

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Dispense del corso di
Biofluidodinamica

Giulia GIANTESIO
giulia.giantesio@unicatt.it

Alessandro MUESTI
alessandro.muesti@unicatt.it

Anno accademico 2019/2020

21 novembre 2019

Indice

1	Fisiologia e reologia del flusso sanguigno	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Biofluidodinamica	2
1.3	Il sistema circolatorio	3
1.4	Il sangue e i suoi aspetti non newtoniani	3
2	Elementi di Meccanica dei Continui	8
2.1	Cinematica dei continui	8
2.1.1	Derivata materiale	9
2.1.2	Velocità e calcolo della derivata materiale	9
2.1.3	Analisi del gradiente di velocità	11
2.1.4	Formula di Eulero	11
2.2	Equazioni di bilancio	12
2.2.1	Teorema del trasporto	12
2.2.2	Bilancio della massa ed equazione di continuità	13
2.2.3	Bilancio della quantità di moto e Teorema degli sforzi	14
2.2.4	Bilancio del momento della quantità di moto	16
2.3	Bilancio dell'energia	17
2.4	Formulazione ALE	17
2.5	Complementi ed esercizi	18
3	Fluidi perfetti barotropici	21
3.1	Alcune definizioni generali	21
3.2	Fluidi perfetti	22
3.3	Condizioni al contorno per i fluidi perfetti	23
3.4	Statica dei fluidi perfetti	24
3.5	Onde acustiche di piccola ampiezza	25
3.6	Complementi ed esercizi	27
4	Fluidi viscosi ed equazione di Navier-Stokes	33
4.1	Fluidi stokesiani	33
4.2	Fluidi newtoniani e legge di Cauchy-Poisson	35
4.2.1	Equazioni di Navier-Stokes	36
4.2.2	Condizioni al contorno	37
4.2.3	Equazioni di Navier-Stokes in formulazione ALE	38
4.3	Numero di Reynolds	38
4.4	Soluzioni esatte delle equazioni di Navier-Stokes	40
4.4.1	Moto piano di Poiseuille-Couette	41

4.4.2	Flussi viscometrici a simmetria cilindrica	44
4.5	Strato limite	47
4.5.1	Un problema introduttivo: il primo problema di Stokes	48
4.5.2	Equazioni di Prandtl per lo strato limite laminare	50
4.5.3	Teoria di Blasius	52
4.6	La legge di Darcy e i mezzi porosi	55
4.7	Complementi ed esercizi	59
5	Fluidi non newtoniani	63
5.1	Fluidi stokesiani	63
5.1.1	Moto laminare in un tubo rettilineo per un fluido power-law	66
5.1.2	Moto piano di Poiseuille per un fluido power law	67
5.1.3	Modelli newtoniani generalizzati per il sangue	69
5.1.4	Effetto rod-climbing	70
5.2	Fluidi di Rivlin-Ericksen	74
5.3	Fluidi micropolari	77
5.3.1	Fluidi micropolari viscosi lineari	80
5.4	Modelli con sforzo di soglia	83
5.4.1	Fluidi di Bingham	83
5.4.2	Moto piano di Poiseuille per un fluido di Bingham	85
5.4.3	Altri modelli a sforzo di soglia	87
5.5	Complementi ed esercizi	88
6	Stabilità e turbolenza nei fluidi newtoniani incomprimibili	96
6.1	L'esperimento di Reynolds	96
6.2	Stabilità	98
6.2.1	Stabilità in norma dell'energia	99
6.3	Turbolenza	101
6.3.1	Equazione mediata di Reynolds	101
6.3.2	Viscosità cinematica turbolenta	103
6.3.3	Equazioni filtrate e <i>Large Eddy Simulations</i>	104
A	Elementi di calcolo tensoriale	106
A.1	Tensori di ordine 2	106
A.2	Analisi dei campi tensoriali	110
A.2.1	Gradiente	110
A.2.2	Divergenza	111
A.2.3	Laplaciano	112
A.2.4	Rotore	112
A.2.5	Altre proprietà del calcolo tensoriale tridimensionale	113
A.3	Operatori differenziali in coordinate polari	114

Capitolo 1

Fisiologia e reologia del flusso sanguigno

1.1 Introduzione

La fluidodinamica è una disciplina scientifica che pone le sue radici nell'antichità: uno dei primi risultati è il famoso principio di Archimede sul galleggiamento dei corpi, datato III secolo a.C. (celebre è l'esclamazione "Eureka!" che lo ha seguito nella leggenda). In effetti, le navi erano il mezzo di trasporto più comune per coprire grandi distanze (oggi il mezzo di trasporto forse più usato per le grandi distanze è l'aereo, e il suo funzionamento si appoggia comunque sulla dinamica nell'aria) e i problemi di idraulica legati all'apporto idrico per l'agricoltura e lo sviluppo delle città erano di fondamentale importanza. D'altro canto, il campo di applicazione delle equazioni dei fluidi è ampio: con il termine *fluido* si copre una vasta gamma di materiali, dai liquidi ai gas. Persino il vetro può essere ritenuto un fluido (con un coefficiente di viscosità molto elevato) e d'altronde è difficile fornire fisicamente una definizione rigorosa di fluido (esistono delle definizioni matematiche di alcune classi di fluidi).

In questo corso noi ci occuperemo essenzialmente degli aspetti matematici e modellistici della fluidodinamica. Dal punto di vista matematico, infatti, questa scienza ha fornito innumerevoli problemi da risolvere ed è tuttora fra le discipline più studiate (si pensi alla sterminata letteratura che riguarda le equazioni di Navier-Stokes, che descrivono il moto del fluido più diffuso, l'acqua, ma per cui non esiste ancora un teorema sufficientemente generale che garantisca l'esistenza e l'unicità della soluzione).

L'approccio che seguiremo sarà quello della Meccanica dei Continui, una disciplina che affronta da un medesimo punto di vista lo studio di una vasta gamma di materiali, solidi o fluidi, cercandone le connessioni profonde, e che raggiunge i migliori risultati proprio con la fluidodinamica e con l'elasticità. Il primo obiettivo sarà quello di *ricavare* le equazioni differenziali che regolano il moto di un determinato tipo di fluido. Per fare questo, dovremo formulare delle ipotesi riguardo al comportamento meccanico di tale fluido, ovvero dovremo scegliere un opportuno *modello*. Tale scelta porterà ad un particolare sistema di *equazioni differenziali alle derivate parziali* (EDP). Durante il corso proporremo diversi modelli di fluidi (quindi otterremo diversi sistemi di EDP) che risultano utili per descrivere il comportamento di liquidi biologici quali il sangue.

In generale, purtroppo, non saremo in grado di risolvere un tale sistema, spesso quindi ci accontenteremo di ricavare dalle EDP delle informazioni di tipo *qualitativo*, che descrivano

cioè in qualche senso alcune peculiarità del modello.

In molti casi dovremo anche effettuare delle semplificazioni, a volte grossolane, per poter ottenere informazioni adeguate. Non bisogna quindi dimenticare che tutte le conclusioni che ricaveremo saranno valide per quella scelta particolare che abbiamo fatto, e che la possibilità di applicarle nella *realtà* dipenderà essenzialmente dalla bontà delle scelte fatte.

1.2 Biofluidodinamica

Introduciamo ora alcuni aspetti fondamentali dell'*emoreologia*, che è la disciplina che studia il comportamento idrodinamico del sangue nell'apparato circolatorio, al fine di motivare perché in *Biofluidodinamica* è opportuno elaborare diversi modelli di fluidi.

Come abbiamo in parte detto nella sezione precedente, con il termine *fluido* si intende comunemente un particolare stato della materia che comprende liquidi e gas. Generalmente quando pensiamo ad un fluido pensiamo a sostanze che non hanno una forma propria ma assumono la forma del recipiente nel quale sono contenuti e che sono “più deformabili” rispetto ai solidi. Il fatto che con il concetto di fluido possiamo descrivere una vasta gamma di materiali reali fa sì che la *fluidodinamica* sia una delle discipline attualmente più studiate e di più grande interesse applicativo. La fluidodinamica è infatti quella parte della Meccanica dei Continui che studia dal punto di vista matematico il comportamento dei fluidi. Vedremo che in questa disciplina è possibile dare diverse definizioni matematiche di alcune classi di fluidi al fine di descrivere il comportamento specifico dei materiali reali. La fluidodinamica trova numerosi applicazioni nel campo industriale (profili alari, profili di flusso intorno ad auto o navi, scambiatori di calore), ambientale (formazione di uragani, studio correnti oceaniche) e biologico (flusso d'aria nei polmoni, flusso sanguigno in arterie e vene, protesi vascolari o valvolari, sistemi di dialisi).

In particolare la *Biofluidodinamica* studia il moto dei fluidi biologici in qualsiasi contesto (nell'arterie, nel volo di uccelli o nel nuoto dei pesci, ...). La biofluidodinamica serve a capire come funzionano gli esseri umani (*interesse fisiologico*), a indagare le cause e lo sviluppo di malattie (*fisiopatologia*), a riconoscere patologie o malattie da misurazioni (*diagnosi*) e a fornire supporto alla chirurgia e alla progettazione di protesi (*cura*).

Richiamiamo un'importante citazione dovuta a Thomas Young:⁽¹⁾

The mechanical motions, which take place in animal body, are regulated by the same general laws as the motion of inanimate bodies [...] and it is obvious that the enquiry, in what matter and in what degree, the circulation of the blood depends on the muscular and elastic powers of the heart and of the arteries [...] must become simply a question belonging to the most refined departments of the theory of hydraulics.

I moti fisiologici hanno, dunque, alcune caratteristiche comuni di cui dobbiamo tenere conto quando li modellizziamo e che permettono di descrivere diversi fluidi biologici con lo stesso modello matematico. In particolare tali moti sono fortemente non stazionari e periodici (si parla quindi di *pulsatilità*) e avvengono in geometrie complesse e dipendenti dal tempo.

⁽¹⁾Thomas YOUNG (Milverton, 13 giugno 1773 – Londra, 10 maggio 1829) è stato uno scienziato britannico eclettico. Oltre ad essere famoso per le ricerche riguardanti la luce e la meccanica dei solidi, ha dato un contributo alla fisiologia e all'egittologia. Ha inoltre sviluppato un metodo per accordare strumenti musicali.

Osserviamo che elaborare un modello di fluido che descriva il materiale biologico reale che vogliamo studiare, che per noi vorrà dire scrivere delle opportune EDP, risulta solo uno degli aspetti da analizzare quando si affronta lo studio di un problema reale. In particolare, oltre alle misurazioni sperimentali e alla ricostruzione della geometria dove avviene il moto (generalmente con metodi numerici), è spesso opportuno studiare quello che si chiama *interazione fluido-struttura*, ovvero descrivere come il comportamento del fluido interagisce con l'ambiente circostante. Per fare questo vedremo che è necessario ricorrere all'altro ramo della Meccanica dei Continui: la teoria dell'*elasticità*.

La biofluidodinamica si applica ad esempio al sistema respiratorio, al bulbo oculare, all'uretra o al moto del sangue, In questo corso ci occuperemo principalmente di *emodinamica*, ovvero della circolazione del sangue nel pompaggio del cuore, nella microcircolazione e nel moto nelle arterie e nelle vene.

1.3 Il sistema circolatorio

L'apparato cardiocircolatorio trasporta l'ossigeno dai polmoni ai tessuti, riporta indietro l'anidride carbonica, alimenta i tessuti con i nutrienti estratti dal cibo a livello del tratto digestivo, rimuove le scorie metaboliche e i rifiuti portandoli agli organi emuntori (il rene e l'intestino crasso), termoregola il corpo attraverso il flusso che giunge alla pelle e trasporta gli ormoni. L'attività di trasporto riguarda: i gas respiratori (ossigeno ed anidride carbonica), gli elementi nutrizionali (glucosio, aminoacidi, grassi) ed i loro prodotti di degradazione, gli elementi che trasportano messaggi chimici (ormoni), il calore. Tale attività avviene attraverso il sangue, che si muove in un sistema chiuso (sistema cardiovascolare). La caratterizzazione del sistema cardiovascolare si può effettuare per mezzo di tre elementi fondamentali: il sangue, la pompa (il cuore) e l'insieme dei vasi che formano il circuito.

Il sistema circolatorio si divide in due grosse sezioni. Il *grande circolo* parte dal ventricolo sinistro (arteria aorta) e ritorna al cuore attraverso le vene cave (atrio destro). Il *piccolo circolo* parte dal ventricolo destro (arteria polmonare) e ritorna al cuore attraverso le vene polmonari (atrio sinistro). Il piccolo circolo ha la funzione fondamentale di permettere l'ossigenazione del sangue che irrorerà, attraverso il grande circolo, tutti i distretti periferici. Le diramazioni arteriose che partono dall'aorta e si ramificano successivamente dando origine alle arteriole e ai capillari arteriosi hanno varie dimensioni e grandezze caratteristiche, come si vede in Tabella 1.1.

Visto la sua complessa composizione, non è possibile descrivere tutto il sistema circolatorio con un unico modello di fluido o di tessuto elastico, ma solo piccoli tratti di esso. Possiamo sfruttare la teoria dell'elasticità per descrivere dal punto di vista matematico i tessuti del sistema circolatorio (muscolo cardiaco, pareti arteriose, vene, elementi valvolari). La fluidodinamica invece è utile per modellizzare il sangue, che scorre all'interno dei tessuti ed interagisce con esso, deformando le arterie, affaticando il muscolo cardiaco, aprendo le valvole,

1.4 Il sangue e i suoi aspetti non newtoniani

Il sangue è un materiale fluido corpuscolare composto principalmente da globuli rossi ($\sim 40\%$ del volume, aventi la geometria di dischi biconcavi di circa $8\mu m$ di diametro e con uno spessore da 1 a $2\mu m$), piastrine e globuli bianchi in piccole percentuali. Queste cellule sono immerse in un mezzo acquoso contenente proteine ed elettroliti (il *plasma*).

Tabella 1.1: Misure importanti all'interno delle vene, dal libro [4].

Vena	numero	diametro [cm]	sezione [cm ²]	spessore della parete [cm]	pressione media [KPa]	velocità media [cm s ⁻¹]
Aorta	1	3	7	2×10^{-1}	12.5	12
Arterie	8×10^3	10^{-1}	8×10^{-3}	10^{-1}	12	45
Arteriole	10^7	5×10^{-3}	2×10^{-5}	2×10^{-3}	7	5
Capillari	10^{10}	8×10^{-4}	5×10^{-7}	10^{-4}	3	0.1
Venule	4×10^7	10^{-2}	7.9×10^{-5}	2×10^{-4}	1.5	2
Vene	8×10^3	1.8×10^{-1}	10^{-1}	5×10^{-2}	1	10
Vena cava	2	3	6	1.5×10^{-1}	0.5	14

Come mostra la Tabella 1.1, il sangue si comporta in maniera differente a seconda del vaso in cui si trova e perciò è necessario elaborare modelli di fluidi diversi in base a dove si svolge il moto e alle caratteristiche che si vogliono affrontare. In particolare, nel cuore e nei grandi vasi il sangue può essere considerato un fluido omogeneo.

Nelle grandi arterie si può sfruttare il modello di *fluido newtoniano*. Questo modello è forse quello più studiato in letteratura. Un fluido newtoniano incomprimibile è caratterizzato dal fatto che esiste un legame di proporzionalità diretta tra il tensore degli sforzi viscosi e il tensore delle velocità di deformazione: la costante di proporzionalità è detta *viscosità*. La viscosità misura la resistenza del fluido allo scorrimento (al flusso). Ci dà un'idea della sua "consistenza". Più un fluido presenta resistenza allo scorrimento e più è viscoso. Nel modello newtoniano la viscosità è dunque costante al variare dello *shear rate*, variazione dello strain col tempo.⁽²⁾

Tuttavia nei vasi di piccola e media dimensione si osserva che la viscosità non è costante, ma essa diminuisce con l'aumentare della velocità e con la riduzione del diametro dei vasi, si veda la Figura 1.1. La viscosità è dovuta in parte alla componente plasmatica del sangue (abbastanza costante) ed in parte alla componente cellulare (più variabile). Il rapporto tra parte cellulare e liquida, denominato *ematocrito*, varia in maniera notevole da soggetto a soggetto.

Oltre a una viscosità non costante, il sangue esibisce alcuni comportamenti che non possono essere descritti dal modello newtoniano. Li spieghiamo brevemente.

Formazione dei Rouleaux: gli *eritrociti* tendono spesso ad aggregarsi formando pile di cellule denominate *rouleaux*. In generale, si può affermare che quanto più i rouleaux si aggregano ed i globuli rossi si deformano, tanto più il comportamento reologico del sangue si allontana da quello di un fluido newtoniano (Figura 1.2).

⁽²⁾Questi concetti, che possono ora sembrare di difficile comprensione, verranno chiariti in maniera approfondita nei prossimi capitoli, una volta che avremo a disposizione il linguaggio della Meccanica dei Continui.

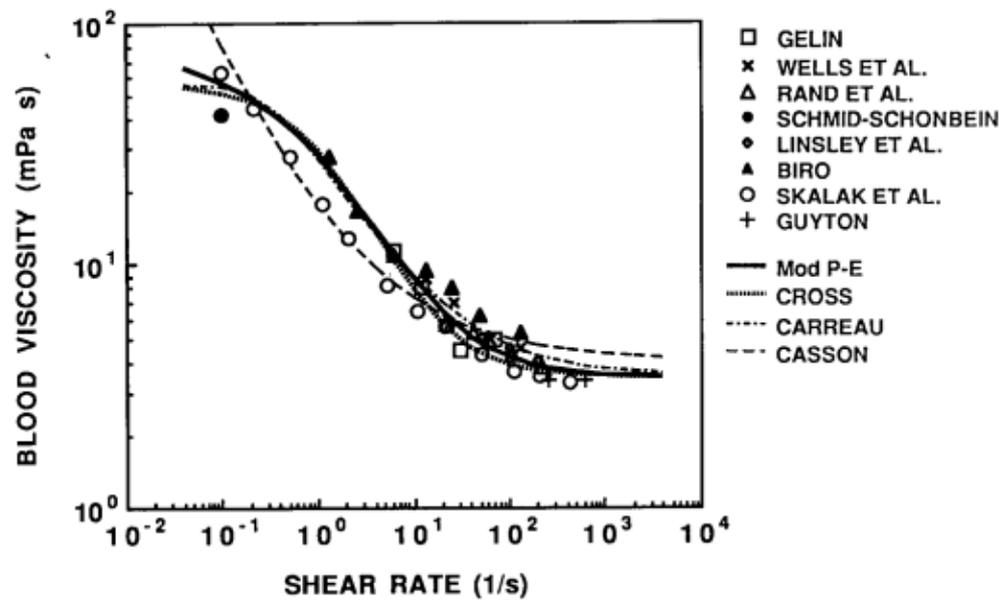


Figura 1.1: Viscosità del sangue (dall'articolo *Effects of the non-Newtonian viscosity of blood on flows in a diseased arterial vessel. Part 1: Steady flows*, di Y. Cho e K.R. Kensey, *Biorheology* 28 (1991), 241 - 262).

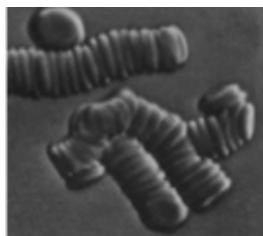


Figura 1.2: Formazione di Rouleux, immagine dal libro [4].

