Prova scritta di Algebra

23 settembre 2016

1. Si consideri la seguente applicazione:

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}_{21} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \\ [x]_{21} & \longmapsto & ([2x]_3, [4x]_7) \end{cases}$$

a) Verificare che φ è ben definita.

b) Dire se $([1]_3, [5]_7) \in Im\varphi$ e in tal caso trovarne la preimmagine.

c) Dire, motivando adeguatamente la risposta se la mappa φ è biiettiva.

2. Nel gruppo moltiplicativo dei complessi $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si consideri l'elemento $\omega := \cos(\frac{2\pi}{8}) + i\sin(\frac{2\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Si determini il periodo di ω e si dica se $\omega^3 = \omega^{37}$, motivando adeguatamente la risposta.

b) Si scrivano gli elementi del gruppo $H := \langle\omega\rangle$.

c) Si determinino i sottogruppi di H, scrivendo esplicitamente gli elementi di ciascuno di essi.

3. Siano A un anello, B un dominio d'integrità e $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli. Sia $a \in A, a \neq 0$ e tale che $a^4 = 0_A$. Provare che $a \in \ker f$.

4. Si consideri l'anello dei polinomi $\mathbb{Z}_5[x]$.

a) Si dica se $\mathbb{Z}_5[x]$ è un dominio a ideali principali motivando la risposta.

b) Sia I l'ideale generato da $p(x) := x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Si dica se I è un ideale massimale di $\mathbb{Z}_5[x]$.

c) Si determinino gli ideali massimali dell'anello quoziente $A := \mathbb{Z}_5[x]/I$. A è un campo?

5. Siano $f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 1$ e $g(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$.

a) Determinare il massimo divisore monico $d(x)$ di f e g.

b) Determinare due polinomi $a(x), b(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tali che

$$d(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x).$$

Soluzioni

Esercizio 1.

a) Per verificare che φ è ben definita bisogna verificare che se $[x]_{21} = [y]_{21}$ allora $\varphi([x]_{21}) = \varphi([y]_{21})$, ovvero $([2x]_3, [4x]_7) = ([2y]_3, [4y]_7)$. Abbiamo che, se $[x]_{21} = [y]_{21}$, allora $y = x + 21k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ e quindi

$$\begin{aligned} ([2y]_3, [4y]_7) &= ([2(x+21k)]_3, [4(x+21k)]_7) \\ &= ([2x+42k)]_3, [4x+84k)]_7) \\ &= ([2x]_3 + [42k)]_3, [4x]_7 + [84k)]_7) \\ &= ([2x]_3, [4x]_7) \end{aligned}$$

perchè $[42k)]_3 = [0]_3$ e $[84k)]_7 = [0]_7$. Quindi φ è ben definita.

b) L'elemento $([1]_3, [5]_7)$ appartiene all'immagine di φ se e solo se esiste un elemento $[x]_{21}$ del dominio tale che $\varphi([x]_{21}) = ([1]_3, [5]_7)$, ovvero $([2x]_3, [4x]_7) = ([1]_3, [5]_7)$, o equivalentemente se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \bmod 3 \\ 4x \equiv 5 \bmod 7 \end{cases}$$

ha soluzione. Poichè $M.C.D.(3,7) = 1$, per il teorema cinese del resto il sistema ha soluzione. Quindi l'elemento $([1]_3, [5]_7)$ appartiene all'immagine di φ. Per trovare la preimmagine risolviamo il sistema. Si verifica immediatamente che la prima congruenza ha soluzione particolare 2 (perchè $2 \cdot 2 = 4 \equiv 1 \bmod 3$) e quindi soluzione generale $x = 2 + 3k, k \in \mathbb{Z}$. Sostituiamo nella seconda congruenza ottenendo

$$\begin{aligned} 4(2+3k) &\equiv 5 \bmod 7 \\ 8 + 12k &\equiv 5 \bmod 7 \\ 5k &\equiv 4 \bmod 7 \end{aligned}$$

