_h)$ in $[0, +\infty[$ ed una successione $(E_h)$ in $\mathfrak{M}$ tali che*

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{\infty} t_h &= \sup f , \\ \forall x \in X : \; f(x) &= \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) . \end{aligned}$$

*In particolare,*

$$\left( \sum_{h=0}^{k} t_h \chi_{E_h} \right)$$

*è una successione crescente di funzioni $\mathfrak{M}-$semplici positive convergente puntualmente a $f$.*

*Dimostrazione.* Se $\sup f = +\infty$, poniamo $t_h = 1/(h+1)$. Se invece $c = \sup f < +\infty$, poniamo $t_h = 2^{-h-1}c$. In ogni caso si ha

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_h = \sup f ,$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : \; t_k \leq \sum_{h=k+1}^{\infty} t_h .$$

Definiamo ricorsivamente $E_h$ ponendo

$$\begin{aligned} E_0 &= \{x \in X : \; f(x) \geq t_0\} , \\ E_h &= \left\{ x \in X : \; f(x) - \sum_{j=0}^{h-1} t_j \chi_{E_j}(x) \geq t_h \right\} \qquad \text{per } h \geq 1 . \end{aligned}$$

Ragionando per induzione su $h$, si verifica facilmente che

$$\forall x \in X : \; f(x) \geq \sum_{j=0}^{h} t_j \chi_{E_j}(x) ,$$

per cui

$$\forall x \in X : \, f(x) \geq \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) \, .$$

Inoltre, dato $x \in X$, non può esistere $k \in \mathbb{N}$ con $x \notin E_k$ e $x \in E_h$ per ogni $h \geq k+1$, perché ne seguirebbe

$$f(x) < \sum_{h=0}^{k-1} t_h \chi_{E_h}(x) + t_k \leq \sum_{h=0}^{k-1} t_h \chi_{E_h}(x) + \sum_{h=k+1}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) \, .$$

Si possono quindi verificare due possibilità: se $x \in \bigcap_{h=0}^{\infty} E_h$, è ovvio che

$$f(x) \leq \sup f = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) \, ;$$

se invece $x \notin E_{k_j}$ con $k_j \to +\infty$, risulta

$$f(x) < \sum_{h=0}^{k_j - 1} t_h \chi_{E_h}(x) + t_{k_j} \, .$$

Tenuto conto che $t_{k_j} \to 0$, anche in questo caso risulta

$$f(x) \leq \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) \, ,$$

da cui la tesi. ■

# 3 Integrazione

**(3.1) Proposizione** *Siano* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *uno spazio di misura e* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione* $\mathfrak{M}-$*misurabile.*

*Allora* $f$ *è* $\mu^*-$*misurabile.*

*Dimostrazione.* È una conseguenza della $(b)$ del Teorema (1.16). ■

**(3.2) Definizione** *Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* $\mu-$integrabile *(o, più semplicemente,* integrabile*), se $f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile ed uno almeno degli integrali $\int f^+ \, d\mu^*$ e $\int f^- \, d\mu^*$ è finito.*

*Se $f$ è $\mu-$integrabile, si pone*

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu^* - \int f^-\, d\mu^* .$$

**(3.3) Definizione** *Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice* $\mu-$sommabile *(o, più semplicemente,* sommabile*), se $f$ è $\mu-$integrabile e $\int f\, d\mu$ è finito.*

*Una funzione $f : X \to \mathbb{C}$ si dice* $\mu-$sommabile *(o, più semplicemente,* sommabile*), se $\mathrm{Re}\, f$ ed $\mathrm{Im}\, f$ sono entrambe $\mu-$sommabili, nel qual caso si pone*

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int f\, d\mu := \int (\mathrm{Re}\, f)\, d\mu + i \int (\mathrm{Im}\, f)\, d\mu .$$

Evidentemente $f$ è $\mu-$integrabile se e solo se $f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile e $\mu^*-$integrabile. Analogamente, $f$ è $\mu-$sommabile se e solo se $f$ è $\mathfrak{M}-$misurabile e $\mu^*-$sommabile.

**(3.4) Definizione** *Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $E \in \mathfrak{M}$. Data una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o $f : X \to \mathbb{C}$, si pone*

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \int_E f\, d\mu := \int \chi_E\, f\, d\mu ,$$

*quando l'ultimo integrale è definito.*

**(3.5) Definizione** *Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura, $E \subseteq X$ e $\mathcal{P}(x)$ una frase aperta.*

*Diciamo che si ha $\mathcal{P}(x)$* $\mu-$quasi ovunque ($\mu-$q.o.) in $E$ *o* per $\mu-$quasi ogni ($\mu-$q.o.) $x \in E$, *se*

$$\{x \in E : \mathit{non}\mathcal{P}(x)\}$$

*è contenuto in un sottoinsieme $\mu-$trascurabile di $X$.*

**(3.6) Proposizione** *Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura, $E \subseteq X$ e $\mathcal{P}(x)$ una frase aperta.*

*Allora si ha $\mathcal{P}(x)$ per $\mu-$q.o. $x \in E$ se e solo se $\mathcal{P}(x)$ per $\mu^*-$q.o. $x \in E$.*

*Dimostrazione.* Si tratta di un'ovvia conseguenza del Teorema (1.16). ∎

**(3.7) Corollario** *Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni $\mathfrak{M}-$misurabili tali che $f(x) = g(x)$ per $\mu-$q.o. $x \in X$.*

*Allora $f$ è $\mu-$integrabile se e solo se $g$ è $\mu-$integrabile, nel qual caso si ha*

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu \, .$$

*Dimostrazione.* Si tratta di combinare la proposizione precedente con ben noti risultati sulle misure esterne. ∎

**(3.8) Definizione** *Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura ed $Y$ uno spazio metrico. Nell'insieme delle applicazioni $\mathfrak{M}-$misurabili da $X$ in $Y$, introduciamo una relazione di equivalenza, ponendo*

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ per } \mu\text{−q.o. } x \in X.$$

*Denotiamo con $M(X, \mu; Y)$ lo spazio quoziente associato.*

La nozione di convergenza $\mu-$q.o. si riformula in modo ovvio in $M(X, \mu; Y)$. In $M(X, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ si riformulano facilmente anche le nozioni di $\limsup$, $\liminf$, maggiorante e minorante essenziale, estremo superiore ed inferiore essenziale ed ordinamento.

**(3.9) Definizione** *Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $1 \leq p \leq \infty$.*

*Per $p < \infty$, poniamo*

$$L^p(X, \mu; \mathbb{C}) := \left\{ f \in M(X, \mu; \mathbb{C}) : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\} ,$$
$$L^p(X, \mu) := \{ f \in L^p(X, \mu; \mathbb{C}) : f(x) \in \mathbb{R} \text{ per } \mu\text{−q.o. } x \in X \} \, .$$

*Per $p = \infty$, poniamo*

$$L^\infty(X, \mu; \mathbb{C}) := \left\{ f \in M(X, \mu; \mathbb{C}) : \operatorname*{ess\,sup}_X |f| < \infty \right\} ,$$
$$L^\infty(X, \mu) := \{ f \in L^\infty(X, \mu; \mathbb{C}) : f(x) \in \mathbb{R} \text{ per } \mu\text{−q.o. } x \in X \} \, .$$

**(3.10) Teorema** *Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $1 \leq p \leq \infty$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *l'inclusione naturale* $L^p(X,\mu;\mathbb{C}) \to L^p(X,\mu^*;\mathbb{C})$ *è un'isometria lineare con immagine chiusa;*

(*b*) *se* $p < \infty$, *l'inclusione naturale* $L^p(X,\mu;\mathbb{C}) \to L^p(X,\mu^*;\mathbb{C})$ *è un'isometria lineare e suriettiva;*

(*c*) *se* $\mu$ *è* $\sigma-$*finita, l'inclusione naturale* $L^p(X,\mu;\mathbb{C}) \to L^p(X,\mu^*;\mathbb{C})$ *è un'isometria lineare e suriettiva.*

*Dimostrazione.*
(*a*) Ovviamente l'inclusione naturale è lineare ed isometrica. Sia $(f_h)$ una successione in $L^p(X,\mu;\mathbb{C})$ convergente a $f$ in $L^p(X,\mu^*;\mathbb{C})$. Consideriamo dei rappresentanti, che denotiamo ancora con $f_h$ e $f$. A meno di una sottosuccessione, si ha $\lim_h f_h(x) = f(x)$ per $\mu^*-$q.o. $x \in X$. Poniamo

$$\begin{aligned} F &= \left\{ x \in X : \left| \liminf_h \operatorname{Re} f_h(x) \right| < +\infty, \left| \liminf_h \operatorname{Im} f_h(x) \right| < +\infty \right\}, \\ g(x) &= \begin{cases} \liminf_h \operatorname{Re} f_h(x) + i \liminf_h \operatorname{Im} f_h(x) & \text{se } x \in F, \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus F. \end{cases} \end{aligned}$$

Allora $F \in \mathfrak{M}$, $g : X \to \mathbb{C}$ è $\mathfrak{M}-$misurabile e $g(x) = f(x)$ per $\mu^*-$q.o. $x \in X$. Pertanto $g \in L^p(X,\mu;\mathbb{C})$ e $f$ sta nell'immagine di $L^p(X,\mu;\mathbb{C})$, che è quindi chiusa.
(*b*) Sia $f : X \to [0,+\infty[$ una funzione $\mu^*-$misurabile con $\int_X f^p \, d\mu^* < +\infty$. Sarà

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x)$$

con $t_h > 0$ ed $E_h \subseteq X$ $\mu^*-$misurabile. Risulta $\mu^*(E_h) < +\infty$. Per il Teorema (1.16) esistono $G_h \in \mathfrak{M}$ con $E_h \subseteq G_h$ e $\mu(G_h) = \mu^*(E_h)$. Ne segue $\mu^*(G_h \setminus E_h) = 0$. Allora, posto

$$g(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{G_h}(x),$$

si ha che $g : X \to [0,+\infty]$ è $\mu-$misurabile con $g(x) = f(x)$ per $\mu^*-$q.o. $x \in X$. Se poniamo

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) < +\infty, \\ 0 & \text{se } g(x) = +\infty, \end{cases}$$

risulta che $\hat{g} : X \to [0,+\infty[$ è $\mu-$misurabile con $\hat{g}(x) = f(x)$ per $\mu^*-$q.o. $x \in X$.

Sia ora $f : X \to \mathbb{C}$ una funzione $\mu^*-$misurabile con $\int_X |f|^p \, d\mu^* < +\infty$. Siano $g_1, g_2, g_3, g_4 : X \to [0, +\infty[$ $\mu-$misurabili con $g_1(x) = (\operatorname{Re} f(x))^+$, $g_2(x) = (\operatorname{Re} f(x))^-$, $g_3(x) = (\operatorname{Im} f(x))^+$ e $g_4(x) = (\operatorname{Im} f(x))^-$ per $\mu^*-$q.o. $x \in X$. Allora

$$g = g_1 - g_2 + i(g_3 - g_4)$$

è $\mu-$misurabile con $g(x) = f(x)$ per $\mu^*-$q.o. $x \in X$. Pertanto l'inclusione naturale $L^p(X, \mu; \mathbb{C}) \to L^p(X, \mu^*; \mathbb{C})$ è suriettiva.

$(c)$ Sia $(E_h)$ una successione in $\mathfrak{M}$ con $\mu(E_h) < +\infty$ e $X = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$. Se $E \subseteq X$ è $\mu^*-$misurabile, esiste $G_h \in \mathfrak{M}$ con $E \cap E_h \subseteq G_h$ e

$$\mu(G_h) = \mu^*(E \cap E_h) \leq \mu(E_h) < +\infty\,.$$

Ne segue $\mu^*(G_h \setminus (E \cap E_h)) = 0$, per cui, posto $G = \bigcup_{h=0}^{\infty} G_h$, risulta $G \in \mathfrak{M}$, $E \subseteq G$ e $\mu^*(G \setminus E) = 0$.

A questo punto, ragionando come nella $(b)$, si dimostra che per ogni $f : X \to \mathbb{C}$ $\mu^*-$misurabile esiste $g : X \to \mathbb{C}$ $\mu-$misurabile con $g(x) = f(x)$ per $\mu^*-$q.o. $x \in X$. Ne segue la tesi. ∎

## Esercizi

**1.** Sia $\mathfrak{M}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ al più numerabili o con complementare al più numerabile. Sia inoltre $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ definita da

$$\mu(E) = \begin{cases} \text{il numero degli elementi di } E & \text{se } E \text{ è un insieme finito,} \\ +\infty & \text{se } E \text{ è un insieme infinito.} \end{cases}$$

Si dimostri che

$(a)$ $\mathfrak{M}$ è una $\sigma-$algebra in $\mathbb{R}$ e $\mu$ è una misura su $\mathfrak{M}$;

$(b)$ ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è $\mu^*-$misurabile;

$(c)$ $\chi_{[0,1]}$ è $\mu^*-$misurabile e limitata, ma non esiste nessuna $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\mathfrak{M}-$misurabile con $\chi_{[0,1]}(x) = g(x)$ per $\mu^*-$q.o. $x \in \mathbb{R}$; in particolare, l'inclusione naturale $L^\infty(\mathbb{R}, \mu; \mathbb{C}) \to L^\infty(\mathbb{R}, \mu^*; \mathbb{C})$ non è suriettiva;

(*d*) l'applicazione naturale $T : L^\infty(\mathbb{R},\mu;\mathbb{C}) \to (L^1(\mathbb{R},\mu;\mathbb{C}))'$ è un'isometria lineare non suriettiva.

# 4 Duale degli spazi di Lebesgue

**(4.1) Definizione** *Uno spazio normato $X$ su $\mathbb{K}$ si dice* uniformemente convesso*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$ con $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ e $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta$ si abbia $\|x-y\| < \varepsilon$.*

**(4.2) Teorema** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$. Allora $X$ è uniformemente convesso.*

*Dimostrazione.* Per l'identità del parallelogramma, per ogni $x, y \in X$ con $\|x\| \leq 1$ e $\|y\| \leq 1$ risulta

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \leq 4 - \|x+y\|^2 = 4\left(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2\right).$$

Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che

$$1-\delta < t \leq 1 \implies 4\left(1-t^2\right) < \varepsilon^2 .$$

Se

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta\,,$$

ne segue $\|x-y\| < \varepsilon$. ∎

**(4.3) Teorema** *Sia $X$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ uniformemente convesso e sia $C$ un convesso chiuso e non vuoto in $X$.*

*Allora per ogni $z \in X$ esiste uno ed un solo $x \in C$ tale che $\|z-x\| = d(z,C)$.*

*Dimostrazione.* Se $z \in C$, l'affermazione è evidente e si ha $x = z$. Altrimenti risulta $d(z,C) > 0$. Sia allora $(x_h)$ una successione in $C$ tale che

$$\|z-x_h\| < d(z,C) + \frac{1}{h+1} \tag{4.4}$$

e sia
$$R_{h,k} = \max\left\{d(z,C) + \frac{1}{h+1}\,,\, d(z,C) + \frac{1}{k+1}\right\}\,.$$
Essendo $C$ convesso, per ogni $h,k \in \mathbb{N}$ risulta
$$\frac{1}{R_{h,k}}\,d(z,C) \leq \frac{1}{R_{h,k}}\left\|z - \frac{x_h + x_k}{2}\right\| = \left\|\frac{\frac{z-x_h}{R_{h,k}} + \frac{z-x_k}{R_{h,k}}}{2}\right\|\,,$$
$$\left\|\frac{z-x_h}{R_{h,k}}\right\| < 1\,,\qquad \left\|\frac{z-x_k}{R_{h,k}}\right\| < 1\,.$$
Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ associato a
$$\frac{\varepsilon}{d(z,C)+1}$$
conformemente alla definizione di uniforme convessità. Sia inoltre $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che
$$\forall h \in \mathbb{N}: \qquad h \geq \overline{h} \implies \frac{d(z,C)}{d(z,C) + \frac{1}{h+1}} > 1 - \delta\,.$$
Allora per ogni $h,k \geq \overline{h}$ risulta
$$\left\|\frac{\frac{z-x_h}{R_{h,k}} + \frac{z-x_k}{R_{h,k}}}{2}\right\| \geq \frac{1}{R_{h,k}}\,d(z,C) > 1 - \delta\,,$$
da cui
$$\frac{1}{R_{h,k}}\,\|x_k - x_h\| = \left\|\frac{z-x_h}{R_{h,k}} - \frac{z-x_k}{R_{h,k}}\right\| < \frac{\varepsilon}{d(z,C)+1} \leq \frac{1}{R_{h,k}}\,\varepsilon\,.$$
Ne segue $\|x_k - x_h\| < \varepsilon$, per cui la successione $(x_h)$ è di Cauchy in $X$.

Essendo $X$ completo, $(x_h)$ è convergente ad un certo $x$ in $X$ e si ha $x \in C$, perché $C$ è chiuso in $X$. Passando al limite per $h \to \infty$ nella (4.4), si deduce che $\|z - x\| \leq d(z,C)$. Poiché $x \in C$, deve essere $\|z - x\| = d(z,C)$.

Se anche $\hat{x} \in C$ soddisfa $\|z - \hat{x}\| = d(z,C)$, poniamo
$$x_h = \begin{cases} x & \text{se } h \text{ è pari,} \\ \hat{x} & \text{se } h \text{ è dispari.} \end{cases}$$
Allora $(x_h)$ è una successione in $C$ soddisfacente la (4.4). Dal ragionamento precedente segue che $(x_h)$ è di Cauchy, il che è possibile solo se $\hat{x} = x$. Pertanto è unico il punto $x \in C$ tale che $\|z - x\| = d(z,C)$. ∎

**(4.5) Teorema** *Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $1 < p < \infty$. Allora $L^p(X, \mu; \mathbb{C})$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$ uniformemente convesso, mentre $L^p(X, \mu; \mathbb{R})$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{R}$ uniformemente convesso.*

*Dimostrazione.* Per semplicità trattiamo soltanto il caso reale. Sia $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\varphi(s) = |s|^p$. Si verifica facilmente che $\varphi$ è di classe $C^1$ con $\varphi'(s) = p|s|^{p-2}s$ (si conviene che $0^{p-2} \cdot 0 = 0$). In particolare, $\varphi'$ è strettamente crescente, per cui $\varphi$ è strettamente convessa. Nel caso $p \geq 2$, si ha inoltre che $\varphi$ è di classe $C^2$ e $\varphi''(s) = p(p-1)|s|^{p-2}$.

Osserviamo che, per ogni $p \in ]1, +\infty[$, esiste $C > 0$ tale che, per ogni $s, t \in \mathbb{R}$, si abbia

$$(4.6) \qquad |s - t|^p \leq C \left( \frac{1}{2} |s|^p + \frac{1}{2} |t|^p - \left| \frac{s+t}{2} \right|^p \right) \qquad \text{se } p \geq 2\,,$$

$$(4.7) \qquad |s - t|^2 \leq C \left(|s|^p + |t|^p\right)^{\frac{2-p}{p}} \left( \frac{1}{2} |s|^p + \frac{1}{2} |t|^p - \left| \frac{s+t}{2} \right|^p \right) \qquad \text{se } p < 2\,.$$

Risulta infatti

$$\forall r \neq 1 : \qquad \left| \frac{r+1}{2} \right|^p < \frac{1}{2} |r|^p + \frac{1}{2}$$

per la stretta convessità di $\varphi$. Se $p \geq 2$, ne segue che

$$C := \sup_{r \neq 1} \frac{|r-1|^p}{\frac{1}{2} |r|^p + \frac{1}{2} - \left| \frac{r+1}{2} \right|^p} \; < \; +\infty\,,$$

dal momento che il quoziente in questione ammette limite finito sia per $r \to \pm\infty$ che per $r \to 1$. Risulta quindi

$$\forall r \in \mathbb{R} : \qquad |r-1|^p \leq C \left( \frac{1}{2} |r|^p + \frac{1}{2} - \left| \frac{r+1}{2} \right|^p \right)\,.$$

Se $s, t \in \mathbb{R}$ e $t \neq 0$, ne segue

$$|(s/t) - 1|^p \leq C \left( \frac{1}{2} \, |(s/t)|^p + \frac{1}{2} - \left| \frac{(s/t)+1}{2} \right|^p \right)\,,$$

da cui, moltiplicando per $|t|^p$ membro a membro,

$$|s-t|^p \leq C \left( \frac{1}{2} |s|^p + \frac{1}{2} |t|^p - \left| \frac{s+t}{2} \right|^p \right)\,.$$

Per continuità la disuguaglianza è vera anche per $t = 0$, per cui la (4.6) è provata.

Nel caso $p < 2$, risulta invece

$$C := \sup_{r \neq 1} \frac{(r-1)^2}{\left(|r|^p + 1\right)^{\frac{2-p}{p}} \left( \frac{1}{2} |r|^p + \frac{1}{2} - \left| \frac{r+1}{2} \right|^p \right)} \; < \; +\infty\,,$$

dal momento che il quoziente in questione ammette limite finito sia per $r \to \pm\infty$ che per $r \to 1$. A questo punto la dimostrazione della (4.7) è analoga al caso $p \geq 2$.

Siano ora $f, g \in L^p(X, \mu; \mathbb{R})$ con $\|f\|_p \leq 1$ e $\|g\|_p \leq 1$. Se $p \geq 2$, per la (4.6) si ha

$$\|f - g\|_p^p \leq C \left( \frac{1}{2} \|f\|_p^p + \frac{1}{2} \|g\|_p^p - \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p \right) \leq C \left( 1 - \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p \right) .$$

Dato $\varepsilon > 0$, è sufficiente scegliere $\delta \in ]0,1[$ tale che

$$C \left(1 - (1-\delta)^p\right) < \varepsilon^p$$

per soddisfare la condizione richiesta.