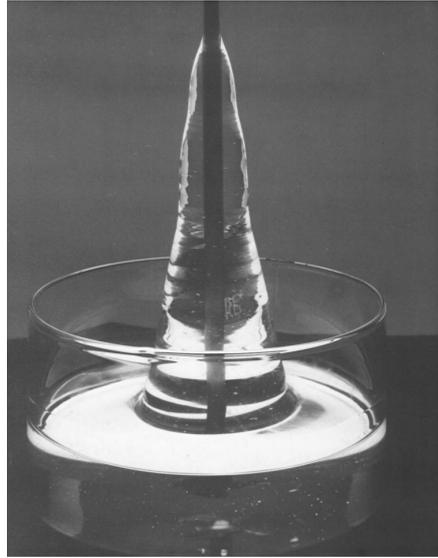


Figura 1.3: Immagine del fenomeno del rod-climbing, presa dal libro *Rheological Phenomena in Focus* di D.V. Boger e K. Walters (1993), pag. 12.

Effetto Fåhræus⁽³⁾-Lindqvist⁽⁴⁾: La viscosità del sangue diminuisce con il calibro del condotto. Questo fenomeno si osserva spesso nelle arteriole.

Thixotropy (tissotropia): dovuta al tempo necessario per la formazione e la distruzione dei rouleaux. È la proprietà di variare lo stato dei fluidi quando sottoposti a sollecitazioni di taglio oppure nel caso di lunghi periodi di quiete o sottoposti a movimenti peristaltici. In queste condizioni il fluido può passare dallo stato di grasso pastoso quasi solido a quello di liquido o, più in generale, da quello di gel a quello di liquido. Generalmente è una funzione dello shear rate. È molto importante nell'industria farmaceutica.

Yield-Stress: alcuni esperimenti mostrano che il sangue può resistere allo shear, comportandosi come un materiale rigido, fino a che non si raggiunge un valore critico dello stress. Dopo questo valore il sangue si comporta come un fluido.

Rod-climbing: quando un'asta viene fatta ruotare all'interno di un recipiente che contiene il sangue, questo tende a risalire lungo l'asta avvitandosi intorno ad essa (Figura 1.3).

Die swell: quando viene spinto fuori da un condotto, il sangue tende a rigonfiarsi allo sbocco dell'estrusore (Figura 1.4).

Tubeless Siphon: a causa della sua natura viscoelastica, il sangue è capace di risalire lungo un condotto (Figura 1.5).

⁽³⁾Robert (Robin) Sanno FÅHRÆUS (Stoccolma, 15 ottobre 1888 – Uppsala, 18 settembre 1968) è stato un medico ed ematologo svedese, considerato uno dei fondatori della reologia. Nella sua tesi di dottorato del 1921 descrisse la VES (velocità di eritrosedimentazione), un esame del sangue molto diffuso che permette l'individuazione di molte patologie.

⁽⁴⁾Johan Torsten LINDQVIST (1906 – 2007) è stato un medico svedese.

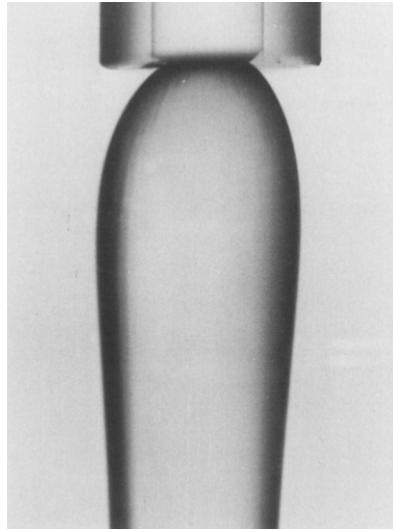


Figura 1.4: Effetto die swell, dal libro *Rheological Phenomena in Focus* di D.V. Boger e K. Walters (1993), pag. 20.

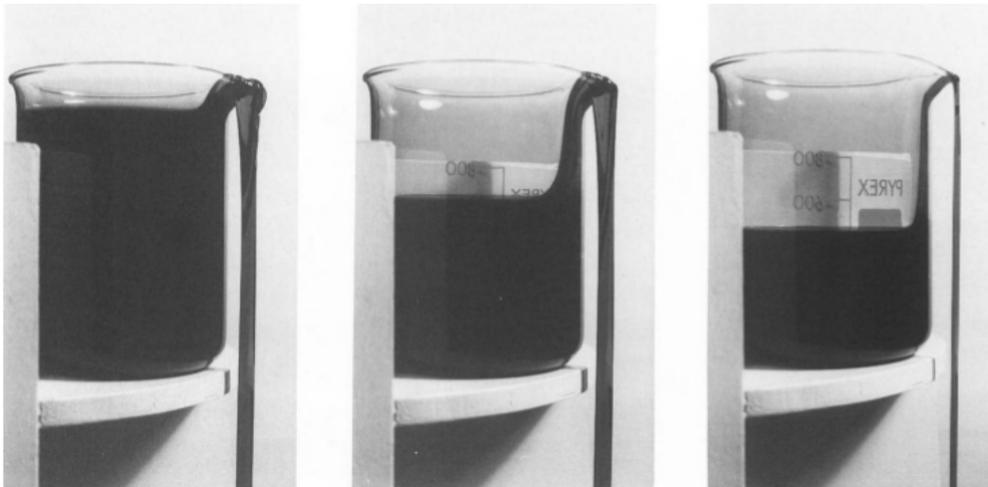


Figura 1.5: La sequenza di immagini mostra lo sviluppo del fenomeno tubeless siphon. Dal libro *Rheological Phenomena in Focus* di D.V. Boger e K. Walters (1993), pag. 28.

Capitolo 2

Elementi di Meccanica dei Continui

Vogliamo cominciare introducendo i concetti fondamentali della Meccanica dei Continui che ci permetteranno di formulare alcune equazioni basilari della fluidodinamica e di studiarne le proprietà.

2.1 Cinematica dei continui

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Ox_1x_2x_3$. Supponiamo poi di avere un parametro t , il tempo, che può variare in tutto \mathbb{R} (o soltanto in \mathbb{R}^+). La *configurazione di riferimento* \mathcal{B} è un insieme di particelle, ognuna delle quali verrà denotata con una terna $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$. Supporremo per semplicità che tale configurazione si realizzi al tempo $t = 0$, ovvero che il vettore \mathbf{X} denoti proprio la posizione della particella all'istante iniziale nel sistema di riferimento fissato. Denoteremo in generale la *posizione* di una particella \mathbf{X} col vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Il movimento verrà descritto da una funzione $\varphi : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, detta *piazzamento*, che ad ogni particella \mathbf{X} e ad ogni istante t associa la posizione occupata da \mathbf{X} nell'istante considerato, ovvero

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Supporremo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ la funzione $\varphi(\cdot, t)$ sia iniettiva con inversa $\varphi^{-1}(\cdot; t)$, ovvero

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}; t).$$

Inoltre supporremo φ, φ^{-1} di classe C^3 nel complesso delle due variabili.

Le variabili \mathbf{x} verranno dette *variabili spaziali o euleriane*, mentre le \mathbf{X} si diranno *variabili materiali o lagrangiane*. Le prime hanno un'importanza fondamentale in fluidodinamica. Gli operatori di derivazione grad, div, rot saranno sempre supposti fatti rispetto alle variabili spaziali. L'insieme $\mathcal{B}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\mathcal{B}, t)$ si dirà *configurazione all'istante t* , o anche *configurazione attuale*.

Talvolta useremo la seguente notazione: se $F(\mathbf{x}, t)$ è un campo in coordinate spaziali, F^* denoterà lo stesso campo scritto in coordinate materiali, ovvero

$$F^*(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} F(\varphi(\mathbf{X}, t), t).$$

Allo stesso modo, se $G(\mathbf{X}, t)$ è un campo in coordinate materiali, porremo

$$G_*(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} G(\varphi^{-1}(\mathbf{x}; t), t).$$

Cerchiamo ora di comprendere meglio la differenza tra un campo scritto in coordinate materiali $G(\mathbf{X}, t)$ e uno scritto in coordinate spaziali $F(\mathbf{x}, t)$. Fissiamo \mathbf{X} in \mathcal{B} e facciamo variare t : la funzione $G(\mathbf{X}, \cdot)$ descrive come varia la grandezza rappresentata dal campo G al trascorrere del tempo per la particella che occupa la posizione \mathbf{X} nella configurazione di riferimento. Se invece fissiamo \mathbf{x} in $\mathcal{B}(t)$, allora la funzione $F(\mathbf{x}, \cdot)$ esprime come varia la grandezza rappresentata da F al trascorrere del tempo nella posizione \mathbf{x} fissata che viene occupata via via da diverse particelle.

2.1.1 Derivata materiale

Per un campo materiale G esiste un solo concetto di derivata temporale, dato dalla derivata parziale rispetto al secondo argomento

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{X}, t).$$

Per un campo spaziale, invece, abbiamo due concetti distinti di derivata temporale, a seconda se consideriamo solo la dipendenza esplicita dal tempo o anche la dipendenza implicita nascosta nella \mathbf{x} .

Supponiamo di avere un campo spaziale $F(\mathbf{x}, t)$ che varia nel tempo; denoteremo con

$$\frac{\partial F}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

la sua derivata parziale rispetto alla seconda variabile. Ovviamente, questa derivata misura la variazione di F nel tempo per un osservatore che sta fermo nel punto \mathbf{x} . Al campo F è naturalmente associato il campo F^* , che denota la stessa quantità di F dal punto di vista delle coordinate materiali. Definiamo *derivata materiale* di F la derivata rispetto al tempo del campo F^* riportata in coordinate spaziali, ovvero

$$\frac{dF}{dt}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial F^*}{\partial t} \right)_*.$$

Precisamente, si ha

$$\frac{dF}{dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \Big|_{\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x};t)},$$

dove con $\partial/\partial t$ denotiamo la derivata della funzione (di una variabile)

$$\{t \mapsto F(\varphi(\mathbf{X}, t), t)\}.$$

La derivata materiale misura la variazione di F nel tempo per un osservatore che sia solidale con una determinata particella \mathbf{X} .

2.1.2 Velocità e calcolo della derivata materiale

Definiamo il *campo di velocità* (in coordinate materiali) come

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{X}, t).$$

Nelle coordinate spaziali il campo di velocità si scrive

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{V}_*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\varphi^{-1}(\mathbf{x};t), t)$$

e si può verificare che

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

Infatti,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}^* \right)_* = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x};t)} = \mathbf{V}(\varphi^{-1}(\mathbf{x};t), t).$$

La vera incognita dei problemi di fluidodinamica è proprio tale campo di velocità espresso in coordinate spaziali, ovvero $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Noto tale campo, in linea di principio è possibile ricostruire il movimento risolvendo il problema di Cauchy⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{X}. \end{cases}$$

Anche se trovare la soluzione globale di tale problema non è sempre facile, dal punto di vista dei fluidi spesso è di scarso interesse.

Grazie all'introduzione del campo di velocità possiamo ora scrivere una formula elegante che chiarisce il significato della derivata materiale. Sia $F(\mathbf{x}, t)$ un campo scalare regolare in coordinate spaziali; calcoliamone la derivata materiale:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \Big|_{\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x};t)} = \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(\varphi^{-1}(\mathbf{x};t), t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \text{grad } F(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Allo stesso modo, se \mathbf{F} è un campo vettoriale, si ha

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{F})\mathbf{v}. \quad (2.3)$$

Introducendo il *campo di accelerazione*

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{v}}{dt}(\mathbf{x}, t),$$

dalla formula della derivata materiale (2.3) si ottiene subito

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}. \quad (2.4)$$

Il termine a destra $(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}$ è molto importante, poiché è la fonte della non linearità delle equazioni della fluidodinamica e procura grossi problemi nella trattazione matematica di tali equazioni.

⁽¹⁾ Augustin-Louis CAUCHY (Parigi, 21 agosto 1789 – Sceaux, 23 maggio 1857) ingegnere di ponti e strade, fu persuaso da Lagrange e Laplace a rinunciare all'ingegneria e a dedicarsi completamente alla ricerca matematica. Nel 1831 fu docente di *fisica sublime* all'università di Torino.

⁽²⁾ Giuseppe Lodovico LAGRANGIA (Torino, 25 gennaio 1736 – Parigi, 10 aprile 1813) matematico e astronomo italiano per nascita e formazione, attivo nella sua maturità scientifica per ventuno anni a Berlino e per ventisei a Parigi, nel cui Panthéon è sepolto.

⁽³⁾ Pierre-Simon LAPLACE (Beaumont-en-Auge, 23 marzo 1749 – Parigi, 5 marzo 1827) matematico, fisico e astronomo, fu uno dei principali scienziati nel periodo napoleonico. Figlio di un contadino piccolo proprietario o forse di un bracciante, dovette la sua educazione all'interesse suscitato in alcuni ricchi vicini dalle sue capacità e dalla sua bella presenza.

2.1.3 Analisi del gradiente di velocità

Decomponendo il tensore gradiente di velocità $\text{grad } \mathbf{v}$ nella sua parte simmetrica \mathbf{D} e antisimmetrica \mathbf{W} , si ha per definizione

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \right], \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \right]$$

Il tensore \mathbf{D} viene detto *tensore velocità di deformazione*. Si ha facilmente che $\text{tr } \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{v}$. Il tensore \mathbf{W} viene detto *tensore di vorticità*. Dalla definizione di rotore discende

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{q}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.5)$$

e il vettore $\text{rot } \mathbf{v}$ viene detto *vettore di vorticità* del campo \mathbf{v} . Tale vettore sarà spesso denotato col simbolo $\boldsymbol{\omega}$ e rappresenta la velocità angolare locale istantanea. Nel caso del moto rigido si ha infatti $\boldsymbol{\omega}$ costante e $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$.

Se $\mathbf{W} = \mathbf{0}$, ovvero la vorticità è nulla, si ha $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ovvero \mathbf{v} è irrotazionale. In questo caso, dal Teorema del potenziale scalare si ha che $\mathbf{v} = \text{grad } f$ per un certo f campo scalare di classe C^2 .

2.1.4 Formula di Eulero

Calcolando il determinante jacobiano della trasformazione (2.1) rispetto alle \mathbf{X} si ottiene il cosiddetto *coefficiente di dilatazione cubica*

$$J(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\text{Grad } \varphi(\mathbf{X}, t)) = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right),$$

dove l'operatore Grad denota il gradiente in coordinate materiali X_j . Si noti che, poiché φ è un diffeomorfismo, il coefficiente di dilatazione cubica non potrà mai annullarsi e il suo segno resterà costante. Visto poi che la configurazione di riferimento è realizzata (nell'istante $t = 0$), data la continuità rispetto a t si dovrà dunque avere

$$J > 0.$$

Per tale coefficiente vale anche la *formula di Eulero*⁽⁴⁾, dimostrata nell'esercizio 2.2,

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \text{div } \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \quad (2.6)$$

dove (attenzione!) la divergenza è calcolata nelle coordinate spaziali. Questa formula si può scrivere tutta in coordinate spaziali in questo modo:

$$\frac{dJ_*}{dt}(\mathbf{x}, t) = J_*(\mathbf{x}, t) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

anche se il suo utilizzo principale è quello della prima formulazione.

⁽⁴⁾Leonhard EULER (Basilea, 15 aprile 1707 – San Pietroburgo, 18 settembre 1783) uno dei grandissimi della matematica e della fisica, noto per essere tra i più prolifici di tutti i tempi, ha fornito contributi storicamente cruciali in svariate aree. Sembra che Pierre-Simon Laplace abbia affermato: “Leggete Eulero; egli è il maestro di tutti noi”. Eulero è stato senz'altro il più grande fornitore di denominazioni matematiche, offrendo il suo nome a una quantità impressionante di formule, teoremi, metodi, criteri, relazioni, equazioni.

2.2 Equazioni di bilancio

Formuleremo in questa sezione alcuni assiomi basilari per la Meccanica dei Continui, e lo faremo postulando determinate equazioni di bilancio. Vedremo poi come tramite il Teorema degli sforzi di Cauchy sia possibile ottenere l'equazione del moto.

2.2.1 Teorema del trasporto

Prima di passare alla formulazione dei principi della dinamica dei continui, dimostriamo un teorema molto utile di derivazione sotto il segno di integrale. Sia P un insieme aperto e limitato di particelle nella configurazione di riferimento e sia $P(t) = \varphi(P, t)$, in modo che $P = P(0)$.

Teorema 2.1. (Teorema del trasporto) *Dato un campo scalare o vettoriale $F(\mathbf{x}, t)$ sufficientemente regolare, si ha*

$$\left(\int_{P(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \right)' = \int_{P(t)} \left(\frac{dF}{dt}(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) dV,$$

dove a primo membro si intende la derivata rispetto al tempo della funzione

$$\left\{ t \mapsto \int_{P(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \right\}.$$

Dimostrazione. Effettuando il cambio di variabili $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ e notando che il coefficiente di dilatazione cubica J è proprio lo jacobiano di tale cambio, a t fissato si ha

$$\int_{P(t)} F(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\varphi(P, t)} F(\mathbf{x}, t) dV = \int_P F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) dV.$$

Se ora derivo l'integrale rispetto a t , poiché il dominio di integrazione non dipende dal tempo posso portare la derivata sotto il segno di integrale, dunque

$$\begin{aligned} \left(\int_{P(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \right)' &= \int_P \frac{\partial}{\partial t} [J(\mathbf{X}, t) F(\varphi(\mathbf{X}, t), t)] dV \\ &= \int_P \left(J(\mathbf{X}, t) \frac{\partial}{\partial t} F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) + F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right) dV. \end{aligned}$$

Applicando la formula di Eulero e facendo il cambio di variabili inverso al precedente si ottiene

$$\left(\int_{P(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \right)' = \int_{P(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \Big|_{\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x};t)} + F(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right] dV$$

e ricordando che $\frac{dF}{dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \Big|_{\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x};t)}$ si ottiene la tesi. \square

Osserviamo che se F, \mathbf{F} sono rispettivamente un campo scalare e un campo vettoriale, il Teorema del trasporto si può anche scrivere come

$$\begin{aligned} \left(\int_{P(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \right)' &= \int_{P(t)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F\mathbf{v}) \right) dV = \int_{P(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{\partial P(t)} F\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \\ \left(\int_{P(t)} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) dV \right)' &= \int_{P(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{F} \otimes \mathbf{v}) \right) dV = \int_{P(t)} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} dV + \int_{\partial P(t)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{F} dS. \end{aligned}$$

2.2.2 Bilancio della massa ed equazione di continuità

Una delle caratteristiche principali dei corpi è che essi possiedono una *massa*. Poiché noi trattiamo corpi *continui*, supporremo che per ogni t nella configurazione all'istante t esista una funzione $\rho(\mathbf{x}, t)$ di classe C^1 e integrabile tale che, dato un insieme $P(t) = \varphi(P, t)$ aperto e limitato di particelle, la massa di $P(t)$ si esprima come

$$M(P(t)) = \int_{P(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV.$$

Chiaramente, l'unità di misura di ρ è $[\text{kg}/\text{m}^3]$. Notiamo che si ha

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M(B_r(\mathbf{x}))}{V(B_r(\mathbf{x}))},$$

dove $V(B_r(\mathbf{x}))$ è il volume della palla di centro \mathbf{x} e raggio r . Il campo ρ è detto *densità di massa* per la configurazione all'istante t .

In particolare, la funzione $\rho_0(\mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \rho^*(\mathbf{X}, 0)$ è la densità di massa nella configurazione di riferimento.

