Giocare con i gruppi semplici

Una nuova famiglia di giochi ispirati al cubo di Rubik permette di familiarizzare con oggetti matematici bizzarri e affascinanti

di Igor Kriz e Paul Siegel

IN SINTESI

- Per riuscire a risolvere il cubo di Rubik è necessario scoprire brevi sequenze di mosse che permettono di raggiungere obiettivi parziali.
- Questa strategia funziona tanto bene che gli autori hanno cercato di ideare giochi la cui soluzione richiedesse nuove strategie.
- Basando il loro lavoro sulla teoria matematica dei gruppi, ben illustrata dal cubo di Rubik, gli autori hanno inventato tre nuovi giochi che mettono alla prova gli amanti di questo tipo di rompicapi con le complessità dei cosiddetti «gruppi semplici sporadici».

Milioni di persone si sono appassionate cubo di Rubik, un rompicapo affascinante che ha conquistato il mondo negli anni ottanta. Se per qualche motivo vi è sfuggito, il cubo in questione è un oggetto di plastica composto da 27 piccoli cubi. Ogni spigolo del cubo di Rubik è composto da tre cubetti e ciascuna delle sei facce presenta un determinato colore: in genere blu, giallo, arancione, rosso, verde e bianco.

Il cubo è «apparentemente» composto dai cubetti, ma in questo caso le apparenze ingannano. Un meccanismo ingegnoso, inventato e brevettato nel 1975 dall'insegnante ungherese Ernö Rubik (e nel 1976 in modo indipendente dall'ingegnere giapponese Terutoshi Ishige) permette a ognuna delle sei facce di ruotare intorno al proprio centro (*si veda il box a p. 60*). Basta ruotare quattro o cinque facce in modo casuale per avere un cubo che solo un esperto può rimettere in ordine. Lo scopo di questo rompicapo è riportare un cubo mescolato arbitrariamente al suo stato originale, ovvero ad avere un unico colore per faccia. In altre parole, l'obiettivo è «risolvere» il cubo.

Il cubo di Rubik, i poliedri di Rubik e tutte le numerose imitazioni non autorizzate apparse in seguito sono detti «giochi di permutazione» perché si basano su mosse che cambiano posizione ai pezzi che compongono il gioco (nel caso del cubo di Rubik i cubetti che lo compongono), cioè permutano la posizione dei pezzi. Lo scopo è sempre lo stesso: riportare i pezzi in una posizione predeterminata, di solito la loro configurazione iniziale. I giochi di permutazione sono strettamente imparentati con un ente matematico chiamato «gruppo di permutazioni», cioè l'insieme di tutte le sequenze di mosse consentite che portano a disposizioni diverse degli oggetti del gioco.

In matematica un gruppo può essere considerato come una generalizzazione dell'aritmetica ordinaria. Gli interi positivi e negativi, 0, ± 1, ± 2 e così via, formano un gruppo rispetto all'operazione di addizione. Ma i gruppi possono essere composti da molti altri tipi di oggetti – le rotazioni e le riflessioni di oggetti fisici, vari tipi di permutazioni che si applicano a insiemi di lettere, i numeri che formano le matrici quadrate e così via – purché il gruppo comprenda un'operazione per combinare tra loro gli oggetti che ne fanno parte in modo che anche queste combinazioni siano elementi del gruppo.

Oltre all'interesse dei matematici, la teoria dei gruppi ha importanti applicazioni in altri campi come la cristallografia, la fisica delle particelle elementari, la teoria delle stringhe e le telecomunicazioni. Quindi è importante dal punto vista scientifico, oltre a essere stimolante, che studenti e scienziati acquisiscano familiarità con il comportamento dei gruppi. Per molte persone scoprire una soluzione del cubo di Rubik si è rivelato un ottimo modo per avere un'idea di come si combinano tra loro gli elementi di certi gruppi astratti.