Se invece $p < 2$, combinando la (4.7), elevata membro a membro alla $p/2$, con la disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$\begin{aligned} \|f - g\|_p^p &\leq C^{\frac{p}{2}} \int (|f|^p + |g|^p)^{\frac{2-p}{2}} \left( \frac{1}{2} |f|^p + \frac{1}{2} |g|^p - \left| \frac{f+g}{2} \right|^p \right)^{\frac{p}{2}} d\mu \leq \\ &\leq C^{\frac{p}{2}} \left( \int (|f|^p + |g|^p) \, d\mu \right)^{\frac{2-p}{2}} \left( \int \left( \frac{1}{2} |f|^p + \frac{1}{2} |g|^p - \left| \frac{f+g}{2} \right|^p \right) d\mu \right)^{\frac{p}{2}} = \\ &= C^{\frac{p}{2}} \left( \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right)^{\frac{2-p}{2}} \left( \frac{1}{2} \|f\|_p^p + \frac{1}{2} \|g\|_p^p - \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p \right)^{\frac{p}{2}} \leq \\ &\leq C^{\frac{p}{2}} \, 2^{\frac{2-p}{2}} \left( 1 - \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p \right)^{\frac{p}{2}} . \end{aligned}$$

Dato $\varepsilon > 0$, è sufficiente scegliere $\delta \in ]0,1[$ tale che

$$C^{\frac{p}{2}} \, 2^{\frac{2-p}{2}} \left(1 - (1-\delta)^p\right)^{\frac{p}{2}} < \varepsilon^p$$

per soddisfare la condizione richiesta. ■

**(4.8) Proposizione** *Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura, $1 < p < \infty$ e*

$$\mathcal{N} : L^p(X, \mu; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

*la funzione definita da*

$$\mathcal{N}(f) = \int |f|^p \, d\mu \, .$$

*Allora $\mathcal{N}$ è differenziabile e risulta*

$$\mathcal{N}'(f)g = p \int |f|^{p-2} f g \, d\mu \, .$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che, per ogni $p \in ]1, +\infty[$, esiste $C > 0$ tale che, per ogni $s, t \in \mathbb{R}$, si abbia

$$\left| |t+s|^p - |t|^p - p|t|^{p-2} t s \right| \leq C \left( |t|^{p-1} + |s|^{p-1} \right) |s| \, . \tag{4.9}$$

Risulta infatti

$$C := \sup_{r \neq 0} \left| \frac{|1+r|^p - 1 - pr}{\left(1 + |r|^{p-1}\right) r} \right| < +\infty \, ,$$

dal momento che il quoziente in questione ammette limite finito sia per $r \to \pm\infty$ che per $r \to 0$. Risulta quindi

$$\forall r \in \mathbb{R} : \qquad \left| |1+r|^p - 1 - pr \right| \leq C \left( 1 + |r|^{p-1} \right) |r| \, .$$

Se $s, t \in \mathbb{R}$ e $t \neq 0$, ne segue

$$\left| |1 + (s/t)|^p - 1 - p(s/t) \right| \leq C \left( 1 + |(s/t)|^{p-1} \right) |(s/t)| \, ,$$

da cui, moltiplicando per $|t|^p$ membro a membro,

$$\left| |t+s|^p - |t|^p - p|t|^{p-2} t s \right| \leq C \left( |t|^{p-1} + |s|^{p-1} \right) |s| \, .$$

Per continuità la disuguaglianza è vera anche per $t = 0$, per cui la (4.9) è provata.

Sia ora $f \in L^p(X, \mu; \mathbb{R})$. Dal momento che $|f|^{p-2} f \in L^{p'}(X, \mu; \mathbb{R})$, segue dalla disuguaglianza di Hölder che l'applicazione

$$\left\{ g \mapsto p \int |f|^{p-2} f g \, d\mu \right\}$$

è lineare e continua su $L^p(X, \mu; \mathbb{R})$. Per ogni $g \in L^p(X, \mu; \mathbb{R})$, definiamo $\omega(g) \in M(X, \mu; \mathbb{R})$ ponendo

$$\omega(g)(x) = \begin{cases} \dfrac{|f(x) + g(x)|^p - |f(x)|^p - p|f(x)|^{p-2} f(x) g(x)}{|g(x)|} & \text{se } g(x) \neq 0 \, , \\ 0 & \text{se } g(x) = 0 \, . \end{cases}$$

Dalla (4.9) segue che

$$|\omega(g)(x)|^{p'} \leq C\left(|f(x)|^{p-1} + |g(x)|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \leq C\, 2^{\frac{1}{p-1}}\, \left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right)\,,$$

per cui $\omega(g) \in L^{p'}(X, \mu; \mathbb{R})$.

Per ogni $g \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}) \setminus \{0\}$, risulta allora

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathcal{N}(f+g) - \mathcal{N}(f) - p\int |f|^{p-2} f g\, d\mu}{\|g\|_p}\right| &= \left|\int \frac{|f+g|^p - |f|^p - p|f|^{p-2} f g}{\|g\|_p}\, d\mu\right| = \\ &= \left|\int \omega(g)\, \frac{|g|}{\|g\|_p}\, d\mu\right| \leq \|\omega(g)\|_{p'}\,.\end{aligned}$$

Sia $(g_h)$ una successione infinitesima in $L^p(X, \mu; \mathbb{R})$. Data una qualunque sottosuccessione $(g_{h_k})$, esistono una ulteriore sottosuccessione $(g_{h_{k_j}})$ tendende a $0$ $\mu-$q.o. in $X$ e $w \in L^p(X, \mu; \mathbb{R})$ tale che $|g_{h_{k_j}}(x)| \leq w(x)$ per $\mu-$q.o. $x \in X$. Allora per $\mu-$q.o. $x \in X$ si ha

$$\lim_j \omega(g_{h_{k_j}})(x) = 0\,,$$

$$\left|\omega(g_{h_{k_j}})(x)\right|^{p'} \leq C\, 2^{\frac{1}{p-1}}\, \left(|f(x)|^p + |g_{h_{k_j}}(x)|^p\right) \leq C\, 2^{\frac{1}{p-1}}\, \left(|f(x)|^p + w(x)^p\right)\,.$$

Dal teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_j \left\|\omega(g_{h_{k_j}})\right\|_{p'} = 0\,,$$

per cui

$$\lim_h \|\omega(g_h)\|_{p'} = 0\,.$$

Ne segue

$$\lim_{g \to 0} \|\omega(g)\|_{p'} = 0\,,$$

da cui la tesi. ∎

**(4.10) Proposizione** *Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $1 \leq p \leq \infty$. Allora, per ogni $u \in L^{p'}(X, \mu; \mathbb{K})$, la funzione*

$$\begin{array}{ccc} L^p(X, \mu; \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \int f u\, d\mu \end{array}$$

*è una forma lineare e continua su $L^p(X, \mu; \mathbb{K})$ avente norma minore o uguale a $\|u\|_{p'}$.*

*Dimostrazione.* Se $f \in L^p(X,\mu;\mathbb{K})$ e $u \in L^{p'}(X,\mu;\mathbb{K})$, per la disuguaglianza di Hölder si ha $fu \in L^1(X,\mu;\mathbb{K})$ e

$$\left|\int fu\,d\mu\right| \leq \|fu\|_1 \leq \|f\|_p\,\|u\|_{p'}\,.$$

Ne segue la tesi. ■

**(4.11) Definizione** *Siano $(X,\mathfrak{M},\mu)$ uno spazio di misura e $1 \leq p \leq \infty$. Per ogni $u \in L^{p'}(X,\mu;\mathbb{K})$, denotiamo con $T_u$ la forma lineare e continua definita nella proposizione precedente.*

**(4.12) Proposizione** *Siano $(X,\mathfrak{M},\mu)$ uno spazio di misura e $1 \leq p \leq \infty$. Allora l'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} L^{p'}(X,\mu;\mathbb{K}) & \longrightarrow & (L^p(X,\mu;\mathbb{K}))' \\ u & \mapsto & T_u \end{array}$$

*è lineare e continua e soddisfa $\|T_u\| \leq \|u\|_{p'}$ per ogni $u \in L^{p'}(X,\mu;\mathbb{K})$.*

*Dimostrazione.* Dal momento che l'espressione

$$\int fu\,d\mu$$

è lineare anche in $u$, è chiaro che l'applicazione $\{u \mapsto T_u\}$ è lineare. Già sappiamo che $\|T_u\| \leq \|u\|_{p'}$, per cui risulta anche continua. ■

**(4.13) Teorema** *Sia $(X,\mathfrak{M},\mu)$ uno spazio di misura. Valgono allora i seguenti fatti:*

*(a) se $1 < p < \infty$, l'applicazione $\{u \mapsto T_u\}$ è un'isometria lineare e biiettiva dallo spazio $L^{p'}(X,\mu;\mathbb{K})$ in $(L^p(X,\mu;\mathbb{K}))'$;*

*(b) se $\mu$ è $\sigma-$finita, tale applicazione è un'isometria lineare e biiettiva anche per $p = 1$.*

*Dimostrazione.* Per la proposizione precedente, è sufficiente dimostrare che $\{u \mapsto T_u\}$ è suriettiva e soddisfa $\|u\|_{p'} \leq \|T_u\|$ per ogni $u \in L^{p'}(X,\mu;\mathbb{K})$.

(a) Data $u \in L^{p'}(X,\mu;\mathbb{K})$, sia $f = |u|^{p'-2}\,\overline{u}$ (si conviene che $0^{p'-2}\cdot 0 = 0$). Risulta $|f|^p = |u|^{p'}$, per cui $f \in L^p(X,\mu;\mathbb{K})$ e $\|f\|_p = \|u\|_{p'}^{p'-1}$. Ne segue

$$\|u\|_{p'}^{p'} = \int fu\,d\mu = \langle T_u, f\rangle \leq \|T_u\|\,\|f\|_p = \|T_u\|\,\|u\|_{p'}^{p'-1}\,,$$

da cui $\|u\|_{p'} \leq \|T_u\|$.

Dimostriamo ora che $\{u \mapsto T_u\}$ è suriettiva. Consideriamo anzitutto il caso reale. Sia $\varphi : L^p(X,\mu;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua. Se $\varphi = 0$, risulta $\varphi = T_u$ con $u = 0$. Se invece $\varphi \neq 0$, si ha che

$$C = \{g \in L^p(X,\mu;\mathbb{R}) : \ \langle \varphi, g \rangle = 1\}$$

è un convesso chiuso e non vuoto in $L^p(X,\mu;\mathbb{R})$. Sia $g_1 \in C$ tale che

$$\|g_1\|_p = d(0, C)\,.$$

Definiamo $\Psi : L^p(X,\mu;\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(X,\mu;\mathbb{R})$ ponendo

$$\Psi(g) = g - (\langle \varphi, g \rangle - 1)\, g_1\,.$$

Si verifica facilmente che $\Psi$ è differenziabile con

$$\Psi'(g)f = f - \langle \varphi, f \rangle\, g_1\,.$$

Inoltre risulta $\Psi(g) \in C$ per ogni $g \in L^p(X,\mu;\mathbb{R})$, per cui

$$\forall g \in L^p(X,\mu;\mathbb{R}) : \qquad \|\Psi(g_1)\|_p^p = \|g_1\|_p^p \leq \|\Psi(g)\|_p^p\,.$$

Dalla Proposizione (4.8) segue che

$$\forall f \in L^p(X,\mu;\mathbb{R}) : \qquad \mathcal{N}'(\Psi(g_1))(\Psi'(g_1)f) = 0\,,$$

ossia, tenuto conto che $\Psi(g_1) = g_1$,

$$\forall f \in L^p(X,\mu;\mathbb{R}) : \qquad \int |g_1|^{p-2} g_1\, (f - \langle \varphi, f \rangle\, g_1)\, d\mu = 0\,.$$

Ne segue

$$\int |g_1|^{p-2} g_1 f\, d\mu = \langle \varphi, f \rangle\, \|g_1\|_p^p$$

con $\|g_1\|_p \neq 0$, dal momento che $g_1 \in C$. Allora risulta

$$\forall f \in L^p(X,\mu;\mathbb{R}) : \qquad \int f u\, d\mu = \langle \varphi, f \rangle$$

con

$$u = \frac{|g_1|^{p-2} g_1}{\|g_1\|_p^p} \in L^{p'}(X,\mu;\mathbb{R})\,,$$

ossia $\varphi = T_u$.

Nel caso complesso, sia $\varphi : L^p(X, \mu; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineare e continua. Allora si verifica facilmente che

$$\{f \mapsto \mathrm{Re}\,\langle \varphi, f\rangle\}\ , \qquad \{f \mapsto \mathrm{Im}\,\langle \varphi, f\rangle\}$$

sono due forme lineari e continue in senso reale su $L^p(X, \mu; \mathbb{R})$. Per il passo precedente, esistono $u, v \in L^{p'}(X, \mu; \mathbb{R})$ tali che

$$\forall f \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}) : \qquad \mathrm{Re}\,\langle \varphi, f\rangle = \int f u\, d\mu\,, \qquad \mathrm{Im}\,\langle \varphi, f\rangle = \int f v\, d\mu\,.$$

Allora per ogni $f, g \in L^p(X, \mu; \mathbb{R})$ risulta

$$\begin{aligned} \langle \varphi, f + ig\rangle &= \mathrm{Re}\,\langle \varphi, f\rangle + i\mathrm{Im}\,\langle \varphi, f\rangle + i\,[\mathrm{Re}\,\langle \varphi, g\rangle + i\mathrm{Im}\,\langle \varphi, g\rangle] = \\ &= \int f u\, d\mu + i \int f v\, d\mu + i\left[\int g u\, d\mu + i \int g v\, d\mu\right] = \\ &= \int (f + ig)(u + iv)\, d\mu\,. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \forall f \in L^p(X, \mu; \mathbb{C}) : \qquad \langle \varphi, f\rangle &= \langle \varphi, \mathrm{Re}\, f + i\,\mathrm{Im}\, f\rangle = \\ &= \int (\mathrm{Re}\, f + i\,\mathrm{Im}\, f)(u + iv)\, d\mu = \int f(u + iv)\, d\mu\,. \end{aligned}$$

Pertanto $\varphi = T_{u+iv}$ con $u + iv \in L^{p'}(X, \mu; \mathbb{C})$.

($b$) Sia $(E_h)$ una successione in $\mathfrak{M}$ con $\mu(E_h) < +\infty$ e $X = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$. Possiamo inoltre supporre che gli $E_h$ siano a due a due disgiunti. Definiamo $\vartheta \in L^2(X, \mu; \mathbb{R})$ ponendo

$$\vartheta(x) = \frac{1}{(h+1)\sqrt{1 + \mu(E_h)}} \qquad \text{se } x \in E_h\,.$$

Se $\varphi : L^1(X, \mu; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ è una forma lineare e continua, allora

$$\{f \mapsto \langle \varphi, \vartheta f\rangle\}$$

è una forma lineare e continua su $L^2(X, \mu; \mathbb{K})$. Sia $v \in L^2(X, \mu; \mathbb{K})$ tale che

$$\forall f \in L^2(X, \mu; \mathbb{K}) : \qquad \langle \varphi, \vartheta f\rangle = \int f v\, d\mu$$

e sia $u \in M(X, \mu; \mathbb{K})$ definita da $u = v/\vartheta$. Risulta quindi

$$\forall f \in L^2(X, \mu; \mathbb{K}) : \qquad \langle \varphi, \vartheta f\rangle = \int \vartheta f u\, d\mu$$

Sia $M > \|\varphi\|$ e sia
$$A_h = \{x \in E_h : \ |u(x)| > M\} \ .$$
Allora $f = \chi_{A_h} |\vartheta u|^{-1} \overline{u} \in L^2(X, \mu; \mathbb{K})$ e risulta
$$M\, \mu(A_h) \leq \int_{A_h} |u|\, d\mu = \int \vartheta f u\, d\mu = \langle \varphi, \vartheta f \rangle \leq \|\varphi\|\, \|\vartheta f\|_1 \leq \|\varphi\|\, \mu(A_h)\,,$$
da cui $\mu(A_h) = 0$. Poiché
$$\{x \in X : \ |u(x)| > M\} = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} A_h\,,$$
ne segue che $M$ è un maggiorante essenziale per $|u|$, per cui $u \in L^\infty(X, \mu; \mathbb{K})$ e $\|u\|_\infty \leq M$. Per l'arbitrarietà di $M$, risulta allora $\|u\|_\infty \leq \|\varphi\|$.

Sia ora $f \in L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ e sia
$$f_h = \min\{\max\{f, -h\}, h\}\,.$$
Poiché
$$\chi_{E_j}\, \vartheta^{-1}\, f_h \in L^2(X, \mu; \mathbb{K})\,,$$
risulta
$$\langle \varphi, \chi_{E_j} f_h \rangle = \int \chi_{E_j} f_h u\, d\mu\,,$$
quindi
$$\left\langle \varphi, \left( \sum_{j=0}^{h} \chi_{E_j} \right) f_h \right\rangle = \int \left( \sum_{j=0}^{h} \chi_{E_j} \right) f_h u\, d\mu\,. \tag{4.14}$$
D'altra parte per $\mu-$q.o. $x \in X$ si ha
$$\lim_h \left( \sum_{j=0}^{h} \chi_{E_j}(x) \right) f_h(x) = f(x)\,,$$
$$\left| f(x) - \left( \sum_{j=0}^{h} \chi_{E_j}(x) \right) f_h(x) \right| \leq |f(x)|\,.$$
Dal teorema della convergenza dominata si deduce che
$$\lim_h \left( \sum_{j=0}^{h} \chi_{E_j} \right) f_h = f \qquad \text{in } L^1(X, \mu; \mathbb{K})\,.$$

Passando al limite nella (4.14) per $h \to \infty$, si ottiene

$$\langle \varphi, f \rangle = \int f u \, d\mu \,,$$

ossia $\varphi = T_u$. Pertanto l'applicazione $\{u \mapsto T_u\}$ è suriettiva.

Data in generale $u \in L^\infty(X, \mu; \mathbb{K})$, risulta

$$\forall f \in L^2(X, \mu; \mathbb{K}) : \qquad \langle T_u, \vartheta f \rangle = \int \vartheta f u \, d\mu \,.$$

Ragionando come in precedenza, si deduce che $\|u\|_\infty \leq \|T_u\|$. ∎

**(4.15) Corollario** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Allora $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ è denso in $L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C})$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ non sia denso in $L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C})$. Esiste allora una forma lineare e continua $\Lambda : L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non identicamente nulla tale che

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle \Lambda, f \rangle = 0 \,.$$

Dal momento che $\mu$ è $\sigma-$finita, esiste $u \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tale che

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \int_\Omega f \, u \, d\mu = 0 \,.$$

In particolare si ha

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega f \, \mathrm{Re}\, u \, d\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{Im}\, u \, d\mu = 0 \,.$$

Sia $K$ un compatto in

$$\{x \in \Omega : \; \mathrm{Re}\, u(x) > 0\} \;,$$

sia

$$A_h = \left\{ x \in \Omega : \; d(x, K) < \frac{1}{h} \right\}$$

e sia $f_h \in C_c^\infty(A_h)$ con $0 \leq f_h(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$ e $f_h(x) = 1$ su $K$.

Risulta

$$\int_\Omega f_h \, \mathrm{Re}\, u \, d\mu = 0 \,.$$

Passando al limite per $h \to \infty$ ed utilizzando il Teorema della convergenza dominata, si ottiene

$$\int_\Omega \chi_K \operatorname{Re} u \, d\mu = 0 \,,$$

quindi $\mu(K) = 0$. Per la $(d)$ del Teorema (1.23) ne segue che

$$\{x \in \Omega : \operatorname{Re} u(x) > 0\}$$

è $\mu-$trascurabile.

In modo simile si prova che anche

$$\{x \in \Omega : \operatorname{Re} u(x) < 0\} \,, \quad \{x \in \Omega : \operatorname{Im} u(x) > 0\} \,, \quad \{x \in \Omega : \operatorname{Im} u(x) < 0\}$$

sono $\mu-$trascurabili. Ne segue $u = 0$ in $L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$, il che è assurdo. ∎

**(4.16) Teorema** *Sia $E$ un sottoinsieme $\mathcal{L}^n$-misurabile di $\mathbb{R}^n$ e sia $1 < p \leq \infty$. Allora, per ogni successione limitata $(u_h)$ in $L^p(E;\mathbb{K})$, esistono $u \in L^p(E;\mathbb{K})$ ed una sottosuccessione $(u_{h_k})$ tali che*

$$\forall f \in L^{p'}(E;\mathbb{K}) : \ \lim_k \int_E f u_{h_k} \, d\mathcal{L}^n = \int_E f u \, d\mathcal{L}^n \,,$$

$$\|u\|_p \leq \liminf_h \|u_h\|_p \,.$$

*Dimostrazione.* Dal momento che $1 \leq p' < \infty$, si ha che $L^{p'}(E;\mathbb{K})$ è separabile. Allora, per ogni successione $(\varphi_h)$ limitata in $\big(L^{p'}(E;\mathbb{K})\big)'$, esistono $\varphi \in \big(L^{p'}(E;\mathbb{K})\big)'$ ed una sottosuccessione $(\varphi_{h_k})$ tali che

$$\forall f \in L^{p'}(E;\mathbb{K}) : \ \lim_k \langle \varphi_{h_k}, f \rangle = \langle \varphi, f \rangle \,,$$

$$\|\varphi\| \leq \liminf_h \|\varphi_h\| \,.$$

La tesi segue dal fatto che $p = (p')'$ e che

$$T : L^p(E;\mathbb{K}) \longrightarrow \Big(L^{p'}(E;\mathbb{K})\Big)'$$

è biiettiva e conserva la norma. ∎

**(4.17) Teorema** *Sia $\Omega$ un aperto non vuoto in $\mathbb{R}^n$. Allora l'applicazione lineare*

$$\begin{array}{ccc} L^1(\Omega;\mathbb{K}) & \longrightarrow & (L^\infty(\Omega;\mathbb{K}))' \\ u & \mapsto & T_u \end{array}$$

*non è suriettiva.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathrm{B}\,(x_0,r)\subseteq\Omega$ e sia $\delta_{x_0}: C_c^\infty(\Omega;\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ la forma lineare definita da

$$\langle\delta_{x_0},f\rangle = f(x_0)\,.$$

Dal momento che

$$|\langle\delta_{x_0},f\rangle| = |f(x_0)| \leq \|f\|_\infty\,,$$

la forma è continua rispetto a $\|\ \|_\infty$.