Esprimiamo il *Principio di conservazione della massa* dicendo che la massa di un insieme di particelle si conserva durante il moto, ovvero

$$M(P(t)) = M(P) \tag{2.7}$$

per ogni $P \subset \mathcal{B}$ aperto limitato e per ogni t . In termini della densità questo significa che

$$\frac{d}{dt} M(P(t)) = \frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho dV = 0,$$

e applicando il Teorema del trasporto risulta

$$\int_{P(t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0.$$

Poiché l'integrale si annulla per ogni configurazione $P(t)$ e l'integrando è continuo, si ha

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{2.8}$$

che è la nota *equazione di continuità*. Essa esprime la conservazione *locale* della massa e può anche porsi nella forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Il bilancio della massa può anche essere espresso nella formulazione lagrangiana (per quanto questo sia meno rilevante dal punto di vista dei fluidi). Usando il solito cambio di variabile $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ si ha

$$M(P(t)) = \int_P J(\mathbf{X}, t) \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) dV$$

e dunque il bilancio della massa (2.7) si scrive

$$\int_P J(\mathbf{X}, t) \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) dV = \int_P \rho_0(\mathbf{X}) dV$$

da cui, per l'arbitrarietà di P ,

$$J(\mathbf{X}, t) \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) = \rho_0(\mathbf{X}). \quad (2.9)$$

In particolare, l'equazione di continuità (2.8) ci permette di formulare un corollario del Teorema del Trasporto di cui faremo uso nel seguito.

Corollario 2.2. *Dato un campo scalare o vettoriale $F(\mathbf{x}, t)$, si ha*

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho F dV = \int_{P(t)} \rho \frac{dF}{dt} dV.$$

Dimostrazione. Applicando il Teorema del Trasporto al primo membro si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho F dV = \int_{P(t)} \left(F \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dF}{dt} + \rho F \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = \int_{P(t)} \left[F \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \rho \frac{dF}{dt} \right] dV,$$

e grazie all'equazione di continuità segue la tesi. \square

2.2.3 Bilancio della quantità di moto e Teorema degli sforzi

Analizziamo ora le forze che possono agire su una regione $P(t)$ di materiale al tempo t ; tra queste distingueremo le forze esterne, dette anche *forze di volume*, e le forze interne, ovvero le forze che il materiale esterno a $P(t)$ esercita sulla regione stessa. Per fare un esempio: se il corpo è il mare e $P(t)$ è una regione di acqua, la forza di volume è la forza gravitazionale dovuta alla massa della regione, mentre la forza interna è la pressione subita dalla regione a causa dell'acqua circostante.

Supporremo che le forze esterne ammettano una *densità di forza per unità di massa* $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, in modo che la risultante delle forze di volume su $P(t)$ sia

$$\int_{P(t)} \rho \mathbf{b} dV.$$

Riguardo invece alle forze interne, adotteremo il cosiddetto *Postulato di Cauchy*: se S è una superficie nel nostro corpo continuo $\mathcal{B}(t)$ all'istante t , orientata mediante una normale \mathbf{n} , allora esiste una distribuzione di *sforzi*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; S)$$

che rappresenta la densità di forza per unità di area esercitata attraverso S dal materiale che sta da una parte di S su quello che sta dall'altra parte. In particolare, \mathbf{t} si orienta

convenzionalmente nella direzione della forza esercitata dalla parte positiva di S (ovvero dalla parte di \mathbf{n}) verso quella negativa (ovvero quella di $-\mathbf{n}$). Tale ipotesi afferma in sostanza che le forze interne agiscono come un flusso attraverso la superficie S , e sono quindi *forze di superficie*. Inoltre assumiamo che \mathbf{t} dipenda da S solo attraverso la normale \mathbf{n} , ovvero si abbia

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; S) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}).$$

Completiamo infine il Postulato di Cauchy imponendo che la dipendenza di \mathbf{t} dalla normale sia continua. Supporremo poi come al solito che \mathbf{t} sia di classe C^1 in \mathbf{x} .

In questo modo il *bilancio della quantità di moto*, che sostanzialmente dice che la derivata temporale della quantità di moto eguaglia le forze applicate, si può esprimere come

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{P(t)} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial P(t)} \mathbf{t} dS. \quad (2.10)$$

Osserviamo subito che il Corollario 2.2 implica

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{P(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV,$$

quindi la (2.10) diventa

$$\int_{P(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{P(t)} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial P(t)} \mathbf{t} dS. \quad (2.11)$$

Vediamo subito una prima conseguenza di questa equazione.

Lemma 2.3. *Sia $P_r(t)$ una famiglia decrescente di aperti nella configurazione al tempo t tali che $V(P_r(t)) \sim r^3$ per $r \rightarrow 0$. Allora si ha*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{\partial P_r(t)} \mathbf{t} dS = \mathbf{0},$$

ovvero gli sforzi sono in equilibrio locale.

Dimostrazione. Scriviamo la (2.11) per $P_r(t)$: i primi due integrali sono integrali di volume di funzioni continue, quindi vanno come r^3 per r che tende a 0. In particolare, se dividiamo tutto per r^2 e mandiamo r a 0, essi tendono a 0. Quindi tende a 0 anche l'ultimo integrale. \square

Il seguente teorema si pone a fondamento della Meccanica dei Continui.

Teorema 2.4. (Teorema degli sforzi di Cauchy) *Per ogni (\mathbf{x}, t) il vettore $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$ è lineare in \mathbf{n} , quindi esiste un tensore \mathbb{T} di ordine due tale che*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = \mathbb{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}.$$

Tale tensore \mathbb{T} si dice *tensore di Cauchy*.

Dimostrazione. Fissiamo ora \mathbf{x} e t e poniamo $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$. Sia $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ con $n_i > 0$. Consideriamo la famiglia Q_r di tetraedri che abbiano tre facce sui piani coordinati passanti per \mathbf{x} , la faccia inclinata di normale \mathbf{n} e il volume che va come r^3 . Denotando con S_r l'area della faccia inclinata e con S_r^i le aree delle facce di normali $-\mathbf{e}_i$, si ha che $S_r \sim r^2$ e $S_r^i = n_i S_r$. Applicando il lemma precedente alla famiglia $\{Q_r\}$ si ottiene

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) + n_1\mathbf{t}(-\mathbf{e}_1) + n_2\mathbf{t}(-\mathbf{e}_2) + n_3\mathbf{t}(-\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$$

per ogni $n_i > 0$. Poiché \mathbf{t} è continuo in \mathbf{n} , tale relazione si estende al caso in cui $n_i \geq 0$, quindi in particolare si ottiene

$$\mathbf{t}(-\mathbf{e}_i) = -\mathbf{t}(\mathbf{e}_i) \quad i = 1, 2, 3$$

e dunque

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n_1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1) + n_2\mathbf{t}(\mathbf{e}_2) + n_3\mathbf{t}(\mathbf{e}_3).$$

Ripetendo ora lo stesso ragionamento negli altri ottanti, si ottiene la tesi. \square

Introduciamo ora il tensore di Cauchy nell'integrale superficiale dell'equazione (2.11) e applichiamo il Teorema della divergenza:

$$\int_{\partial P(t)} \mathbf{t} dS = \int_{\partial P(t)} \mathbb{T}\mathbf{n} dS = \int_{P(t)} \operatorname{div} \mathbb{T} dV.$$

Quindi abbiamo tutti integrali di volume; dall'arbitrarietà di $P(t)$, poiché i campi sono regolari, si ottiene l'equazione locale

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbb{T} \quad (2.12)$$

che è la celeberrima *equazione del moto*, cardine di tutti i modelli che affronteremo.

2.2.4 Bilancio del momento della quantità di moto

A completamento delle ipotesi precedenti, assumeremo anche il *bilancio del momento della quantità di moto*, ovvero

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV = \int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV + \int_{\partial P(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS, \quad (2.13)$$

per ogni t e per ogni P . Come spiega la proposizione seguente, questa ipotesi non produce una nuova equazione differenziale, bensì alcune restrizioni sulle componenti del tensore di Cauchy.

Proposizione 2.5. *Dato il bilancio della massa e della quantità di moto, si ha che vale il bilancio del momento della quantità di moto (2.13) se e solo se il tensore di Cauchy \mathbb{T} è simmetrico.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ costante. Se moltiplichiamo l'equazione del moto (2.12) vettorialmente per \mathbf{x} e scalarmente per $\boldsymbol{\omega}$ e poi integriamo su $P(t)$ otteniamo

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV + \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{P(t)} \mathbf{x} \times \operatorname{div} \mathbb{T} dV \quad (2.14)$$

Inoltre dal Corollario 2.2 segue

$$\int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{P(t)} \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV.$$

Studiamo ora l'ultimo integrale della (2.14): ricordando la formula di Gauss-Green (A.19), con facili passaggi si ha

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \cdot \operatorname{div} \mathbb{T} dV &= \int_{\partial P(t)} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbb{T}\mathbf{n} dS - \int_{P(t)} \operatorname{grad}(\mathbb{W}\mathbf{x}) \cdot \mathbb{T} dV = \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{\partial P(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS - \int_{P(t)} \mathbb{W} \cdot \mathbb{T} dV, \end{aligned}$$

dove \mathbf{W} è la matrice antisimmetrica che rappresenta il prodotto vettoriale con $\boldsymbol{\omega}$. Da questa formula segue subito la dimostrazione, infatti: se vale il bilancio del momento della quantità di moto allora deve essere

$$\int_{P(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} dV = 0$$

e dall'arbitrarietà di $P(t)$ e \mathbf{W} si ottiene che \mathbf{T} è simmetrico; e viceversa. \square

2.3 Bilancio dell'energia

Vogliamo ora trattare il caso in cui le variabili termodinamiche entrano in gioco nella formulazione del problema del moto per un mezzo continuo, introducendo una nuova equazione di bilancio, il *bilancio dell'energia*. Scriviamo l'energia interna di un volume regolare $P(t)$ come

$$E(t) = \int_{P(t)} \rho \varepsilon dV,$$

dove ε denota la *densità di energia interna*, e supponiamo che le varie parti del mezzo continuo possano scambiare calore sia come flusso attraverso la frontiera (e denoteremo con \mathbf{q} la densità superficiale di tale flusso), sia mediante una distribuzione di sorgenti di calore (di cui denoteremo la densità volumetrica per unità di massa con r). Quindi enunciamo il bilancio dell'energia totale in forma integrale alla maniera del primo principio della termodinamica, ovvero assumendo che la variazione nel tempo dell'energia totale di ogni volume P eguagli la somma della potenza meccanica e del calore assorbiti:

$$\frac{d}{dt}(K + E) = \int_{P(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial P(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{P(t)} \rho r dV - \int_{\partial P(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.15)$$

Combinando questa equazione con la (2.20) e sfruttando l'arbitrarietà di $P(t)$ e il Teorema della divergenza si ottiene

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (2.16)$$

che è detta *equazione dell'energia interna*.

2.4 Formulazione ALE

Ci sono casi in cui sia la formulazione lagrangiana che quella euleriana risultano non adatte a formulare un problema meccanico. Ad esempio, nei problemi emodinamici in cui si ha a che fare con un flusso di sangue che scorre in pareti biologiche che possono deformarsi, risulta difficile descrivere l'interazione fluido-struttura. Questa difficoltà è dovuta al fatto che il moto del fluido, che si descrive bene in coordinate euleriane, e quello della parte solida, che si descrive bene in coordinate lagrangiane, si influenzano a vicenda e quindi le equazioni accoppiate dei due moti devono essere in qualche modo descritte con le stesse variabili. Se usassimo la descrizione euleriana le equazioni del moto della parte solida (tipicamente le equazioni dell'Elasticità) diventerebbero molto complicate, mentre se usassimo la descrizione lagrangiana avremmo un dominio che al passare del tempo diventa sempre più bislungo e deformato.

Dal punto di vista teorico entrambe le strade sono percorribili, ma dal punto di vista numerico nascono complicazioni tecniche sia in un caso che nell'altro. È utile quindi introdurre un altro riferimento, denominato ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian), in cui formulare entrambe le equazioni.

Consideriamo una configurazione arbitraria $\tilde{\mathcal{B}}$ in corrispondenza biunivoca con \mathcal{B} e una mappa $A : \tilde{\mathcal{B}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ che manda la generica coppia $(\tilde{\mathbf{x}}, t) \in \tilde{\mathcal{B}} \times \mathbb{R}$ nella posizione

$\mathbf{x}(t)$ occupata dalla particella $\tilde{\mathbf{x}}$ nell'istante t . Tale mappa risulta una generalizzazione del piazzamento φ : se infatti scegliamo $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ otteniamo proprio $A = \varphi$.

Ora possiamo rivedere tutta la teoria esposta nella Sezione 2.1 in queste nuove variabili. Ad esempio, preso un campo $F(\mathbf{x}, t)$ in coordinate euleriane, si avrà

$$\tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}}, t) := F(A(\tilde{\mathbf{x}}, t), t)$$

lo stesso campo in variabili ALE, e viceversa

$$F(\mathbf{x}, t) = \tilde{F}(A^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$$

dove al solito indichiamo con A^{-1} l'inverso di A a t fissato. Risulta interessante introdurre la *velocità ALE*:

$$\tilde{\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{x}}, t) := \frac{\partial A}{\partial t}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$$

che in coordinate euleriane diventa

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{w}}(A^{-1}(\mathbf{x}, t), t).$$

Si può verificare che:

- se $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ per ogni \mathbf{x} e per ogni t , allora la descrizione ALE coincide con quella euleriana;
- se $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ per ogni \mathbf{x} e per ogni t , allora la descrizione ALE coincide con quella lagrangiana.

Definiamo anche la *derivata temporale ALE*, che generalizza la derivata materiale:

$$\frac{d^A}{dt}F(\mathbf{x}, t) := \frac{\partial F}{\partial t}(A(\tilde{\mathbf{x}}, t), t) \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}=A^{-1}(\mathbf{x};t)}.$$

Analogamente alla derivata materiale, si può vedere che la derivata ALE soddisfa la formula

$$\frac{d^A}{dt}F(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } F.$$

In particolare si ha, combinando la formula precedente con la (2.4),

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^A}{dt}\mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{w}). \quad (2.17)$$

Nella formulazione ALE si può dare anche una versione della formula di Eulero e del Teorema del Trasporto di Reynolds; lasciamo al lettore le facili generalizzazioni.

2.5 Complementi ed esercizi

Esercizio 2.1. Dimostrare la validità della seguente formula per il campo di accelerazione in coordinate spaziali:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(\mathbf{v}^2) + (\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v}. \quad (2.18)$$

Svolgimento. Ricordando l'equazione (A.27) si ottiene l'espressione voluta. \diamond

Esercizio 2.2. Dimostrare la validità della formula di Eulero in coordinate materiali

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t).$$

Svolgimento. Per dimostrare tale formula occorre il seguente lemma:

Lemma 2.6. Data una matrice A , si ha

$$\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + o(\varepsilon) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0,$$

dove I è la matrice identica e $o(\varepsilon)$ è tale che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|o(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0$.

Dimostrazione. Si ha

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + i_1(A)\lambda^2 - i_2(A)\lambda + i_3(A),$$

dove i_1, i_2, i_3 sono gli invarianti principali della matrice A (in particolare, i_1 è la traccia e i_3 il determinante). Dal fatto che $i_k(\varepsilon A) = \varepsilon^k i_k(A)$ si ottiene quindi

$$\det(\varepsilon A - \lambda I) = -\lambda^3 + \varepsilon i_1(A)\lambda^2 - \varepsilon^2 i_2(A)\lambda + \varepsilon^3 i_3(A).$$

Ponendo $\lambda = -1$ si ha la tesi. □

Dal lemma precedente segue che

$$\det[I + \varepsilon A + o(\varepsilon)] = \det \left[I + \varepsilon \left(A + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right] = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + o(\varepsilon) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.19)$$

dove $o(\varepsilon)$ può denotare anche una matrice la cui norma tende a 0 più in fretta di ε .

Consideriamo ora lo sviluppo di Taylor⁽⁵⁾ di $\operatorname{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t)$ attorno a t :

$$\begin{aligned} \operatorname{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t + \varepsilon) &= \operatorname{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t) + \varepsilon \operatorname{Grad} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + o(\varepsilon) \\ &= \operatorname{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t) [I + \varepsilon \operatorname{Grad} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \operatorname{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t)^{-1} + o(\varepsilon)] \end{aligned}$$

e notiamo che $\operatorname{Grad} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \operatorname{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t)^{-1} = \operatorname{grad} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \operatorname{grad} \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t)$, ovvero il gradiente in coordinate euleriane della velocità. Calcolando il determinante nella formula precedente si ottiene

$$J(\mathbf{X}, t + \varepsilon) = J(\mathbf{X}, t) [1 + \varepsilon \operatorname{tr} \operatorname{grad} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + o(\varepsilon)] = J(\mathbf{X}, t) + \varepsilon J(\mathbf{X}, t) \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + o(\varepsilon)$$

che è lo sviluppo di Taylor di J attorno a t . Per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t)$$

che è la tesi. ◇

⁽⁵⁾ Brook TAYLOR (Edmonton, 18 agosto 1685 – Londra, 29 dicembre 1731) matematico inglese, inventore del calcolo delle differenze finite, lo ha usato con successo per determinare la forma del movimento di una corda vibrante. Nel suo *Saggio sulla prospettiva lineare* Taylor ha espresso i veri principi della prospettiva in una forma più originale e generale rispetto a qualsiasi altro predecessore; ma il lavoro ha sofferto per la sua brevità e per la sua oscurità, difetti che hanno interessato la maggior parte delle sue opere.

Esercizio 2.3. Definendo l'energia cinetica di un insieme regolare di particelle $P(t)$ all'istante t come

$$K = \frac{1}{2} \int_{P(t)} \rho |\mathbf{v}|^2 dV,$$

si dimostri il seguente

Teorema (dell'energia cinetica). *Supposti validi il bilancio della massa, della quantità di moto e del momento della quantità di moto, vale la seguente formula:*

$$\frac{dK}{dt} = \int_{P(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial P(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{P(t)} \mathbb{T} \cdot \mathbb{D} dV. \quad (2.20)$$

Svolgimento. Dal Corollario 2.2 si ha

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \int_{P(t)} \rho \frac{d}{dt} |\mathbf{v}|^2 dV = \int_{P(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV.$$

Sfruttando l'equazione del moto

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbb{T},$$

si ottiene

$$\frac{dK}{dt} = \int_{P(t)} \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbb{T}) dV.$$

Poiché dalla formula (A.16) e dal Teorema della divergenza si ha

$$\int_{P(t)} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbb{T} dV = \int_{P(t)} \operatorname{div} (\mathbb{T}^\top \mathbf{v}) dV - \int_{P(t)} \mathbb{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} dV = \int_{\partial P(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbb{T} \mathbf{n} dS - \int_{P(t)} \mathbb{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} dV,$$

tenendo conto dell'espressione di \mathbf{t} in funzione di \mathbb{T} e della simmetria di \mathbb{T} si ha la tesi. \square

Il termine $\int_{P(t)} \mathbb{T} \cdot \mathbb{D} dV$ si chiama *potenza degli sforzi* o *potenza di deformazione*. Se si riscrive la (2.20) come

$$\int_{P(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial P(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS = \frac{dK}{dt} + \int_{P(t)} \mathbb{T} \cdot \mathbb{D} dV,$$

tale formula si può interpretare dicendo che la potenza spesa dalle forze (esterne e interne) è uguale alla variazione dell'energia cinetica più la potenza di deformazione. \diamond

Capitolo 3

Fluidi perfetti barotropici

In questo capitolo ci occuperemo di definire il modello più semplice di fluido noto in letteratura, ovvero il modello di *fluido perfetto*. Prima di fare ciò, introduciamo alcune importanti definizioni che ci saranno utili anche per modelli di fluidi più complicati.

