Prova scritta di Algebra

23 gennaio 2014

1. Si risolva il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 5 \mod 3 \\ 3x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 3 \mod 8 \end{cases}$$

2. In S_{10} sia $\alpha = (1,8)(8,5,6)(5,8)(4,2,7)(2,1,4,7,5,9)(9,10)$.

a) Si scriva α come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni. Si dica se α è pari o dispari motivando la risposta.

b) Si determinino i sottogruppi di $\langle\alpha\rangle$ e si dica se $\langle\alpha^3\rangle = \langle\alpha^7\rangle$.

c) Si scriva la tabella motiplicativa del gruppo quoziente $\langle\alpha\rangle/\langle\alpha^3\rangle$

3. Sia G un gruppo e sia A un sottogruppo abeliano di G. Sia

$$C := C_G(A) = \{g \in G \mid ga = ag \text{ per ogni } a \in A\}.$$

a) Si provi che C è un sottogruppo di G.
b) Si provi che A è un sottogruppo normale di C.

4. Si consideri l'anello dei polinomi a coefficienti razionali $\mathbb{Q}[x]$.
a) Si dica se $\mathbb{Q}[x]$ è un dominio a ideali principali.
b) Si determini il nucleo I dell'omomorfismo di anelli $\varphi\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$, $p(x) \mapsto p(\sqrt{2})$, e si dica se φ è suriettivo.
c) Si dica se I è un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x]$.
d) Si dica se l'elemento $(x+1)+I$ è invertibile in $\mathbb{Q}[x]/I$ e in caso affermativo se ne determini l'inverso.

5. Siano $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x + 4$ e $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$.
a) Determinare il massimo divisore monico $d(x)$ di f e g.
b) Determinare due polinomi $a(x), b(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tali che

$$d(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x).$$