Per il Teorema di Hahn-Banach, esiste $T: L^\infty(\Omega;\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ lineare e continua tale che

$$\forall f\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{K}): \qquad \langle T,f\rangle = \langle\delta_{x_0},f\rangle = f(x_0)\,.$$

Supponiamo per assurdo che esista $u\in L^1(\Omega;\mathbb{K})$ tale che

$$\forall f\in L^\infty(\Omega;\mathbb{K}): \qquad \int_\Omega fu\,d\mathcal{L}^n = \langle T,f\rangle\,.$$

In particolare, ne segue

$$\forall f\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{K}): \qquad \int_\Omega fu\,d\mathcal{L}^n = f(x_0)\,.$$

Sia $\psi\in C_c^\infty(\mathrm{B}\,(0,r))$ tale che $0\leq\psi(x)\leq 1$ su $\mathbb{R}^n$ e $\psi(0)=1$. Poniamo poi $f_h(x)=\psi(h(x-x_0))$. Allora risulta $f_h\in C_c^\infty(\Omega)$, quindi

$$\int_\Omega f_h u\,d\mathcal{L}^n = f_h(x_0) = 1\,.$$

D'altronde dal Teorema della convergenza dominata segue che

$$\lim_h \int_\Omega f_h u\,d\mathcal{L}^n = 0\,,$$

da cui un assurdo. ∎

# 5 Distribuzioni di ordine zero

Nel corso di questa sezione, $\Omega$ denoterà un aperto in $\mathbb{R}^n$.

**(5.1) Definizione** *Chiamiamo* distribuzione di ordine zero *su* $\Omega$ *ogni forma lineare* $T : C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *soddisfacente la seguente proprietà:*
*per ogni compatto* $K \subseteq \Omega$ *esiste* $c \in [0, +\infty[$ *tale che* $|\langle T, f\rangle| \leq c\|f\|_\infty$ *per ogni* $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ *nulla fuori da* $K$*.*

**(5.2) Definizione** *Sia* $T : C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *una forma lineare. Diciamo che* $T$ *è* positiva *(o* monotona*), se per ogni* $f \in C_c^\infty(\Omega)$ *con* $f \geq 0$ *si ha* $\langle T, f\rangle \in \mathbb{R}$ *e* $\langle T, f\rangle \geq 0$*.*

**(5.3) Teorema** *Sia* $T$ *una forma lineare e positiva su* $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$*. Valgono allora i seguenti fatti:*

$(a)$ *per ogni* $f, g \in C_c^\infty(\Omega)$ *con* $f \leq g$ *si ha* $\langle T, f\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle T, g\rangle \in \mathbb{R}$ *e* $\langle T, f\rangle \leq \langle T, g\rangle$*;*

$(b)$ $T$ *è una distribuzione di ordine zero su* $\Omega$*.*

*Dimostrazione.*
$(a)$ Data $f \in C_c^\infty(\Omega)$, sia $K$ un compatto in $\Omega$ con $f = 0$ fuori da $K$ e sia $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su $\Omega$ e $\psi(x) = 1$ su $K$. Allora

$$\|f\|_\infty \psi \geq 0\,, \qquad \|f\|_\infty \psi - f \geq 0\,,$$

$$f = \|f\|_\infty \psi - (\|f\|_\infty \psi - f)\ .$$

Ne segue

$$\langle T, f\rangle = \langle T, \|f\|_\infty \psi\rangle - \langle T, \|f\|_\infty \psi - f\rangle \in \mathbb{R}\,.$$

Se poi anche $g \in C_c^\infty(\Omega)$ e si ha $f \leq g$, ne segue $g - f \geq 0$, quindi

$$\langle T, g\rangle - \langle T, f\rangle = \langle T, g - f\rangle \geq 0\,,$$

da cui $\langle T, f\rangle \leq \langle T, g\rangle$.
$(b)$ Sia $K$ un compatto in $\Omega$ e sia $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su $\Omega$ e $\psi(x) = 1$ su $K$. Per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ nulla fuori da $K$ si ha

$$-\|f\|_\infty\psi \leq \operatorname{Re} f \leq \|f\|_\infty\psi\,,$$

$$-\|f\|_\infty \psi \leq \operatorname{Im} f \leq \|f\|_\infty \psi \,.$$

Ne segue

$$|\langle T, \operatorname{Re} f\rangle| \leq \langle T, \psi\rangle \|f\|_\infty \,,$$

$$|\langle T, \operatorname{Im} f\rangle| \leq \langle T, \psi\rangle \|f\|_\infty \,,$$

quindi

$$|\langle T, f\rangle| \leq |\langle T, \operatorname{Re} f\rangle| + |\langle T, \operatorname{Im} f\rangle| \leq 2\langle T, \psi\rangle \|f\|_\infty,$$

da cui la tesi. ■

**(5.4) Teorema** *Sia $T$ una distribuzione di ordine zero su $\Omega$. Allora esiste una ed una sola forma lineare e positiva $|T|$ su $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ tale che*

$$\forall g \in C_c^\infty(\Omega) : \; g \geq 0 \implies \langle |T|, g\rangle = \sup\left\{|\langle T, f\rangle| : \; f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\; |f| \leq g\right\} \,.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $g \in C_c^\infty(\Omega)$ con $g \geq 0$ poniamo

$$\langle |T|, g\rangle := \sup\left\{|\langle T, f\rangle| : \; f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\; |f| \leq g\right\} \,.$$

Se $K$ è un compatto fuori dal quale $g$ è nulla e $c \geq 0$ è conforme alla Definizione (5.1), si ha per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ con $|f| \leq g$

$$|\langle T, f\rangle| \leq c\|f\|_\infty \leq c\|g\|_\infty \,.$$

Pertanto $0 \leq \langle |T|, g\rangle < +\infty$. Inoltre si verifica facilmente che

$$\forall s \geq 0, \forall g \in C_c^\infty(\Omega) : \qquad g \geq 0 \implies \langle |T|, sg\rangle = s\langle |T|, g\rangle \,.$$

Dimostriamo che $|T|$ è additiva. Siano $g_1, g_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ con $g_j \geq 0$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ tali che $|f_j| \leq g_j$ e

$$|\langle T, f_j\rangle| \geq \langle |T|, g_j\rangle - \varepsilon \,.$$

Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tali che $|z_j| = 1$ e $z_j\langle T, f_j\rangle = |\langle T, f_j\rangle|$. Allora si ha

$$|z_1 f_1 + z_2 f_2| \leq |f_1| + |f_2| \leq g_1 + g_2 \,,$$

$$\begin{aligned}\langle |T|, g_1\rangle + \langle |T|, g_2\rangle &\leq |\langle T, f_1\rangle| + |\langle T, f_2\rangle| + 2\varepsilon = |z_1\langle T, f_1\rangle + z_2\langle T, f_2\rangle| + 2\varepsilon = \\ &= |\langle T, z_1 f_1 + z_2 f_2\rangle| + 2\varepsilon \leq \langle |T|, g_1 + g_2\rangle + 2\varepsilon\,,\end{aligned}$$

da cui $\langle |T|, g_1\rangle + \langle |T|, g_2\rangle \leq \langle |T|, g_1 + g_2\rangle$ per l'arbitrarietà di $\varepsilon$.

Sia ora $f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ tale che $|f| \leq g_1 + g_2$, sia $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su $\Omega$ e $\psi(x) = 1$ su $\mathrm{supt}(f)$ e sia $\varepsilon > 0$. Definiamo $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ ponendo

$$f_j(x) = \frac{g_j(x) f(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \varepsilon}\,.$$

Evidentemente si ha

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \varepsilon\frac{f(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \varepsilon}\,,$$

$$|f_j| \leq g_j\,, \qquad \frac{|f(x)|}{g_1(x) + g_2(x) + \varepsilon} \leq \psi(x)\,.$$

Ne segue

$$\begin{aligned}|\langle T, f\rangle| &\leq |\langle T, f_1\rangle| + |\langle T, f_2\rangle| + \varepsilon\left|\left\langle T, \frac{f(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \varepsilon}\right\rangle\right| \leq \\ &\leq \langle |T|, g_1\rangle + \langle |T|, g_2\rangle + \varepsilon\langle |T|, \psi\rangle\,.\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, si deduce che

$$|\langle T, f\rangle| \leq \langle |T|, g_1\rangle + \langle |T|, g_2\rangle\,,$$

per cui $\langle |T|, g_1 + g_2\rangle \leq \langle |T|, g_1\rangle + \langle |T|, g_2\rangle$.

Ragionando come nella dimostrazione del Teorema (5.3), si verifica che per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$ esiste $g \in C_c^\infty(\Omega)$ con $g \geq 0$ e $g \geq f$. Poniamo

$$\langle |T|, f\rangle = \langle |T|, g\rangle - \langle |T|, g - f\rangle\,.$$

Se $\hat{g}$ è un'altra funzione con le stesse proprietà, risulta

$$g + (\hat{g} - f) = \hat{g} + (g - f)\ ,$$

quindi

$$\langle |T|, g\rangle + \langle |T|, \hat{g} - f\rangle = \langle |T|, \hat{g}\rangle + \langle |T|, g - f\rangle\,.$$

Pertanto la definizione è ben posta. Infine, se $f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, poniamo

$$\langle |T|, f\rangle = \langle |T|, \mathrm{Re}\, f\rangle + i\langle |T|, \mathrm{Im}\, f\rangle\,.$$

Si verifica facilmente che $|T|$ è una forma lineare e positiva su $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$.

L'unicità di $|T|$ è evidente. ■

**(5.5) Definizione** *Sia $T$ una distribuzione di ordine zero su $\Omega$. La forma lineare e positiva $|T|$ definita dal teorema precedente si chiama* variazione totale *di $T$.*

**(5.6) Teorema** *Sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ poniamo*

$$\langle T, f\rangle = \int_\Omega f\, d\mu\,.$$

*Allora $T$ è una forma lineare e positiva su $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$.*

*Dimostrazione.* Per il Teorema (2.6), ogni $f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ è boreliana. Inoltre si ha

$$|f| \leq \|f\|_\infty \chi_{\mathrm{supt}(f)}\,.$$

Essendo $\mu$ finita sui compatti di $\Omega$, la funzione a secondo membro è $\mu-$sommabile. Pertanto ogni $f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ è $\mu-$sommabile. Tenuto conto delle proprietà dell'integrale, si verifica facilmente che $T$ è lineare e positiva. ■

Il Teorema di rappresentazione di Riesz, che ora dimostreremo, stabilisce il viceversa di quanto abbiamo appena provato.

**(5.7) Lemma** *Siano $A_0, \ldots, A_k$ degli aperti in $\mathbb{R}^n$ e sia $K$ un compatto in $\bigcup\limits_{h=0}^k A_h$.*

*Allora esistono $\psi_0 \in C_c^\infty(A_0), \ldots, \psi_k \in C_c^\infty(A_k)$ tali che*

$$\begin{aligned} &\forall x \in A_h: \quad && 0 \leq \psi_h(x) \leq 1\,,\\ &\forall x \in K: \quad && \sum_{h=0}^k \psi_h(x) = 1\,. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Se esiste $j = 0, \ldots, k$ con $A_j = \mathbb{R}^n$, è sufficiente scegliere $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $0 \leq \psi_j \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$ e $\psi_j = 1$ su $K$ e porre $\psi_h = 0$ per $h \neq j$.

Altrimenti sia

$$r = \min_{x \in K} \{\max \{d(x, \mathbb{R}^n \setminus A_h) : 0 \leq h \leq k\}\} .$$

Poiché $K \subseteq \bigcup_{h=0}^{k} A_h$, risulta $r > 0$. Sia $R > 0$ tale che $K \subseteq \overline{\mathrm{B}(0, R)}$ e sia

$$K_h = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \mathbb{R}^n \setminus A_h) \geq r\} \cap \overline{\mathrm{B}(0, R)} .$$

Allora $K_h$ è un compatto in $A_h$ e $K \subseteq \bigcup_{h=0}^{k} K_h$.

Sia $\vartheta_h \in C_c^\infty(A_h)$ tale che $0 \leq \vartheta_h \leq 1$ su $A_h$ e $\vartheta_h = 1$ su $K_h$ e siano

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \vartheta_0 , \\ \psi_h &= (1 - \vartheta_0) \cdots (1 - \vartheta_{h-1}) \vartheta_h \qquad \text{per } 1 \leq h \leq k . \end{aligned}$$

Ragionando per induzione, si verifica facilmente che

$$\sum_{h=0}^{k} \psi_h = 1 - (1 - \vartheta_0) \cdots (1 - \vartheta_k) ,$$

per cui $\psi_0, \ldots, \psi_k$ hanno i requisiti richiesti. ■

**(5.8) Teorema** *Sia $T : C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ una forma lineare e positiva. Allora esiste una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tale che*

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle T, f \rangle = \int_\Omega f \, d\mu . \tag{5.9}$$

*Dimostrazione.* Per ogni $E \subseteq \Omega$ poniamo

$$\mu(E) := \inf \left\{ \lim_h \langle T, f_h \rangle : f_h \in C_c^\infty(\Omega), \, 0 \leq f_h \leq f_{h+1}, \, \lim_h f_h \geq \chi_E \right\} .$$

I) $\mu$ è una misura esterna su $\Omega$.

Si verifica facilmente che $\mu(\emptyset) = 0$ e che $\mu(E) \leq \mu(F)$ ogniqualvolta $E \subseteq F \subseteq \Omega$. Sia $(E_j)$ una successione di sottoinsiemi di $\Omega$ e sia $E = \bigcup_{j=0}^{\infty} E_j$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia $(f_{j,h})$ una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \leq f_{j,h} \leq f_{j,h+1}$, $\lim_h f_{j,h} \geq \chi_{E_j}$ e

$$\lim_h \langle T, f_{j,h} \rangle \leq \mu(E_j) + \varepsilon 2^{-j-1} .$$

Posto

$$g_h = \sum_{j=0}^{h} f_{j,h}\,,$$

si ha $g_h \geq f_{j,h}$ per $h \geq j$ e $0 \leq g_h \leq g_{h+1}$. Ne segue che per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_h g_h \geq \lim_h f_{j,h} \geq \chi_{E_j}\,,$$

quindi

$$\lim_h g_h \geq \chi_E\,.$$

Allora si ha

$$\langle T, g_h\rangle = \sum_{j=0}^{h} \langle T, f_{j,h}\rangle \leq \sum_{j=0}^{h} \left(\lim_h \langle T, f_{j,h}\rangle\right) \leq \sum_{j=0}^{h} \left(\mu(E_j) + \varepsilon 2^{-j-1}\right)\,,$$

quindi

$$\mu(E) \leq \lim_h \langle T, g_h\rangle \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(E_j) + \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ ne segue

$$\mu(E) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(E_j)\,,$$

per cui $\mu$ è una misura esterna.

II) Ogni aperto di $\Omega$ è $\mu-$misurabile.

Siano $E_1$ ed $E_2$ due sottoinsiemi non vuoti di $\Omega$ con

$$\inf\{|x-y| : x \in E_1,\, y \in E_2\} = \sigma > 0$$

e siano

$$A_j = \left\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E_j) < \frac{\sigma}{2}\right\}, \qquad C_j = \left\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E_j) \leq \frac{\sigma}{4}\right\}.$$

Sia $k \geq 1$ tale che $k\sigma > 4$ e sia

$$\psi_j(x) = \int \chi_{C_j}(y)\varrho_k(x-y)\, d\mathcal{L}^n(y)\,,$$

dove $(\varrho_k)$ è una successione regolarizzante in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e risulta $0 \leq \psi_j(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$, $\psi_j(x) = 0$ fuori da $A_j$ e $\psi_j(x) = 1$ su $E_j$. In particolare si ha $\psi_1(x) + \psi_2(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$.

Sia $(f_h)$ una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \leq f_h \leq f_{h+1}$ e $\lim_h f_h \geq \chi_{(E_1 \cup E_2)}$. Allora si ha $0 \leq \psi_j f_h \leq \psi_j f_{h+1}$ e $\lim_h \psi_j f_h \geq \chi_{E_j}$, per cui

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) \leq \lim_h \langle T, \psi_1 f_h \rangle + \lim_h \langle T, \psi_2 f_h \rangle = \lim_h \langle T, (\psi_1 + \psi_2) f_h \rangle \leq \lim_h \langle T, f_h \rangle\,.$$

Ne segue

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) \leq \mu(E_1 \cup E_2)\,,$$

per cui ogni aperto di $\Omega$ è $\mu-$misurabile.

III) Se $E \subseteq \Omega$, $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\chi_E \leq \psi$, si ha $\mu(E) \leq \langle T, \psi \rangle$.
Infatti è sufficiente considerare, nella definizione di $\mu(E)$, la successione $(f_h)$ costantemente uguale a $\psi$.

IV) Si ha $\mu_{|\mathfrak{B}(\Omega)} \in \mathcal{M}\,(\Omega)$.
Infatti per il passo II) si ha che $\mu_{|\mathfrak{B}(\Omega)}$ è una misura boreliana su $\Omega$. Inoltre, se $K \subseteq \Omega$ è compatto, esiste $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $\psi \geq \chi_K$. Dal passo III) segue che $\mu(K) \leq \langle T, \psi \rangle < +\infty$, per cui $\mu$ è finita sui compatti di $\Omega$.

V) Se $K \subseteq \Omega$ è compatto, $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\psi \leq \chi_K$, si ha $\langle T, \psi \rangle \leq \mu(K)$.
Sia infatti $\varepsilon \in ]0, 1[$ e sia $(f_h)$ una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \leq f_h \leq f_{h+1}$ e $\lim_h f_h \geq \chi_K$. Poiché

$$K \subseteq \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{x \in \Omega : \; f_h(x) > 1 - \varepsilon\}\;,$$

per la compattezza di $K$ esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$K \subseteq \{x \in \Omega : \; f_h(x) > 1 - \varepsilon\}\;,$$

ossia $f_h(x) > 1 - \varepsilon$ su $K$. A maggior ragione si ha $f_h \geq (1 - \varepsilon)\psi$, per cui

$$(1 - \varepsilon)\langle T, \psi \rangle \leq \lim_h \langle T, f_h \rangle\,.$$

Ne segue $(1 - \varepsilon)\langle T, \psi \rangle \leq \mu(K)$, quindi $\langle T, \psi \rangle \leq \mu(K)$ per l'arbitrarietà di $\varepsilon$.

VI) Vale la (5.9).
Sia anzitutto $f \in C_c^\infty(\Omega)$, sia $K = \mathrm{supt}(f)$ e sia $k \geq 1$. Siano $M > \|f\|_\infty$ ed $\varepsilon = M/k$. Per $-k \leq h \leq k - 1$ poniamo

$$E_h = \{x \in \Omega : \; \varepsilon h \leq f(x) < \varepsilon(h + 1)\} \cap K\,.$$

Per il Corollario (1.24) e per la continuità di $f$, esistono degli aperti $A_h$ in $\Omega$ con $E_h \subseteq A_h$, $\mu(A_h) \leq \mu(E_h) + \frac{\varepsilon}{k}$ e $f(x) < \varepsilon(h+1)$ su $A_h$. Per il Lemma (5.7) esistono $\psi_h \in C_c^\infty(A_h)$ con $0 \leq \psi_h(x) \leq 1$ su $A_h$ e $\sum\limits_{h=-k}^{k-1} \psi_h(x) = 1$ su $K$.

Allora risulta

$$
\begin{aligned}
\langle T, f\rangle &= \sum_{h=-k}^{k-1} \langle T, \psi_h f\rangle \leq \sum_{h=-k}^{k-1} \varepsilon(h+1)\langle T, \psi_h\rangle = \\
&= \sum_{h=-k}^{k-1} (M + \varepsilon(h+1))\,\langle T, \psi_h\rangle - M \sum_{h=-k}^{k-1} \langle T, \psi_h\rangle \leq \\
&\leq \sum_{h=-k}^{k-1} (M + \varepsilon(h+1))\,\mu(\mathrm{supt}(\psi_h)) - M\mu(K) \leq \\
&\leq \sum_{h=-k}^{k-1} (M + \varepsilon(h+1))\,\mu(A_h) - M\mu(K) \leq \\
&\leq \sum_{h=-k}^{k-1} (M + \varepsilon(h+1))\left(\mu(E_h) + \frac{\varepsilon}{k}\right) - M\mu(K) = \\
&= \sum_{h=-k}^{k-1} \varepsilon(h+1)\left(\mu(E_h) + \frac{\varepsilon}{k}\right) + 2\varepsilon M = \\
&= \sum_{h=-k}^{k-1} \varepsilon h \mu(E_h) + \varepsilon\left(\mu(K) + \varepsilon + 2M\right) \leq \\
&\leq \sum_{h=-k}^{k-1} \int_{E_h} f\,d\mu + \varepsilon\left(\mu(K) + \varepsilon + 2M\right) = \\
&= \int_\Omega f\,d\mu + \frac{M}{k}\left(\mu(K) + \frac{M}{k} + 2M\right).
\end{aligned}
$$

Passando al limite per $k \to \infty$, si ottiene

$$\langle T, f\rangle \leq \int_\Omega f\,d\mu\,.$$

Potendo scambiare $f$ con $-f$, ne segue

$$\langle T, f\rangle = \int_\Omega f\,d\mu\,.$$

In generale, se $f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, si ha

$$\langle T, f\rangle = \langle T, \mathrm{Re}\, f\rangle + i\langle T, \mathrm{Im}\, f\rangle = \int_\Omega (\mathrm{Re}\, f)\,d\mu + i\int_\Omega (\mathrm{Im}\, f)\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu\,.$$

VII) La misura $\mu$ è unica.