3.1 Alcune definizioni generali

Un fluido si dice *omogeneo* se la densità di massa nella configurazione di riferimento $\rho_0(\mathbf{X})$ è costante (ovviamente positiva), ovvero $\text{Grad } \rho_0 = \mathbf{0}$.

Un fluido si dice *incomprimibile* se gli sono consentiti solo moti incomprimibili, ovvero al trascorrere del tempo, può cambiare la forma della regione occupata, ma non cambia il volume occupato da tale regione. Sfruttando il teorema del trasporto, si dimostra che un fluido è incomprimibile se e solo se $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Quest'ultima equazione è detta *condizione di incomprimibilità* e in questo caso l'equazione di continuità diventa

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Generalmente il modello di fluido incomprimibile viene usato per descrivere il comportamento dei liquidi reali, mentre quello comprimibile viene sfruttato per i gas.

Nel caso di un fluido incomprimibile ed omogeneo si ha che la densità di massa è costante in ogni configurazione. Indicando tale costante con ρ_0 , le equazioni del moto si riducono a

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho_0 \mathbf{b} + \text{div } \mathbb{T} \\ \text{div } \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Un moto si dice *stazionario* se $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ e $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}$ per ogni t , ovvero se il campo di velocità, il campo di densità e la configurazione attuale del moto non dipendono esplicitamente dal tempo.⁽¹⁾ Si dice *irrotazionale* se $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Si dicono *linee di corrente* quelle linee nel

⁽¹⁾Si possono dare esempi in cui la velocità non dipende esplicitamente dal tempo mentre la densità sì. Uno dei più semplici è il caso unidimensionale in cui $\varphi(X, t) = Xe^t$, da cui $v(x, t) = x$ è indipendente dal tempo, mentre dall'equazione (2.9) $\rho(x, t) = \rho_0 e^{-t}$ dipende esplicitamente da t (ρ_0 è la densità nella configurazione iniziale, supposta uniforme per semplicità).

fluido che sono tangenti in tutti i loro punti al campo di velocità \mathbf{v} . Naturalmente, quando il moto è stazionario le linee di corrente sono indipendenti dal tempo e coincidono con le traiettorie delle particelle.

3.2 Fluidi perfetti

È giunto finalmente il momento di caratterizzare alcuni tipi particolari di fluidi. Per fare ciò è necessario formulare delle ipotesi sul tensore di Cauchy, visto che è proprio tale tensore che descrive gli sforzi interni e quindi il comportamento dinamico del materiale. Questo si esprime di solito dicendo che si deve prescrivere una *equazione costitutiva* per il tensore degli sforzi \mathbb{T} . Tale equazione specifica il modo in cui \mathbb{T} dipende da determinate variabili.

Decomponiamo lo sforzo $\mathbb{T}\mathbf{n}$ nella parte *normale* e in quella *di taglio*:

$$\mathbb{T}\mathbf{n} = (\mathbb{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + [\mathbb{T}\mathbf{n} - (\mathbb{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbb{T}\mathbf{n} + [\mathbb{I} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]\mathbb{T}\mathbf{n}.$$

La scelta forse più semplice, ma non per questo banale, che può essere fatta per un fluido è quella di supporre che la componente di taglio si annulli, ovvero che $\mathbb{T}\mathbf{n}$ sia sempre diretto lungo \mathbf{n} . Sebbene in condizioni statiche tale ipotesi sia alquanto generale, in regime dinamico il supporre l'assenza di sforzi di taglio corrisponde a trascurare la *viscosità* di un fluido, e questo porta a dei modelli non sempre adeguati. Vedremo più avanti le modifiche da apportare a questa scelta per dei modelli più fedeli.

L'ipotesi di sforzo di taglio nullo equivale a dire che ogni vettore è un *autovettore* per \mathbb{T} , e dunque il tensore deve essere un multiplo del tensore identico:

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I}.$$

Infatti: ogni vettore della base canonica è in particolare un autovettore, quindi $\mathbb{T}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$ e la matrice di \mathbb{T} nella base canonica è diagonale. Inoltre anche $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è un autovettore, e dunque

$$\mathbb{T}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \lambda(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3$$

da cui $\lambda_i = \lambda$.

Si assume poi che il coefficiente p , detto *pressione*, sia un numero positivo. In generale la pressione dipende dalla posizione e dal tempo, e quindi si ha

$$\mathbb{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbb{I}. \quad (3.1)$$

Un fluido il cui tensore degli sforzi verifichi tale equazione si dice *fluido perfetto*.

Sostituendo la (3.1) nell'equazione locale del bilancio della quantità di moto e ricordando (A.15), si ottiene

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{b} - \text{grad } p, \quad (3.2)$$

che viene detta *equazione di Eulero*, dove ricordiamo che \mathbf{b} è la densità volumetrica di forza, ρ la densità di massa e \mathbf{v} il campo di velocità. Ad essa va aggiunta l'equazione di continuità

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Una volta che conosciamo il concetto di pressione, possiamo parlare di fluido barotropico.

- Un fluido si dice *barotropico* se esiste un'equazione costitutiva

$$\rho = f(p)$$

con $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ funzione di classe C^1 . Introducendo la *funzione di pressione*

$$\mathcal{P}(p; p_0) = \int \frac{dp}{\rho} = \int_{p_0}^p \frac{1}{f(s)} ds,$$

dove $p_0 \in \mathbb{R}$ è fissato a priori, si ha

$$\text{grad } \mathcal{P} = \frac{d\mathcal{P}}{dp}(p; p_0) \text{ grad } p = \frac{1}{\rho} \text{ grad } p$$

e dunque, se il fluido è perfetto, l'equazione di Eulero si può scrivere nella forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{b} - \text{grad } \mathcal{P}. \quad (3.3)$$

Si noti che la funzione di pressione è strettamente crescente e dunque invertibile; nota \mathcal{P} è quindi sempre possibile ricavare la pressione p invertendo la funzione.

La principale caratteristica dei fluidi barotropici è che, nel caso di forze conservative, l'accelerazione ammette un potenziale, ovvero è irrotazionale, come si vede subito dalla (3.3). In questo caso, usando la formula (2.18) per l'accelerazione e prendendo il rotore di ambo i membri della (3.3) si ottiene l'equazione del moto nella forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \text{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

in cui non compaiono più né la pressione, né la densità.

- Osserviamo che un fluido omogeneo e incompressibile è anche barotropico con f costante e in questo caso la funzione di pressione è

$$\mathcal{P}(p; p_0) = \frac{p - p_0}{\rho_0}.$$

Per un fluido perfetto incompressibile e omogeneo l'equazione di Eulero diventa

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{b} - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho_0} \right). \quad (3.5)$$

3.3 Condizioni al contorno per i fluidi perfetti

È giunto finalmente il momento di parlare delle condizioni al contorno da imporre ad un fluido perfetto. Dal punto di vista delle equazioni differenziali alle derivate parziali, il sistema che governa il moto di un fluido perfetto si scrive

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} = \rho \mathbf{b} - \text{grad } p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad } \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

a cui devono essere aggiunte opportune condizioni iniziali e al contorno. Per ciò che riguarda le condizioni iniziali, poco deve essere detto: è sufficiente assegnare le funzioni $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$, $\rho(\mathbf{x}, 0)$ e $p(\mathbf{x}, 0)$ (ovviamente, nel caso barotropico il legame tra la densità e la pressione rende superflua l'assegnazione di una delle ultime due funzioni).

Più interessante è l'assegnazione delle condizioni al contorno, perché esse riguardano l'interazione tra il fluido e il contenitore, e tale interazione deve essere in qualche modo modellizzata. Dove la frontiera della regione di fluido è a contatto con una parete (che a sua volta può essere fissa o mobile), proprio l'assenza dello sforzo di taglio, caratteristica dei fluidi perfetti, impone di assegnare la cosiddetta *condizione di impenetrabilità* (o *slip condition*), in cui si impone

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}(t),$$

dove \mathbf{V} è la velocità della parete (che in generale è assegnata) e \mathbf{n} è la normale alla parete stessa. Quindi le particelle di fluido a contatto con la parete si possono muovere liberamente lungo la parete stessa, mentre devono muoversi solidalmente alla parete per quanto riguarda la direzione normale.

Osserviamo che nel caso di un fluido perfetto barotropico (quindi anche nel caso incomprimibile e omogeneo) il problema del moto è impostato completamente in ambito puramente meccanico; mentre, quando non sussiste un legame tra pressione e densità di massa, non è possibile impostare tale problema in maniera completa rimanendo solo in ambito meccanico poiché non vi è pareggiamento tra numero di incognite ed equazioni scalari: in questo caso si ricorre alle informazioni e alle variabili termodinamiche.

3.4 Statica dei fluidi perfetti

Nello studio della *fluidostatica* si suppone che il fluido sia in equilibrio, ovvero che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Tale ipotesi è ben più forte del caso *stazionario*, in cui semplicemente si suppone che il campo di velocità sia indipendente dal tempo, ma non necessariamente nullo.

Supponiamo che il fluido in quiete sia perfetto. Si noti che nel caso statico tale ipotesi è molto ragionevole, in quanto la presenza di una eventuale viscosità si manifesta solitamente mediante una frizione tra le varie parti del fluido e quindi non appare se il fluido è fermo.

In questo caso l'equazione di Eulero diventa

$$\rho \mathbf{b} = \text{grad } p \tag{3.6}$$

che viene detta *equazione fondamentale della fluidostatica*. Anche l'equazione di continuità si semplifica molto e diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

ovvero la densità non dipende dal tempo ma solo dalle coordinate spaziali. Quindi nella (3.6) si ha che p dipende dal tempo se e solo se \mathbf{b} dipende dal tempo.

Supponiamo poi che il fluido sia barotropico. Riscrivendo la (3.6) con la funzione di pressione, si giunge a

$$\mathbf{b} = \text{grad } \mathcal{P}(p). \tag{3.7}$$

3.5 Onde acustiche di piccola ampiezza

Ci proponiamo di trovare le perturbazioni rispetto all'equilibrio di un fluido perfetto barotropico in assenza di forze esterne. Supponiamo che la funzione di barotropicità $\rho = f(p)$ sia strettamente crescente, in modo che si possa esprimere la pressione in funzione della densità: $p = p(\rho)$. Si noti che questo esclude certamente il caso dei fluidi incompressibili e omogenei. Siano p_0, ρ_0 i valori di equilibrio per la pressione e la densità, e poniamo

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} p(\mathbf{x}, t) - p_0, \quad \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0.$$

Come prima ipotesi semplificativa, linearizziamo la funzione di barotropicità $p = p(\rho)$ attorno alla posizione di equilibrio (p_0, ρ_0) , ottenendo

$$p - p_0 = \frac{dp}{d\rho}(\rho_0)(\rho - \rho_0)$$

e poniamo $c_0^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dp}{d\rho}(\rho_0)$, il quadrato della cosiddetta *velocità del suono* corrispondente alla densità ρ_0 . Grazie alle posizioni precedenti abbiamo dunque

$$\tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho}. \quad (3.8)$$

Quindi $\text{grad } \tilde{p} = c_0^2 \text{grad } \tilde{\rho}$ e l'equazione di Eulero e di continuità diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} + \frac{c_0^2}{\tilde{\rho} + \rho_0} \text{grad } \tilde{\rho} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \text{grad } \tilde{\rho} \cdot \mathbf{v} + (\tilde{\rho} + \rho_0) \text{div } \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Inoltre effettuiamo le ipotesi di linearizzazione

$$|(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}| \ll \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|, \quad |\text{grad } \tilde{\rho} \cdot \mathbf{v}| \ll \left| \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \right|, \quad |\tilde{\rho}| \ll \rho_0,$$

iservandoci di capirne il significato a posteriori. Otteniamo quindi il sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \text{grad } \tilde{\rho} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Caso unidimensionale

Affrontiamo prima il caso in cui le quantità dipendano solo da x e $\mathbf{v} = u(x, t)\mathbf{e}_1$. Le ipotesi di linearizzazione diventano

$$\left| u \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|, \quad \left| u \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \right|, \quad |\tilde{\rho}| \ll \rho_0.$$

e il sistema (3.9) si scrive

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

nelle incognite $u, \tilde{\rho}$. Derivando la prima equazione rispetto a t e la seconda rispetto a x si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Se invece deriviamo la prima rispetto a x e la seconda rispetto a t abbiamo

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} = 0.$$

Quindi u e $\tilde{\rho}$ soddisfano l'equazione delle onde omogenea unidimensionale con velocità c_0 , e la soluzione generale del sistema si scrive

$$u(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t), \quad \tilde{\rho}(x, t) = h(x - c_0 t) + k(x + c_0 t),$$

dove f, g, h, k sono funzioni di classe C^2 che devono essere trovate mediante le condizioni iniziali.⁽²⁾ Osserviamo che, se si considera solo la parte progressiva dell'onda $u = f(x - c_0 t)$, si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - c_0 t), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c_0 f'(x - c_0 t)$$

e dunque l'approssimazione $|u \frac{\partial u}{\partial x}| \ll |\frac{\partial u}{\partial t}|$ significa che $|u|$ deve essere piccola rispetto a c_0 , ovvero la velocità del fluido deve essere bassa rispetto a quella del suono affinché abbia senso la linearizzazione del sistema.

Caso tridimensionale

Nel caso generale ripartiamo dal sistema lineare (3.9)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \text{grad } \tilde{\rho} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

e stavolta prendiamo la divergenza della prima equazione:

$$\frac{\partial \text{div } \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \Delta \tilde{\rho} = 0.$$

Ricavando $\text{div } \mathbf{v}$ dalla seconda equazione

$$\text{div } \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}$$

e sostituendolo nell'equazione sopra, troviamo

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \Delta \tilde{\rho} = 0,$$

da cui

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \tilde{\rho} = 0,$$

e dunque $\tilde{\rho}$ soddisfa ancora l'equazione delle onde omogenea, con velocità c_0 , stavolta scritta per il caso tridimensionale.

Per poter ricavare l'equazione di \mathbf{v} prendiamo il gradiente della seconda equazione:

$$\frac{\partial \text{grad } \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \text{grad div } \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

e deriviamo rispetto al tempo la prima:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \text{grad } \tilde{\rho}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

Sostituendo in quest'ultima il termine $\frac{\partial \text{grad } \tilde{\rho}}{\partial t}$ troviamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - c_0^2 \text{grad div } \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

che non è esattamente l'equazione delle onde. Se però aggiungiamo l'ipotesi di irrotazionalità del moto (che d'altra parte è ovvia in un moto unidimensionale), troviamo che

$$\Delta \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v},$$

e quindi riotteniamo l'equazione delle onde anche per \mathbf{v} :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

⁽²⁾Imponendo le condizioni iniziali $u(x, 0) = u_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$ si trova la soluzione

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - c_0 t) + u_0(x + c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} [-U_1(x - c_0 t) + U_1(x + c_0 t)]$$

dove U_1 è una primitiva di u_1 . In modo simile si può procedere per $\tilde{\rho}$.

3.6 Complementi ed esercizi

Esercizio 3.1 (Principio di Archimede⁽³⁾). Considerando un fluido in situazione statica, soggetto soltanto alla forza peso $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_3$, si trovi la forza risultante che l'esterno di una regione di fluido P esercita sulla regione stessa.

Svolgimento. Per fare ciò, studiamo la forza \mathbf{F} che il campo di forze $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_3$ esercita su una regione P di un fluido in equilibrio, nel caso in cui g è costante.

La forza risultante agente su P si ottiene calcolando

$$\mathbf{F} = \int_P \rho \mathbf{b} dV = -g \left(\int_P \rho dV \right) \mathbf{e}_3 = -gM(P)\mathbf{e}_3,$$

dove $M(P)$ è la massa di P . Quindi il verso di \mathbf{F} è quello di $-\mathbf{e}_3$ e il modulo è $gM(P)$ che corrisponde al peso di P . Inoltre, poiché siamo in presenza di un sistema di forze parallele proporzionali alla densità, il punto di applicazione di \mathbf{F} è per definizione il baricentro. Quindi la forza risultante \mathbf{F} ha come punto di applicazione il baricentro di P , con verso rivolto verso il basso e modulo pari al peso del fluido contenuto in P . (Si noti che tale risultato dipende soltanto dal bilancio della quantità di moto e non è legato al tipo di materiale.)

Ora, cambiando segno a \mathbf{F} (per il terzo principio della dinamica) si trova la forza risultante che l'esterno di una regione di fluido P esercita sulla regione stessa, ricavando il *principio di Archimede*. \diamond

Esercizio 3.2. Risolvere l'equazione della fluidostatica di un gas perfetto omentropico soggetto al proprio peso trovando l'espressione del campo di pressione p in funzione della quota z , sapendo che la funzione di barotropicità è $\rho(p) = Cp^{\frac{1}{\gamma}}$, dove $\gamma > 1$ è il rapporto tra calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante.

Svolgimento. Per prima cosa calcoliamo la funzione di pressione:

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{1}{Cs^{\frac{1}{\gamma}}} ds = \frac{\gamma}{C(\gamma-1)} \left(p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right).$$

Dall'equazione per un fluido barotropico soggetto al proprio peso sappiamo che

$$p(z) = \mathcal{P}^{-1}(-g(z - z_0));$$

dobbiamo quindi imporre

$$\frac{\gamma}{C(\gamma-1)} \left(p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) = g(z_0 - z),$$

da cui

$$p(z) = \left(C \frac{\gamma-1}{\gamma} g(z_0 - z) + p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

che è la soluzione voluta. \diamond

⁽³⁾ARCHIMEDE dal greco *Αρχιμήδης* (Siracusa, circa 287 a.C. – Siracusa, 212 a.C.) è stato un matematico, astronomo, fisico e inventore. Una delle realizzazioni tecniche di Archimede più ammirata nell'antichità fu il suo planetario, formato da un apparecchio che riproduceva la volta del cielo su una sfera e un altro che prediceva il moto apparente del sole, della luna e dei pianeti. Si sa che Archimede aveva descritto la costruzione del planetario nell'opera perduta *Sulla costruzione delle sfere*.

Esercizio 3.3 (Secchio di Newton⁽⁴⁾). Trovare la forma della superficie libera di un fluido perfetto incomprimibile e omogeneo di densità ρ_0 , posto in un recipiente cilindrico, che ruota uniformemente attorno al suo asse di simmetria verticale, considerando la forza di gravità con g costante.

Svolgimento. Il fluido non è in quiete, ma esiste un sistema di riferimento per cui il fluido è fermo. In questo caso lo studio del moto del fluido si può condurre nel sistema di riferimento “solidale”, aggiungendo alle forze di volume le forze apparenti $-\rho\mathbf{a}$, dove \mathbf{a} è l’accelerazione di trascinarsi del sistema solidale. Quindi l’equazione fondamentale della fluidostatica diventa

$$\rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \text{grad } p.$$

Naturalmente il problema è risolvibile perché in questo caso $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ è irrotazionale. Infatti, se denotiamo con $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_3$ la velocità angolare e ci poniamo in un sistema di riferimento solidale con il recipiente, si ha facilmente $\mathbf{a} = -\omega^2 x\mathbf{e}_1 - \omega^2 y\mathbf{e}_2$ e quindi $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Ovviamente $\text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{0}$ in quanto $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_3$. Poiché un potenziale per $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ è

$$\Psi = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz,$$

si ottiene

$$\frac{p}{\rho_0} = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz + c$$

dove c è una costante arbitraria. Imponendo che sul pelo libero la pressione sia costante ($p = p_{\text{atm}}$ pressione atmosferica), si ottiene il profilo

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) - \frac{p_{\text{atm}}}{g\rho_0} + \frac{c}{g}$$

che è l’equazione di un paraboloide di rivoluzione. ◇

Esercizio 3.4 (Teorema di Torricelli⁽⁵⁾). Determinare la velocità del getto d’acqua che fuoriesce da un’apertura sul fondo di una cisterna immediatamente dopo la rimozione del tappo.