Quest'ultima congruenza ha soluzione particolare 5 (perchè $5 \cdot 5 = 25 \equiv 4 \bmod 7$). Sostituendo questo valore di k nell'espressione di x otteniamo una soluzione particolare del sistema: $x_0 = 2 + 3 \cdot 5 = 17$. La soluzione generale è $x = 17 + 21h, h \in \mathbb{Z}$. Pertanto la preimmagine di $([1]_3, [5]_7)$ è $[17]_{21}$.

c) Poichè $M.C.D.(3,7) = 1$, per il teorema cinese del resto il sistema

$$\begin{cases} 2x \equiv a \bmod 3 \\ 4x \equiv b \bmod 7 \end{cases}$$

ha soluzione per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$. Questo ci assicura che, per ogni elemento del codominio $([a]_3, [b]_7)$, esiste un elemento del dominio $[x]_{21}$ tale che $\varphi([x]_{21}) =$

$([a]_3, [b]_7)$ e pertanto φ è suriettiva. Poichè dominio e codominio sono insiemi finiti con la stessa cardinalità, se φ è suriettiva essa deve essere anche iniettiva. Così φ è una biiezione.

Esercizio 2. Sia $\omega := \cos(\frac{2\pi}{8}) + i\sin(\frac{2\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Abbiamo che se $n \in \mathbb{N}$,

$$\omega^n := \cos(\frac{2\pi}{8}n) + i\sin(\frac{2\pi}{8}n)$$

e quindi $\omega^n = 1$ se e solo se

$$\begin{cases} \cos(\frac{2\pi n}{8}) = 1 \\ \sin(\frac{2\pi n}{8}) = 0 \end{cases} \iff \frac{2\pi n}{8} = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff n \text{ è multiplo di } 8.$$

Quindi il periodo di ω è 8.

Per i risultati visti nel corso si ha che $\omega^3 = \omega^{37}$ se e solo se $3 \equiv 37 \mod 8$. Ma $37 \equiv 5 \mod 8$, quindi $3 \not\equiv 37 \mod 8$ e $\omega^3 \neq \omega^{37}$.

b) Si ha che

$$H := \langle \omega \rangle = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7\}.$$

c) I sottogruppi di H sono:

$$H_1 = \{1\},\ H_2 = \langle \omega^2 \rangle = \{1, \omega^2, \omega^4, \omega^6\},\ H_3 = \langle \omega^4 \rangle = \{1, \omega^4\},\ H_4 = H.$$

Esercizio 3. Poichè f è un omomorfismo di anelli si ha

$$0_B = f(0_A) = f(a^4) = f(a)^4 = f(a) \cdot f(a)^3.$$

Essendo B un dominio d'integrità, in B il prodotto di due elementi è 0_B se e solo se almeno uno dei due elementi ùguale a 0_B. Pertanto, da $f(a) \cdot f(a)^3 = 0_B$ otteniamo che o $f(a) = 0_B$, e in questo caso abbiamo finito perchè allora $a \in \ker f$, oppure $f(a)^3 = 0_B$. Nel secondo caso, ripetendo il ragionamento abbiamo che $f(a) \cdot f(a)^2 = 0_B$ e quindi di nuovo o $f(a) = 0_B$ oppure $f(a)^2 = 0_B$. Se ancora $f(a)^2 = 0_B$ otteniamo che $f(a) \cdot f(a) = 0_B$ da cui deve essere per forza $f(a) = 0_B$ e quindi $a \in \ker f$.