Sia $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega)$ un'altra misura verificante la (5.9). Sia $A$ un aperto in $\Omega$ e sia $(K_h)$ una successione esaustiva di compatti in $A$. Sia $f_h \in C_c^\infty(\mathrm{int}\,(K_{h+1}))$ tale che $0 \leq f_h(x) \leq 1$ su $\mathrm{int}\,(K_{h+1})$ e $f_h(x) = 1$ su $K_h$. Allora $(f_h)$ è una successione di funzioni positive in $C_c^\infty(\Omega)$ crescente puntualmente a $\chi_A$. Dal Teorema della convergenza monotona si deduce che

$$\lambda(A) = \lim_h \int_\Omega f_h\, d\lambda = \lim_h \langle T, f_h\rangle = \lim_h \int_\Omega f_h\, d\mu = \mu(A)\,.$$

L'unicità discende allora dal Corollario (1.25). ■

**(5.10) Teorema** *Siano $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $\nu \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$. Per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ poniamo*

$$\langle T, f\rangle = \int_\Omega f\nu\, d\mu\,.$$

*Allora $T$ è una distribuzione di ordine $0$ su $\Omega$. Inoltre risulta*

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle |T|, f\rangle = \int_\Omega f\, |\nu|\, d\mu\,,$$

$$\int_\Omega |\nu|\, d\mu = \sup\left\{|\langle T, f\rangle| : \, f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}),\, \|f\|_\infty \leq 1\right\}\,.$$

*Dimostrazione.* Evidentemente $T$ è ben definita e lineare. Se $K$ è un compatto in $\Omega$ e $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ è nulla fuori da $K$, si ha

$$|\langle T, f\rangle| = \left|\int_\Omega f\nu\, d\mu\right| \leq \|\nu\|_\infty \int_K |f|\, d\mu \leq (\|\nu\|_\infty\, \mu(K))\, \|f\|_\infty\,,$$

per cui $T$ è una distribuzione di ordine $0$ su $\Omega$.

Sia ora $g \in C_c^\infty(\Omega)$ con $g \geq 0$. Per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ con $|f| \leq g$, risulta

$$|\langle T, f\rangle| = \left|\int_\Omega f\, \nu\, d\mu\right| \leq \int_\Omega |f|\, |\nu|\, d\mu \leq \int_\Omega g\, |\nu|\, d\mu\,,$$

da cui

$$\langle |T|, g\rangle \leq \int_\Omega g\, |\nu|\, d\mu\,.$$

D'altronde per il Corollario (4.15) esiste una successione $(f_h)$ in $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ convergente in $L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ a $g\overline{\nu}$. Sia $k \geq 1$ e sia

$$\tilde{f}_h = \frac{g f_h}{\sqrt{|f_h|^2 + \frac{1}{k}}}\,.$$

Si verifica facilmente che $(\tilde{f}_h)$ è una successione in $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ convergente a $\dfrac{g^2\overline{\nu}}{\sqrt{g^2|\,|\nu|^2+\frac{1}{k}}}$ in $L^1(\Omega,\mu;\mathbb{C})$ e tale che $|\tilde{f}_h|\leq g$ per ogni $h\in\mathbb{N}$. Dal Teorema della convergenza dominata segue che

$$\int_\Omega \frac{g^2\,|\nu|^2}{\sqrt{g^2\,|\nu|^2+\frac{1}{k}}}\,d\mu=\lim_h\int_\Omega \tilde{f}_h\,\nu\,d\mu=\lim_h\langle T,\tilde{f}_h\rangle\leq\langle |T|,g\rangle\,.$$

Passando al limite per $k\to+\infty$ ed applicando il Teorema della convergenza monotona, si ottiene

$$\int_\Omega g\,|\nu|\,d\mu\leq\langle |T|,g\rangle\,,$$

per cui

$$\langle |T|,g\rangle=\int_\Omega g\,|\nu|\,d\mu\qquad\text{per ogni } g\in C_c^\infty(\Omega)\text{ con } g\geq 0\,.$$

Ragionando come nella dimostrazione del Teorema (5.4), si conclude che

$$\forall f\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}):\ \langle |T|,f\rangle=\int_\Omega f\,|\nu|\,d\mu\,.$$

Sia infine $(g_h)$ una successione di funzioni positive in $C_c^\infty(\Omega)$ che converge crescendo a $\chi_\Omega$. Si ha

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_h\,|\nu|\,d\mu &= \langle |T|,g_h\rangle=\sup\left\{|\langle T,f\rangle|:\ f\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\ |f|\leq g_h\right\}\leq\\ &\leq \sup\left\{|\langle T,f\rangle|:\ f\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\ \|f\|_\infty\leq 1\right\}\,.\end{aligned}$$

Applicando il Teorema della convergenza monotona, si deduce che

$$\int_\Omega |\nu|\,d\mu\leq\sup\left\{|\langle T,f\rangle|:\ f\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\ \|f\|_\infty\leq 1\right\}\,.$$

D'altronde si ha

$$\begin{aligned}\sup\Big\{|\langle T,f\rangle|:\ & f\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\ \|f\|_\infty\leq 1\Big\}=\\ &=\sup\left\{\left|\int_\Omega f\,\nu\,d\mu\right|:\ f\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\ \|f\|_\infty\leq 1\right\}\leq\int_\Omega |\nu|\,d\mu\,,\end{aligned}$$

da cui la disuguaglianza opposta. ■

Come ora vedremo, ogni distribuzione di ordine zero è rappresentabile in questo modo.

**(5.11) Teorema** *Sia $T$ una distribuzione di ordine zero su $\Omega$. Allora esistono una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ ed una ed una sola $\nu \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ tali che*

$$|\nu(x)| = 1 \qquad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in \Omega,$$

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle T, f\rangle = \int_\Omega f\nu \, d\mu \,.$$

*Dimostrazione.* Per il Teorema (5.8) esiste $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tale che

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle |T|, f\rangle = \int_\Omega f \, d\mu \,.$$

Data $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$, sia $\vartheta \in C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \leq \vartheta(x) \leq 1$ su $\Omega$ e $\vartheta(x) = 1$ su $\text{supt}(f)$ e sia

$$g_h(x) = \vartheta(x) \sqrt{|f(x)|^2 + \frac{1}{h}} \,.$$

Risulta $g_h \in C_c^\infty(\Omega)$ e $|f| \leq g_h$, per cui

$$|\langle T, f\rangle| \leq \langle |T|, g_h\rangle = \int_\Omega g_h \, d\mu \,.$$

Passando al limite per $h \to \infty$ ed applicando il Teorema della convergenza dominata, si ottiene

$$|\langle T, f\rangle| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu \,.$$

Questo significa che $T$ è una forma lineare su $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ continua rispetto alla norma di $L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ con $\|T\| \leq 1$. Per il Teorema di Hahn-Banach, $T$ può essere estesa ad una forma lineare e continua $\widehat{T}$ su $L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ con $\|\widehat{T}\| \leq 1$. Essendo $\mu$ $\sigma$−finita, esiste $\nu \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ tale che $|\nu(x)| \leq 1$ per $\mu$−q.o. $x \in \Omega$ e

$$\forall f \in L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C}) : \langle \widehat{T}, f\rangle = \int_\Omega f\nu \, d\mu \,.$$

In particolare risulta

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle T, f\rangle = \int_\Omega f\nu \, d\mu \,,$$

quindi

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle |T|, f\rangle = \int_\Omega f|\nu| \, d\mu$$

per il Teorema (5.10).

Sia ora $(g_h)$ una successione di funzioni positive in $C_c^\infty(\Omega)$ che converge crescendo a $\chi_\Omega$. Si ha

$$\int_\Omega g_h\, d\mu = \langle |T|, g_h\rangle = \int_\Omega g_h |\nu|\, d\mu\,,$$

quindi

$$\int_\Omega g_h(1-|\nu|)\, d\mu = 0\,.$$

Passando al limite per $h \to \infty$ ed applicando il Teorema della convergenza monotona, si ottiene

$$\int_\Omega (1-|\nu|)\, d\mu = 0\,,$$

per cui $|\nu(x)| = 1$ per $\mu-$q.o. $x \in \Omega$.

Supponiamo ora che $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $\psi \in L^\infty(\Omega, \lambda; \mathbb{C})$ abbiano le stesse proprietà di $\mu$ e $\nu$. Tenuto conto del Teorema (5.10), si ha

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}) : \int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega f\, |\nu|\, d\mu = \langle |T|, f\rangle = \int_\Omega f\, |\psi|\, d\lambda = \int_\Omega f\, d\lambda\,.$$

Dal Teorema (5.8) segue che $\mu = \lambda$.

Poiché per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ si ha

$$\int_\Omega f\, \nu\, d\mu = \langle T, f\rangle = \int_\Omega f\, \psi\, d\mu\,,$$

dal Corollario (4.15) segue che

$$\forall f \in L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C}) : \int_\Omega f\, \nu\, d\mu = \int_\Omega f\, \psi\, d\mu\,,$$

quindi che $\psi = \nu$ in $L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$. ■

**(5.12) Corollario** *Sia $T \in (C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \|\ \|_\infty)'$. Allora esistono una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ ed una ed una sola $\nu \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ tali che*

$$|\nu(x)| = 1 \qquad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in \Omega,$$

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}) : \langle T, f\rangle = \int_\Omega f \nu\, d\mu\,.$$

*Inoltre risulta $\mu(\Omega) = \|T\| < +\infty$.*

*Dimostrazione.* Evidentemente $T$ è una distribuzione di ordine zero su $\Omega$. La tesi discende allora dal Teorema (5.11). ■

**(5.13) Teorema** *Sia $(\mu_h, \nu_h)$ una successione, con $\mu_h \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $\nu_h \in M(\Omega, \mu_h; \mathbb{C})$, tale che*

$$\sup_h \int_\Omega |\nu_h| \, d\mu_h < +\infty \,.$$

*Allora esistono $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, $\nu \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ e una sottosuccessione $(\mu_{h_k}, \nu_{h_k})$ tali che*

$$|\nu(x)| = 1 \qquad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in \Omega,$$

$$\forall f \in C_c(\Omega; \mathbb{C}) : \lim_k \int_\Omega f \nu_{h_k} \, d\mu_{h_k} = \int_\Omega f \nu \, d\mu \,,$$

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega |\nu| \, d\mu \leq \liminf_h \int_\Omega |\nu_h| \, d\mu_h \,.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $f \in C_c(\Omega; \mathbb{C})$ si ha

$$\int_\Omega |f \nu_h| \, d\mu_h \leq \left( \int_\Omega |\nu_h| \, d\mu_h \right) \|f\|_\infty \,.$$

Si può quindi definire $T_h \in (C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \| \ \|_\infty)'$ ponendo

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \ \langle T_h, f \rangle = \int_\Omega f \nu_h \, d\mu_h \,.$$

Dal momento che

$$|\langle T_h, f \rangle| = \left| \int_\Omega f \nu_h \, d\mu_h \right| \leq \left( \int_\Omega |\nu_h| \, d\mu_h \right) \|f\|_\infty \,,$$

risulta

$$\|T_h\| \leq \int_\Omega |\nu_h| \, d\mu_h \,,$$

per cui $(T_h)$ è una successione limitata in $(C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \| \ \|_\infty)'$.

Essendo $(C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \| \ \|_\infty)$ separabile, esistono $T \in (C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \| \ \|_\infty)'$ ed una sottosuccessione $(T_{h_k})$ tali che

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \lim_k \langle T_{h_k}, f \rangle = \langle T, f \rangle \,,$$

$$\|T\| \leq \liminf_h \|T_h\| \,.$$

Siano $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $\nu \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ associate a $T$, conformemente al Corollario (5.12). Ne segue

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \lim_k \int_\Omega f \nu_{h_k} \, d\mu_{h_k} = \int_\Omega f \nu \, d\mu \,,$$

$$\int_\Omega |\nu| \, d\mu = \mu(\Omega) = \|T\| \leq \liminf_h \|T_h\| \leq \liminf_h \int_\Omega |\nu_h| \, d\mu_h \,.$$

Sia infine $f \in C_c(\Omega; \mathbb{C})$ e sia

$$c = \sup_h \int_\Omega |\nu_h| \, d\mu_h \,.$$

Per ogni $g \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ risulta

$$\left| \int_\Omega f \, \nu_{h_k} \, d\mu_{h_k} - \int_\Omega f \, \nu \, d\mu \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_\Omega (f - g) \, \nu_{h_k} \, d\mu_{h_k} \right| + \left| \int_\Omega g \, \nu_{h_k} \, d\mu_{h_k} - \int_\Omega g \, \nu \, d\mu \right| + \left| \int_\Omega (g - f) \, \nu \, d\mu \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_\Omega g \, \nu_{h_k} \, d\mu_{h_k} - \int_\Omega g \, \nu \, d\mu \right| + \|f - g\|_\infty \left( \int_\Omega |\nu_{h_k}| \, d\mu_{h_k} + \int_\Omega |\nu| \, d\mu \right) \leq$$

$$\leq \left| \int_\Omega g \, \nu_{h_k} \, d\mu_{h_k} - \int_\Omega g \, \nu \, d\mu \right| + 2c \, \|f - g\|_\infty \,.$$

Dato $\varepsilon > 0$, sia $g \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ tale che $2c \, \|f - g\|_\infty < \varepsilon/2$. Sia poi $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall k \geq \overline{k} : \left| \int_\Omega g \, \nu_{h_k} \, d\mu_{h_k} - \int_\Omega g \, \nu \, d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Allora si ha

$$\forall k \geq \overline{k} : \left| \int_\Omega f \, \nu_{h_k} \, d\mu_{h_k} - \int_\Omega f \, \nu \, d\mu \right| < \varepsilon \,,$$

da cui la tesi. ■

## 6 Decomposizione di misure

**(6.1) Definizione** *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e $\lambda, \mu$ due misure su $\mathfrak{M}$. Diciamo che $\mu$ è* assolutamente continua *rispetto a $\lambda$ (e scriviamo $\mu \ll \lambda$), se*

$$\forall E \in \mathfrak{M} : \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0 \,.$$

**(6.2) Definizione** *Siano $(X,\mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e $\lambda, \mu$ due misure su $\mathfrak{M}$. Diciamo che $\mu$ è* singolare *rispetto a $\lambda$ (e scriviamo $\mu \perp \lambda$), se esiste $S \in \mathfrak{M}$ tale che $\lambda(S) = \mu(X \setminus S) = 0$.*

**(6.3) Teorema** *Siano $(X,\mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e $\lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ cinque misure su $\mathfrak{M}$. Supponiamo che $\mu_1$ e $\mu_3$ siano assolutamente continue rispetto a $\lambda$, che $\mu_2$ e $\mu_4$ siano singolari rispetto a $\lambda$ e che si abbia $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$.*

*Allora $\mu_1 = \mu_3$ e $\mu_2 = \mu_4$.*

*Dimostrazione.* Siano $S', S'' \in \mathfrak{M}$ tali che

$$\lambda(S') = \mu_2(X \setminus S') = \lambda(S'') = \mu_4(X \setminus S'') = 0\,.$$

Posto $S = S' \cup S''$, si ha

$$\lambda(S) = \mu_2(X \setminus S) = \mu_4(X \setminus S) = 0\,,$$

quindi $\mu_1(S) = \mu_3(S) = 0$. Allora per ogni $E \in \mathfrak{M}$ risulta

$$\mu_1(E) = \mu_1(E \setminus S) = \mu_1(E \setminus S) + \mu_2(E \setminus S) = \mu_3(E \setminus S) + \mu_4(E \setminus S) = \mu_3(E)\,.$$

D'altronde si ha anche

$$\mu_2(E) = \mu_1(E \cap S) + \mu_2(E \cap S) = \mu_3(E \cap S) + \mu_4(E \cap S) = \mu_4(E)\,,$$

da cui la tesi. ■

**(6.4) Teorema** *Siano $(X,\mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e $\lambda, \mu$ due misure $\sigma-$finite su $\mathfrak{M}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

$(a)$ *esiste una ed una sola coppia $(\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda})$ di misure su $\mathfrak{M}$ tale che $\mu = \mu_{a,\lambda} + \mu_{s,\lambda}$, $\mu_{a,\lambda} \ll \lambda$ e $\mu_{s,\lambda} \perp \lambda$;*

$(b)$ *esiste una ed una sola $\varphi \in M(X,\lambda;\mathbb{R})$ tale che $\varphi \geq 0$ e*

$$\mu_{a,\lambda}(E) = \int_E \varphi\, d\lambda$$

*per ogni $E \in \mathfrak{M}$.*

*Inoltre si ha*

$$\int f\,d\mu = \int f\,\varphi\,d\lambda + \int f\,d\mu_{s,\lambda}$$

*per ogni* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mu-$*integrabile e per ogni* $f : X \to \mathbb{C}$ $\mu-$*sommabile.*

*Dimostrazione.* Posto $\nu = \lambda + \mu$, si verifica facilmente che $\nu$ è una misura su $\mathfrak{M}$. Siano $(A_h)$ e $(B_h)$ due successioni crescenti in $\mathfrak{M}$ con $\lambda(A_h) < +\infty$, $\mu(B_h) < +\infty$ e $X = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} A_h = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} B_h$. Allora, posto $C_h = A_h \cap B_h$, si ha $X = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} C_h$ e $\nu(C_h) < +\infty$, per cui anche $\nu$ è $\sigma-$finita.

Per ogni $E \in \mathfrak{M}$ si ha

$$\int \chi_E\,d\nu = \nu(E) = \lambda(E) + \mu(E) = \int \chi_E\,d\lambda + \int \chi_E\,d\mu\,.$$

Ne segue

$$\int f\,d\nu = \int f\,d\lambda + \int f\,d\mu$$

per ogni $f : X \to [0,+\infty]$ $\mathfrak{M}-$misurabile, dal momento che $f$ è limite puntuale di una successione crescente di funzioni $\mathfrak{M}-$semplici positive.

Inoltre per ogni $f \in L^1(X,\nu)$ si ha $f \in L^1(X,\mu)$ e

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu \leq \int |f|\,d\nu\,.$$

Pertanto

$$\left\{f \longmapsto \int f\,d\mu\right\}$$

è una forma lineare e continua su $L^1(X,\nu)$ avente norma minore o uguale ad uno. Essendo $\nu$ $\sigma-$finita, esiste $u \in L^\infty(X,\nu)$ con norma minore o uguale ad uno tale che

$$\forall f \in L^1(X,\nu) : \int f\,d\mu = \int f u\,d\nu\,.$$

Scegliendo un rappresentante opportuno, possiamo supporre di avere $|u(x)| \leq 1$ per ogni $x \in X$.

Ponendo $f = \chi_{E\cap C_h}$, dove

$$E = \{x \in X : u(x) < 0\}\,,$$

si ottiene

$$0 \leq \int \chi_{E\cap C_h}\,d\mu = -\int \chi_{E\cap C_h} u^-\,d\nu\,,$$

da cui $\nu(E \cap C_h) = 0$, quindi $\nu(E) = 0$. Ne segue che $u(x) = u^+(x)$ per $\nu-$q.o. $x \in X$. A meno si sostituire $u$ con $u^+$, possiamo quindi supporre $0 \le u(x) \le 1$ per ogni $x \in X$.

Se $f : X \to [0, +\infty]$ è una funzione $\mathfrak{M}-$misurabile, sia

$$f_h = \min\{f, h\}\ \chi_{C_h}\,.$$

Poiché $f_h \in L^1(X, \nu)$, si ha

$$\int f_h\, d\mu = \int f_h u\, d\nu = \int f_h u\, d\lambda + \int f_h u\, d\mu$$

ossia

$$\int f_h(1-u)\, d\mu = \int f_h u\, d\lambda\,.$$

Dal Teorema della convergenza monotona si deduce allora che

$$\int f(1-u)\, d\mu = \int f u\, d\lambda\,. \tag{6.5}$$

Poniamo

$$A = \{x \in X :\ u(x) < 1\}\ , \qquad S = \{x \in X :\ u(x) = 1\}\ .$$

e definiamo due misure $\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda}$ su $\mathfrak{M}$, ponendo

$$\forall E \in \mathfrak{M} :\ \mu_{a,\lambda}(E) = \mu(A \cap E)\,, \qquad \mu_{s,\lambda}(E) = \mu(S \cap E)\,.$$

Evidentemente $\mu = \mu_{a,\lambda} + \mu_{s,\lambda}$. Inoltre, scegliendo $f = \chi_S$ nella (6.5), si ottiene la relazione

$$0 = \int \chi_S(1-u)\, d\mu = \int \chi_S u\, d\lambda = \lambda(S)$$

che, combinata con $\mu_{s,\lambda}(X \setminus S) = 0$, implica $\mu_{s,\lambda} \perp \lambda$.

Per ogni $E \in \mathfrak{M}$ poniamo ora

$$f = \left(\sum_{j=0}^{h} u^j\right)\ \chi_E$$

nella (6.5). Si ottiene

$$\int \chi_E \left(1 - u^{h+1}\right)\, d\mu = \int \chi_E \left(\sum_{j=1}^{h+1} u^j\right)\, d\lambda\,.$$

Sia

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x)}{1-u(x)} & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \in S. \end{cases}$$

Applicando il Teorema della convergenza monotona e ricordando che $\lambda(S) = 0$, si deduce che

$$\mu_{a,\lambda}(E) = \mu(A \cap E) = \int \chi_{A\cap E}\, d\mu = \int_E \varphi\, d\lambda\,.$$

In particolare, risulta $\mu_{a,\lambda} \ll \lambda$.