Svolgimento. Denotando con ρ la densità del fluido, con p_0, p la pressione rispettivamente al foro di uscita e al pelo libero del fluido, con v_0 il modulo della velocità di uscita e con z la quota del pelo libero, dal Teorema di Bernoulli abbiamo

$$gz + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2}$$

⁽⁴⁾ Isaac NEWTON (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 4 gennaio 1643 – Londra, 31 marzo 1727) grande matematico, fisico e alchimista, nel 1699 divenne anche direttore della Zecca. Questo incarico era inteso come sinecure, ma Newton lo prese seriamente, esercitando il suo potere per riformare la moneta e punire i falsari. Egli stabilì un cambio fisso fra la sterlina e l’oncia d’oro ed elaborò dei metodi per aumentare la produttività della Zecca, con misure per un maggior controllo della quantità d’oro e argento nelle monete coniate; riuscì in questo modo a chiudere le filiali provinciali della Banca d’Inghilterra e a tornare a una produzione centralizzata della moneta.

⁽⁵⁾ Evangelista TORRICELLI (Faenza, 15 ottobre 1608 – Firenze, 25 ottobre 1647) matematico e fisico, è famoso anche per la scoperta del solido di rotazione infinitamente lungo detto “tromba di Gabriele”, da lui chiamato “solido iperbolico acutissimo”, avente l’area della superficie infinita, ma il volume finito. Questo fu considerato per molto tempo un paradosso incredibile da molti, incluso lo stesso Torricelli, che cercò diverse spiegazioni alternative, anche perché l’idea di un secchio che è possibile riempire di vernice, ma impossibile da pitturare è senz’altro singolare.

da cui si può ricavare v_0 una volta note p_0, p, ρ, z . Se ad esempio $p = p_0$, come può avvenire per una vasca aperta non troppo alta, si ottiene

$$v_0 = \sqrt{2gz}$$

che è il noto *Teorema di Torricelli*. ◇

Esercizio 3.5. Trovare il campo di pressione $p(x, y, t)$ ed il campo di velocità

$$\mathbf{v}(x, y, t) = u(x, y, t)\mathbf{e}_1$$

di un fluido perfetto incomprimibile e omogeneo che si muova in un piano tra le rette $y = 0$ e $y = h$, in assenza di forze esterne, con le condizioni al contorno per la pressione $p(0, y, t) = p_1$ e $p(L, y, t) = p_2$ con p_1, p_2 costanti.

Svolgimento. Dall'equazione di continuità si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

e dunque $u = u(y, t)$. La seconda componente dell'equazione di Eulero fornisce poi

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

e dunque $p = p(x, t)$. La prima componente dell'equazione di Eulero diventa

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.11)$$

e se deriviamo rispetto a x , considerato che u non dipende da x , otteniamo

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0,$$

da cui $p(x, t) = A(t)x + B(t)$, con A, B funzioni arbitrarie del tempo. Imponendo le condizioni al contorno sulla pressione si ottiene

$$B(t) = p_1, \quad A(t) = \frac{p_2 - p_1}{L}$$

e dunque A, B non dipendono neppure dal tempo e

$$p(x) = \frac{p_2 - p_1}{L}x + p_1.$$

Se ora sostituiamo nella (3.11) abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{p_2 - p_1}{\rho_0 L},$$

da cui

$$u(y, t) = -\frac{p_2 - p_1}{\rho_0 L}t + u_0(y)$$

dove $u_0(y)$ è il dato iniziale per $u(y, t)$.

L'assenza di viscosità provoca l'aumento nel tempo della velocità, sebbene l'esperienza suggerisca che in queste condizioni venga invece raggiunto un moto stazionario. Anche la portata⁽⁶⁾ del canale, che si calcola mediante

$$P = \int_0^h u(y, t) dy = h \frac{p_1 - p_2}{\rho_0 L} t + U_0(y),$$

cresce indefinitamente nel tempo. ◇

Esercizio 3.6 (Teorema di Bernoulli⁽⁷⁾). Dimostrare il seguente risultato:

Teorema 3.1. (Teorema di Bernoulli) *Sia dato un fluido perfetto barotropico e supponiamo che il campo delle forze di volume \mathbf{b} sia irrotazionale e dunque ammetta un potenziale $-\Psi$. Allora, ponendo*

$$\Gamma = \Psi + \mathcal{P} + \frac{v^2}{2}$$

valgono i seguenti fatti:

- (1) se il moto è stazionario, si ha che Γ è costante lungo le linee di corrente;
- (2) se il moto è irrotazionale, esiste un potenziale cinetico $\varphi(\mathbf{x}, t)$ per cui su ogni componente connessa della regione occupata dal fluido si ha

$$\Gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0;$$

- (3) se il moto è stazionario e irrotazionale, su ogni componente connessa la quantità Γ è costante.

Svolgimento. Sostituendo l'espressione (2.18) dell'accelerazione mediante la vorticità nell'equazione del moto, si ha

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\text{grad}(\Psi + \mathcal{P})$$

da cui

$$\text{grad} \Gamma + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (3.12)$$

Dunque, se il moto è stazionario e irrotazionale si ha $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ e quindi $\text{grad} \Gamma = \mathbf{0}$ in tutta la regione, ovvero Γ è costante su ogni componente connessa.

Se il moto è solamente stazionario, moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} si ottiene

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad} \Gamma = 0,$$

ovvero Γ è costante lungo le linee di corrente.

⁽⁶⁾Per *portata* intendiamo il volume (o, in questo caso bidimensionale, l'area) di fluido che passa nella sezione nell'unità di tempo; per avere la massa di fluido per unità di tempo, in questo caso di densità costante, è sufficiente moltiplicare per la costante ρ_0 .

⁽⁷⁾Daniel BERNOULLI (Groningen, 29 gennaio 1700 – Basilea, 27 luglio 1782) matematico, figlio di Johann, nipote di Jacob, fratello più giovane di Nicolaus II e più anziano di Johann II, tutti matematici. Daniel Bernoulli è stato descritto come “di gran lunga il più abile dei giovani Bernoulli”.

Infine, se il moto è solamente irrotazionale, la vorticità è nulla e dalla (3.12) segue che per ogni potenziale cinetico φ si ha

$$\text{grad} \left(\Gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \mathbf{0},$$

ovvero, ricordando che tutte le quantità possono in generale dipendere dal tempo,

$$\Gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c(t),$$

dove $c(t)$ è una quantità che dipende solo dal tempo. Denotando con $C(t)$ una primitiva di $c(t)$ e ponendo

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\mathbf{x}, t) - C(t),$$

si ha che $\hat{\varphi}$ è ancora un potenziale cinetico e $\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - c$, quindi

$$\Gamma + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} = 0.$$

Denotando nuovamente con φ la $\hat{\varphi}$, si ha la tesi. \diamond

Esercizio 3.7 (Tubo di Venturi e legge di Stevino). Sfruttare il teorema di Bernoulli per analizzare la situazione del *tubo di Venturi*⁽⁸⁾⁽⁹⁾, ovvero un tubo in cui scorre un fluido perfetto incomprimibile e omogeneo che presenti due sezioni diverse di aree A_1 e A_2 .

Successivamente dimostrare la *legge di Stevino*⁽¹⁰⁾ che governa il caso statico di un fluido perfetto barotropico soggetto solo al proprio peso.

Svolgimento. Nel primo caso, se supponiamo il moto stazionario e la velocità ortogonale alle sezioni, dall'equazione di continuità segue (con ovvie notazioni)

$$v_1 A_1 = v_2 A_2.$$

Se poi imponiamo il moto irrotazionale e trascuriamo le forze esterne, dal Teorema di Bernoulli segue

$$\frac{p_1}{\rho_0} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_0} + \frac{v_2^2}{2}$$

che fornisce una relazione fra velocità e pressione. Se ad esempio v_1 e p_1 sono noti, si ottiene

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho_0}{2}(v_1^2 - v_2^2) = p_1 + \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2^2} \right) v_1^2.$$

⁽⁸⁾ Giovanni Battista VENTURI (Bibbiano, 15 marzo 1746 – Reggio Emilia, 24 aprile 1822) fisico, ordinato sacerdote nel 1769. Nel 1797 a Parigi esamina i codici di Leonardo da Vinci, pubblicandone alcuni estratti in un saggio dove per primo mette in evidenza la componente scientifica e tecnologica dell'opera leonardesca.

⁽⁹⁾ LEONARDO (Vinci, 15 aprile 1452 – Amboise, 2 maggio 1519) non necessita di ulteriori parole.

⁽¹⁰⁾ Simon STEVIN (Bruges, 1548 – L'Aia, 1620) ingegnere, fisico e matematico fiammingo pre-galileiano; a lui si deve l'introduzione di una nuova notazione per i numeri decimali, che permetteva di estendere a tali numeri le normali operazioni algebriche sui numeri interi, senza usare la notazione frazionaria. Tale innovazione ha aperto la strada alla notazione decimale moderna e al concetto di "numero reale". Stevino pensava che la lingua fiamminga fosse eccellente per scrivere di scienza, tradusse quindi moltissimi termini matematici in fiammingo; il fiammingo risulta così una delle poche lingue europee a possedere molti termini matematici non derivati dal latino, compreso *Wiskunde* (matematica).

Consideriamo ora il caso statico di un fluido perfetto barotropico soggetto solo al proprio peso. Dunque \mathbf{b} è la forza peso. Supponendo che tale forza abbia direzione costante verso il basso, si può scrivere

$$\mathbf{b}(x, y, z) = -g(x, y, z)\mathbf{e}_3.$$

Dal teorema di Bernoulli abbiamo che

$$\Gamma = \Psi + \mathcal{P} \tag{3.13}$$

è costante su ogni componente connessa.

Determiniamo ora Ψ . Per avere una soluzione statica si deve imporre $\text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{0}$, ovvero

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{e dunque} \quad g = g(z).$$

Un potenziale di \mathbf{b} è dato da

$$\Psi(z) = G(z) = \int_{z_0}^z g(s) ds;$$

se si suppone $p(z_0) = p_0$, la (3.13) diventa

$$\frac{p(z)}{\rho_0} + \Psi(z) = \frac{p(z_0)}{\rho_0} + \Psi(z_0).$$

Se g è costante e il fluido è incomprimibile e omogeneo, dall'equazione precedente si ricava

$$p(z) = p_0 + \rho_0 g(z_0 - z)$$

che è la nota *legge di Stevino*. ◇

Capitolo 4

Fluidi viscosi ed equazione di Navier-Stokes

Il modello dei fluidi perfetti, che ha portato alla formulazione dell'equazione di Eulero per i fluidi, per quanto utile in molte applicazioni, è comunque un modello piuttosto limitato che non sempre risponde bene ai dati sperimentali, soprattutto nel caso dell'idrodinamica. D'altra parte, abbiamo già osservato come l'ipotesi di trascurare lo sforzo tangenziale possa essere ben giustificata nel caso statico, mentre non ha evidenti risposdenze con la realtà nel caso dinamico. C'è bisogno quindi di trovare delle equazioni costitutive per il tensore degli sforzi che tengano conto del fenomeno della viscosità; queste porteranno alla scrittura dell'equazione di Navier-Stokes.⁽¹⁾

4.1 Fluidi stokesiani

Introduciamo in questa sezione il concetto di *fluido stokesiano*, che lascia più libertà, rispetto al modello di fluido perfetto, nella forma del tensore degli sforzi. George Stokes, in un articolo pubblicato all'età di 26 anni, definì le proprietà di un fluido assumendo il seguente principio:

That the difference between the pressure on a plane in a given direction passing through any point P of a fluid in motion and the pressure which would exist in all directions about P if the fluid in its neighbourhood were in a state of relative equilibrium depends only on the relative motion of the fluid immediately about P ; and that the relative motion due to any motion of rotation may be eliminated without affecting the differences of the pressures above mentioned.⁽²⁾

⁽¹⁾Claude-Louis NAVIER (Digione, 10 febbraio 1785 – Parigi, 21 agosto 1836) ingegnere e matematico, in vita fu famoso specialista nella costruzione di strade e ponti, e fu il primo a sviluppare su basi scientifiche una teoria dei ponti sospesi.

⁽²⁾George G. Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. VIII p. 287 (1845).

Una possibile traduzione è: “che la differenza tra la pressione che si ha su un piano fissato passante per un punto P di un fluido in moto e la pressione che si avrebbe in ogni direzione se il fluido fosse in equilibrio relativo in un intorno di P dipenda solo dal moto relativo del fluido immediatamente intorno a P ; e che il moto relativo dovuto ad una generica rotazione possa essere eliminato senza modificare le differenze delle pressioni sopra citate.”

Volendo anche noi adeguarci all'idea di Stokes, alla luce di questo principio introduciamo il *tensore di viscosità*

$$\mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T} + p\mathbf{l},$$

e diciamo che un fluido è *stokesiano* se il tensore simmetrico \mathbf{V} è tale che:

- (1) \mathbf{V} dipende solo dal tensore velocità di deformazione \mathbf{D} e non da altre variabili cinematiche;
- (2) \mathbf{V} non dipende esplicitamente dalla posizione;
- (3) \mathbf{V} è *isotropo*, ovvero non ha direzioni spaziali privilegiate;
- (4) $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ se $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

Naturalmente \mathbf{V} dipende in generale anche da variabili termodinamiche, su cui per ora non facciamo ipotesi.

La dipendenza del tensore \mathbf{V} da \mathbf{D} deve essere in realtà di una forma piuttosto particolare, come vediamo nel prossimo teorema. Ricordiamo che gli invarianti principali di una matrice \mathbf{A} sono i coefficienti i_1, i_2, i_3 tali che

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^3 - i_1\lambda^2 + i_2\lambda - i_3.$$

Tali coefficienti sono invarianti per coniugio e in particolare si ha che $i_1 = \text{tr } \mathbf{A}$ e $i_3 = \det \mathbf{A}$.

Teorema 4.1. *Per un fluido stokesiano si ha*

$$\mathbf{V} = \alpha\mathbf{l} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2$$

dove α, β, γ sono funzioni solo degli invarianti principali di \mathbf{D} .

Dimostrazione. Tenendo fisse le eventuali variabili termodinamiche, dai primi due postulati si ha subito che esiste $f : \text{Sym}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^3)$ tale che $\mathbf{V} = f(\mathbf{D})$ e dal terzo segue che

$$f(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{-1}f(\mathbf{D})\mathbf{R}$$

per ogni matrice ortogonale \mathbf{R} . Inoltre, dall'ultimo postulato si ha $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Siano $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ due matrici simmetriche coniugate; allora anche $f(\mathbf{D}_1), f(\mathbf{D}_2)$ saranno coniugate, infatti: \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 sono coniugate e dunque esiste una matrice ortogonale \mathbf{R} tale che $\mathbf{D}_1 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}_2\mathbf{R}$. Quindi

$$f(\mathbf{D}_1) = f(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}_2\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{-1}f(\mathbf{D}_2)\mathbf{R}$$

ovvero anche $f(\mathbf{D}_1), f(\mathbf{D}_2)$ sono coniugate. In particolare, $f(\mathbf{D}_1)$ e $f(\mathbf{D}_2)$ hanno gli stessi autovalori. Denotando con d_1, d_2, d_3 gli autovalori di \mathbf{D} e con v_1, v_2, v_3 gli autovalori di $f(\mathbf{D})$, si ha allora che

$$v_i = f_i(d_1, d_2, d_3) \quad i = 1, 2, 3.$$

Supponiamo ora che i d_i siano tutti distinti; ponendo

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & d_1 & d_1^2 \\ 1 & d_2 & d_2^2 \\ 1 & d_3 & d_3^2 \end{bmatrix}$$

si ha $\det \mathbf{A} = (d_1 - d_2)(d_2 - d_3)(d_3 - d_1) \neq 0$ e dunque il sistema lineare

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

ha soluzione, ovvero

$$v_i = \alpha + \beta d_i + \gamma d_i^2 \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

dove i coefficienti α, β, γ sono funzioni di (d_1, d_2, d_3) . Poiché una permutazione nei d_i produce una analoga permutazione nei v_i (infatti tale permutazione degli autovalori può essere ottenuta mediante una trasformazione ortogonale), si ha che α, β, γ sono funzioni simmetriche dei d_i , quindi possono dipendere solamente dagli invarianti principali di \mathbf{D} .

Se gli autovalori di \mathbf{D} non sono tutti distinti, si può dimostrare che anche i v_i non sono tutti distinti e si giunge comunque alla (4.1), eventualmente con $\gamma = 0$ o $\beta = 0$. In ogni caso, la (4.1) implica che

$$\mathbf{V} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{D} + \gamma \mathbf{D}^2,$$

quindi la dimostrazione è completa. \square

In particolare segue che

$$\mathbf{T} = \tilde{\alpha} \mathbf{I} + \beta \mathbf{D} + \gamma \mathbf{D}^2$$

dove $\tilde{\alpha} = \alpha - p$. È interessante notare che la forma del tensore degli sforzi di un fluido stokesiano, per quanto le ipotesi siano piuttosto generali, in realtà è un polinomio di grado due in \mathbf{D} .

4.2 Fluidi newtoniani e legge di Cauchy-Poisson

Introduciamo ora i cosiddetti *fluidi newtoniani*. Essi sono particolari fluidi stokesiani in cui si suppone che \mathbf{V} sia *lineare* rispetto a \mathbf{D} : in questo caso si ha $\gamma = 0$, β costante e α lineare in \mathbf{D} , ovvero α è un multiplo del primo invariante principale, la traccia di \mathbf{D} . Poiché $\text{tr } \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{v}$, si ottiene

$$\mathbf{T} = (-p + \lambda \text{div } \mathbf{v}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (4.2)$$

che è la nota *legge costitutiva di Cauchy-Poisson*⁽³⁾. I coefficienti di viscosità λ, μ sono costanti rispetto alle variabili cinematiche, ma possono dipendere in generale dalle variabili termodinamiche.

Per un fluido newtoniano incomprimibile, poiché $\text{div } \mathbf{v} = 0$, l'equazione costitutiva di \mathbf{T} si scrive

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}. \quad (4.3)$$

⁽³⁾Siméon-Denis POISSON (Pithiviers, 21 giugno 1781 – Parigi, 25 aprile 1840) fu un grande matematico francese, affiancò sempre all'insegnamento una produttivissima attività di ricerca su svariati argomenti che affrontava però sempre uno alla volta, senza lasciarsi distrarre, durante una ricerca, da idee ad essa non correlate, che annotava semplicemente nel suo taccuino in attesa di poterle sviluppare. In *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et matière civile* apparve per la prima volta la distribuzione di Poisson, che descrive la probabilità del verificarsi di un evento casuale in un intervallo di tempo sotto l'ipotesi che la probabilità del verificarsi sia molto piccola, ma il numero di prove molto alto; fu lui ad introdurre l'espressione "legge dei grandi numeri".

Se in più, oltre ad essere incomprimibile, il fluido è omogeneo la pressione p non è più una variabile termodinamica, in quanto la densità è costante, come d'altronde avviene già nei fluidi perfetti.