Esercizio 4.

a) Poichè $\mathbb{Z}_5$ è un campo, $\mathbb{Z}_5[x]$ è un dominio euclideo e quindi anche un dominio a ideali principali.

b) L'ideale $I = (p(x))$ è massimale in $\mathbb{Z}_5[x]$ se e solo se $p(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_5[x]$. Poichè $p(x) = x^4 + 1 = x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$ è la fattorizzazione in irriducibili in $\mathbb{Z}_5[x]$ (perchè 2 e -2 non sono quadrati in $\mathbb{Z}_5$), $p(x)$ non è irriducibile e quindi I non è massimale.

c) Sappiamo dal punto b) che I non è un ideale massimale di $\mathbb{Z}_5[x]$. Poichè il quoziente $A := \mathbb{Z}_5[x]/I$ è un campo se e solo se I è un ideale massimale, possiamo dedurre che A non è un campo.

Sia J un ideale massimale di A. Allora per i teorema di corrispondenza, $J = L/I$, con L ideale di $\mathbb{Z}_5[x]$ contenente I. Allora $L = (g)$ con $g \in \mathbb{Z}_5[x]$ ed inoltre g deve essere un polinomio che divide $p(x)$. Infine J è massimale in A se e solo se L è massimale in $\mathbb{Z}_5[x]$ e quindi $g(x)$ deve essere irriducibile. Poichè $p(x) = (x^2+2)(x^2-2)$ è la fattorizzazione in irriducibili di $p(x)$, g può essere $x^2 + 2$ oppure $x^2 - 2$. Quindi gli ideali massimali di A sono $\frac{(x^2+2)}{I}$ e $\frac{(x^2-2)}{I}$.

Esercizio 5.

a) Per trovare il massimo comun divisore tra f e g usiamo l'algoritmo di Euclide. Esso ci fornirà anche i polinomi $a(x)$ e $b(x)$ richiesti nel punto b).

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 + x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 1 & x^3 + 3x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^5 - 3x^4 - x^3 - x^2 & x^2 - 2x \\ \cline{1-1}
-2x^4 - 6x^3 + x^2 + x - 1 & \\
2x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 2x & \\ \cline{1-1}
3x^2 + 3x - 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 3x^2 + x + 1 & 3x^2 + 3x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 - x^2 + 1/3x & 1/3x + 2/3 \\ \cline{1-1}
2x^2 + 4/3x + 1 & \\
-2x^2 - 2x + 2/3 & \\ \cline{1-1}
-2/3x + 5/3 &
\end{array}
$$

Per semplificare i calcoli dividiamo $3x^2 + 3x - 1$ per $-2x + 5$ anzichè per $-2/3x + 5/3$.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^2 + 3x - 1 & -2x + 5 \\ \cline{2-2}
-3x^2 + 15/2x & -3/2x - 21/4 \\ \cline{1-1}
21/2x - 1 & \\
-21/2x + 105/4 & \\ \cline{1-1}
101/4 &
\end{array}
$$

L'algoritmo di Euclide ci da

$$\begin{array}{ccc}
1 & 0 & f \\
0 & 1 & g \\
1 & -x^2+2x & 3x^2+3x+-1 \\
-1/3x-2/3 & 1-(-x^2+2x)(1/3x+2/3) & -2/3x+5/3 \\
c(x) & d(x) & \frac{101}{4} \\
* & * & 0
\end{array}$$

con

$$c(x) := 1 + (\frac{9}{2}x + \frac{63}{4})(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3})$$

e

$$d(x) := -x^2 + 2x + (\frac{9}{2}x + \frac{63}{4})[1 - (-x^2+2x)(1/3x+2/3)],$$

da cui otteniamo che un massimo comun divisore di f e g è $101/4$ e quindi il massimo comun divisore monico è 1. Inoltre

$$\frac{101}{4} = f(x)c(x) + g(x)d(x)$$

e moltiplicando ambo i membri per $\frac{4}{101}$

$$1 = f(x)c(x)\frac{4}{101} + g(x)d(x)\frac{4}{101}.$$

Quindi

$$a(x) = \frac{4}{101}c(x) = \frac{1}{101}(-6x^2 - 33x - 38)$$

e

$$b(x) = \frac{4}{101}d(x) = \frac{1}{101}(6x^4 + 21x^3 - 28x^2 - 58x + 63).$$