L'unicità della coppia $(\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda})$ discende dal Teorema (6.3). Supponiamo d'altronde che $\psi \in M(X, \lambda)$ abbia gli stessi requisiti di $\varphi$. Se

$$E = \{x \in X : \psi(x) < \varphi(x)\}\ ,$$

si ha

$$\int_{E\cap C_h} \varphi\, d\lambda = \mu_{a,\lambda}(E \cap C_h) = \int_{E\cap C_h} \psi\, d\lambda\,,$$

quindi

$$\int_{E\cap C_h} (\varphi - \psi)\, d\lambda = 0\,.$$

Ne segue $\lambda(E \cap C_h) = 0$, quindi $\lambda(E) = 0$, ossia $\varphi(x) \leq \psi(x)$ per $\lambda-$q.o. $x \in X$. In maniera simile si prova che $\psi(x) \leq \varphi(x)$ per $\lambda-$q.o. $x \in X$. Pertanto $\psi = \varphi$ in $M(X, \lambda)$.

Infine, sia anzitutto $f : X \to [0, +\infty]$ $\mathfrak{M}-$misurabile. Si ha

$$\int \chi_E\, d\mu = \mu(E) = \int_E \varphi\, d\lambda + \mu_{s,\lambda}(E) = \int \chi_E\, \varphi\, d\lambda + \int \chi_E\, d\mu_{s,\lambda}$$

per ogni $E \in \mathfrak{M}$. Poiché $f$ è limite puntuale di una successione crescente di funzioni $\mathfrak{M}-$semplici, dal Teorema della convergenza monotona si deduce che

$$\int f\, d\mu = \int f\, \varphi\, d\lambda + \int f\, d\mu_{s,\lambda}\,.$$

Se ora $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mu-$integrabile, si ha

$$\int f^+\, d\mu = \int f^+\, \varphi\, d\lambda + \int f^+\, d\mu_{s,\lambda}\,,$$

$$\int f^-\, d\mu = \int f^-\, \varphi\, d\lambda + \int f^-\, d\mu_{s,\lambda}\,,$$

per cui $f\varphi$ è $\lambda-$integrabile, $f$ è $\mu_{s,\lambda}-$integrabile e

$$\int f\,d\mu = \int f\,\varphi\,d\lambda + \int f\,d\mu_{s,\lambda}\,.$$

Se invece $f : X \to \mathbb{C}$ è $\mu-$sommabile, si ha anzitutto

$$\int |f|\,d\mu = \int |f|\,\varphi\,d\lambda + \int |f|\,d\mu_{s,\lambda}\,,$$

per cui $f\varphi$ è $\lambda-$sommabile e $f$ è $\mu_{s,\lambda}-$sommabile. Ragionando su $(\mathrm{Re}\,f)^+$, $(\mathrm{Re}\,f)^-$, $(\mathrm{Im}\,f)^+$ ed $(\mathrm{Im}\,f)^-$, si ottiene la tesi. ■

**(6.6) Definizione** *Siano $(X,\mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e $\lambda,\mu$ due misure $\sigma-$finite su $\mathfrak{M}$. La coppia $(\mu_{a,\lambda},\mu_{s,\lambda})$, caratterizzata nel teorema precedente, si chiama* decomposizione di Lebesgue di $\mu$ rispetto a $\lambda$. *Inoltre $\mu_{a,\lambda}$ si chiama* parte assolutamente continua di $\mu$ rispetto a $\lambda$, *mentre $\mu_{s,\lambda}$ si chiama* parte singolare di $\mu$ rispetto a $\lambda$.

*Se $X$ è boreliano in $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}(X)$ e $\lambda = \mathcal{L}^n$, poniamo $\mu_a := \mu_{a,\mathcal{L}^n}$ e $\mu_s := \mu_{s,\mathcal{L}^n}$.*

*Infine la $\varphi \in M(X,\lambda)$, caratterizzata nel teorema precedente, si chiama* derivata di Radon-Nikodym di $\mu$ rispetto a $\lambda$ *e si denota con* $\dfrac{d\mu}{d\lambda}$.

**(6.7) Corollario** (Teorema di Radon-Nikodym) *Siano $(X,\mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e $\lambda,\mu$ due misure $\sigma-$finite su $\mathfrak{M}$ con $\mu \ll \lambda$.*

*Allora si ha*

$$\int f\,d\mu = \int f\,\frac{d\mu}{d\lambda}\,d\lambda$$

*per ogni $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mu-$integrabile ed ogni $f : X \to \mathbb{C}$ $\mu-$sommabile.*

*Dimostrazione.* La coppia $(\mu,0)$ verifica la $(a)$ del Teorema (6.4), per cui $\mu_{a,\lambda} = \mu$ e $\mu_{s,\lambda} = 0$. La tesi discende allora dal Teorema (6.4). ■

**(6.8) Teorema** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^n$. Per ogni $u \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$ definiamo una forma lineare $T_u : C^\infty_c(\Omega;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ponendo*

$$\forall f \in C^\infty_c(\Omega;\mathbb{C}) :\ \langle T_u, f\rangle := \int_\Omega f\,u\,d\mathcal{L}^n\,.$$

*Allora $T_u$ è una distribuzione di ordine zero su $\Omega$ e l'applicazione $\{u \mapsto T_u\}$ è lineare e iniettiva.*

*Dimostrazione.* Se $K$ è un compatto in $\Omega$, si ha

$$\left| \int_\Omega f\, u\, d\mathcal{L}^n \right| \leq \int_\Omega |f|\, |u|\, d\mathcal{L}^n \leq \left( \int_K |u|\, d\mathcal{L}^n \right) \|f\|_\infty$$

per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ nulla fuori da $K$. Pertanto $T_u$ è una distribuzione di ordine zero su $\Omega$.

Evidentemente l'applicazione $\{u \mapsto T_u\}$ è lineare. Se $T_u = 0$, risulta

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \int_\Omega f\, u\, d\mathcal{L}^n = 0\,,$$

da cui $u = 0$ in $L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$. Pertanto l'applicazione $\{u \mapsto T_u\}$ è iniettiva. ■

**(6.9) Teorema** *Sia $T$ una distribuzione di ordine zero su un aperto $\Omega$ di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $\nu \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ come nel Teorema (5.11).*

*Allora sono fatti equivalenti:*

(*a*) *si ha $T = T_u$ con $u \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$;*

(*b*) *si ha $\mu \ll \mathcal{L}^n$.*

*Dimostrazione.*

(*a*) $\Longrightarrow$ (*b*) Scelto un rappresentante per $u$, che denotiamo ancora con $u$, definiamo una funzione boreliana $\hat{\nu} : \Omega \to \mathbb{C}$ ponendo

$$\hat{\nu}(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x)}{|u(x)|} & \text{se } u(x) \neq 0\,, \\ 1 & \text{se } u(x) = 0\,, \end{cases}$$

e $\hat{\mu} \in \mathcal{M}(\Omega)$ ponendo

$$\forall E \in \mathfrak{B}(\Omega) : \ \hat{\mu}(E) = \int_E |u|\, d\mathcal{L}^n\,.$$

Allora risulta $|\hat{\nu}(x)| = 1$ per ogni $x \in \Omega$ e $\hat{\mu} \ll \mathcal{L}^n$ con $\dfrac{d\hat{\mu}}{d\mathcal{L}^n} = |u|$. Ne segue

$$\int_\Omega g\, |u|\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega g\, d\hat{\mu} \qquad \text{per ogni } g : \Omega \to \mathbb{C}\ \hat{\mu}\text{-sommabile}\,,$$

in particolare

$$\langle T, f\rangle = \int_\Omega f\, u\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f\, \hat{\nu}\, |u|\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f\, \hat{\nu}\, d\hat{\mu} \qquad \text{per ogni } f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,.$$

Risulta quindi $\hat{\mu} = \mu$ e $\hat{\nu} = \nu$ $\mu$-q.o. in $\Omega$, da cui $\mu \ll \mathcal{L}^n$.

$(b) \implies (a)$ Per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ si ha

$$\langle T, f\rangle = \int_\Omega f\, \nu\, d\mu = \int_\Omega f\, \nu\, \frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f\, u\, d\mathcal{L}^n\,,$$

avendo posto $u = \nu\, \dfrac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}$. Per ogni compatto $K$ in $\Omega$ risulta

$$\int_K |u|\, d\mathcal{L}^n = \int_K \frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}\, d\mathcal{L}^n = \mu(K) < +\infty\,,$$

per cui $u \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$. ■

**(6.10) Teorema** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^n$. Allora, per ogni $u \in L^1(\Omega;\mathbb{C})$, risulta $T_u \in (C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \|\ \|_\infty)'$ e l'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} L^1(\Omega;\mathbb{C}) & \longrightarrow & (C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}))' \\ u & \mapsto & T_u \end{array}$$

*è un'isometria lineare.*

*Dimostrazione.* Sia $u \in L^1(\Omega;\mathbb{C})$. Se $f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ e $\|f\|_\infty \leq 1$, si ha

$$|\langle T_u, f\rangle| = \left|\int_\Omega f\, u\, d\mathcal{L}^n\right| \leq \int_\Omega |f|\, |u|\, d\mathcal{L}^n \leq \|u\|_1\, \|f\|_\infty \leq \|u\|_1\,.$$

Risulta quindi $T_u \in (C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \|\ \|_\infty)'$ e $\|T_u\| \leq \|u\|_1$. Viceversa, sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\overline{u(x)}}{|u(x)|} & \text{se } u(x) \neq 0, \\ 0 & \text{se } u(x) = 0 \end{cases}$$

e sia $(f_h)$ una successione in $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ tale che

$$\|f_h\|_\infty \leq 1\,, \qquad \lim_h f_h(x) = f(x) \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega.$$

Si ha

$$\left|\int_\Omega f_h\, u\, d\mathcal{L}^n\right| = |\langle T_u, f_h\rangle| \leq \|T_u\|\, \|f_h\|_\infty \leq \|T_u\|\,.$$

Passando al limite per $h \to \infty$ ed applicando il Teorema della convergenza dominata, si ottiene

$$\|u\|_1 = \int_\Omega |u|\, d\mathcal{L}^n \le \|T_u\|\,,$$

da cui la disuguaglianza opposta. ■

**(6.11) Teorema** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $(u_h)$ una successione limitata in $L^1(\Omega;\mathbb{C})$. Allora esistono $u \in L^1(\Omega;\mathbb{C})$, $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, $\nu \in L^\infty(\Omega,\mu;\mathbb{C})$ ed una sottosuccessione $(u_{h_k})$ tali che $\mu \perp \mathcal{L}^n$, $|\nu(x)| = 1$ per $\mu-$q.o. $x \in \Omega$ e*

$$\forall f \in C_c(\Omega;\mathbb{C}) : \lim_k \int_\Omega f\, u_{h_k}\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f\, u\, d\mathcal{L}^n + \int_\Omega f\, \nu\, d\mu\,,$$

$$\|u\|_1 + \mu(\Omega) \le \liminf_h \|u_h\|_1\,.$$

*Dimostrazione.* Per il Teorema (5.13), esistono $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega)$, $\nu \in L^\infty(\Omega,\lambda;\mathbb{C})$ e una sottosuccessione $(u_{h_k})$ tali che

$$|\nu(x)| = 1 \qquad \textit{per } \lambda-q.o.\ x \in \Omega,$$

$$\forall f \in C_c(\Omega;\mathbb{C}) : \lim_k \int_\Omega f u_{h_k}\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f\nu\, d\lambda\,,$$

$$\lambda(\Omega) = \int_\Omega |\nu|\, d\lambda \le \liminf_h \int_\Omega |u_h|\, d\mathcal{L}^n\,.$$

Scegliendo opportunamente un rappresentante di $\nu$, possiamo supporre $|\nu(x)| = 1$ per ogni $x \in \Omega$. Poniamo $u = \dfrac{d\lambda}{d\mathcal{L}^n}\nu$ e $\mu = \lambda_s$. Allora, tenuto conto del Teorema (6.4), risulta

$$\|u\|_1 + \mu(\Omega) = \int_\Omega \frac{d\lambda}{d\mathcal{L}^n}\, d\mathcal{L}^n + \lambda_s(\Omega) = \lambda(\Omega) \le \liminf_h \|u_h\|_1\,,$$

$$\forall f \in C_c(\Omega;\mathbb{C}) : \int_\Omega f\, u\, d\mathcal{L}^n + \int_\Omega f\, \nu\, d\mu = \int_\Omega f\, \nu\, d\lambda = \lim_k \int_\Omega f\, u_{h_k}\, d\mathcal{L}^n\,,$$

da cui la tesi. ■

# 7 Punti di Lebesgue

Nel corso di questa sezione, $\Omega$ denoterà un aperto di $\mathbb{R}^n$.

**(7.1) Definizione** *Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$ e sia $x \in \Omega$. Diciamo che $x$ è* un punto di Lebesgue *per $f$, se esiste $\ell \in \mathbb{C}$ tale che*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} |f(\xi) - \ell|\, d\mathcal{L}^n(\xi) = 0\,. \tag{7.2}$$

*L'insieme dei punti $x \in \Omega$ di Lebesgue per $f$ si chiama* insieme di Lebesgue *di $f$.*

Osserviamo che si ha

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} f(\xi)\, d\mathcal{L}^n(\xi)\right) - \ell\right| &= \\ = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} &\left|\int_{\mathrm{B}(x,r)} (f(\xi) - \ell)\, d\mathcal{L}^n(\xi)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} |f(\xi) - \ell|\, d\mathcal{L}^n(\xi)\,.\end{aligned}$$

Pertanto la (7.2) implica

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} f(\xi)\, d\mathcal{L}^n(\xi) = \ell\,.$$

In particolare, se $x$ è un punto di Lebesgue per $f$, il numero complesso $\ell$ che compare nella (7.2) è univocamente determinato. Da ora in poi verrà denotato col simbolo $\tilde{f}(x)$. Osserviamo anche che, se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $x$ è un punto di Lebesgue per $f$, si ha $\tilde{f}(x) \in \mathbb{R}$.

**(7.3) Proposizione** *Sia $f \in C(\Omega;\mathbb{C})$. Allora ogni punto $x \in \Omega$ è di Lebesgue per $f$ e si ha $\tilde{f}(x) = f(x)$.*

*Dimostrazione.* Dati $x \in \Omega$ ed $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$ ogniqualvolta $\xi \in \mathrm{B}\,(x,\delta)$. Allora, se $r \in ]0,\delta[$, risulta

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} |f(\xi) - f(x)|\, d\mathcal{L}^n(\xi) < \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} \varepsilon\, d\mathcal{L}^n(\xi) = \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

**(7.4) Lemma** *Sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Allora la funzione $\overline{D}\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ definita da*

$$\overline{D}\mu(x) = \inf_{h\in\mathbb{N}} \left( \sup \left\{ \frac{\mu(\mathrm{B}(\xi, r))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}(\xi, r))} : x \in \mathrm{B}(\xi, r) \subseteq \Omega,\, 0 < r < 2^{-h} \right\} \right)$$

*è boreliana.*

*Dimostrazione.* Sia

$$\delta_h(x) = \sup \left\{ \frac{\mu(\mathrm{B}(\xi, r))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}(\xi, r))} : x \in \mathrm{B}(\xi, r) \subseteq \Omega,\, 0 < r < 2^{-h} \right\} .$$

Se $c \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ e $\delta_h(x) > c$, esiste $\mathrm{B}(\xi, r) \subseteq \Omega$ con $x \in \mathrm{B}(\xi, r)$, $0 < r < 2^{-h}$ e

$$\frac{\mu(\mathrm{B}(\xi, r))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}(\xi, r))} > c\,.$$

Ne segue $\delta_h(y) > c$ per ogni $y \in \mathrm{B}(\xi, r)$, per cui $\delta_h^{-1}(]c, +\infty])$ è aperto, quindi boreliano.

Pertanto $\delta_h$ è boreliana e quindi anche $\overline{D}\mu$ è boreliana. ■

**(7.5) Lemma** *Sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e sia $A \in \mathfrak{B}(\Omega)$ tale che $\mu(A) = 0$.*

*Allora si ha*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu(\mathrm{B}(x, r))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}(x, r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in A.$$

*Dimostrazione.* Poiché

$$\forall x \in \Omega : \limsup_{r\to 0^+} \frac{\mu(\mathrm{B}(x, r))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}(x, r))} \leq \overline{D}\mu(x)\,,$$

è sufficiente dimostrare che $\overline{D}\mu(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n$−q.o. $x \in A$.

Procediamo per assurdo, supponendo che $\{x \in A : \overline{D}\mu(x) > 0\}$, che è boreliano per il lemma precedente, non sia $\mathcal{L}^n$−trascurabile. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\{x \in A : \overline{D}\mu(x) > \varepsilon\}$$

non sia $\mathcal{L}^n$−trascurabile. Sia $K$ un compatto contenuto in $\{x \in A : \overline{D}\mu(x) > \varepsilon\}$ con $\mathcal{L}^n(K) > 0$.

Posto $K_h = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq 2^{-h}\}$, risulta che $(K_h)$ è una successione decrescente di compatti con $K = \bigcap_{h=1}^{\infty} K_h$. Ne segue

$$\lim_h \mu(K_h) = \mu(K) = 0\,.$$

Sia $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(K_h) < \varepsilon \mathcal{L}^n(K) 3^{-n} .$$

Per ogni $x \in K$ esistono $\xi = \xi(x) \in \Omega$ e $r = r(x) \in ]0, 2^{-h-1}[$ tali che $x \in \mathrm{B}\,(\xi, r) \subseteq \Omega$ e

$$\frac{\mu(\mathrm{B}\,(\xi, r))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(\xi, r))} > \varepsilon .$$

Per la compattezza di $K$, sarà

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{B}\,(\xi_i, r_i) .$$

A meno di un riordinamento, si può supporre che $r_1 \geq \cdots \geq r_m$. Facciamo una selezione delle $\mathrm{B}\,(\xi_i, r_i)$ nel seguente modo: poniamo $(\xi_{i_1}, r_{i_1}) = (\xi_1, r_1)$ e chiamiamo $i_2$ il minimo $j$ tale che $\mathrm{B}\,(\xi_{i_1}, r_{i_1}) \cap \mathrm{B}\,(\xi_j, r_j) = \emptyset$ (se un tale $j$ non esiste, la selezione è già finita). Successivamente chiamiamo $i_3$ il minimo $j$ tale che

$$(\mathrm{B}\,(\xi_{i_1}, r_{i_1}) \cup \mathrm{B}\,(\xi_{i_2}, r_{i_2})) \cap \mathrm{B}\,(\xi_j, r_j) = \emptyset$$

e così via. Otteniamo una famiglia disgiunta

$$\{\mathrm{B}\,(\xi_{i_s}, r_{i_s}) : \, 1 \leq s \leq k\}$$

tale che, se $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$, si abbia $\mathrm{B}\,(\xi_{i_s}, r_{i_s}) \cap \mathrm{B}\,(\xi_j, r_j) \neq \emptyset$ per qualche $i_s < j$, quindi con $r_{i_s} \geq r_j$. Ne segue che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{B}\,(\xi_i, r_i) \subseteq \bigcup_{s=1}^{k} \mathrm{B}\,(\xi_{i_s}, 3r_{i_s}) .$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}
\varepsilon \mathcal{L}^n(K) &\leq \sum_{s=1}^{k} \varepsilon \mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(\xi_{i_s}, 3r_{i_s})) = 3^n \sum_{s=1}^{k} \varepsilon \mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(\xi_{i_s}, r_{i_s})) < \\
&< 3^n \sum_{s=1}^{k} \mu(\mathrm{B}\,(\xi_{i_s}, r_{i_s})) = 3^n \, \mu\left(\bigcup_{s=1}^{k} \mathrm{B}\,(\xi_{i_s}, r_{i_s})\right) \leq \\
&\leq 3^n \, \mu(K_h) < 3^n \varepsilon \mathcal{L}^n(K) 3^{-n} = \varepsilon \mathcal{L}^n(K) ,
\end{aligned}$$

da cui l'assurdo. ■

Possiamo ora dimostrare il principale risultato di questa sezione.

**(7.6) Teorema** *Sia* $f \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$. *Allora si ha*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} |f(\xi) - f(x)|\, d\mathcal{L}^n(\xi) = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega,$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} f(\xi)\, d\mathcal{L}^n(\xi) = f(x) \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega.$$

*In particolare, il complementare in* $\Omega$ *dell'insieme di Lebesgue di* $f$ *è* $\mathcal{L}^n$*−trascurabile e si ha* $\tilde{f}(x) = f(x)$ *per* $\mathcal{L}^n$*−q.o.* $x \in \Omega$.

*Dimostrazione.* Trattiamo anzitutto il caso in cui $f$ è a valori reali.