Il secondo principio della termodinamica porta una restrizione sul segno dei coefficienti di viscosità. Introduciamo la quantità

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{T} + p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{D} \quad (4.4)$$

che prende il nome di *funzione di dissipazione*, in quanto rappresenta la produzione di calore (per unità di volume e di tempo) dovuta alla deformazione, ovvero la dissipazione della deformazione. Se, conformemente al secondo principio della termodinamica, si assume l'ipotesi che la deformazione non possa assorbire calore ma solo produrlo, la funzione di dissipazione dovrà soddisfare la disuguaglianza

$$\Phi \geq 0. \quad (4.5)$$

Per un tensore che soddisfa la legge di Cauchy-Poisson si ha

$$\Phi = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}.$$

Poiché si ha $\operatorname{div} \mathbf{v} = d_1 + d_2 + d_3$ e $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$, dove i d_i sono gli autovalori di \mathbf{D} , è facile verificare che⁽⁴⁾

$$3\Phi = (3\lambda + 2\mu)(d_1 + d_2 + d_3)^2 + 2\mu [(d_1 - d_2)^2 + (d_2 - d_3)^2 + (d_3 - d_1)^2]$$

e dunque dall'arbitrarietà di \mathbf{D} , ricordando la disuguaglianza (4.5), scegliendo ad esempio $d_1 = d_2 = d_3$ si ottiene $3\lambda + 2\mu \geq 0$, e scegliendo $d_1 + d_2 = d_3 = 0$ si ottiene $\mu \geq 0$. Dunque si hanno le relazioni

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0; \quad (4.6)$$

in particolare, nel caso incomprimibile l'unico coefficiente di viscosità μ deve essere positivo.

4.2.1 Equazioni di Navier-Stokes

È giunto finalmente il momento di ricavare il sistema di equazioni che governa il moto di un fluido newtoniano. Per fare questo è sufficiente sostituire la (4.2) nell'equazione del moto (2.12) e considerare anche l'equazione di continuità, ottenendo

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} - \operatorname{grad} p + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + 2 \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}) \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

a cui andranno eventualmente aggiunte le equazioni della termodinamica o l'equazione di barotropicità. Nel caso incomprimibile e omogeneo tale sistema diventa

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho_0 \mathbf{b} - \operatorname{grad} p + 2 \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}) \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

⁽⁴⁾Segue dall'identità $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2$.

Supponiamo ora che i coefficienti di viscosità siano costanti; allora λ e μ si possono portare fuori dagli operatori di derivazione. Per calcolare div D basta ricordare la definizione di laplaciano e l'identità (A.18) :

$$\text{div D} = \frac{1}{2} \left(\text{div grad } \mathbf{v} + \text{div}(\text{grad } \mathbf{v})^\top \right) = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{v} + \text{grad div } \mathbf{v}).$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema (4.7) abbiamo dunque il nuovo sistema

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v} = \rho \mathbf{b} - \text{grad } p + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad } \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

che è il celeberrimo *sistema di equazioni di Navier-Stokes* per un fluido newtoniano comprimibile. Nel caso incomprimibile e omogeneo tale sistema diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v} = \mathbf{b} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v} \\ \text{div } \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

dove $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mu / \rho_0$ è la cosiddetta *viscosità cinematica*. Osserviamo che $[\mu] = \text{kg s}^{-1} \text{m}^{-1}$ e dunque $[\nu] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Il modello Newtoniano incomprimibile schematizza bene il comportamento di alcuni liquidi reali quali l'acqua, la glicerina, il cloroformio, lo sciroppo ed i sistemi colloidali molto diluiti. Nel caso dell'acqua sperimentalmente si trova $\mu = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$ a 0°C , mentre $\mu = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$ a 20°C .

Il modello newtoniano può essere utile anche per descrivere il comportamento del sangue in canali di grande ampiezza, come le vene e le arterie principali, ed all'interno dei ventricoli e del miocardio. Il comportamento newtoniano del sangue è dovuto al fatto che in tali regioni la velocità di taglio è sufficientemente alta da poter trascurare gli effetti non newtoniani.

4.2.2 Condizioni al contorno

Osserviamo, che, come succede per il caso dei fluidi perfetti, vi è pareggiamento tra numero di incognite ed equazioni scalari del sistema (4.10). In questo caso, il problema del moto è impostato completamente dal punto di vista meccanico. Se il fluido è comprimibile o i coefficienti di viscosità non sono costanti, per avere pareggiamento dobbiamo formulare opportune relazioni che leghino le grandezze incognite tra loro o con le variabili termodinamiche. In ogni caso, ai sistemi (4.7), (4.9), (4.8) e (4.10) dobbiamo associare opportune condizioni al contorno.

Se nel caso dei fluidi perfetti le condizioni al contorno usuali assegnate per un dominio sono le condizioni di impenetrabilità, ovvero $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sul bordo del dominio (se la parete è ferma), tali condizioni non sono più sufficienti per l'equazione di Navier-Stokes. In quest'ultimo caso siamo infatti in presenza di un'equazione del secondo ordine (per i termini $\text{grad div } \mathbf{v}$ e $\Delta \mathbf{v}$) e quindi le condizioni al contorno devono essere aumentate. La presenza della viscosità, e dunque degli sforzi di taglio, suggerisce di imporre come condizione al contorno che il fluido sia solidale con le pareti che lo contengono, ovvero la *condizione di aderenza*

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \quad \text{su } \partial \mathcal{B}(t) \quad (4.11)$$

dove \mathbf{V} indica la velocità della parete. Questa condizione, detta anche *no-slip condition*, è chiaramente più forte della precedente, perché vincola tutte le componenti della velocità, e non solo quella normale al bordo. Oltre ad essere dovuta a ragioni matematiche, la condizione (4.11) è verificata sperimentalmente per i fluidi viscosi in quanto l'esperienza mostra che non solo le particelle di tali fluidi non possono penetrare attraverso le pareti, ma aderiscono alle pareti stesse. In particolare si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sui bordi fissi.}$$

A tale proposito, osserviamo una cosa interessante: poiché da (A.25) si ha

$$\Delta \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v},$$

se ci mettiamo nel caso incomprimibile ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) e omogeneo la (4.10) diventa

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho_0 \mathbf{b} - \text{grad } p - \mu \text{rot } \boldsymbol{\omega};$$

se il moto è irrotazionale, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ e l'equazione di Navier-Stokes coincide con quella dei fluidi perfetti. Questo però non vuol dire che i moti viscosi irrotazionali si riducono a moti perfetti, perché le condizioni al contorno nelle due situazioni sono alquanto diverse.

4.2.3 Equazioni di Navier-Stokes in formulazione ALE

Abbiamo visto nella Sezione 2.4 del capitolo sulla Cinematica dei Continui che si può formulare il problema del moto in un generico sistema di riferimento ALE. In questo caso, grazie alla formula (2.17), le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incomprimibile nelle variabili ALE $(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{v}} + (\text{grad } \mathbf{v})(\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{w}}) = \tilde{\mathbf{b}} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } \tilde{p} + \nu \Delta \tilde{\mathbf{v}} \\ \text{div } \tilde{\mathbf{v}} = 0, \end{cases}$$

dove per ogni campo $F(\mathbf{x}, t)$ si intende

$$\tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = F(A(\tilde{\mathbf{x}}, t), t).$$

4.3 Numero di Reynolds

Consideriamo il sistema di Navier-Stokes nel caso incomprimibile e omogeneo con $\mathbf{b} = \mathbf{0}$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} = -\text{grad } \frac{p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

L'obiettivo di questa sezione è introdurre un parametro adimensionale che in qualche modo quantifichi l'azione della viscosità su un moto. A parte le condizioni al contorno, è infatti vero che l'equazione dei fluidi perfetti si ottiene annullando il parametro di viscosità ν (o μ), quindi ci si chiede se è vero che i fluidi con "bassa viscosità" possano essere considerati fluidi "quasi" perfetti. La questione, così enunciata, è mal posta, perché la viscosità non è un parametro adimensionale e quindi va specificato rispetto a cosa deve essere piccola. In realtà vediamo che l'effetto della viscosità su un moto dipende sia da ν che dalle condizioni al

contorno e dalla geometria del moto stesso; tale effetto è quindi una caratteristica del moto, e non del fluido.

Denotiamo con L la lunghezza caratteristica della geometria del moto e con U la velocità (in modulo) caratteristica del moto. La scelta di U e L è chiaramente alquanto arbitraria ma dal punto di vista fisico conta come ordine di grandezza. Ad esempio, se si vuole descrivere il flusso di un fluido in un tubo, L potrebbe essere il diametro del tubo e U la velocità media; oppure, nel caso di un flusso che investe un ostacolo, L potrebbe essere la sezione dell'ostacolo e U il modulo della velocità lontano dall'ostacolo.

Poniamo poi $T \stackrel{\text{def}}{=} L/U$; questo numero indicherà la scala caratteristica dei tempi in cui avviene il moto. Riscaliamo poi le variabili, in modo da renderle adimensionali: poniamo

$$\widehat{\mathbf{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad \widehat{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \widehat{p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p}{\rho_0 U^2}, \quad \widehat{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t}{T}.$$

Vogliamo scrivere l'equazione di Navier-Stokes nelle variabili $\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{p}, \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{t}$: osservando che

$$\frac{\partial \widehat{x}}{\partial x} = \frac{\partial \widehat{y}}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{z}}{\partial z} = \frac{1}{L}, \quad \frac{\partial \widehat{t}}{\partial t} = \frac{1}{T},$$

e denotando con $\widehat{\text{grad}}$ e $\widehat{\Delta}$ i rispettivi operatori di derivazione rispetto alle nuove variabili, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{\partial(\widehat{\mathbf{v}}U)}{\partial t} = \frac{U}{T} \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}}{\partial \widehat{t}}, \\ (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} &= U^2(\text{grad } \widehat{\mathbf{v}})\widehat{\mathbf{v}} = \frac{U^2}{L}(\widehat{\text{grad}}\widehat{\mathbf{v}})\widehat{\mathbf{v}}, \\ \text{grad } \frac{p}{\rho_0} &= \frac{U^2}{L} \widehat{\text{grad}}\widehat{p}, \\ \Delta \mathbf{v} &= U \Delta \widehat{\mathbf{v}} = \frac{U}{L^2} \widehat{\Delta} \widehat{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione di Navier-Stokes si ottiene

$$\frac{U}{T} \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}}{\partial \widehat{t}} + \frac{U^2}{L} (\widehat{\text{grad}}\widehat{\mathbf{v}})\widehat{\mathbf{v}} = -\frac{U^2}{L} \widehat{\text{grad}}\widehat{p} + \nu \frac{U}{L^2} \widehat{\Delta} \widehat{\mathbf{v}}.$$

Ricordando poi la definizione di T e moltiplicando tutto per L/U^2 risulta

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}}{\partial \widehat{t}} + (\widehat{\text{grad}}\widehat{\mathbf{v}})\widehat{\mathbf{v}} = -\widehat{\text{grad}}\widehat{p} + \frac{\nu}{UL} \widehat{\Delta} \widehat{\mathbf{v}}.$$

Se ora poniamo

$$Re \stackrel{\text{def}}{=} \frac{LU}{\nu}$$

otteniamo la *forma adimensionale dell'equazione di Navier-Stokes*

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}}{\partial \widehat{t}} + (\widehat{\text{grad}}\widehat{\mathbf{v}})\widehat{\mathbf{v}} = -\widehat{\text{grad}}\widehat{p} + \frac{1}{Re} \widehat{\Delta} \widehat{\mathbf{v}}, \quad \widehat{\text{div}}\widehat{\mathbf{v}} = 0. \quad (4.12)$$

Naturalmente, eventuali condizioni al contorno andranno riscalate in modo simile. Osserviamo che se le equazioni dimensionali di partenza sono definite in un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e su un

intervallo di tempo limitato $[t_1, t_2]$, allora le equazioni adimensionali (4.12) hanno senso in $\{\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}, \mathbf{x} \in \Omega\} \times [\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T}]$.

Il parametro adimensionale positivo Re è detto *numero di Reynolds*⁽⁵⁾ e caratterizza l'influenza del termine di viscosità $\hat{\Delta}\hat{\mathbf{v}}$ sul moto. I moti che presentano un forte effetto viscoso saranno caratterizzati da un numero di Reynolds *piccolo*, mentre quelli per cui l'effetto viscoso è trascurabile avranno un numero di Reynolds *grande*. Se due moti diversi hanno lo stesso numero di Reynolds e una geometria simile, essi avranno le stesse caratteristiche, in quanto entrambi risolvono la stessa equazione adimensionale. Saranno un semplice riscaldamento l'uno dell'altro. Questo fatto può interessare se si vogliono creare degli esperimenti che simulino in piccolo dei fenomeni su grande scala: è sufficiente fare in modo che il numero di Reynolds non cambi.

4.4 Soluzioni esatte delle equazioni di Navier-Stokes

Studiamo ora alcuni casi (piuttosto semplici) in cui le equazioni di Navier-Stokes possono essere risolte esplicitamente. Osserviamo che, in generale, il problema dell'esistenza e unicità per tali equazioni (soggette alle condizioni introdotte nel paragrafo 4.2.2) risulta un problema analitico ancora aperto: una delle principali difficoltà è la loro non linearità. Per questo motivo, sono state incluse dal Mathematical Clay Institute tra i sette problemi del millennio, per la risoluzione dei quali è stata messa come premio la cifra di un milione di dollari.

Tuttavia, se la geometria della regione dove si svolge il moto è particolarmente semplice o presenta particolari simmetrie o se si cercano forme opportune per il campo della velocità è possibile determinare soluzioni esplicite (analitiche o numeriche) del problema di Navier-Stokes: si parla in questo caso di *soluzioni esatte*. Tali soluzioni sono importanti dal punto di vista teorico perché permettono di analizzare l'accuratezza di alcuni metodi numerici e forniscono una base per lo studio della stabilità e della turbolenza del sistema. Le situazioni fisiche in cui generalmente si presentano soluzioni esatte sono piuttosto semplici e comuni e fanno sì che tali soluzioni abbiano una notevole importanza pratica.

In questo paragrafo descriveremo i cosiddetti *flussi viscometrici*: moti stazionari mediante i quali è possibile caratterizzare sperimentalmente la viscosità di un fluido newtoniano. In particolare il *moto di Poiseuille*⁽⁶⁾ rappresenta forse la soluzione esatta più famosa delle equazioni di Navier-Stokes. Tale moto è stato prima ottenuto dal fisiologo Poiseuille, a cui deve il suo nome, sperimentalmente attorno al 1839 in quanto era interessato a determinare proprio le proprietà della circolazione del sangue. Usando diversi tubi cilindrici di diametro piccolo, Poiseuille si rese conto che il moto è laminare. Solo anni dopo, Stokes dimostra teoricamente, attraverso le equazioni di Navier-Stokes e la condizione di no-slip, l'esattezza delle osservazioni sperimentali di Poiseuille.

Prima di occuparci del caso cilindrico, studiamo il caso piano.

⁽⁵⁾ Osborne REYNOLDS (Belfast, 23 agosto 1842 – Watchet, 21 febbraio 1912) dopo aver lavorato come apprendista in un cantiere navale, studiò matematica a Cambridge. Sulla motivazione di tale scelta scrisse: “*Fin dai miei più remoti ricordi ho provato un interesse irrefrenabile per la meccanica e per le leggi fisiche su cui essa si basa come scienza [...] la mia attenzione fu rivolta a vari fenomeni meccanici, per la cui spiegazione scoprii essere essenziale la conoscenza della matematica.*”

⁽⁶⁾ Jean Louis Marie POISEUILLE (Parigi, 22 aprile 1799 – Parigi, 26 dicembre 1869) medico, fisiologo e fisico, il suo contributo allo studio della fluidodinamica derivò da interessi medici. Infatti è nella dissertazione *Recherches sur la force du coeur aortique* che presentò i suoi risultati. Il *Poise*, unità di misura della viscosità nel sistema CGS, prende il nome da lui.

4.4.1 Moto piano di Poiseuille-Couette

Consideriamo un fluido newtoniano incomprimibile e omogeneo che si muova di moto *stazionario* nel piano compreso tra le rette $y = 0$ e $y = h$. Assumiamo di essere in assenza di forze esterne ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$) e che $\mathbf{v}(x, y) = u(x, y)\mathbf{e}_1$ (moto di scorrimento semplice). Supponiamo che le pareti siano entrambe ferme, ovvero (per le condizioni di aderenza) $u(x, 0) = 0$ e $u(x, h) = 0$.

Dall'equazione di continuità si ha subito $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e dunque $u = u(y)$. L'equazione di Navier-Stokes proiettata sull'asse y dà $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, quindi $p = p(x)$. Studiamo la prima componente dell'equazione:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

quindi

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Derivando rispetto a x si ha $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$ e dunque

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C.$$

La costante C è detta *salto di pressione*, il suo valore può essere determinato se imponiamo le condizioni al contorno $p(0, y) = p_1$ e $p(L, y) = p_2$:

$$p(x) = Cx + p_1, \quad C = \frac{p_2 - p_1}{L}.$$

Dall'equazione $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C$ si ottiene poi

$$u(y) = \frac{C}{2\mu} y^2 + ay + b$$

e per le condizioni sulla u

$$u(y) = \frac{C}{2\mu} (y^2 - hy) = \frac{p_1 - p_2}{2\mu L} y(h - y) \quad (4.13)$$

che è simmetrica rispetto alla retta $y = h/2$ ⁽⁷⁾.

Quindi se $C \neq 0$, si trova una soluzione stazionaria non banale. La velocità dunque ha un andamento parabolico: se $C < 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il basso, mentre la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto se $C > 0$. Il vertice della parabola ha coordinate $\left(\frac{h}{2}, \frac{-Ch^2}{8\mu}\right)$. In corrispondenza di ogni valore fissato del salto di pressione C si ottiene uno ed un solo moto di Poiseuille.

Il calcolo della portata ⁽⁸⁾ del moto permette di determinare sperimentalmente il coefficiente di viscosità: si ha

$$P = \int_0^h u(y) dy = -\frac{C}{12\mu} h^3.$$

⁽⁷⁾ Osserviamo che se la regione in cui si svolge il moto fosse quella compresa tra le rette $y = -h$ e $y = h$, allora otterremo la soluzione pari $u(y) = \frac{C}{2\mu}(y^2 - h^2)$.

⁽⁸⁾ Si veda la nota (6) nel capitolo precedente.

È interessante vedere che espressione assumono le componenti del tensore degli sforzi di Cauchy:

$$\mathbb{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}.$$

Poiché $\mathbf{v} = u(y)\mathbf{e}_1$, le componenti di \mathbf{D} sono tutte nulle tranne:

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \frac{du}{dy} = \frac{C}{2\mu} \left(y - \frac{h}{2} \right).$$

Tenendo conto che $T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$, abbiamo

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} -Cx - p_1 & Cy - \frac{C}{2}h & 0 \\ Cy - \frac{C}{2}h & -Cx - p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -Cx - p_1 \end{bmatrix}.$$

Grazie alle componenti di \mathbb{T} , possiamo calcolare che forma assume la trazione superficiale lungo le rette $y = 0$ e $y = h$. Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{n})|_{y=h} &= \mathbf{t}(\mathbf{e}_2)|_{y=h} = \mathbb{T}\mathbf{e}_2|_{y=h}, \\ \mathbf{t}(\mathbf{n})|_{y=0} &= \mathbf{t}(-\mathbf{e}_2)|_{y=0} = -\mathbb{T}\mathbf{e}_2|_{y=0}, \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{n})|_{y=h} &= \frac{C}{2}h\mathbf{e}_1 - (Cx + p_1)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{t}(\mathbf{n})|_{y=0} &= \frac{C}{2}h\mathbf{e}_1 + (Cx + p_1)\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

La velocità di Poiseuille (4.13) può essere facilmente adimensionalizzata se consideriamo

$$\hat{u} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u}{V}, \quad \hat{y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y}{h}, \quad V = \frac{C}{2\mu}h^2, \quad (4.14)$$

cosicché $\hat{u} = \hat{y}^2 - \hat{y}$ con $\hat{y} \in [0, 1]$.