Ma una volta raggiunto questo livello di padronanza spesso le persone capiscono che le strategie impiegate sono efficaci anche per risolvere anche altri giochi di permutazione ispirati al cubo. E quando questo accade, i giochi perdono il loro fascino. Almeno questa è stata la nostra esperienza con il cubo di Rubik. Ma sapevamo anche che c'erano buone ragioni matematiche per la nostra delusione. Tutti i rompicapi analoghi al cubo di Rubik rappresentano gruppi di uno stesso tipo generale, e quindi si prestano allo stesso tipo di soluzione. Ma questi gruppi sono lontani dall'esaurire la ricchezza matematica del concetto di gruppo.

A fini didattici, quello che volevamo era un modo divertente per sviluppare l'intuizione relativa a gruppi diversi da quelli rappresentati dal cubo. E come amanti dei rompicapi desideravamo una nuova famiglia di giochi le cui soluzioni richiedessero una strategia sostanzialmente diversa da quella del cubo di Rubik e dei suoi parenti.

Così abbiamo fatto il passo più naturale che si possa immaginare: abbiamo creato tre nuovi giochi basati su alcuni gruppi noti come «gruppi semplici sporadici», le cui proprietà sono notevoli e poco conosciute ai non specialisti. Fortunatamente, l'esperienza dei nostri colleghi insegna che chiunque sia in grado di imparare a risolvere il cubo di Rubik può imparare a conoscere altrettanto compiutamente i gruppi semplici sporadici grazie ai nostri rompicapi. Inoltre questi giochi danno soddisfazione, nel senso che vanno affrontati con metodi diversi rispetto a quelli impiegati per il cubo di Rubik, e riteniamo che siano anche molto divertenti. I lettori che vogliono cimentarsi subito possono scaricarli dal sito Internet di «Le Scienze» (*si veda il box a p. 63*).

Matt Collins

NUMERI ANIMATI si esibiscono in un balletto mentre si ridispongono seguendo le regole di una mossa per uno dei tre giochi, chiamato M_{12}, creati dagli autori.

GLI AUTORI

Cortesia Igor Kriz (*Kriz*); cortesia Paul Siegel (*Siegel*)

IGOR KRIZ (*sinistra*) è professore di matematica all'Università del Michigan ad Ann Arbor, dove si interessa di topologia algebrica e fisica matematica. Ha conseguito il dottorato in matematica all'Univerzita Karlova di Praga. PAUL SIEGEL si è occupato degli argomenti di questo articolo quando era laureando all'Università del Michigan. Ora sta conseguendo un dottorato in matematica alla Pennsylvania State University.

I giochi e i loro gruppi

Per risolvere i nuovi giochi è utile capire qualcosa dei gruppi semplici sporadici, su cui si basano, e in che cosa sono diversi rispetto al gruppo rappresentato dal cubo di Rubik: il «gruppo di Rubik». I gruppi possono avere un numero di elementi finito o infinito. Ovviamente il gruppo additivo degli interi che abbiamo menzionato prima contiene infiniti elementi. Ma anche il numero di elementi del gruppo di Rubik è finito, sebbene l'insieme di tutte le possibili sequenze di mosse del cubo sia infinito. Il motivo è che se due sequenze di mosse portano da una stessa disposizione iniziale dei cubetti a una stessa disposizione finale, sono considerate equivalenti. Nel cubo di Rubik il numero di configurazioni distinte è astronomico – circa 4×10^{19}, per essere precisi, 43.252.003.274.489.856.000 – e quindi il numero di elementi, cioè di combinazioni distinte di mosse nel gruppo rappresentato dal cubo, è gigantesco ma finito.

Anche se lo «spazio» delle mosse che si ottiene è enorme, non è difficile trovare una soluzione del cubo seguendo alcune idee generali. Servono carta, penna e un cubo di Rubik, possibilmente ordinato. Il nostro obiettivo è duplice: ottenere un modo pratico per registrare le mosse (*si veda il box qui accanto*), scoprire varie e brevi sequenze di mosse da annotare per ottenere scopi specifici, cioè scambiare tra loro certe coppie di cubetti ai vertici o sugli spigoli (*si veda il box nella pagina a fronte*). L'idea è combinare sistematicamente le sequenze per risolvere un cubo mescolato in modo casuale.