È sufficiente provare che

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} |f(\xi) - f(x)|\, d\mathcal{L}^n(\xi) = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega.$$

Per questo scegliamo un rappresentante boreliano di $f$, che denotiamo ancora con $f$, e dimostriamo anzitutto che

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} (f(\xi) - f(x))^+\, d\mathcal{L}^n(\xi) = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega.$$

Per ogni $q \in \mathbb{Q}$ definiamo $\mu_q : \mathfrak{B}\,(\Omega) \to [0, +\infty]$ ponendo

$$\mu_q(E) = \int_E (f(\xi) - q)^+\, d\mathcal{L}^n(\xi)\,.$$

Si verifica facilmente che $\mu_q \in \mathcal{M}\,(\Omega)$ e, posto $A_q = \{x \in \Omega :\ f(x) \leq q\}$, si ha $\mu_q(A_q) = 0$. Per il lemma precedente, esiste un sottoinsieme $\mathcal{L}^n$−trascurabile $E_q$ di $A_q$ tale che

$$\forall x \in A_q \setminus E_q :\ \lim_{r\to 0^+} \left( \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} (f(\xi) - q)^+\, d\mathcal{L}^n(\xi) \right) = 0\,.$$

Sia $E = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_q$. Evidentemente $E$ è $\mathcal{L}^n$−trascurabile. Per ogni $x \in \Omega \setminus E$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) < q < f(x) + \varepsilon$. Allora $x \in A_q \setminus E_q$ e si ha

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} (f(\xi) - f(x))^+\, d\mathcal{L}^n(\xi) =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} (f(\xi) - q + q - f(x))^+\, d\mathcal{L}^n(\xi) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} (f(\xi) - q)^+\, d\mathcal{L}^n(\xi) + \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} (q - f(x))^+\, d\mathcal{L}^n(\xi) <$$

$$< \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} (f(\xi)-q)^+ \, d\mathcal{L}^n(\xi) + \varepsilon \,.$$

Pertanto per ogni $x \in \Omega \setminus E$ e per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} (f(\xi)-f(x))^+ \, d\mathcal{L}^n(\xi) \leq \varepsilon \,.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, si deduce che

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} (f(\xi)-f(x))^+ \, d\mathcal{L}^n(\xi) = 0 \,.$$

In maniera simile si dimostra che

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} (f(\xi)-f(x))^- \, d\mathcal{L}^n(\xi) = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega,$$

da cui la tesi.

Se $f$ è a valori complessi, è sufficiente applicare il ragionamento precedente alle funzioni $\mathrm{Re}\, f$ ed $\mathrm{Im}\, f$ ed osservare che

$$|f(\xi) - f(x)| \leq |\mathrm{Re}\, f(\xi) - \mathrm{Re}\, f(x)| + |\mathrm{Im}\, f(\xi) - \mathrm{Im}\, f(x)| \,.$$

La dimostrazione è quindi completa. ■

**(7.7) Corollario** *Sia $E$ un sottoinsieme $\mathcal{L}^n$−misurabile di $\mathbb{R}^n$. Allora si ha*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in E,$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \mathbb{R}^n \setminus E.$$

*Dimostrazione.* Si applichi il teorema precedente alle funzioni caratteristiche di $\mathbb{R}^n \setminus E$ e di $E$. ■

**(7.8) Corollario** *Siano $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ e $(\varrho_h)$ una successione regolarizzante in $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$.*

*Allora si ha*

$$\lim_h \mathcal{R}_h f(x) = \tilde{f}(x)$$

*in tutti i punti $x \in \mathbb{R}^n$ di Lebesgue per $f$.*

*In particolare, si ha*

$$\lim_h \mathcal{R}_h f(x) = f(x) \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

*Dimostrazione.* Sia $x \in \mathbb{R}^n$ un punto di Lebesgue per $f$ e sia $c \in \mathbb{R}$ tale che $\varrho_h(x) \leq ch^n$. Risulta

$$\begin{aligned}\left|\left(\int f(y)\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right) - \tilde{f}(x)\right| &= \left|\int \left(f(y) - \tilde{f}(x)\right)\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right| \leq \\ &\leq \int_{\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{h}\right)} \left|f(y) - \tilde{f}(x)\right| \varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y) \leq \\ &\leq c\,h^n \int_{\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{h}\right)} \left|f(y) - \tilde{f}(x)\right| d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= \frac{c\,\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,1))}{\mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{h}\right)\right)} \int_{\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{h}\right)} \left|f(y) - \tilde{f}(x)\right| d\mathcal{L}^n(y)\,,\end{aligned}$$

da cui la tesi. ∎

**(7.9) Corollario** *Sia $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Allora $\mathcal{R}_h f \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \cap C_b(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, $\|\mathcal{R}_h f\|_\infty \leq \|f\|_{L^\infty}$ e si ha*

$$\lim_h \mathcal{R}_h f(x) = f(x) \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

*Dimostrazione.* Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ risulta

$$|\mathcal{R}_h f(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{B}(x,1/h)} |f| \leq \|f\|_{L^\infty}\,,$$

si ha $\mathcal{R}_h f \in C_b(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ e $\|\mathcal{R}_h f\|_\infty \leq \|f\|_{L^\infty}$.

La convergenza $\mathcal{L}^n$−q.o. discende dal Corollario (7.8). ∎

Proviamo ora una versione del Teorema fondamentale del calcolo integrale adattata all'integrale di Lebesgue.

**(7.10) Corollario** *Data $f \in L^1(]a,b[)$, definiamo $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ponendo*

$$F(x) = \int_a^x f\,d\mathcal{L}^1\,.$$

*Allora, se $x \in ]a,b[$ è un punto di Lebesgue per $f$, si ha che $F$ è derivabile in $x$ e $F'(x) = \tilde{f}(x)$. In particolare, $F$ è derivabile $\mathcal{L}^1-$q.o. in $]a,b[$ e $F'(x) = f(x)$ per $\mathcal{L}^1-$q.o. $x \in ]a,b[$.*

*Dimostrazione.* Sia $x \in ]a,b[$ un punto di Lebesgue di $f$. Dato $r > 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+r)-F(x)}{r} - \tilde{f}(x)\right| &= \left|\frac{1}{r}\int_x^{x+r} f(t)\,d\mathcal{L}^1(t) - \tilde{f}(x)\right| = \\
&= \frac{1}{r}\left|\int_x^{x+r} (f(t)-\tilde{f}(x))\,d\mathcal{L}^1(t)\right| \leq \\
&\leq \frac{1}{r}\int_x^{x+r} |f(t)-\tilde{f}(x)|\,d\mathcal{L}^1(t) \leq \\
&\leq 2\,\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(t)-\tilde{f}(x)|\,d\mathcal{L}^1(t)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{F(x+r)-F(x)}{r} = \tilde{f}(x)\,.$$

In maniera simile si può trattare la derivabilità da sinistra, da cui la tesi. ■

**(7.11) Teorema** *Sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Allora valgono i seguenti fatti:*

*(a) si ha*

$$\frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n} \in L^1_{loc}(\Omega)\,;$$

*(b) risulta*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu_s(\mathrm{B}\,(x,r))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} = 0 \tag{7.12}$$

*per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$;*

*(c) se $x \in \Omega$ è un punto di Lebesgue di $\dfrac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}$ in cui vale la (7.12), si ha*

$$\lim_h \frac{\mu(E_h)}{\mathcal{L}^n(E_h)} = \widetilde{\frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}}(x)$$

*ogniqualvolta $(E_h)$ è una successione in $\mathfrak{B}\,(\Omega)$ verificante $\mathcal{L}^n(E_h) > 0$,*

$$\lim_h d(x,E_h) = 0\,, \qquad \lim_h \mathrm{diam}\,(E_h) = 0\,,$$

$$\limsup_h \frac{(d(x,E_h) + \mathrm{diam}\,(E_h))^n}{\mathcal{L}^n(E_h)} < +\infty\,.$$

*Dimostrazione.* Poniamo $\varphi = \dfrac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}$. Se $K$ è un compatto in $\Omega$, si ha

$$\int_K \varphi\, d\mathcal{L}^n = \mu_a(K) \leq \mu(K) < +\infty\,,$$

per cui $\varphi \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Sia ora $S \in \mathfrak{B}(\Omega)$ tale che $\mathcal{L}^n(S) = 0$ e $\mu_s(\Omega \setminus S) = 0$. Per il Lemma (7.5) si ha

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu_s(\mathrm{B}\,(x,r))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} = 0 \qquad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega \setminus S,$$

quindi

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu_s(\mathrm{B}\,(x,r))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} = 0 \qquad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega.$$

Consideriamo infine una successione $(E_h)$ conforme alla $(c)$. Posto

$$d_h = d(x, E_h) + \mathrm{diam}\,(E_h)\ ,$$

risulta $E_h \subseteq \mathrm{B}\,(x, 2d_h)$, quindi

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mu(E_h)}{\mathcal{L}^n(E_h)} - \tilde{\varphi}(x)\right| &\leq \left|\frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)} \int_{E_h} \varphi(\xi)\, d\mathcal{L}^n(\xi) - \tilde{\varphi}(x)\right| + \frac{\mu_s(E_h)}{\mathcal{L}^n(E_h)} \leq \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)} \int_{E_h} |\varphi(\xi) - \tilde{\varphi}(x)|\, d\mathcal{L}^n(\xi) + \frac{\mu_s(E_h)}{\mathcal{L}^n(E_h)} \leq \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)} \left(\int_{\mathrm{B}(x,2d_h)} |\varphi(\xi) - \tilde{\varphi}(x)|\, d\mathcal{L}^n(\xi) + \mu_s(\mathrm{B}\,(x, 2d_h))\right) = \\
&= 2^n \mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,1)) \frac{d_h^n}{\mathcal{L}^n(E_h)} \left(\frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,2d_h))}\right. \\
&\qquad \left.\int_{\mathrm{B}(x,2d_h)} |\varphi(\xi) - \tilde{\varphi}(x)|\, d\mathcal{L}^n(\xi) + \frac{\mu_s(\mathrm{B}\,(x,2d_h))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,2d_h))}\right).
\end{aligned}$$

Passando al limite per $h \to \infty$, si ottiene la $(c)$. ■

## Esercizi

**1.** Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$. Si dimostri che l'insieme dei punti di Lebesgue per $f$ è boreliano e che la funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ definita da

$$\varphi(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{se } x \text{ è un punto di Lebesgue per } f, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è boreliana.

(Suggerimento: si adatti la dimostrazione del Teorema (8.15)).

**2.** Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$ e sia $x$ un punto di Lebesgue per $f$. Si dimostri che per ogni successione $(E_h)$ in $\mathfrak{B}(\Omega)$ soddisfacente $\mathcal{L}^n(E_h) > 0$,

$$\lim_h d(x, E_h) = 0\,, \qquad \lim_h \operatorname{diam}(E_h) = 0\,,$$

$$\limsup_h \frac{(d(x,E_h) + \operatorname{diam}(E_h))^n}{\mathcal{L}^n(E_h)} < +\infty\,,$$

si ha

$$\lim_h \frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)} \int_{E_h} |f(\xi) - \tilde{f}(x)|\, d\mathcal{L}^n(\xi) = 0$$

e quindi

$$\lim_h \frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)} \int_{E_h} f(\xi)\, d\mathcal{L}^n(\xi) = \tilde{f}(x)\,.$$

# 8 Limiti approssimati

**(8.1) Definizione** *Siano $x \in \mathbb{R}^n$ ed $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che $x$ è* approssimativamente interno *ad $E$, se*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}(x,r)\setminus E)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}(x,r))} = 0\,.$$

*Denotiamo con $E_*$ l'insieme dei punti approssimativamente interni ad $E$.*

Evidentemente si ha $\operatorname{int}(E) \subseteq E_*$. Non è invece vero, in generale, che $E_* \subseteq E$. Infine, se $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$, risulta $E_* \subseteq F_*$.

**(8.2) Teorema** *Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme $E_*$ è boreliano, mentre l'insieme $E_* \setminus E$ è $\mathcal{L}^n-$trascurabile.*

*Dimostrazione.* Per ogni $r > 0$ e $\xi, x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|\mathcal{L}^n(\mathrm{B}(\xi,r)\setminus E) - \mathcal{L}^n(\mathrm{B}(x,r)\setminus E)| \leq \mathcal{L}^n(\mathrm{B}(\xi,r)\setminus \mathrm{B}(x,r)) + \mathcal{L}^n(\mathrm{B}(x,r)\setminus \mathrm{B}(\xi,r))\,.$$

Ne segue che la funzione

$$\{x \longmapsto \mathcal{L}^n(\mathrm{B}(x,r)\setminus E)\}$$

è continua. Pertanto, per ogni $\varepsilon, r > 0$, l'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \varepsilon\right\}$$

è chiuso in $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni $\varepsilon, \delta > 0$ anche l'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{0<r\leq\delta} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \varepsilon\right\} = \bigcap_{0<r\leq\delta} \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \varepsilon\right\}$$

è chiuso in $\mathbb{R}^n$. Ne segue che

$$E_* = \bigcap_{\substack{\varepsilon>0 \\ \varepsilon\in\mathbb{Q}}} \bigcup_{\substack{\delta>0 \\ \delta\in\mathbb{Q}}} \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{0<r\leq\delta} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \varepsilon\right\}$$

è boreliano.

Sia ora $E_h = E \cup (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{B}\,(0, h+1))$. Si verifica facilmente che

$$E_* \setminus E = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \left((E_h)_* \setminus E_h\right) .$$

È quindi sufficiente dimostrare che $(E_h)_* \setminus E_h$ è $\mathcal{L}^n-$trascurabile per ogni $h \in \mathbb{N}$. Possiamo pertanto limitarci al caso in cui $\mathbb{R}^n \setminus E$ è limitato. Sia $G \in \mathfrak{B}\,(\mathbb{R}^n)$ tale che $\mathbb{R}^n \setminus E \subseteq G$ e $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) = \mathcal{L}^n(G)$. Posto $F = \mathbb{R}^n \setminus G$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$ risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus E) + \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus (E \cup \mathrm{B}\,(x,r))) &= \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) = \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus F) = \\ &= \mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus F) + \\ &\quad +\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus (F \cup \mathrm{B}\,(x,r))) . \end{aligned}$$

Poiché $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) < +\infty$, deve essere

$$\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus E) = \mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus F) .$$

Ne segue $E_* = F_*$.

D'altronde dal Corollario (7.7) segue che

$$\lim_{r\to0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \cap F)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} = 0 \qquad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \mathbb{R}^n \setminus F.$$

Risulta quindi $\mathcal{L}^n\left(F_* \setminus F\right) = 0$, da cui, a maggior ragione, $\mathcal{L}^n\left(E_* \setminus E\right) = 0$. ■

**(8.3) Definizione** *Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ poniamo*

$$\partial_* E := \mathbb{R}^n \setminus \left(E_* \cup (\mathbb{R}^n \setminus E)_*\right) .$$

Evidentemente $\partial_* E$ è un boreliano con $\partial_* E \subseteq \partial E$.

**(8.4) Corollario** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora sono fatti equivalenti:*

$(a)$ *$E$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile;*

$(b)$ *$\partial_* E$ è $\mathcal{L}^n-$trascurabile;*

$(c)$ *$(E \setminus E_*)$ è $\mathcal{L}^n-$trascurabile;*

$(d)$ *$(E \setminus E_*)$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile.*

*Dimostrazione.*
$(a) \implies (b)$ Dal Corollario (7.7) segue che $(E \setminus E_*)$ e $\left((\mathbb{R}^n \setminus E) \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)_*\right)$ sono entrambi $\mathcal{L}^n-$trascurabili. È allora sufficiente osservare che

$$\partial_* E \subseteq (E \setminus E_*) \cup \left((\mathbb{R}^n \setminus E) \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)_*\right) .$$

$(b) \implies (c)$ Risulta

$$E \setminus E_* \subseteq \partial_* E \cup \left((\mathbb{R}^n \setminus E)_* \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)\right) .$$

La tesi discende allora dal Teorema (8.2).
$(c) \implies (d)$ Ovvio.
$(d) \implies (a)$ Poiché

$$E = (E_* \cup (E \setminus E_*)) \setminus (E_* \setminus E) ,$$

la $(a)$ discende dal Teorema (8.2). ■

**(8.5) Definizione** *Siano $Y$ uno spazio metrico, $f \in Y^{\mathbb{R}^n}/\mathcal{L}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\ell \in Y$. Diciamo che $\ell$ è* limite approssimato *di $f$ in $x$, se per ogni intorno $V$ di $\ell$ in $Y$ si ha che $x$ è approssimativamente interno a $f^{-1}(V)$.*

Si verifica facilmente che tale nozione è effettivamente indipendente dalla scelta del rappresentante $f$.

Evidentemente, se $\ell$ è limite di $f$ in $x$, allora $\ell$ è anche limite approssimato di $f$ in $x$.

**(8.6) Proposizione (Unicità del limite approssimato)** *Siano $Y$ uno spazio metrico, $f \in Y^{\mathbb{R}^n}/\mathcal{L}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\ell, \ell' \in Y$. Supponiamo che $\ell$ e $\ell'$ siano entrambi limiti approssimati di $f$ in $x$.*

*Allora si ha $\ell = \ell'$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo, per assurdo, che si abbia $\ell \neq \ell'$. Siano $V$ e $V'$ due intorni rispettivamente di $\ell$ e $\ell'$ con $V \cap V' = \emptyset$. Poiché $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V') = \emptyset$, si ha

$$\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r)) \leq \mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus f^{-1}(V)) + \mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus f^{-1}(V'))\,,$$

quindi

$$1 = \lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq 0\,,$$

il che è assurdo. ■

Se $f$ ammette limite approssimato $\ell$ in $x$, poniamo

$$\operatorname*{ap\,lim}_{\xi \to x} f(\xi) := \ell\,.$$

**(8.7) Definizione** *Siano $Y$ uno spazio metrico, $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione e $x \in \mathbb{R}^n$. Diciamo che $f$ è* approssimativamente continua *in $x$, se*

$$\operatorname*{ap\,lim}_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)\,.$$

**(8.8) Teorema** *Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ e sia $x \in \mathbb{R}^n$ un punto di Lebesgue di $f$.*

*Allora*

$$\operatorname*{ap\,lim}_{\xi \to x} f(\xi) = \tilde{f}(x)\,.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} |f(\xi) - \tilde{f}(x)|\, d\mathcal{L}^n(\xi) \geq$$

$$\geq \varepsilon \, \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))}\, \mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) :\, |f(\xi) - \tilde{f}(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) =$$

$$= \varepsilon \, \frac{\mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus f^{-1}\left(\mathrm{B}\left(\tilde{f}(x),\varepsilon\right)\right)\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \,.$$

Ne segue

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus f^{-1}\left(\mathrm{B}\left(\tilde{f}(x),\varepsilon\right)\right)\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} = 0\,,$$

per cui $x$ è approssimativamente interno a $f^{-1}\left(\mathrm{B}\left(\tilde{f}(x),\varepsilon\right)\right)$.

Tenendo conto che ogni intorno di $\tilde{f}(x)$ contiene un disco del tipo $\mathrm{B}\left(\tilde{f}(x),\varepsilon\right)$, si ottiene la tesi. ∎

**(8.9) Teorema** *Sia $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ e sia $x \in \mathbb{R}^n$ un punto in cui $f$ ammette limite approssimato.*

*Allora $x$ è di Lebesgue per $f$ e*

$$\tilde{f}(x) = \operatorname*{ap\,lim}_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$

*Dimostrazione.* Sia $\ell = \operatorname*{ap\,lim}_{\xi\to x} f(\xi)$ e sia $r_0 > 0$ tale che $\overline{\mathrm{B}\,(x,r_0)} \subseteq \Omega$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $r \in ]0,r_0]$ si ha

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} |f(\xi)-\ell|\, d\mathcal{L}^n(\xi) =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\{\xi\in\mathrm{B}(x,r):\,|f(\xi)-\ell|<\varepsilon\}} |f(\xi)-\ell|\, d\mathcal{L}^n(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\{\xi\in\mathrm{B}(x,r):\,|f(\xi)-\ell|\geq\varepsilon\}} |f(\xi)-\ell|\, d\mathcal{L}^n(\xi) \leq$$

$$\leq \varepsilon + \left(\operatorname*{ess\,sup}_{\overline{\mathrm{B}(x,r_0)}} |f| + |\ell|\right) \frac{\mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus f^{-1}(\mathrm{B}\,(\ell,\varepsilon))\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \,.$$

Ne segue

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} |f(\xi)-\ell|\, d\mathcal{L}^n(\xi) \leq \varepsilon\,,$$

da cui la tesi, per l'arbitrarietà di $\varepsilon$. ∎

**(8.10) Esempio** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{per } \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3} < x < \dfrac{1}{n},\ n \geq 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

*Allora $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha*

$$\operatorname*{ap\,lim}_{\xi \to 0} f(\xi) = 0\,,$$

*anche se* 0 *non è un punto di Lebesgue per $f$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $\varepsilon \in ]0,2]$ e $r \in ]0,1/2[$ si ha

$$\mathcal{L}^1 \left( ]-r,r[ \setminus f^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[) \right) \leq \sum_{n=k_r}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_{k_r}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^3}\,,$$

dove $\frac{1}{k_r+1} < r \leq \frac{1}{k_r}$. Ne segue

$$\mathcal{L}^1 \left( ]-r,r[ \setminus f^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[) \right) \leq \frac{1}{2(k_r-1)^2} \leq \frac{r^2}{2(1-2r)^2}\,,$$

per cui $\operatorname*{ap\,lim}_{\xi \to 0} f(\xi) = 0$.