Nello studio del moto di Poiseuille abbiamo supposto che non fossero presenti nel fluido forze esterne di massa. Tuttavia questa assunzione può essere sostituita con una richiesta meno restrittiva supponendo che \mathbf{b} provenga da un potenziale $-\Psi$, cioè $\mathbf{b} = -\text{grad } \Psi$ (questo avviene ad esempio nel caso delle forze peso). Se allora sfruttiamo la pressione modificata

$$p^* \stackrel{\text{def}}{=} p + \rho_0\Psi,$$

al posto della pressione nell'equazione di Navier-Stokes possiamo introdurre p^* . Possiamo perciò ripetere quanto abbiamo visto per il moto di Poiseuille in assenza di forze sostituendo alla pressione effettiva del fluido p la pressione modificata p^* .

Il moto di Poiseuille può essere generalizzato se supponiamo che la parete superiore scorra con velocità uniforme U mentre quella inferiore sia ferma, ovvero (per le condizioni di aderenza) $u(0) = 0$ e $u(h) = U$. Tale situazione è nota come *moto piano di Poiseuille-Couette*⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾Maurice Marie Alfred COUETTE (Tours, 9 gennaio 1858 – Angers, 18 agosto 1943) fu il primo ad effettuare misure accurate di viscosità sui fluidi, utilizzando un viscosimetro cilindrico di sua invenzione. Mostrò anche sperimentalmente la validità in molti casi applicativi della condizione di aderenza di un fluido viscoso alle pareti del contenitore.

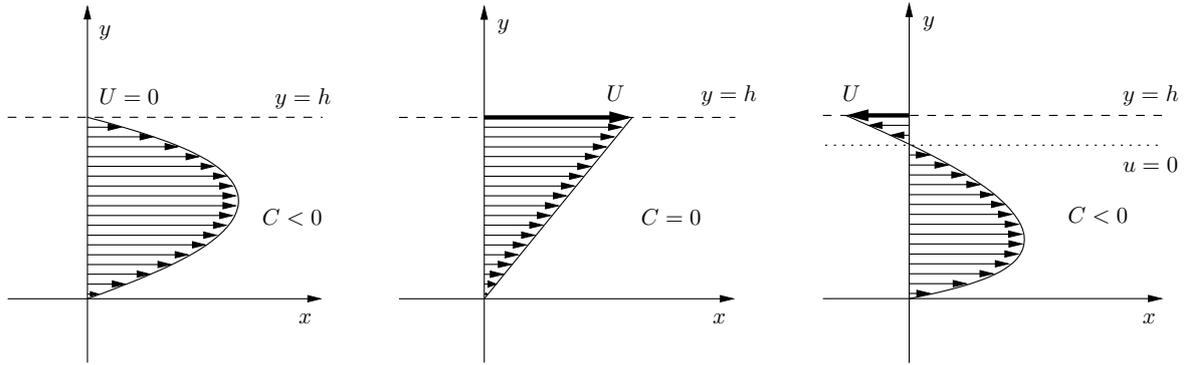


Figura 4.1: Profilo delle velocità nel moto di Poiseuille-Couette piano.

Ragionando analogamente al caso di Poiseuille, otteniamo

$$p(x) = Cx + p_1, \quad C = \frac{p_2 - p_1}{L}, \quad u(y) = \frac{C}{2\mu}y^2 + ay + b$$

e dalle condizioni su u

$$u(y) = \frac{C}{2\mu}y^2 + \frac{1}{h} \left(U - \frac{C}{2\mu}h^2 \right) y. \quad (4.15)$$

Quindi si trova una soluzione stazionaria non banale, il cui profilo delle velocità è generalmente una parabola con asse orizzontale, tranne il caso $C = 0$, ovvero gradiente di pressione nullo, per cui $u(y) = \frac{U}{h}y$ e il profilo è una retta. Si veda la Figura 4.1.

In generale possono esserci delle zone nel fluido a velocità nulla (dove si bilanciano l'azione del gradiente di pressione e del trascinamento della parete mobile): si ha infatti $u(y) = 0$ per

$$y = h - \frac{2\mu}{Ch}U$$

che appartiene alla striscia $0 < y < h$ nel caso in cui

$$UC > 0, \quad |U| < \frac{h^2}{2\mu}|C|.$$

La portata di tale moto è data da

$$P = \int_0^h u(y) dy = \frac{U}{2}h - \frac{C}{12\mu}h^3,$$

mentre il tensore degli sforzi di Cauchy in questo caso ovviamente dipende anche dalla velocità con cui trasla la retta $y = h$:

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} -Cx - p_1 & Cy + \frac{\mu}{h}U - \frac{C}{2}h & 0 \\ Cy + \frac{\mu}{h}U - \frac{C}{2}h & -Cx - p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -Cx - p_1 \end{bmatrix}.$$

Dunque la trazione superficiale lungo le rette $y = 0$ e $y = h$ è data da

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(\mathbf{n})|_{y=h} &= \left(\frac{C}{2}h + \frac{\mu}{h}U\right) \mathbf{e}_1 - (Cx + p_1)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{t}(\mathbf{n})|_{y=0} &= \left(\frac{C}{2}h - \frac{\mu}{h}U\right) \mathbf{e}_1 + (Cx + p_1)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Osserviamo che nel caso del moto di Couette la velocità può essere adimensionalizzata attraverso il cambiamento di variabili (4.14) con due scelte, entrambe opportune, di V : $V = \frac{C}{2\mu}h^2$, come nel caso di Poiseuille, oppure $V = U$, che mette in evidenza la velocità con cui trasla la retta $y = h$.

Infine, la soluzione di Couette in assenza di forze esterne può essere facilmente generalizzata al caso in cui \mathbf{b} provenga da un potenziale introducendo la pressione modificata p^* .

4.4.2 Flussi viscometrici a simmetria cilindrica

Consideriamo ora il caso di un tubo cilindrico fisso a sezione circolare di raggio R_2 . Supponiamo che un fluido newtoniano incomprimibile e omogeneo scorra in questo tubo in assenza di forze esterne e in moto stazionario. Cerchiamo una soluzione con campo di velocità a simmetria cilindrica ossia, ponendoci in coordinate cilindriche r, ϑ, z con l'asse z lungo l'asse del cilindro, $\mathbf{v} = v_r(r)\mathbf{e}_r + v_\vartheta(r)\mathbf{e}_\vartheta + v_z(r)\mathbf{e}_z$. Il campo di pressione $p = p(r, z)$ potrà in generale dipendere anche da z (ma dimostreremo poi che la dipendenza da z dovrà essere lineare).

Ricordiamo, dai conti fatti nella sezione A.3, che in coordinate cilindriche si ha

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z, \\ \text{div } \mathbf{u} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \text{grad } \mathbf{u} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r}\mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - u_\vartheta\right)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_r\right)\mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_\vartheta \\ &\quad + \frac{\partial u_r}{\partial z}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z}\mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\partial u_z}{\partial z}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\partial u_z}{\partial r}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\vartheta.\end{aligned}$$

In particolare, nel caso radiale con le dipendenze sopra fissate, si ha

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{v} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}, \\ (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} &= \left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\vartheta^2}{r}\right)\mathbf{e}_r + \left(v_r\frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_r v_\vartheta}{r}\right)\mathbf{e}_\vartheta + \left(v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_z, \\ \text{grad } p &= \frac{\partial p}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

e ricordando inoltre le (A.33),

$$\Delta \mathbf{v} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{v_r}{r^2}\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\vartheta}{\partial r}\right) - \frac{v_\vartheta}{r^2}\right]\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_z.$$

Proiettando le equazioni di Navier-Stokes sugli assi otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0 \\ \rho_0 \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\vartheta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} \right) \\ \rho_0 \left(v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_r v_\vartheta}{r} \right) = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \right) - \frac{v_\vartheta}{r^2} \right) \\ \rho_0 v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (4.16)$$

cui assoceremo la condizione di aderenza sul cilindro fisso di raggio R_2 , ossia $\mathbf{v}(R_2) = \mathbf{0}$.

Dalla prima equazione si ha $rv_r = c_1$ e dunque $v_r = 0$ poiché $v_r(R_2) = 0$.⁽¹⁰⁾ In tal modo la seconda equazione diventa

$$\rho_0 \frac{v_\vartheta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r};$$

derivando entrambi i membri rispetto a z si ottiene che $\frac{\partial p}{\partial r}$ non dipende da z e quindi $\frac{\partial p}{\partial z}$ non dipende da r . Da questa equazione sarà facile ricostruire il campo di pressione una volta determinata v_ϑ dalla terza equazione.

L'ultima equazione diventa

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right);$$

derivando entrambi i membri rispetto a z scopriamo che $\frac{\partial p}{\partial z} = C$, ossia il gradiente di pressione lungo z è una costante, eventualmente nulla, che può essere fissata ad esempio assegnando la pressione sul bordo a due quote diverse. Con questa osservazione diventa facile ottenere la velocità in direzione assiale e si ha

$$v_z(r) = \frac{C}{4\mu} r^2 + c_2 \log r + c_3.$$

Ora dalla terza equazione si ha

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \right) = \frac{v_\vartheta}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + r \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r^2} = \frac{v_\vartheta}{r}$$

e facendo la sostituzione $v_\vartheta = r\xi(r)$ si ottiene l'equazione differenziale

$$r\xi'' + 3\xi' = 0, \quad \text{da cui} \quad \xi = \frac{c_4}{r^2} + c_5,$$

ovvero

$$v_\vartheta(r) = \frac{c_4}{r} + c_5 r.$$

A questo punto possiamo anche calcolare il campo di pressione:

$$\frac{1}{\rho_0} p(r, z) = \frac{C}{\rho_0} z - \frac{c_4^2}{2r^2} + 2c_4 c_5 \log r + \frac{c_5^2}{2} r^2 + c_6.$$

Distinguiamo ora tre casi mediante un'opportuna scelta delle condizioni al contorno.

⁽¹⁰⁾Per ottenere $v_r = 0$ in realtà è sufficiente imporre l'impenetrabilità sulla parete del cilindro, quindi è vera anche nei casi in cui il cilindro ruota su se stesso o si muove con velocità parallela al suo asse.

- (1) Imponiamo l'aderenza alla parete del cilindro $v_\vartheta(R_2) = v_z(R_2) = 0$ ed un gradiente di pressione non nullo lungo z ($C \neq 0$). Vogliamo inoltre che la soluzione sia definita all'interno di tutto il cilindro, cioè essa non deve divergere in alcun punto, e quindi otteniamo subito $c_2 = c_4 = 0$. L'aderenza per v_ϑ implica allora $c_5 = 0$ mentre $v_z(R_2) = 0$ diventa

$$c_3 = -\frac{C}{4\mu}R_2^2.$$

La soluzione complessiva risulta quindi

$$v_r(r) = 0, \quad v_\vartheta(r) = 0, \quad v_z(r) = -\frac{C}{4\mu}(R_2^2 - r^2), \quad p(z) = Cz + \rho_0 c_6, \quad (4.17)$$

che rappresenta il cosiddetto *moto di Poiseuille*.

In questo caso poi è facile calcolare la portata su una sezione circolare C :

$$P = \int_C v_z(r) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} r v_z(r) dr d\vartheta = -\frac{\pi C}{8\mu} R_2^4.$$

Questa formula può essere usata per calcolare il coefficiente di viscosità μ di un fluido newtoniano incomprimibile e omogeneo, visto che le grandezze C (gradiente di pressione) e P (portata) sono facilmente misurabili in condizioni stazionarie.

- (2) Introduciamo ora un secondo cilindro di raggio $R_1 < R_2$ che abbia ancora l'asse in corrispondenza dell'asse z e supponiamo che, mentre il cilindro esterno sta fermo, quello interno ruoti con velocità angolare ω_1 . Poniamo poi il gradiente di pressione $C = 0$ e osserviamo che, avendo escluso l'asse $r = 0$ dal dominio in cui si muove il fluido, le soluzioni generali sopra ottenute non contengono termini divergenti.

La condizione di aderenza al bordo per v_z diventa ora $v_z(R_1) = v_z(R_2) = 0$ che implica $c_2 = c_3 = 0$. L'aderenza per v_ϑ invece dà

$$\begin{cases} v_\vartheta(R_1) = \frac{c_4}{R_1} + c_5 R_1 = \omega_1 R_1 \\ v_\vartheta(R_2) = \frac{c_4}{R_2} + c_5 R_2 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} c_4 = \omega_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \\ c_5 = -\frac{\omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \end{cases}$$

che fornisce la soluzione per il cosiddetto *moto di Couette*:

$$\begin{aligned} v_r(r) &= 0, \quad v_z(r) = 0, \quad v_\vartheta(r) = \frac{\omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{R_2^2}{r} - r \right), \\ p(r) &= \rho_0 \omega_1^2 \left(-\frac{R_2^4}{2r^2} - 2R_2^2 \log r + \frac{r^2}{2} \right) \frac{R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} + \rho_0 c_6. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Per poter utilizzare questo tipo di moto rotatorio al fine di misurare la viscosità di un fluido bisogna mettere in relazione lo sforzo tangenziale f applicato sul cilindro interno

per mantenerlo in rotazione con la velocità angolare ω_1 . Osserviamo che i punti materiali sul cilindro di raggio R_1 si muovono di moto circolare uniforme, quindi la risultante delle forze tangenziali deve essere nulla; allora f avrà uguale modulo e segno opposto allo sforzo esercitato dal fluido sulla parete a causa della condizione di aderenza. Possiamo quindi calcolare per $r = R_1$

$$|f| = |(\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{e}_\vartheta| = (2\mu \mathbf{D}\mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_\vartheta = \mu \left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r} \right) \Big|_{r=R_1} = \frac{2\mu R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \omega_1.$$

Abbiamo quindi una relazione lineare tra $|f|$ e ω_1 , possiamo misurare le velocità angolari corrispondenti a diverse intensità dello sforzo tangenziale imposto, interpolare linearmente i dati ottenuti e trovare il coefficiente angolare della retta interpolatrice, da cui si ricava facilmente una misura per la viscosità μ .

- (3) Da ultimo possiamo considerare il caso in cui il cilindro interno, oltre a ruotare, si muova con velocità costante W in direzione \mathbf{e}_z ; manteniamo inoltre il gradiente di pressione $C \neq 0$ lungo z . Per la componente v_ϑ del campo di velocità la soluzione è identica a quella del caso precedente, ma ad essa si sovrappone un moto lungo \mathbf{e}_z . La possibilità di sovrapporre tali moti ottenuti in maniera indipendente è chiaramente dovuta al fatto che le equazioni per v_ϑ e v_z risultano disaccoppiate, visto che il termine non lineare risulta in esse assente sotto le nostre ipotesi.

Imponendo allora le nuove condizioni di aderenza per v_z si ha

$$\begin{cases} v_z(R_1) = \frac{C}{4\mu} R_1^2 + c_2 \log R_1 + c_3 = W \\ v_z(R_2) = \frac{C}{4\mu} R_2^2 + c_2 \log R_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} c_2 = -\frac{4\mu W + C(R_2^2 - R_1^2)}{4\mu \log \frac{R_2}{R_1}} \\ c_3 = -\frac{C}{4\mu} R_2^2 - c_2 \log R_2 \end{cases}$$

che fornisce la soluzione per la componente assiale della velocità:

$$v_z(r) = -\frac{C}{4\mu} (R_2^2 - r^2) - c_2 \log \frac{R_2}{r} = -\frac{C}{4\mu} (R_2^2 - r^2) + \frac{4\mu W + C(R_2^2 - R_1^2)}{4\mu \log \frac{R_2}{R_1}} \log \frac{R_2}{r}.$$

Il campo di pressione è invece:

$$p(r, z) = Cz + \rho_0 \omega_1^2 \left(-\frac{R_2^4}{2r^2} - 2R_2^2 \log r + \frac{r^2}{2} \right) \frac{R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} + \rho_0 c_6.$$

4.5 Strato limite

Nelle vicinanze di un ostacolo (o di una parete) il moto di un fluido perfetto risulta tangente ad esso, a causa della condizione di impenetrabilità. In generale ci aspettiamo che il moto di un fluido viscoso incompressibile e omogeneo tenda a quello di un fluido perfetto incompressibile

nel limite $\nu \rightarrow 0$, ma ciò non può mai accadere vicino ad un bordo, dato che dobbiamo imporre la condizione di aderenza. Di conseguenza, nel limite a basse viscosità, possiamo approssimare un fluido viscoso con un fluido perfetto lontano dai bordi fissi, mentre abbiamo bisogno di equazioni adatte a descrivere il moto del fluido in una regione vicina alla parete, detta *strato limite*, il cui spessore può variare a seconda dei parametri del problema in oggetto.

4.5.1 Un problema introduttivo: il primo problema di Stokes

Affrontiamo il seguente esercizio. Si vuole determinare il moto di un fluido newtoniano incomprimibile e omogeneo, in assenza di forze esterne, che si trova nel semispazio $z > 0$, nel caso in cui la parete che lo delimita sia ferma per $t < 0$ e si muova con velocità costante $U\mathbf{e}_1$ per $t \geq 0$, ovvero $\mathbf{v}_P(x, t) = h(t)U\mathbf{e}_1$ dove h è la funzione di Heaviside⁽¹¹⁾. In questo caso la parete si è mossa impulsivamente e la sua accelerazione è $\mathbf{a}_P(x, t) = \delta_0(t)U\mathbf{e}_1$, dove δ_0 è la delta di Dirac⁽¹²⁾ in 0. Supponiamo al solito che il moto sia laminare, in particolare $\mathbf{v}(x, y, z, t) = u(x, z, t)\mathbf{e}_1$ e $p = p(x, z, t)$. Si noti che in questo caso non si suppone la stazionarietà del moto; questo problema è infatti tra i più semplici esempi di soluzione esatta delle equazioni di Navier-Stokes nel caso non stazionario.

Svolgimento. L'equazione di continuità diventa subito $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, e dunque $u = u(z, t)$. Inoltre la proiezione lungo la terza componente dell'equazione del moto si riduce a $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, ovvero $p = p(x, t)$. Ma poiché è naturale richiedere che la pressione sia uniforme all'infinito, ovvero

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} p(x, z, t) = p_0,$$

l'indipendenza da z implica $p = p_0$ in tutto il fluido.

Quindi la prima componente dell'equazione di Navier-Stokes si riduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (4.19)$$

analoga all'equazione del calore unidimensionale, con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} u(0, t) = h(t)U \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} u(z, t) = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

⁽¹¹⁾ Oliver HEAVISIDE (Londra, 18 maggio 1850 – Torquay, 3 febbraio 1925) matematico, fisico e ingegnere autodidatta, applicò i numeri complessi allo studio dei circuiti elettrici, sviluppò tecniche per la risoluzione di equazioni differenziali, riformulò le equazioni di Maxwell in termini di forze magnetiche, elettriche e di flussi, e formulò indipendentemente l'analisi vettoriale. Sebbene non sia stato in buoni rapporti col mondo scientifico del tempo per buona parte della sua vita, Heaviside influì molto sullo studio della matematica e della scienza degli anni a venire. A lui si deve la funzione gradino, la cui derivata è la famosa delta di Dirac. Le proprietà così peculiari di questi strumenti matematici suscitarono uno scalpore tale che Heaviside fu espulso dalla Royal Society per indegnità teorica. Dirac, appunto, mostrerà in seguito quanto pregevoli fossero invece quelle intuizioni.