Come risultato si ha che questo approccio sistematico, iniziato procedendo per tentativi, quasi sempre porta a sequenze utili che danno sufficiente flessibilità per risolvere il cubo. Usando un linguaggio più appropriato, il motivo è che i componenti algebrici basilari del gruppo di Rubik sono i cosiddetti «gruppi simmetrici», ovvero i gruppi di tutte le possibili permutazioni di un dato numero di oggetti, e i «gruppi alterni», parenti stretti dei gruppi simmetrici. Ciascun gruppo alterno contiene metà degli elementi del corrispondente gruppo simmetrico, quindi il gruppo simmetrico S_3 contiene tutte le 3! ($1 \times 2 \times 3$), cioè sei, possibili permutazioni di tre oggetti (*si veda il box a p. 62*); il suo parente stretto, cioè il gruppo alterno A_3, ha tre elementi. Tra i gruppi simmetrici correlati con il gruppo di Rubik ci sono il gruppo simmetrico S_8 (che contiene tutti gli 8!, ovvero 40.320, modi di rimescolare gli otto cubetti ai vertici) e il gruppo simmetrico S_{12} (che contiene tutti i 12!, ovvero 479.001.600, modi di rimescolare i 12 cubetti lungo gli spigoli).

«Atomi» di simmetria

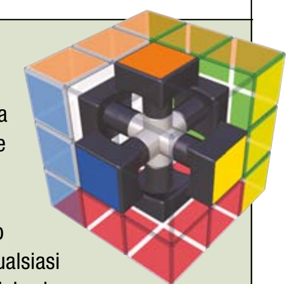
Anche i nostri sono giochi di permutazione, ma si basano su un «gruppo semplice sporadico». Per capire che cos'è un gruppo semplice sporadico cominciamo dal concetto di sottogruppo.

Supponiamo di poter ruotare solo la faccia blu e quella gialla del cubo di Rubik. Con questa restrizione non è possibile spostare il cubetto di spigolo verde e bianco. Quindi il numero di sequenze distinte di mosse possibili è inferiore al numero di elementi dell'intero gruppo di Rubik. Se ogni combinazione di mosse all'interno di un sottoinsieme di un gruppo è a sua volta una mossa del gruppo, il sottoinsieme è detto sottogruppo. Proseguendo verso il concetto di gruppo semplice le cose si fanno un po' tecniche; per ora basta dire che un gruppo semplice è un gruppo che non contiene sottogruppi «normali non banali» (*si veda il box a p. 62*).

Codificare il cubo di Rubik

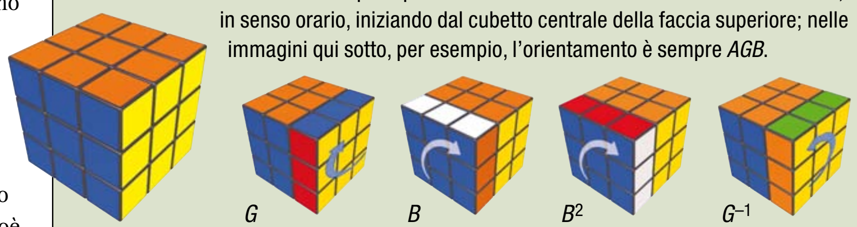
La soluzione dei giochi creati dagli autori si basa su tecniche sviluppate per lo studio dei gruppi matematici. Una tecnica importante della teoria dei gruppi consiste nello specificare un metodo univoco per trascrivere gli elementi del gruppo e come si combinano.

TRASCRIVERE



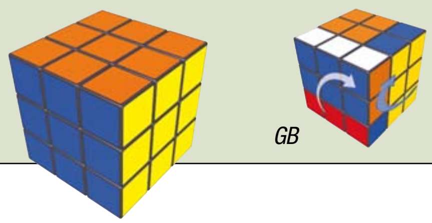
Il cubo di Rubik rappresenta un gruppo i cui elementi sono le «mosse», le rotazioni possibili per ogni faccia del cubo, e in cui la regola per combinarne due è un'operazione che si può chiamare «e poi»: «Applica questa rotazione *e poi* applica quest'altra». Il meccanismo nell'illustrazione (*a destra*) mostra che, comunque si mescola il cubo, i cubetti al centro delle facce non si spostano (tranne per il fatto che ruotano intorno al proprio centro). Così qualsiasi mossa per risolvere il cubo si può indicare con la prima lettera del colore del cubetto centrale – *B*lu, *V*erde, *A*rancione, *R*osso, *G*iallo e *W* per *white*, bianco – più un modo per indicare l'ampiezza della rotazione. Da sola, una lettera indica che la faccia corrispondente si deve ruotare di 90 gradi in senso orario guardando la faccia dall'esterno del cubo (mosse *G* e *B* nel diagramma qui sotto). Un esponente indica altri tipi di rotazioni. B^2 ruota la faccia blu di 180 gradi; G^{-1} ruota la faccia gialla di 90° in senso antiorario.