Si verifica facilmente che $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se 0 fosse un punto di Lebesgue per $f$, sarebbe necessariamente $\tilde{f}(0) = 0$. Ma risulta

$$\int_{-r}^{r} |f|\, d\mathcal{L}^1 \geq \sum_{n=k_r}^{\infty} \frac{1}{n^2} \geq \int_{k_r}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\,,$$

dove $\frac{1}{k_r} \leq r < \frac{1}{k_r-1}$. Ne segue

$$\int_{-r}^{r} |f|\, d\mathcal{L}^1 \geq \frac{1}{k_r} \geq \frac{r}{r+1}\,,$$

per cui 0 non può essere un punto di Lebesgue. ■

**(8.11) Teorema** *Sia $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}/\mathcal{L}^n$. Allora $f$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile se e solo se $f$ è approssimativamente continua in $\mathcal{L}^n-$quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $f$ sia $\mathcal{L}^n-$misurabile. Per il Teorema di Lusin, per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste una funzione continua $g_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus C_h) < 1/(h+1)$, dove

$$C_h = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) = g_h(x)\}\ .$$

Evidentemente $C_h$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile. Esiste quindi $S_h \subseteq C_h$ con $\mathcal{L}^n(S_h) = 0$ e

$$\forall x \in C_h \setminus S_h : \lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus C_h)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} = 0\,.$$

Allora il complementare di $\bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h \setminus \bigcup_{h\in\mathbb{N}} S_h$ è $\mathcal{L}^n-$trascurabile. Sia $x \in \bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h \setminus \bigcup_{h\in\mathbb{N}} S_h$ e sia $V$ un intorno di $f(x)$ in $\mathbb{R}$. Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $x \in C_k$. Poiché $f$ ristretta a $C_k$ è continua, si ha $\mathrm{B}\,(x,r) \cap C_k \subseteq f^{-1}(V)$ definitivamente per $r \to 0^+$. Ne segue $\mathrm{B}\,(x,r) \setminus f^{-1}(V) \subseteq \mathrm{B}\,(x,r) \setminus C_k$, quindi

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r) \setminus f^{-1}(V))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} = 0\,.$$

Pertanto $f$ è approssimativamente continua in $x$.

Supponiamo viceversa che $f$ sia approssimativamente continua in $\mathcal{L}^n-$quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{L}^n(S) = 0$ tale che $f$ è approssimativamente continua in ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Se $A = ]c, +\infty]$ con $c \in \mathbb{R}$, risulta

$$f^{-1}(A) \setminus S \subseteq (f^{-1}(A))_*\,,$$

quindi $\mathcal{L}^n\left(f^{-1}(A) \setminus (f^{-1}(A))_*\right) = 0$. Dal Corollario (8.4) si deduce che $f^{-1}(A)$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile, per cui $f$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile. ■

**(8.12) Definizione** *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Diciamo che $u \in \mathbb{R}^n$ è* un versore normale esterno ad $E$ in $x$, *se $|u| = 1$ e*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \cap E :\ (\xi - x) \cdot u > 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} = 0\,,$$

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \setminus E :\ (\xi - x) \cdot u < 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} = 0\,.$$

**(8.13) Proposizione** *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ ed $u_1$,$u_2$ due versori normali esterni ad $E$ in $x$.*

*Allora $x \in \partial_* E$ ed $u_1 = u_2$.*

*Dimostrazione.* A meno di una traslazione, possiamo supporre $x = 0$. Poiché

$$\mathrm{B}\,(0,r) \cap E \subseteq \{\xi \in \mathrm{B}\,(0,r) \cap E :\ \xi \cdot u_1 > 0\} \cup \{\xi \in \mathrm{B}\,(0,r) :\ \xi \cdot u_1 \leq 0\}\,,$$

si ha

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\left(0,r\right)\cap E\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\left(0,r\right))} \le \frac{1}{2}\,.$$

Tenuto conto che

$$\mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\left(0,r\right)\right) \le \mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\left(0,r\right)\cap E\right) + \mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\left(0,r\right)\setminus E\right)\,,$$

ne segue

$$\liminf_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\left(0,r\right)\setminus E\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\left(0,r\right))} \ge \frac{1}{2}\,,$$

per cui $0 \notin E_*$. In modo simile si prova che $0 \notin (\mathbb{R}^n \setminus E)_*$, per cui $0 \in \partial_* E$.

L'insieme

$$A_r = \{\xi \in \mathrm{B}\left(0,r\right) :\, \xi\cdot u_1 < 0 < \xi \cdot u_2\}$$

è aperto in $\mathbb{R}^n$. Se per assurdo $u_1 \ne u_2$, si ha $A_2 \ne \emptyset$, perché $u_2 - u_1 \in A_2$, quindi $\mathcal{L}^n(A_2) > 0$. D'altronde

$$A_r \subseteq \{\xi \in \mathrm{B}\left(0,r\right)\cap E :\, \xi\cdot u_2 > 0\} \cup \{\xi \in \mathrm{B}\left(0,r\right)\setminus E :\, \xi\cdot u_1 < 0\}\,,$$

per cui

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(A_r)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\left(x,r\right))} = 0\,.$$

Inoltre si ha

$$\frac{\mathcal{L}^n(A_r)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\left(x,r\right))} = \frac{\mathcal{L}^n(A_2)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\left(x,2\right))} > 0\,,$$

da cui una contraddizione. ■

**(8.14) Definizione** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ denotiamo con $\nu_E(x)$ il versore normale esterno ad $E$ in $x$, se esiste, altrimenti poniamo $\nu_E(x) = 0$. L'applicazione $\nu_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ così definita si chiama* normale esterna *ad $E$.*

**(8.15) Teorema** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora la normale esterna $\nu_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione boreliana e limitata.*

*Dimostrazione.* Ovviamente $\nu_E$ è limitata. Sia $F$ l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ in cui esiste il versore normale esterno. Per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ con $u, v \ne 0$ poniamo

$$\omega(u,v) = \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\left(0,1\right) :\, (\xi\cdot u)(\xi\cdot v) \le 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\left(0,1\right))}\,.$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce facilmente che $\omega : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^2 \to \mathbb{R}$ è continua con $\omega(u,u) = 0$.

Inoltre per ogni $r > 0$ e $x, u, v \in \mathbb{R}^n$ con $u, v \neq 0$ si ha

$$\frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) :\ ((\xi - x)\cdot u)((\xi - x)\cdot v) \leq 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} =$$

$$= \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,1) :\ ((\xi - x)\cdot u)((\xi - x)\cdot v) \leq 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,1))} = \omega(u,v)\,.$$

Sia $C$ un chiuso in $\mathbb{R}^n$ e sia $D$ un sottoinsieme numerabile e denso in

$$\{u \in C :\ |u| = 1\}\ .$$

Osserviamo che $x \in F \cap \nu_E^{-1}(C)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $u \in D$ tale che

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \cap E :\ (\xi - x)\cdot u > 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \varepsilon\,,$$

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \setminus E :\ (\xi - x)\cdot u < 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \varepsilon\,.$$

Infatti, se $x \in F$ e $\nu_E(x) \in C$, dato $\varepsilon > 0$ esiste $u \in D$ con $\omega(u, \nu_E(x)) \leq \varepsilon$. Ne segue

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \cap E :\ (\xi - x)\cdot u > 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq$$

$$\leq \limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \cap E :\ (\xi - x)\cdot \nu_E(x) > 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} +$$

$$+ \limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) :\ (\xi - x)\cdot \nu_E(x) \leq 0 < (\xi - x)\cdot u\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \omega(u, \nu_E(x)) \leq \varepsilon\,.$$

In modo simile si prova che

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \setminus E :\ (\xi - x)\cdot u < 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \varepsilon\,.$$

Viceversa, sia $x \in \mathbb{R}^n$ e sia $(u_h)$ una successione in $D$ con

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \cap E :\ (\xi - x)\cdot u_h > 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \frac{1}{h+1}\,,$$

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \setminus E :\ (\xi - x)\cdot u_h < 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \frac{1}{h+1}\,.$$

A meno di una sottosuccessione, $(u_h)$ è convergente ad $u \in C$ con $|u| = 1$ . Risulta

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \cap E :\ (\xi - x)\cdot u > 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq$$

$$\leq \limsup_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \cap E:\ (\xi - x)\cdot u_h > 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} +$$

$$+ \limsup_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r):\ (\xi - x)\cdot u_h \leq 0 < (\xi - x)\cdot u\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \frac{1}{h+1} + \omega(u_h, u)$$

e, analogamente,

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \setminus E:\ (\xi - x)\cdot u < 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \frac{1}{h+1} + \omega(u_h, u)\,.$$

Passando al limite per $h \to \infty$, si deduce che $x \in F$ e $\nu_E(x) = u \in C$.

Risulta allora

$$F \cap \nu_E^{-1}(C) = \bigcap_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\in\mathbb{Q}}} \bigcup_{u\in D} \bigcup_{\substack{\delta>0\\ \delta\in\mathbb{Q}}} \bigcap_{0<r\leq\delta} C_{\varepsilon,u,r}\,,$$

dove

$$C_{\varepsilon,u,r} = \left\{x \in \mathbb{R}^n:\quad \begin{array}{l} \dfrac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \cap E:\ (\xi - x)\cdot u > 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \varepsilon\,, \\ \dfrac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \setminus E:\ (\xi - x)\cdot u < 0\}\right)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(x,r))} \leq \varepsilon \end{array}\right\}.$$

Poiché ogni $C_{\varepsilon,u,r}$ è chiuso in $\mathbb{R}^n$, si ha che $F \cap \nu_E^{-1}(C)$ è boreliano in $\mathbb{R}^n$.

In particolare, $F$ è boreliano. Inoltre $\nu_E^{-1}(C)$ è uguale a $F \cap \nu_E^{-1}(C)$ eventualmente unito con $\mathbb{R}^n \setminus F$, per cui $\nu_E^{-1}(C)$ è boreliano. Ne segue che $\nu_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è boreliana. ∎

**(8.16) Teorema** *Siano $\Omega$ ed $U$ due aperti in $\mathbb{R}^n$, $g : U \to \mathbb{R}$ un'applicazione di classe $C^1$ tale che*

$$\Omega \cap U = \{\xi \in U:\ g(\xi) < 0\}$$

*e sia $x \in U \cap \partial\Omega$ tale che $\nabla g(x) \neq 0$.*

*Allora $g(x) = 0$ e*

$$\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|}$$

*è il versore normale esterno ad $\Omega$ in $x$.*

*Dimostrazione.* Tenuto conto della continuità di $g$, è ovvio che $g(x) = 0$. Sia $\omega : U \to \mathbb{R}$ tale che $\omega(x) = 0$ e

$$\forall \xi \in U:\ g(\xi) = \nabla g(x)\cdot(\xi - x) + |\xi - x|\omega(\xi)\,.$$

Sia $(r_h)$ una successione in $]0, +\infty[$ decrescente a $0$ e sia

$$\varepsilon_h = \sup\left\{\frac{|\omega(\xi)|}{|\nabla g(x)|} :\, \xi \in \mathrm{B}\,(x, r_h)\right\}.$$

Evidentemente anche $(\varepsilon_h)$ è decrescente a 0. Se $\xi \in \mathrm{B}\,(x, r_h) \cap \Omega$, si ha

$$\nabla g(x) \cdot (\xi - x) + |\xi - x|\omega(\xi) < 0\,,$$

da cui

$$\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} \cdot (\xi - x) < \varepsilon_h |\xi - x|\,.$$

Ne segue

$$\frac{\mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x, r_h) \cap \Omega :\, (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} > 0\right\}\right)}{\mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\,(x, r_h)\right)} \leq$$

$$\leq \frac{\mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x, r_h) :\, 0 < (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h |\xi - x|\right\}\right)}{\mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\,(x, r_h)\right)} =$$

$$= \frac{\mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x, 1) :\, 0 < (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h |\xi - x|\right\}\right)}{\mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\,(x, 1)\right)}.$$

Poiché

$$\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x, 1) :\, 0 < (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h |\xi - x|\right\}\right)$$

costituisce una successione decrescente di sottoinsiemi $\mathcal{L}^n-$misurabili di misura finita con intersezione vuota, si ha

$$\lim_h \mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x, 1) :\, 0 < (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h |\xi - x|\right\}\right) = 0\,.$$

In modo simile si prova che

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x, r) \setminus \Omega :\, (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < 0\right\}\right)}{\mathcal{L}^n\left(\mathrm{B}\,(x, r)\right)} = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

**(8.17) Definizione** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che $E$ è un sottoinsieme* di perimetro finito, *se $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E) < +\infty$.*

**(8.18) Teorema** *Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ha perimetro finito, allora $E$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile.*

*Dimostrazione.* Si ha $\mathcal{L}^n(\partial_* E) = 0$, per cui la tesi discende dal Corollario (8.4). ■

**(8.19) Teorema (della divergenza)** *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ di perimetro finito, $f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.*

*Allora si ha*

$$\int_E \nabla f(x) \cdot g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\partial_* E} f(s)\, (g(s) \cdot \nu_E(s))\, d\mathcal{H}^{n-1}(s) - \int_E f(x) \operatorname{div} g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

*Dimostrazione.* Omettiamo la dimostrazione. ■

# Capitolo 2

# Funzioni di una variabile reale

## 1 Funzioni crescenti

**(1.1) Definizione** *Sia $I$ un intervallo in $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice* crescente, *se*

$$\forall x, y \in I : \, x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \, .$$

**(1.2) Teorema** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora $f$ è boreliana ed esiste una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}\,(]a, b[)$ tale che*

$$\forall g \in C_c^\infty(]a, b[; \mathbb{C}) : \, -\int_a^b g' f \, d\mathcal{L}^1 = \int_{]a,b[} g \, d\mu \, .$$

*Valgono inoltre i seguenti fatti:*

(*a*) *per ogni $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha \leq \beta$ risulta*

$$f(\beta) - f(\alpha) \geq \mu(]\alpha, \beta[)$$

*e si ha l'uguaglianza se $f$ è continua da destra in $\alpha$ e da sinistra in $\beta$;*

(*b*) *l'insieme dei punti di discontinuità in $]a, b[$ di $f$ è al più numerabile e coincide con l'insieme $\{x \in ]a, b[: \mu(\{x\}) > 0\}$;*

(*c*) *$f$ è derivabile $\mathcal{L}^1-$q.o. in $]a, b[$, $f' \in L^1(]a, b[, \mathcal{L}^1)$ e $f' = \dfrac{d\mu}{d\mathcal{L}^1}$;*

(*d*) *si ha*

$$\int_a^b f' \, d\mathcal{L}^1 \leq f(b) - f(a) \, .$$

*Dimostrazione.* Per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ può essere solo della forma $]d, b]$, $[d, b]$ o $\emptyset$, in ogni caso boreliano. Inoltre per ogni $h \geq 1$ l'insieme dei punti $x \in ]a, b[$ tali che

$$\lim_{\xi \to x^+} f(\xi) - \lim_{\xi \to x^-} f(\xi) > \frac{1}{h}$$

contiene al più $h(f(b) - f(a))$ elementi. Ne segue che l'insieme dei punti di discontinuità di $f$ è unione numerabile di insiemi finiti, quindi al più numerabile.

Evidentemente

$$\left\{ g \longmapsto -\int_a^b g' f \, d\mathcal{L}^1 \right\}$$

è una forma lineare su $C_c^\infty(]a, b[; \mathbb{C})$. Sia $g \in C_c^\infty(]a, b[)$ con $g \geq 0$ e sia $g = 0$ fuori da $[\alpha, \beta] \subseteq ]a, b[$. Risulta

$$-\int_a^b h \left( g\left(x + \frac{1}{h}\right) - g(x) \right) f(x) \, d\mathcal{L}^1(x) =$$

$$= h \left( -\int_\alpha^\beta g(x) f\left(x - \frac{1}{h}\right) d\mathcal{L}^1(x) + \int_\alpha^\beta g(x) f(x) \, d\mathcal{L}^1(x) \right) =$$

$$= h \int_\alpha^\beta g(x) \left( f(x) - f\left(x - \frac{1}{h}\right) \right) d\mathcal{L}^1(x) \geq 0 \, .$$

Passando al limite per $h \to \infty$, si deduce che

$$\forall g \in C_c^\infty(]a, b[) : \; g \geq 0 \implies -\int_a^b g' f \, d\mathcal{L}^1 \geq 0 \, ,$$

per cui

$$\left\{ g \longmapsto -\int_a^b g' f \, d\mathcal{L}^1 \right\}$$

è una forma lineare e positiva su $C_c^\infty(]a, b[; \mathbb{C})$.

Per il Teorema (1.5.8) esiste una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}\,(]a, b[)$ tale che

$$\forall g \in C_c^\infty(]a, b[; \mathbb{C}) : \; -\int_a^b g' f \, d\mathcal{L}^1 = \int_{]a,b[} g \, d\mu \, .$$

Siano ora $a \leq \alpha < \beta \leq b$ con $f$ continua da destra in $\alpha$ e da sinistra in $\beta$. Sia $(\varrho_h)$ una successione regolarizzante in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ e sia $g_h \in C_c^\infty(]a, b[)$ definita da

$$g_h(x) = \int_a^x \left( \varrho_{3h^2}\left(\xi - \alpha - \frac{1}{h}\right) - \varrho_{3h^2}\left(\xi - \beta + \frac{1}{h}\right) \right) d\mathcal{L}^1(\xi) \, .$$

Allora $(g_h)$ è una successione di funzioni positive in $C_c^\infty(]a,b[)$ che converge crescendo a $\chi_{]\alpha,\beta[}$. Per il Teorema della convergenza monotona si ha

$$\lim_h \int_a^b g_h \, d\mu = \mu(]\alpha,\beta[) \, .$$

D'altronde per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\alpha \leq x < \alpha + \delta \Longrightarrow f(x) - f(\alpha) < \varepsilon \, .$$

Allora per $h > 2/\delta$ si ha

$$\left| \int_a^b \varrho_{3h^2} \left( x - \alpha - \frac{1}{h} \right) f(x) \, d\mathcal{L}^1(x) - f(\alpha) \right| =$$

$$= \int_\alpha^{\alpha + \frac{2}{h}} \varrho_{3h^2} \left( x - \alpha - \frac{1}{h} \right) (f(x) - f(\alpha)) \; d\mathcal{L}^1(x) < \varepsilon \, .$$

Ne segue

$$\lim_h \int_a^b \varrho_{3h^2} \left( x - \alpha - \frac{1}{h} \right) f(x) \, d\mathcal{L}^1(x) = f(\alpha) \, .$$

Ragionando in maniera simile su $\beta$, si prova che

$$\lim_h - \int_a^b g_h{}' f \, d\mathcal{L}^1 =$$

$$= \lim_h \left[ \int_a^b \varrho_{3h^2} \left( x - \beta + \frac{1}{h} \right) f(x) \, d\mathcal{L}^1(x) - \int_a^b \varrho_{3h^2} \left( x - \alpha - \frac{1}{h} \right) f(x) \, d\mathcal{L}^1(x) \right] =$$
$$= f(\beta) - f(\alpha) \, ,$$

da cui $\mu(]\alpha,\beta[) = f(\beta) - f(\alpha)$.

In generale, se $a \leq \alpha < \beta \leq b$, esistono una successione $(\alpha_h)$ decrescente ad $\alpha$ ed una successione $(\beta_h)$ crescente a $\beta$ con $f$ continua in $\alpha_h$ e $\beta_h$. Risulta allora

$$f(\beta) - f(\alpha) \geq \lim_h \, (f(\beta_h) - f(\alpha_h)) = \lim_h \, \mu(]\alpha_h, \beta_h[) = \mu(]\alpha,\beta[) \, .$$

Inoltre, dato $x \in ]a,b[$, esistono una successione $(\alpha_h)$ crescente a $x$ ed una successione $(\beta_h)$ decrescente a $x$ con $f$ continua in $\alpha_h$ e $\beta_h$. Questa volta ne segue

$$\lim_{\xi \to x^+} f(\xi) - \lim_{\xi \to x^-} f(\xi) = \lim_h \, (f(\beta_h) - f(\alpha_h)) = \lim_h \, \mu(]\alpha_h, \beta_h[) = \mu(\{x\}) \, .$$

Sia $\varphi = \dfrac{d\mu}{d\mathcal{L}^1}$, sia $\mu_s$ la parte singolare di $\mu$ rispetto a $\mathcal{L}^1$ e sia $x \in ]a,b[$ tale che $f$ sia continua in $x$, $x$ sia un punto di Lebesgue per $\varphi$ e

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu_s(]x-r,x+r[)}{\mathcal{L}^1(]x-r,x+r[)} = 0\,.$$

Sappiamo già che $\mathcal{L}^1-$quasi ogni punto di $]a,b[$ ha queste proprietà. Dimostriamo che in un tale $x$ la funzione $f$ è derivabile e che $f'(x) = \tilde{\varphi}(x)$. Per ogni $\xi \in ]a,b[\setminus\{x\}$ esistono una successione $(\alpha_h)$ crescente a $\xi$ ed una successione $(\beta_h)$ decrescente a $\xi$ con $f$ continua in $\alpha_h$ e $\beta_h$. Ragionando come in precedenza, si deduce che

$$\forall \xi \in ]a,b[:\ \xi < x \implies \mu(]\xi,x[) \leq f(x) - f(\xi) \leq \mu([\xi,x[)\,,$$

$$\forall \xi \in ]a,b[:\ \xi > x \implies \mu([x,\xi[) \leq f(\xi) - f(x) \leq \mu([x,\xi])\,.$$

Sia ora $(x_h)$ una qualunque successione convergente a $x$ con $x_h \neq x$. Dal Teorema (1.7.11) si deduce che

$$\lim_h \frac{f(x_h) - f(x)}{x_h - x} = \tilde{\varphi}(x)\,,$$

per cui $f$ è derivabile in $x$ e $f'(x) = \tilde{\varphi}(x)$. In particolare, $f$ è derivabile $\mathcal{L}^1-$q.o. in $]a,b[$ e $f'(x) = \varphi(x)$ $\mathcal{L}^1-$q.o. in $]a,b[$.

