Prova scritta di Algebra

26 gennaio 2017

1. Si risolva il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 8 \mod 5 \\ 11x \equiv 1 \mod 7 \\ x \equiv 17 \mod 12 \end{cases}$$

Si determini la sua minima soluzione positiva.

2. In S_9 siano $\alpha = (4,9)(9,5,6)(3,2,7)$ e $\beta = (5,9)(2,4,3,7,5,1)$

a) Si scrivano α e β come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni. Si dica se sono pari o dispari motivando la risposta.

b) Si calcoli $\alpha \circ \beta$.

c) Si determinino i periodi di α e β. Si dica se il gruppo $\langle \alpha \rangle$ contiene un sottogruppo di ordine 4 e in caso affermativo si esibisca un tale sottogruppo e si dica se è unico.

d) Si dica se il gruppo $\langle \beta \rangle$ contiene elementi di periodo 3.

3. Sia $\varphi : \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ la mappa definita da $[a]_{27} \mapsto [a^3]_3$.

a) Si verifichi che φ è ben definita ed è un omomorfismo di anelli.

b) Si determini il nucleo di φ e si dica se φ è suriettiva.

4. Sia I l'ideale di $\mathbb{Q}[x]$ generato dal polinomio $f(x) = x^4 - x^2 - 18$.

a) Si dica se I è un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x]$ motivando la risposta.

b) Si determinino gli ideali massimali di $\mathbb{Q}[x]$ che contengono I.

c) Si dica se l'elemento $(x+3)+I$ è un elemento invertibile nell'anello $A := \mathbb{Q}[x]/I$.

5. Si dimostri che il polinomio $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$ è irriducibile nell'anello $\mathbb{Z}_5[x]$. È irriducibile anche in $\mathbb{Z}_3[x]$?