L'orientamento del cubo si può specificare con i colori dei tre cubetti centrali visibili, in senso orario, iniziando dal cubetto centrale della faccia superiore; nelle immagini qui sotto, per esempio, l'orientamento è sempre *AGB*.



SUGGERIMENTO: L'ORDINE È IMPORTANTE

La successione delle mosse è essenziale per risolvere il cubo, e quindi la notazione deve registrarne le differenze. Le mosse composte *GB* e *BG* non portano una data disposizione iniziale dei cubetti alla stessa configurazione finale.



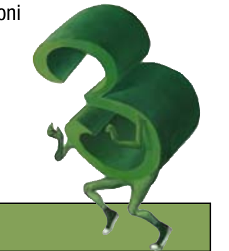
George Retseck (*cubi*)

Il termine «semplice», per come viene usato in teoria dei gruppi, è forse uno dei termini più impropri della storia della matematica. Tra i gruppi semplici sono emerse alcune delle strutture più complesse che i matematici conoscano. Ma sono semplici nel senso che sono i componenti fondamentali, gli «atomi», della teoria dei gruppi. Si può dire che i gruppi semplici siano anche come i numeri primi, cioè i numeri divisibili solo per loro stessi e per 1 (2, 3, 5, 7, 11 e così via). Ogni gruppo finito si può scomporre in gruppi semplici, come ogni numero intero si può fattorizzare in numeri primi.

Tutti i gruppi semplici finiti sono stati identificati e classificati. Scoperti tra il 1860 e il 1980, sono stati classificati soprattutto tra la fine degli anni quaranta e i primi anni ottanta (con correzioni recenti), grazie al contributo di centinaia di matematici. I resoconti delle scoperte dei gruppi semplici e la dimostrazione che l'elenco finale è completo comprendono più di 10.000 pagine distribuite tra circa 500 articoli pubblicati in numerose riviste matematiche. I matematici sono ancora al lavoro per trovare una versione più semplice della dimostrazione, che aiuti a capire meglio i gruppi semplici. Ma la dimostrazione che abbiamo già ci dice che ci sono 18 famiglie di gruppi semplici finiti (ogni famiglia è un insieme infinito di gruppi di un certo tipo) e 26 gruppi sporadici, ciascuno dei quali è un ente matematico a se stante. Non ce ne sono altri.

TRE GIOCHI, TANTE MOSSE

- Il gioco M_{12} (basato sul gruppo di Mathieu M_{12}): 95.040 permutazioni
- Il gioco M_{24} (basato sul gruppo di Mathieu M_{24}): 244.823.040 permutazioni
- Il gioco Dotto (basato sul gruppo di Conway Co_0): 8.315.553.613.086.720.000 permutazioni



Rompicapi semplici sporadici

Abbiamo costruito tre giochi di permutazione basati su gruppi semplici sporadici noti come M_{12}, M_{24} e Co_1. Ma le permutazioni che rappresentano i gruppi semplici sporadici sono molto più restrittive riguardo al modo di permutare gli oggetti rispetto a quelle dei gruppi simmetrici. Quindi nei nostri giochi molte configurazioni sono impossibili, indipendentemente dal numero di mosse.

Come abbiamo già detto, la strategia che funziona per risolvere il cubo e altri giochi basati sui gruppi simmetrici non funziona per i nostri nuovi rompicapi. Ma si possono sviluppare altre strategie anche conoscendo pochi dettagli sui gruppi.

