Prova scritta di Algebra

6 Giugno 2013

1. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 \mod 5 \\ 35x \equiv 1 \mod 12 \end{cases}$$

2. Si considerino le seguenti permutazioni in S_{10}:

$$\alpha = (1,2,3)(4,5,7)(7,4)(6,7,10)(10,8,9,6), \quad \beta = (1,2,3)(2,3,4)(7,6,9,8,10)$$

a) Si scrivano α, β e $\alpha\beta$ come prodotto di cicli disgiunti.
b) Si determinino gli ordini di $\langle\alpha\rangle$, $\langle\beta\rangle$ e $\langle\alpha\beta\rangle$.
c) Si determini l'intersezione $\langle\alpha^3\rangle \cap \langle\beta^2\rangle$. (Suggerimento: usare la struttura dei gruppi ciclici).

3. Sia $G = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$.

a) Si provi che G è un gruppo rispetto alla moltiplicazione di matrici.

b) Si dimostri che l'insieme

$$N = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

è un sottogruppo normale di G e che $G/N \cong \mathbb{R}^*$.

4. Sia A un anello a ideali principali e siano $I = (a)$ e $J = (b)$ ideali di A. Dimostrare che
a) $I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$ è un ideale di A.

b) $I + J = A$ se e solo se $M.C.D.(a, b) = 1_A$.

5. Nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]$, con p numero primo, si considerino i polinomi

$$f(x) = x^4 + 2, \qquad g(x) = x^2 - 6.$$

a) Determinare per quali primi p il polinomio $f(x)$ è divisibile per $g(x)$ in $\mathbb{Z}_p[x]$. $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$?

b) Posto $p = 3$, scomporre $f(x)$ in irriducibili in $\mathbb{Z}_3[x]$.

c) Posto $p = 5$, trovare il massimo comun divisore monico di $f(x)$ e $g(x)$ ed esprimerlo nella forma

$$a(x)f(x) + b(x)g(x)$$

con $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$.