Prova scritta di Istituzioni di Algebra Superiore I

11 Settembre 2008

1. Sia $u = 3 - i\sqrt{2} \in \mathbb{C}$.

a) Determinare il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$;

b) scrivere $(2-u)^{-1}$ come polinomio in u a coefficienti in $\mathbb{Q}$;

c) dire se $\mathbb{Q}(u)$ è estensione normale di $\mathbb{Q}$.

2. Si consideri il polinomio $f(x) = x^3 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Si determini il campo di spezzamento Σ di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ e si calcoli $|\Sigma : \mathbb{Q}|$;

b) si scrivano gli elementi di $\mathrm{Gal}(\Sigma : \mathbb{Q})$ come permutazioni sulle radici di $f(x)$ e si dica a quale gruppo è isomorfo $\mathrm{Gal}(\Sigma : \mathbb{Q})$;

d) si determinino i sottocampi di Σ specificando quali di essi sono estensioni di Galois di $\mathbb{Q}$.

3. Sia p un primo e F un campo finito di ordine p^n.

a) Determinare n nel caso in cui la dimensione di F come spazio vettoriale sul suo sottocampo primo sia 4.

b) Nelle ipotesi del punto (a), descrivere il reticolo dei sottocampi di F.

c) Per $p = 5$ dire se F contiene una radice primitiva tredicesima dell'unità.

4. Scomporre il polinomio $x^{18} - 1$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$ e in $\mathbb{Z}_3[x]$.

5. Sia R un anello commutativo con unità. Dimostrare che R è un campo se e solo se gli unici suoi ideali sono R e $\{0_R\}$.