Il più semplice dei nostri giochi è M_{12}, basato sull'omonimo gruppo semplice sporadico. Il gruppo M_{12} è uno dei primi cinque gruppi semplici sporadici scoperti. Questi cinque gruppi sono detti gruppi di Mathieu, in onore del matematico francese Emile Mathieu che li identificò negli anni sessanta dell'Ottocento. Il giocatore ha di fronte una sequenza opportunamente mescolata dei numeri da 1 a 12, allineati su una riga. Sono permessi solo due tipi di mosse, ma ciascuno si può applicare un numero qualsiasi di volte e in qualsiasi ordine (*si veda il box a p. 63*). L'obiettivo è riordinare la sequenza nell'ordine numerico usuale (1, 2 ... 12).

A chi accetta la sfida diamo solo un suggerimento. Nel gioco (e nel gruppo M_{12}) è possibile portare cinque numeri qualunque in cinque posizioni qualsiasi tra le dodici della riga. Fatto questo, tutti gli altri numeri vanno al loro posto. Il gioco è risolto perché il gruppo M_{12} contiene $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$, cioè 95.040, permutazioni, esattamente il numero di modi con cui scegliere cinque dei 12 numeri e disporli in altrettanti punti della sequenza. (Il primo può occupare una qualsiasi delle 12 posizioni, il secondo una qualsiasi delle 11 posizioni rimanenti, e così via.) Il fatto che l'intera permutazione è determinata fissando le posizioni di cinque numeri implica che non ha senso cercare una successione di mosse che sposti solo pochi numeri. A parte la mossa nulla,

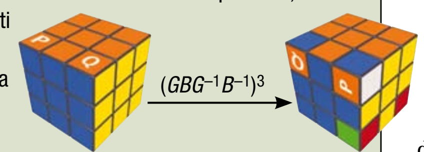
Decodificare il cubo di Rubik

In genere i giochi di permutazione classici come il cubo di Rubik, in cui l'obiettivo è di riportare i pezzi in una configurazione base, si possono risolvere seguendo una strategia articolata in due fasi.

FASE 1

Procedendo per tentativi si sceglie una breve sequenza casuale di mosse, come $GBG^{-1}B^{-1}$ (la notazione è spiegata nel box della pagina a fronte).

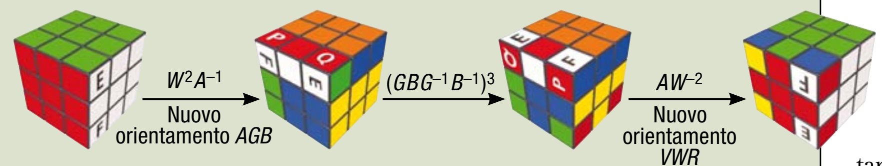
Si ripete la sequenza casuale varie volte. Spesso porterà a una disposizione in cui si sono mossi solo pochi cubetti: uno strumento utile per risolvere il cubo. Qui tre ripetizioni, cioè $(GBG^{-1}B^{-1})^3$, scambiano due coppie di cubetti ai vertici: le coppie al confine delle facce blu e arancione (cubetti indicati con *P* e *Q*, *a destra*) e la coppia al confine tra le facce gialla e rossa.



Cubo vergine (orientamento *AGB*)

FASE 2

Si modificano e generalizzano le mosse utili trovate. Per esempio, per scambiare tra loro i due cubetti d'angolo tra le facce rossa e bianca (indicati con *E* e *F* sul cubo «vergine» mostrato sotto nell'orientamento *VWR*), cerchiamo una mossa che «prepara» la nostra «mossa utile». La breve sequenza di preparazione W^2A^{-1} sposta i cubetti d'angolo *E* ed *F* nelle posizioni *P* e *Q* (per chiarezza le facce del cubo sono state riorientate da *VWR* a *AGB*). Ora si può applicare la mossa utile $(GBG^{-1}B^{-1})^3$, disfare la sequenza di preparazione applicando le mosse in ordine inverso, AW^{-2}, e ripristinare l'orientamento iniziale del cubo, *VWR*. L'effetto è stato di scambiare tra loro i cubetti d'angolo *E* ed *F* (*sotto*).



