Prova scritta di Istituzioni di Algebra Superiore I

24 Giugno 2010

1. Sia $u = \sqrt{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

a) Determinare il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$;

b) mostrare che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(u)$ e calcolare $|\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})|$;

c) dire se $\mathbb{Q}(u)$ è estensione normale di $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

2. Si consideri il polinomio $f(x) = x^4 + 2x^2 - 15 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Si determini il campo di spezzamento Σ di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ e si calcoli $|\Sigma : \mathbb{Q}|$;

b) si scrivano gli elementi di $\mathrm{Gal}(\Sigma : \mathbb{Q})$ come permutazioni sulle radici di $f(x)$ e si dica a quale gruppo è isomorfo $\mathrm{Gal}(\Sigma : \mathbb{Q})$;

d) si determinino i sottocampi di Σ specificando quali di essi sono estensioni di Galois di $\mathbb{Q}$.

3. Sia F un campo di ordine 625.

a) Determinare il sottocampo primo F_0 e $|F : F_0|$.

b) Descrivere $Aut(F)$.

c) Dire se il polinomio $x^3 + x + 1 \in F_0[x]$ è irriducibile in $F_0[x]$ e in $F[x]$ motivando la risposta.

4. Scomporre il polinomio $x^{15} - 1$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$. Come si fattorizza $x^{15} - 1$ in $\mathbb{Z}_{61}[x]$?

5. Sia G un gruppo finito e siano $H \leq K \leq G$ due sottogruppi di G. Dimostrare che $|G : H| = |G : K||K : H|$. .