Prova scritta di Istituzioni di Algebra Superiore I

10 Luglio 2008

1. Sia $u = i + \sqrt{2} \in \mathbb{C}$.

a) Provare che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$;

b) determinare $|\mathbb{Q}(U) : \mathbb{Q}|$;

c) determinare il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{R}$.

2. Si consideri il polinomio $f(x) = x^4 - x^2 - 6 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Si determini il campo di spezzamento Σ di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ e si calcoli $|\Sigma : \mathbb{Q}|$;

b) si scrivano gli elementi di $\mathrm{Gal}(\Sigma : \mathbb{Q})$ come permutazioni sulle radici di $f(x)$ e si dica a quale gruppo è isomorfo $\mathrm{Gal}(\Sigma : \mathbb{Q})$;

d) si determinino i sottocampi di Σ specificando quali di essi sono estensioni di Galois di $\mathbb{Q}$.

3. Dare una costruzione esplicita del campo F di ordine 27. Detto F_0 il sottocampo fondamentale di F, dire qual è la caratteristica di F, chi è F_0 e qual è il grado di F su F_0. Dimostrare che per ogni $\alpha \in F \setminus F_0$ si ha $F = F_0(\alpha)$.

4. Determinare il polinomio ciclotomico $\Phi_{12}(x)$. Fattorizzare $\Phi_{12}(x)$ in prodotto di irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$ e in $\mathbb{Z}_{13}[x]$.

5. Sia G un gruppo e H un sottogruppo di G con $|G : H| = 2$. Dimostrare che H è un sottogruppo normale di G.