Cubo vergine (orientamento *VWR*)

Si può trovare una simile sequenza di preparazione per spostare qualsiasi coppia di cubetti d'angolo nelle posizioni scambiate da $(GBG^{-1}B^{-1})^3$. In questo modo si può costruire una mossa specifica per scambiare qualsiasi coppia di cubetti d'angolo. Procedendo in modo analogo con altre sequenze casuali si ottiene una flessibilità sufficiente a risolvere il cubo e qualsiasi altro gioco di permutazione classico.

George Retseck (*cubi*)

Che cos'è un gruppo semplice sporadico?

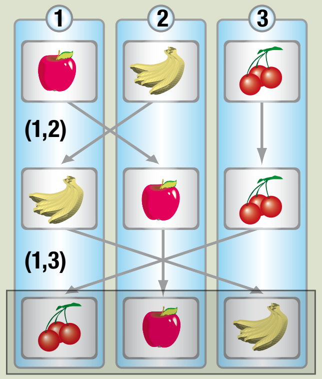
Tutti e tre i nuovi giochi rappresentano gruppi semplici sporadici di permutazioni. Per capire che cosa vuol dire questa frase servono alcune informazioni preliminari.

NOTAZIONE, NOTAZIONE, NOTAZIONE

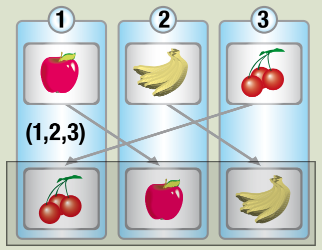
Il gruppo «simmetrico» S_n è il gruppo di tutte le possibili permutazioni, o riordinamenti, di n oggetti o simboli disposti su una riga. Il gruppo simmetrico S_3, per esempio, è l'insieme delle sei permutazioni distinte che danno luogo alle sei possibili disposizioni di tre oggetti diversi. Un gruppo di permutazioni comprende sempre la permutazione «fittizia», o identità, indicata con (1), che non fa nulla.

La permutazione (1,2) scambia tra loro gli oggetti presenti nella prima e nella seconda posizione (*a destra*).

La permutazione (1,3) scambia tra loro gli oggetti nella prima e terza posizione. L'applicazione di (1,3) al risultato di (1,2), che si indica con (1,2) • (1,3), dà la disposizione raffigurata qui a destra.



Combinare queste due permutazioni equivale ad applicare un'unica permutazione che si scrive (1,2,3). Questa notazione è un modo conciso per indicare di spostare nella seconda posizione l'oggetto presente nella prima, nella terza posizione quello nella seconda, e nella prima quello nella terza.



TUTTO È «MOLTIPLICAZIONE»

La tabella relativa alle sei permutazioni di tre oggetti mostra come si combinano tutte e 36 le coppie di elementi di S_3. La mossa nulla (1) si comporta come il numero 1 in una normale tabellina. Si noti che ogni «prodotto» dato dalla tabella è uguale a una delle sei permutazioni di partenza (*caselle bianche*), una proprietà di tutti i gruppi, detta chiusura.

		Poi si applica questa permutazione					
	∘ («e poi»)	(1)	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,2)	(1,3)	(2,3)
Prima si applica questa permutazione	(1)	(1)	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,2)	(1,3)	(2,3)
	(1,2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)	(1)	(2,3)	(1,2)	(1,3)
	(1,3,2)	(1,3,2)	(1)	(1,2,3)	(1,3)	(2,3)	(1,2)
	(1,2)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1)	(1,2,3)	(1,3,2)
	(1,3)	(1,3)	(2,3)	(1,2)	(1,3,2)	(1)	(1,2,3)
	(2,3)	(2,3)	(1,2)	(1,3)	(1,2,3)	(1,3,2)	(1)

Quello che succede in un sottogruppo rimane nel sottogruppo

Ogni possibile prodotto delle tre permutazioni nella regione arancione della tabella è uguale a una delle stesse tre permutazioni. A causa di questa proprietà di chiusura, anche queste tre permutazioni formano un gruppo: si dice che è un sottogruppo del gruppo S_3.