Infine si ha

$$f(b) - f(a) \geq \mu(]a,b[) = \int_a^b \varphi\, d\mathcal{L}^1 + \mu_s(]a,b[) \geq \int_a^b f'\, d\mathcal{L}^1\,,$$

per cui, in particolare, $f' \in L^1(]a,b[,\mathcal{L}^1)$. ■

## 2 Funzioni a variazione limitata

**(2.1) Definizione** *Siano $I$ un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione ed $a, b \in I$ con $a \leq b$. Poniamo*

$$V_a^b(f) := \sup\left\{\sum_{h=1}^k |f(x_h) - f(x_{h-1})| :\ k \geq 1,\ a = x_0 \leq \cdots \leq x_k = b\right\}.$$

*Diciamo che* $V_a^b(f) \in [0, +\infty]$ *è* la variazione *di* $f$ *da* $a$ *a* $b$. *Diciamo che* $f$ *è* a variazione limitata*, se*

$$\sup\left\{V_a^b(f):\, a, b \in I,\, a \leq b\right\} < +\infty\,.$$

**(2.2) Proposizione** *Sia* $I$ *un intervallo in* $\mathbb{R}$. *Valgono allora i seguenti fatti:*

$(a)$ *se* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *sono due funzioni e* $s \in \mathbb{R}$, *si ha*

$$V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)\,, \qquad V_a^b(s\,f) = |s|\,V_a^b(f)$$

*per ogni* $a, b \in I$ *con* $a \leq b$ *(si intende che* $0 \cdot (+\infty) = 0$*); in particolare, l'insieme delle funzioni da* $I$ *in* $\mathbb{R}$ *a variazione limitata è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^I$*;*

$(b)$ *se* $f : I \to \mathbb{R}$ *è una funzione, si ha*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

*ogniqualvolta* $a, b, c \in I$ *ed* $a \leq c \leq b$*;*

$(c)$ *se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è una funzione crescente,* $f$ *è a variazione limitata e si ha*

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a)\,.$$

*Dimostrazione.*

$(a)$ Se $a = x_0 \leq \cdots \leq x_k = b$, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{h=1}^{k} |f(x_h) + g(x_h) - f(x_{h-1}) - g(x_{h-1})| \;&\leq\; \sum_{h=1}^{k} |f(x_h) - f(x_{h-1})| + \\
&\quad\; + \sum_{h=1}^{k} |g(x_h) - g(x_{h-1})| \leq \\
&\leq\; V_a^b(f) + V_a^b(g)\,,
\end{aligned}$$

da cui $V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$. Inoltre si ha

$$\sum_{h=1}^{k} |s\,f(x_h) - s\,f(x_{h-1})| = |s| \sum_{h=1}^{k} |f(x_h) - f(x_{h-1})|\,,$$

quindi $V_a^b(s\,f) = |s|\,V_a^b(f)$.

(*b*) Siano $\alpha < V_a^c(f)$ e $\beta < V_c^b(f)$ e siano $a = x_0 \leq \cdots \leq x_k = c$ e $c = y_0 \leq \cdots \leq y_m = b$ tali che

$$\sum_{h=1}^{k} |f(x_h) - f(x_{h-1})| > \alpha\,, \qquad \sum_{n=1}^{m} |f(y_n) - f(y_{n-1})| > \beta\,.$$

Allora si ha

$$\alpha + \beta < \sum_{h=1}^{k} |f(x_h) - f(x_{h-1})| + \sum_{n=1}^{m} |f(y_n) - f(y_{n-1})| \leq V_a^b(f)\,,$$

quindi $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$ per l'arbitrarietà di $\alpha$ e $\beta$.

D'altronde, se $a = x_0 \leq \cdots \leq x_k = b$ e $x_{j-1} \leq c \leq x_j$, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{k} |f(x_h) - f(x_{h-1})| \;&\leq\; \sum_{h=1}^{j-1} |f(x_h) - f(x_{h-1})| + |f(c) - f(x_{j-1})| + \\ &\quad + |f(x_j) - f(c)| + \sum_{h=j+1}^{k} |f(x_h) - f(x_{h-1})| \leq \\ &\leq\; V_a^c(f) + V_c^b(f)\,,\end{aligned}$$

quindi $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

(*c*) Se $a = x_0 \leq \cdots \leq x_k = b$, risulta

$$\sum_{h=1}^{k} (f(x_h) - f(x_{h-1})) = f(b) - f(a)\,,$$

da cui la tesi. ■

**(2.3) Teorema** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a variazione limitata e siano $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ definite da*

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left(V_a^x(f) + f(x)\right)\,, \qquad f_2(x) = \frac{1}{2}\left(V_a^x(f) - f(x)\right)\,.$$

*Allora $f_1$ e $f_2$ sono crescenti e si ha per ogni $x \in [a, b]$*

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)\,, \qquad V_a^x(f) = f_1(x) + f_2(x)\,.$$

*Dimostrazione.* Se $a \leq x \leq y \leq b$, si ha

$$\begin{aligned} f_1(y) - f_1(x) \;&=\; \frac{1}{2}\left(V_a^y(f) - V_a^x(f) + f(y) - f(x)\right) \geq \\ &\geq\; \frac{1}{2}\left(V_x^y(f) - |f(y) - f(x)|\right) \geq 0\,. \end{aligned}$$

In maniera simile si prova che anche $f_2$ è crescente. Evidentemente $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ e $V_a^x(f) = f_1(x) + f_2(x)$. ■

**(2.4) Lemma** *Siano $I$ un intervallo in $\mathbb{R}$ con $\operatorname{int}(I) \neq \emptyset$, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e $x \in I$.*

*Allora si ha*

$$\liminf_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \liminf_{\substack{(\eta,\xi)\to(x,x) \\ \eta \leq x \leq \xi,\, \eta < \xi}} \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta},$$

$$\limsup_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \limsup_{\substack{(\eta,\xi)\to(x,x) \\ \eta \leq x \leq \xi,\, \eta < \xi}} \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta}.$$

*Dimostrazione.* Si verifica facilmente che

$$\liminf_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq \liminf_{\substack{(\eta,\xi)\to(x,x) \\ \eta \leq x \leq \xi,\, \eta < \xi}} \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta}.$$

D'altronde, se $\eta < x < \xi$, si ha

$$\frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta} = \frac{\xi - x}{\xi - \eta} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} + \frac{x - \eta}{\xi - \eta} \frac{f(x) - f(\eta)}{x - \eta}.$$

Ne segue

$$\frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta} \geq \min\left\{\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \frac{f(\eta) - f(x)}{\eta - x}\right\}$$

ogniqualvolta $\eta \leq x \leq \xi$ ed $\eta < \xi$, per cui

$$\liminf_{\substack{(\eta,\xi)\to(x,x) \\ \eta \leq x \leq \xi,\, \eta < \xi}} \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta} \geq \liminf_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

L'uguaglianza riguardante il massimo limite si dimostra in modo simile. ■

**(2.5) Teorema** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata. Valgono allora i seguenti fatti:*

($a$) *le funzioni $f$ e $\{x \longmapsto V_a^x(f)\}$ hanno gli stessi punti di continuità da sinistra e da destra in $[a,b]$;*

($b$) *l'insieme dei punti di discontinuità di $f$ è al più numerabile;*

(*c*) *$f$ è derivabile $\mathcal{L}^1-$q.o. in $]a,b[$, $f' \in L^1(]a,b[,\mathcal{L}^1)$ e*

$$|f'(x)| = (V_a^x(f))' \quad \text{per } \mathcal{L}^1\text{−q.o. } x \in ]a,b[,$$

$$\int_a^b |f'|\,d\mathcal{L}^1 \leq V_a^b(f)\,.$$

*Dimostrazione.* Poiché $|f(y)-f(x)| \leq V_a^y(f)-V_a^x(f)$ per $a \leq x \leq y \leq b$, è evidente che la continuità da destra o da sinistra di $\{x \longmapsto V_a^x(f)\}$ implica la corrispondente continuità di $f$. Viceversa, supponiamo ad esempio che $f$ sia continua da sinistra in $x \in ]a,b]$. Per ogni $\alpha < V_a^x(f)$ esistono $a = x_0 \leq \cdots \leq x_k = x$ tali che

$$\sum_{h=1}^{k} |f(x_h) - f(x_{h-1})| > \alpha\,.$$

Possiamo supporre $x_{k-1} < x_k$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \alpha &< \lim_{\xi \to x^-} \left( \sum_{h=1}^{k-1} |f(x_h) - f(x_{h-1})| + |f(\xi) - f(x_{k-1})| \right) \leq \\ &\leq \lim_{\xi \to x^-} V_a^\xi(f) \leq V_a^x(f)\,, \end{aligned}$$

quindi $\lim\limits_{\xi \to x^-} V_a^\xi(f) = V_a^x(f)$ per l'arbitrarietà di $\alpha$. Poiché $V_a^\xi(f) = V_a^b(f) - V_\xi^b(f)$, la continuità da destra può essere trattata in maniera simile.

Combinando il Teorema (2.3) col Teorema (1.2), si deduce che l'insieme dei punti di discontinuità di $f$ è al più numerabile, $f$ è derivabile $\mathcal{L}^1-$q.o. in $]a,b[$ e $f' \in L^1(]a,b[,\mathcal{L}^1)$.

Poiché $|f(y) - f(x)| \leq V_a^y(f) - V_a^x(f)$ per $a \leq x \leq y \leq b$, è evidente che

$$|f'(x)| \leq (V_a^x(f))' \qquad \text{per } \mathcal{L}^1\text{−q.o. } x \in ]a,b[.$$

D'altronde, per il Lemma (2.4), l'insieme degli $x \in ]a,b[$ in cui $|f'(x)| < (V_a^x(f))'$ è contenuto in $\bigcup\limits_{h \geq 1} E_h$, dove $E_h$ è l'insieme degli $x \in ]a,b[$ tali che

$$\frac{|f(t) - f(s)|}{t-s} < \frac{V_a^t(f) - V_a^s(f)}{t-s} - \frac{1}{h}$$

ogniqualvolta $a \leq s < t \leq b$ e $x - \frac{1}{h} < s \leq x \leq t < x + \frac{1}{h}$. Per ogni $h \geq 1$ e per ogni $\varepsilon > 0$, siano $a = x_0 \leq \cdots \leq x_k = b$ tali che $(x_j - x_{j-1}) < 1/h$ e

$$\sum_{j=1}^{k} |f(x_j) - f(x_{j-1})| > V_a^b(f) - \varepsilon$$

e sia $J = \{j : E_h \cap [x_{j-1}, x_j] \neq \emptyset\}$. Allora risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(E_h) &\leq \sum_{j\in J}(x_j - x_{j-1}) \leq h \sum_{j\in J} (V_a^{x_j}(f) - V_a^{x_{j-1}}(f) - |f(x_j) - f(x_{j-1})|) \leq \\ &\leq h \sum_{j=1}^{k} (V_a^{x_j}(f) - V_a^{x_{j-1}}(f) - |f(x_j) - f(x_{j-1})|) = \\ &= h \left( V_a^b(f) - \sum_{j=1}^{k} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \right) < h\,\varepsilon\,, \end{aligned}$$

quindi $\mathcal{L}^1(E_h) = 0$ per l'arbitrarietà di $\varepsilon$. Ne segue

$$|f'(x)| = (V_a^x(f))' \qquad \text{per } \mathcal{L}^1\text{−q.o. } x \in ]a, b[.$$

Infine, dal Teorema (1.2) si deduce che

$$\int_a^b |f'|\, d\mathcal{L}^1 \leq V_a^b(f)$$

e la dimostrazione è completa. ■

## 3 Funzioni assolutamente continue

**(3.1) Definizione** *Siano $I$ un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che $f$ è* assolutamente continua, *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\sum_{h=1}^{k} |f(y_h) - f(x_h)| < \varepsilon$$

*ogniqualvolta $x_h, y_h \in I$, $x_1 \leq y_1 \leq \cdots \leq x_k \leq y_k$ e*

$$\sum_{h=1}^{k} (y_h - x_h) < \delta\,.$$

Evidentemente ogni funzione assolutamente continua è uniformemente continua.

**(3.2) Proposizione** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora $f$ è assolutamente continua.*

*Dimostrazione.* Sia $f$ lipschitziana di costante $c$. Dato $\varepsilon > 0$, sia $c\,\delta < \varepsilon$. Allora si ha

$$\sum_{h=1}^{k} |f(y_h) - f(x_h)| \leq c \sum_{h=1}^{k} (y_h - x_h) \leq c\,\delta < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

**(3.3) Teorema** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua. Allora $f$ è a variazione limitata e $\{x \longmapsto V_a^x(f)\}$ è assolutamente continua.*

*Dimostrazione.* Sia $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{h=1}^{k} |f(y_h) - f(x_h)| < 1$$

ogniqualvolta $a \leq x_1 \leq y_1 \leq \cdots \leq x_k \leq y_k \leq b$ e

$$\sum_{h=1}^{k} (y_h - x_h) < \delta\,.$$

Sia $n \geq 1$ tale che $\dfrac{b-a}{n} < \delta$ e sia $a = x_0 \leq \cdots \leq x_k = b$. Possiamo supporre che i punti $a + m\dfrac{b-a}{n}$ $(0 \leq m \leq n)$ appartengano alla suddivisione $\{x_0, \ldots, x_k\}$ e che corrispondano agli indici $h_0, \ldots, h_n$. Allora si ha

$$\sum_{h=h_m+1}^{h_{m+1}} (x_h - x_{h-1}) = \frac{b-a}{n} < \delta\,,$$

per cui

$$\sum_{h=h_m+1}^{h_{m+1}} |f(x_h) - f(x_{h-1})| < 1\,.$$

Ne segue

$$\sum_{h=1}^{k} |f(x_h) - f(x_{h-1})| = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{h=h_m+1}^{h_{m+1}} |f(x_h) - f(x_{h-1})| < n\,,$$

per cui $V_a^b(f) \leq n$.

Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ relativo ad $\varepsilon/2$, conformemente all'assoluta continuità di $f$. Se $a \leq x_1 \leq y_1 \leq \cdots \leq x_k \leq y_k \leq b$ e

$$\sum_{h=1}^{k} (y_h - x_h) < \delta\,,$$

siano $x_h = t_0^{(h)} \leq \cdots \leq t_{n_h}^{(h)} = y_h$ tali che

$$\sum_{j=1}^{n_h} |f(t_j^{(h)}) - f(t_{j-1}^{(h)})| > V_{x_h}^{y_h}(f) - \frac{\varepsilon}{2k}\,.$$

Allora si ha

$$\frac{\varepsilon}{2} > \sum_{h=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_h} |f(t_j^{(h)}) - f(t_{j-1}^{(h)})| > \sum_{h=1}^{k} V_{x_h}^{y_h}(f) - \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

ossia

$$\sum_{h=1}^{k} \left(V_a^{y_h}(f) - V_a^{x_h}(f)\right) < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

**(3.4) Teorema** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora sono fatti equivalenti:*

$(a)$ *$f$ è assolutamente continua;*

$(b)$ *$f$ è continua in $a$ e $b$, a variazione limitata e $\mu \ll \mathcal{L}^1$, dove $\mu$ è la misura associata a $\{x \longmapsto V_a^x(f)\}$ dal Teorema (1.2);*

$(c)$ *$f$ è derivabile $\mathcal{L}^1-$q.o. in $]a,b[$, $f' \in L^1(]a,b[,\mathcal{L}^1)$ e*

$$\forall x \in [a,b] :\ f(x) = f(a) + \int_a^x f'\, d\mathcal{L}^1\,;$$

$(d)$ *esiste $\varphi \in L^1(]a,b[,\mathcal{L}^1)$ tale che*

$$\forall x \in [a,b] :\ f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi\, d\mathcal{L}^1\,;$$

$(e)$ *$f$ è a variazione limitata e*

$$\int_a^b |f'|\, d\mathcal{L}^1 = V_a^b(f)\,.$$

*Dimostrazione.*

$(a) \implies (b)$ Per la proposizione precedente, $f$ è a variazione limitata.

Sia $E$ un boreliano $\mathcal{L}^1-$trascurabile in $]a,b[$. Per il Teorema (1.1.23) esistono una successione crescente di compatti $(K_n)$ ed un boreliano $E_0$ $\mu-$trascurabile tali che

$$E = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) \cup E_0\,.$$

Per provare che $\mu \ll \mathcal{L}^1$, è quindi sufficiente verificare che $\mu(K_n) = 0$. Per la proposizione precedente, $\{x \longmapsto V_a^x(f)\}$ è assolutamente continua. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ conforme alla definizione di assoluta continuità. Poiché $\mathcal{L}^1(K_n) = 0$, esiste un aperto $A$ in $]a, b[$ tale che $K_n \subseteq A$ e $\mathcal{L}^1(A) < \delta$. Per la compattezza di $K_n$, possiamo supporre che

$$A = \bigcup_{h=1}^{k} ]x_h, y_h[$$

con $a \leq x_1 < y_1 \leq \cdots \leq x_k < y_k \leq b$. Allora si ha

$$\sum_{h=1}^{k} (y_h - x_h) < \delta \,,$$

quindi

$$\mu(K_n) \leq \mu(A) = \sum_{h=1}^{k} \mu(]x_h, y_h[) = \sum_{h=1}^{k} (V_a^{y_h}(f) - V_a^{x_h}(f)) < \varepsilon \,.$$

Ne segue $\mu(K_n) = 0$ per l'arbitrarietà di $\varepsilon$.

$(b) \implies (c)$ Essendo a variazione limitata, la funzione $f$ è derivabile $\mathcal{L}^1$−q.o. in $]a, b[$ e $f' \in L^1(]a, b[, \mathcal{L}^1)$. Siano

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left(V_a^x(f) + f(x)\right) \,, \qquad f_2(x) = \frac{1}{2}\left(V_a^x(f) - f(x)\right) \,.$$

Se $\mu_1$ e $\mu_2$ sono le misure associate a $f_1$ e $f_2$ dal Teorema (1.2), si ha

$$\begin{aligned} \forall g \in C_c^\infty(]a, b[; \mathbb{C}) : -\int_a^b g'(x)\, V_a^x(f)\, d\mathcal{L}^1(x) &= -\int_a^b g'\, (f_1 + f_2)\, d\mathcal{L}^1 = \\ &= \int_{]a,b[} g\, d\mu_1 + \int_{]a,b[} g\, d\mu_2 \,. \end{aligned}$$

Essendo unica la misura associata a $\{x \longmapsto V_a^x(f)\}$, deve essere

$$\forall E \in \mathfrak{B}\,(]a, b[) : \mu_1(E) + \mu_2(E) = \mu(E) \,.$$

In particolare, $\mu_1 \ll \mathcal{L}^1$, $\mu_2 \ll \mathcal{L}^1$ e $f_1$ e $f_2$ sono continue su $[a, b]$.

Combinando il Teorema (1.2) col Teorema di Radon-Nikodym, si deduce che

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) - f_2(x) = f_1(a) + \mu_1(]a, x[) - f_2(a) - \mu_2(]a, x[) = \\ &= f_1(a) + \int_a^x {f_1}'\, d\mathcal{L}^1 - f_2(a) - \int_a^x {f_2}'\, d\mathcal{L}^1 = f(a) + \int_a^x f'\, d\mathcal{L}^1 \,. \end{aligned}$$

$(c) \implies (d)$ È sufficiente porre $\varphi = f'$.

$(d) \implies (e)$ Per il Corollario (1.7.10), $f$ è derivabile $\mathcal{L}^1-$q.o. in $]a,b[$ e $f'(x) = \varphi(x)$ per $\mathcal{L}^1-$q.o. $x \in ]a,b[$. Se $a = x_0 \leq \cdots \leq x_k = b$, si ha

$$\sum_{h=1}^{k} |f(x_h) - f(x_{h-1})| = \sum_{h=1}^{k} \left| \int_{x_{h-1}}^{x_h} f' \, d\mathcal{L}^1 \right| \leq \sum_{h=1}^{k} \int_{x_{h-1}}^{x_h} |f'| \, d\mathcal{L}^1 = \int_a^b |f'| \, d\mathcal{L}^1 \,,$$

per cui

$$V_a^b(f) \leq \int_a^b |f'| \, d\mathcal{L}^1 < +\infty \,.$$

La disuguaglianza opposta è contenuta nel Teorema (2.5).

$(e) \implies (a)$ Se $a \leq x \leq y \leq b$, si ha

$$\int_a^x |f'| \, d\mathcal{L}^1 + \int_x^y |f'| \, d\mathcal{L}^1 + \int_y^b |f'| \, d\mathcal{L}^1 = V_a^x(f) + V_x^y(f) + V_y^b(f) \,,$$

per cui

$$\int_x^y |f'| \, d\mathcal{L}^1 = V_x^y(f) \,.$$

Se $a \leq x_1 \leq y_1 \leq \cdots \leq x_k \leq y_k \leq b$ ed

$$E = \bigcup_{h=1}^{k} ]x_h, y_h[ \,,$$

risulta che $E$ è boreliano e

$$\mathcal{L}^1(E) = \sum_{h=1}^{k} (y_h - x_h) \,,$$

$$\sum_{h=1}^{k} |f(y_h) - f(x_h)| \leq \sum_{h=1}^{k} V_{x_h}^{y_h}(f) = \int_E |f'| \, d\mathcal{L}^1 \,.$$

È quindi sufficiente dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\int_E |f'| \, d\mathcal{L}^1 < \varepsilon$$

per ogni boreliano $E$ in $]a,b[$ con $\mathcal{L}^1(E) < \delta$. Per assurdo, supponiamo che esistano $\varepsilon > 0$ ed una successione $(E_h)$ di boreliani in $]a,b[$ con $\mathcal{L}^1(E_h) < 2^{-h}$ e

$$\int_{E_h} |f'| \, d\mathcal{L}^1 \geq \varepsilon \,.$$

Posto

$$F_k = \bigcup_{h \geq k} E_h \,,$$

si ha che $(F_k)$ è una successione decrescente di boreliani con

$$\mathcal{L}^1(F_k) < 2^{-k+1}, \qquad \int_{F_k} |f'| \, dx \geq \varepsilon .$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_k \int_a^b |f'| \, \chi_{F_k} \, d\mathcal{L}^1 = \int_a^b |f'| \, \chi_{\bigcap_k F_k} \, d\mathcal{L}^1 = 0 ,$$

il che è assurdo. ∎

# Elenco dei simboli

# Indice analitico