Si può sempre disfare

Per ogni permutazione della colonna più a sinistra della tabella, uno dei suoi prodotti è uguale a (1), cioè alla «permutazione identità». La permutazione alla sommità della stessa colonna dove si trova (1) è detta inversa della permutazione di partenza. In poche parole, ogni permutazione g ha un'inversa, indicata con g^{-1}. Per esempio l'inversa di (1,2,3), che si scrive $(1,2,3)^{-1}$, è (1,3,2), perché (1,2,3) • (1,3,2) è uguale a (1); (1,2) è l'inversa di sé stessa, cioè $(1,2)^{-1}$, perché, come mostra la tabella, (1,2) • (1,2) = (1).

METTERE TUTTO INSIEME

Un gruppo semplice è un gruppo senza sottogruppi «normali non banali». Ogni gruppo ha almeno due sottogruppi: se stesso e il sottogruppo il cui unico elemento è (1); un sottogruppo non banale è qualsiasi altro sottogruppo possibile.

E allora, che cosa vuol dire normale?

Scegliamo una qualsiasi permutazione nella tabella moltiplicativa, diciamo (1,2), e «moltiplichiamola» per qualsiasi permutazione del sottogruppo colorato in arancione, per esempio (1,2,3).

(1,2) • (1,2,3) = (1,3)

Moltiplichiamo il risultato per l'inverso della prima permutazione, in questo caso (1,2):

(1,3) • (1,2) = (1,3,2)

In breve: (1,2) • (1,2,3) • $(1,2)^{-1}$ = (1,3,2)

Se il risultato di ogni prodotto triplo definito in questo modo è all'interno del sottogruppo, il sottogruppo si dice normale. Qui il prodotto finale (1,3,2) si trova effettivamente nel sottogruppo arancione.

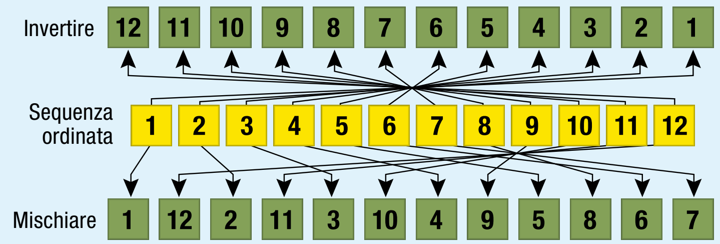
D'accordo, è semplice. E sporadico?

La maggior parte dei gruppi semplici è stata classificata in famiglie di gruppi semplici con un numero infinito di elementi. Ma 26 di loro sono casi originali che non appartengono a queste famiglie e non hanno molto in comune tra di loro. Per non usare il termine «vari ed eventuali», i matematici li chiamano sporadici.

Johnny Johnson

Che cosa troverete in rete

Il gioco di Mathieu M_{12}, che rappresenta il gruppo semplice sporadico M_{12}, è stato progettato dagli autori in modo da poterci giocare on line. Il gioco inizia con una disposizione casuale dei numeri che vanno da 1 a 12. L'obiettivo è riordinarli usando una sequenza di mosse di due tipi, ciascuna delle quali si può eseguire cliccando su un pulsante. Il diagramma mostra l'effetto di ognuna delle mosse sulla sequenza ordinata.



Un secondo gioco di Mathieu, M_{24}, rappresenta il gruppo semplice sporadico M_{24}. Nella disposizione non mescolata i numeri da 1 a 23 sono disposti in senso orario su un cerchio, e lo 0 è posto fuori dal cerchio, a ore 12. Come per il gioco M_{12}, l'obiettivo è ripristinare l'ordine originale a partire da un mescolamento casuale. Anche il gioco M_{24} prevede due tipi di mosse. Una mossa ruota il cerchio di una «tacca», mandando nella posizione 2 il numero che si trova nella posizione 1, nella 3 il numero nella 2 e così via. Il numero nella posizione 23 è mandato nella posizione 1, e il numero fuori dal cerchio non si muove. La seconda mossa scambia le coppie di numeri con lo stesso colore.

Ryan Reid

che lascia le configurazioni come sono, le altre devono lasciare al loro posto meno di cinque numeri. In altre parole, ogni successione non banale di mosse deve spostare almeno otto dei 12 numeri.

Riservato ai coraggiosi

Il secondo gioco, M_{24}, è composto da 23 numeri disposti in cerchio più un ventiquattresimo numero fuori dal cerchio. Come nel gioco M_{12}, sono permessi solo due tipi di mosse (*si veda il box in questa pagina*). Il gruppo di permutazioni generato dalle due mosse di M_{24} è il gruppo di Mathieu M_{24}. Come M_{12}, anche M_{24} è «5-transitivo»: con opportune combinazioni delle due mosse si può manipolare la configurazione in modo che cinque dei 24 numeri siano disposti in cinque delle 24 posizioni. A causa della transitività il nostro suggerimento per risolvere M_{12} aiuta anche a risolvere M_{24}: trovate mosse che riportano i numeri da 1 a 5 al loro posto senza spostare i numeri che si trovano già al loro posto.

Ma questa volta il gioco non è finito. Il gruppo M_{24} ha 24 × 23 × 22 × 21 × 20 × 48 elementi, vale a dire 244.823.040; quindi anche dopo che i numeri da 1 a 5 sono tornati al loro posto, gli altri 19 numeri possono ancora essere distribuiti attorno al cerchio in 48 modi diversi.

Dotto, il nostro ultimo gioco, si basa sul gruppo di Conway Co_0, pubblicato nel 1968 dal matematico John H. Conway della Princeton University. Co_0 contiene il gruppo semplice sporadico Co_1 e ha il doppio degli elementi di Co_1. Conway è troppo modesto per intitolarsi il gruppo Co_0, e quindi lo chiama «.0» (punto, in inglese *dot*, e 0, da qui il nome).

Siamo costretti a riservare i dettagli di Dotto alla nostra trattazione su Internet. Però osserviamo che sia il gioco sia il gruppo su cui si basa hanno proprietà matematiche affascinanti. Il rompicapo è imparentato con il reticolo di Leech, un insieme di «punti», o elenchi ordinati di numeri, in uno spazio a 24 dimensioni. Si sa che tra tutti i modi per disporre sfere nello spazio a 24 dimensioni in modo che i centri delle «sfere» si trovino sui punti di un reticolo, la disposizione basata sul reticolo di Leech è la più compatta.

Neonati e mostri

Solo quattro gruppi semplici sporadici hanno più elementi di Co_1: il gruppo di Janko J_4, il gruppo di Fischer Fi_{24}', il Baby Mostro B e il Mostro M. Fedele al suo nome, il Mostro è il più grande di tutti, con circa 8×10^{53} elementi. Fu costruito nel 1980 da Robert L. Griess, Jr., dell'Università del Michigan ad Ann Arbor come gruppo delle trasformazioni di una complessa struttura matematica in uno spazio a 196.884 dimensioni.

Non abbiamo provato a costruire giochi basati su altri gruppi semplici sporadici, anche se alcuni saranno senz'altro possibili. Ma progettare un gioco basato sul Mostro sarebbe un'impresa matematica ardua. Il motivo è che non si sa se il Mostro sia il gruppo delle permutazioni di qualche oggetto abbastanza piccolo da poter essere visualizzato, anche se, secondo una congettura, è il gruppo delle permutazioni di un certo spazio curvo a 24 dimensioni. Se si riuscisse a progettare un «rompicapo del Mostro» saremmo vicini alla dimostrazione di questa affascinante congettura. ■

Letture

I cubisti giocherellano con i cubetti del Cubo Magico e i cubologi li risolvono. Hofstadter D.R., in «Le Scienze» n. 153, maggio 1981.

L'enorme teorema. Gorenstein D., in «Le Scienze» n. 210, febbraio 1986.

Sphere Packings, Lattices and Groups. Conway J.H. e Sloane N.J.A., Springer-Verlag, 1999.

Per un elenco dei gruppi sporadici: **Sporadic Group.** Weisstein E.W., in *MathWorld-A Wolfram Web Resource*. **http://mathworld.wolfram.com/SporadicGroup.html.**

lescienze.it

Tutti e tre i giochi, M_{12}, M_{24} e Dotto, sono disponibili sul nostro sito: www.lescienze.it (con M_{12} e M_{24} si gioca direttamente in Rete e con qualunque computer; Dotto si deve scaricare e si può giocare solo con un PC.)