⁽¹²⁾ Paul Adrien Maurice DIRAC (Bristol, 8 agosto 1902 – Tallahassee, 20 ottobre 1984) nato in una famiglia di origini svizzere, è uno dei fondatori della meccanica quantistica, premio Nobel per la fisica nel 1933, fu lui a suggerire per primo l'esistenza dell'antimateria. Più di qualunque altro fisico contemporaneo, assegnò al concetto di *bellezza matematica* un ruolo preminente tra gli aspetti fondamentali della natura, fino al punto di sostenere che "una teoria includente una bellezza matematica ha più probabilità di essere giusta e corretta di una sgradevole che venga confermata dai dati sperimentali".

Per la particolare simmetria di questo problema (si veda più avanti quanto fatto per la teoria di Blasius nella Sezione 4.5.3), si può dimostrare che la soluzione è della forma

$$u(z, t) = f\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) \quad (4.21)$$

Infatti il problema (comprese le condizioni al contorno) non cambia se si effettua una trasformazione $z \rightarrow az$, $t \rightarrow a^2t$, $a > 0$.

Cerchiamo ora la funzione f che risolve il problema, ponendo

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{t}}.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= f' \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{z}{2t\sqrt{t}} f' = -\frac{\eta}{2t} f', \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= f' \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{t}} f', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} f' \right) = \frac{1}{t} f'', \end{aligned}$$

l'equazione (4.19) diventa

$$f'' + \frac{\eta}{2\nu} f' = 0,$$

che è un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti variabili da cui si ricava subito

$$f'(\eta) = C e^{-\frac{1}{2\nu} \int \eta d\eta} = C e^{-\frac{\eta^2}{4\nu}}.$$

Per trovare la f introduciamo la cosiddetta *error function*

$$\operatorname{erf}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi,$$

dove la costante è scelta in modo che $\operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1$. Otteniamo

$$f(\eta) = C\sqrt{\nu\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\nu}}\right) + D,$$

e dunque

$$u(z, t) = C\sqrt{\nu\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right) + D,$$

da considerare solo per $t > 0$ (nel caso $t < 0$ abbiamo per ipotesi che $u = 0$).

Imponendo le condizioni (4.20) si ha poi $D = U$ e, ricordando che $\operatorname{erf}(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow +\infty$, si ottiene $C = -U/\sqrt{\nu\pi}$, quindi

$$u(z, t) = \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right) U, \quad t > 0.$$

Notiamo che l'effetto delle condizioni di aderenza alla parete sulla velocità del fluido si annulla in modo più che esponenziale (come la funzione $1 - \operatorname{erf}(x)$, appunto). Poiché si può verificare, ad esempio, che $\operatorname{erf}(1.822) = 0.99$, ciò significa che alla distanza dalla parete

$$z_\delta = 2\sqrt{\nu t} 1.822 = 3.644\sqrt{\nu t}$$

la velocità è un centesimo di quella della parete.

Per $z > z_\delta$ è ragionevole quindi considerare che il fluido resti fermo. Si ha uno strato limite dipendente dal tempo, il cui spessore z_δ è proporzionale a \sqrt{t} , fuori dal quale l'effetto delle condizioni al contorno può essere trascurato. \diamond

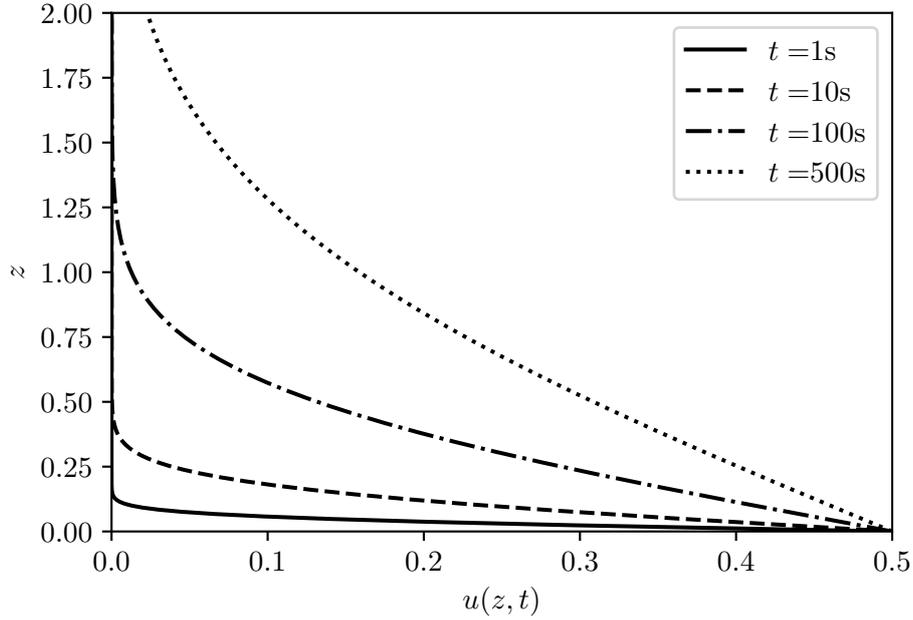


Figura 4.2: Profilo delle velocità nel primo problema di Stokes, con $U = 0.5 \text{ ms}^{-1}$ e $\nu = 0.001 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

4.5.2 Equazioni di Prandtl per lo strato limite laminare

Consideriamo ora un moto stazionario laminare bidimensionale e cerchiamo di determinare le equazioni necessarie. Localmente fissiamo un sistema di coordinate ortogonali (x, y) in cui \mathbf{e}_x sia la direzione tangente alla parete (che non supponiamo necessariamente piatta) e \mathbf{e}_y quella normale. Il sistema di equazioni per il fluido viscoso incomprimibile e omogeneo in un intorno del bordo risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

e dipende parametricamente dalla viscosità cinematica ν .

Da quanto detto sopra sappiamo che anche nel limite $\nu \rightarrow 0$ non possiamo ottenere le equazioni di Eulero, pena la perdita della condizione di aderenza. D'altra parte, per y sufficientemente grande ci si avvicina al moto di un fluido perfetto; quindi la velocità tangenziale $u(x, y)$ varia molto lungo \mathbf{e}_y vicino alla parete. Il modo più immediato per mantenere effetti della viscosità nel limite $\nu \rightarrow 0$ è di supporre che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \propto \nu^{-1} \quad (4.22)$$

vicino al bordo.

Vogliamo ora esplicitare questa proporzionalità; per farlo introduciamo un riscaldamento η della y che ci permetta di affiancare alle condizioni di aderenza $u = v = 0$, per $y = 0$, la condizione di avvicinamento al moto di fluido perfetto, esprimendola nel limite $\eta \rightarrow +\infty$.

La relazione (4.22) risulta esplicitamente se poniamo $\eta = ay/\sqrt{\nu}$, dove a , che per ora supponiamo uguale a 1, è una costante dimensionata in modo che η sia ancora una lunghezza. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

e con tale cambio di variabili il sistema di equazioni sopra scritto diventa

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{\partial v}{\partial \eta} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} v \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} v \frac{\partial v}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho_0 \sqrt{\nu}} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

che modifichiamo ulteriormente, introducendo la velocità normale riscalata

$$\hat{v}(x, \eta) = \frac{av(x, y)}{\sqrt{\nu}}$$

allo scopo di ottenere un campo di velocità (u, \hat{v}) a divergenza nulla. Infatti ora l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} = 0, \quad (4.23)$$

mentre le equazioni del moto risultano

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\ \nu \left(u \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} \right) &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \nu^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

in cui possiamo finalmente passare al limite per $\nu \rightarrow 0$, ottenendo

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (4.25)$$

con le condizioni $u(x, 0) = \hat{v}(x, 0) = 0$ e

$$\forall x > 0 : \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} u(x, \eta) = U(x), \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \hat{v}(x, \eta) < +\infty, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} p(x, \eta) = p_0(x),$$

dove $U(x)\mathbf{e}_x$ e $p_0(x)$ sono il campo di velocità e di pressione di un fluido perfetto. Da queste e dalla (4.25) discende immediatamente che $p(x, \eta) = p_0(x)$ per ogni η ; inoltre, dal Teorema di Bernoulli, $p_0 + \rho_0 U^2/2$ è costante, quindi

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dx} = U \frac{dU}{dx}.$$

Se ora ritorniamo alle variabili originali, le equazioni (4.23)–(4.24) diventano le *equazioni di Prandtl*⁽¹³⁾ per lo strato limite:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.26)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.27)$$

Torniamo per un attimo sul valore della costante a che entra nella definizione di η : se ci sono una lunghezza caratteristica del problema L ed una velocità caratteristica V con cui definire il numero di Reynolds $Re = UL/\nu$, è ragionevole scegliere $a = \sqrt{UL}$, in modo che $\eta = y\sqrt{Re}$.

Considerando infine la forma adimensionale delle equazioni (4.23)–(4.24), notiamo che non dipende dalla viscosità, ovvero dal numero di Reynolds. Questo implica che, al variare del numero di Reynolds, il moto nello strato limite si modifica soltanto per similarità: velocità e distanze tangenziali restano invariate, mentre velocità e distanze in direzione normale scalano come $1/\sqrt{Re}$.

Il fatto che le velocità adimensionali $u' = u/V$ e $\hat{v}' = \hat{v}/V$ siano di ordine 1 in Re , implica anche che $v \approx V/\sqrt{Re}$; così pure lo spessore in $\eta' = \eta/L$ dello strato limite, dovendo essere dell'ordine di 1, dà l'andamento dello spessore δ nella coordinata y come $\delta \approx L/\sqrt{Re}$. Questo valore è molto importante, perché ci dice a quale distanza dal bordo possiamo, in prima approssimazione, trascurare gli effetti dell'aderenza dovuta alla viscosità.

4.5.3 Teoria di Blasius

Consideriamo il problema di un fluido incomprimibile e omogeneo in assenza di forze esterne in moto con velocità costante $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = U\mathbf{e}_1$ che investe un ostacolo fermo a forma di lamina nella direzione del moto (la parte positiva dell'asse x , tanto per fissare le idee). Chiaramente, se il fluido fosse perfetto l'ostacolo sarebbe invisibile e lo stato cinetico non cambierebbe. Se invece il fluido è viscoso, le condizioni al contorno impongono che $\mathbf{v}(x, 0, z, t) = \mathbf{0}$ per ogni x, z, t , quindi l'ostacolo modifica il flusso a valle.

Impostiamo il problema nel modo seguente: innanzitutto cerchiamo soluzioni stazionarie e piane, quindi \mathbf{v} dipende solo da x e y . Poi, per simmetria, studiamo solo il caso $y \geq 0$. In tale geometria le equazioni di Prandtl si possono ricondurre ad un'equazione differenziale ordinaria.

Per fare ciò, dobbiamo trovare un diffeomorfismo del dominio in se stesso che lasci inalterato il problema differenziale. Se una tale trasformazione esiste ed ammette un sistema di curve etichettate da un parametro, che vengono mappate in loro stesse, allora le soluzioni del problema sono costanti lungo tali curve. Di conseguenza possiamo definire un sistema di coordinate che, in ogni punto del piano, ha un asse tangente alle curve di livello lungo cui la soluzione non varia, e l'altro asse tangente ad un nuovo sistema di curve, che sono in ogni punto ortogonali a quelle sopra introdotte. Riusciamo così a ridurre un problema bidimensionale ad un problema monodimensionale, dove la variabile rilevante è quella che si muove lungo le linee ortogonali alle curve di livello della soluzione.

⁽¹³⁾Ludwig PRANDTL (Freising, 4 febbraio 1875 – Göttingen, 15 agosto 1953) a partire dal suo primo lavoro come ingegnere in una fabbrica tedesca, si occupò di fluidodinamica, studiandone in particolare le applicazioni all'aerodinamica. Contribuì in modo decisivo alla prima teoria dei flussi supersonici e delle onde d'urto, tuttora largamente impiegata. A lui è intitolato un cratere che si trova sulla faccia nascosta della Luna.

Dato che il dominio del nostro problema è il primo quadrante, non può essere invariante per traslazioni o rotazioni. Proviamo allora con un riscaldamento di x ed y come

$$\tilde{x} = ax, \quad \tilde{y} = by$$

con $a, b > 0$, che a priori sono indipendenti. Le condizioni al contorno restano inalterate, mentre le equazioni diventano

$$\begin{cases} a \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + b \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} = 0 \\ au \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + bv \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} = \nu b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{y}^2} \end{cases}$$

e se poniamo $a = b^2$ e $\tilde{v} = v/b$ riotteniamo il sistema di partenza.

In particolare, fissato un punto (x, y) si ha $u(b^2x, by) = u(x, y)$ per ogni $b > 0$. Quindi u è costante sulla linea passante per (x, y) di equazione cartesiana

$$\frac{Y^2}{y^2} = \frac{X}{x}, \quad \text{ossia} \quad Y = \frac{y}{\sqrt{x}} \sqrt{X}.$$

Il sistema di curve di livello è quindi etichettato dai valori del parametro $k = \frac{y}{\sqrt{x}}$ al variare di (x, y) nel primo quadrante. Perciò possiamo ricondurci ad un problema monodimensionale cercando una soluzione che dipenda solo da k :

$$u(x, y) = g\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right),$$

che corrisponde a scegliere $b = 1/\sqrt{x}$. Vogliamo poi anche adimensionalizzare la funzione g . Per fare questo, visto che il problema presenta una velocità di riferimento U , introduciamo il parametro adimensionale

$$s \stackrel{\text{def}}{=} y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

e cerchiamo una soluzione del tipo

$$u(x, y) = U f'(s)$$

dove con f' indichiamo la derivata rispetto a s (introduciamo direttamente f' al posto di f solo per avere una forma più semplice dell'equazione differenziale finale). Dalle condizioni al contorno per u segue subito che

$$f'(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} f'(s) = 1.$$

Inoltre, osservando che

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{y}{2x} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = -\frac{s}{2x},$$

derivando per composizione si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U f''(s) \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{U}{2x} s f''(s). \quad (4.28)$$

Ora lavoriamo sulla componente v : anche qui possiamo porre

$$v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} h(s)$$

da cui

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}} h'(s) \frac{\partial s}{\partial y} = \sqrt{\frac{U}{\nu}} \frac{1}{x} h'(s).$$

Dall'equazione di continuità si ha

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \sqrt{\frac{U}{\nu}} \frac{1}{x} h'(s) = \frac{U}{2x} s f''(s)$$

e dunque

$$h'(s) = \frac{\sqrt{U\nu}}{2} s f''(s).$$

Integrando per parti risulta

$$h(s) = \frac{\sqrt{U\nu}}{2} (s f'(s) - f(s)), \quad (4.29)$$

dove, tenendo conto della condizione al contorno su v , si è imposto $h(0) = 0$ e si è scelta f in modo che $f(0) = 0$. Quindi troviamo

$$v(x, y) = \frac{\sqrt{U\nu}}{2\sqrt{x}} (s f'(s) - f(s)).$$

Per riscrivere l'equazione del moto dobbiamo ancora calcolare

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(s), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U^2}{\nu x} f'''(s). \quad (4.30)$$

Combinando le (4.28), (4.29) e (4.30), l'equazione di Prandtl diventa

$$-\frac{U^2}{2x} s f' f'' + \frac{U^2}{2x} (s f' - f) f'' = \frac{U^2}{x} f'''.$$

Semplificando e riordinando si perviene all'equazione di Blasius

$$f'''(s) + \frac{1}{2} f(s) f''(s) = 0 \quad (4.31)$$

con le condizioni

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} f'(s) = 1. \quad (4.32)$$

La (4.31) è un'equazione differenziale ordinaria del terzo ordine autonoma e non lineare. Il problema (4.31)-(4.32) non è un problema di Cauchy, ma si può comunque dimostrare che esiste un'unica soluzione di classe C^∞ per $s \geq 0$. In particolare, f' è monotona crescente e converge esponenzialmente a 1.

Un'approssimazione numerica della soluzione mostra ad esempio che $f'(5) = 0.99$, dunque si ha che per $s > 5$ la velocità orizzontale u supera il 99% di U . Per convenzione, si pone lo

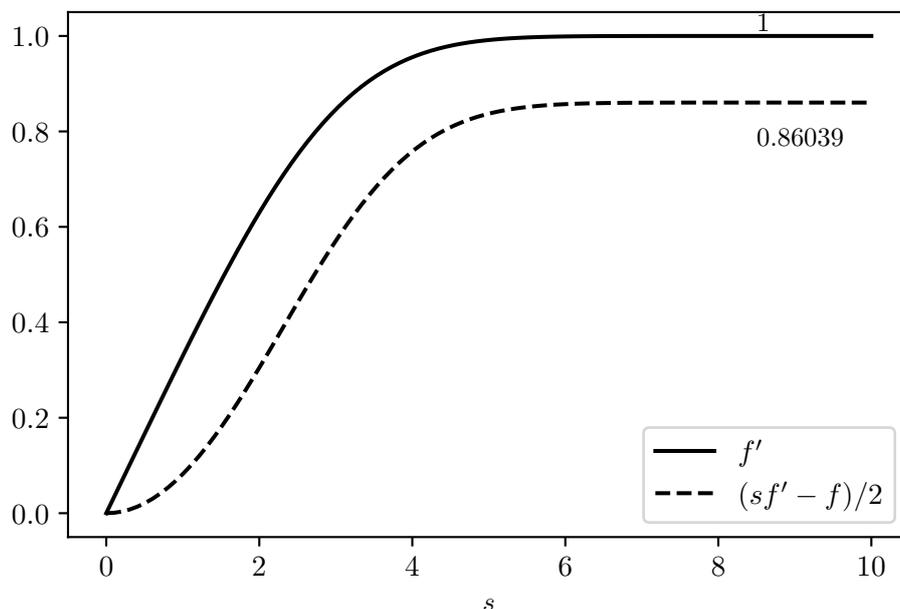


Figura 4.3: La soluzione dell'equazione di Blasius e la corrispondente velocità verticale.

spessore dello strato limite a questo livello e dunque, ricordando la definizione di s , lo spessore (verticale) δ dello strato limite è dato da

$$\delta(x) = 5\sqrt{\frac{\nu}{U}}\sqrt{x},$$

dove si è evidenziata la dipendenza di δ da x . Per $y > \delta(x)$, l'influenza delle condizioni al contorno può ragionevolmente essere trascurata.⁽¹⁴⁾

Si noti che, grazie alla Tabella 4.1, per la componente verticale della velocità vale

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} v(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (sf'(s) - f(s)) = 0.860394 \sqrt{\frac{\nu U}{x}}$$

e dunque in generale non è vero che la componente verticale della velocità si annulla per $y \rightarrow +\infty$, diversamente da quello che succede nel moto di un fluido perfetto. Resta comunque vero che v tende a zero se anche $x \rightarrow +\infty$.

4.6 La legge di Darcy e i mezzi porosi

Alcune applicazioni della fluidodinamica, soprattutto di tipo geotecnico, petrolifero, biologico, hanno a che fare con i cosiddetti *mezzi porosi*, siano essi sabbia, sassi, polmoni o vasi linfatici. Un mezzo poroso è semplicemente un materiale che contiene una parte solida (di

⁽¹⁴⁾Naturalmente, ciò dipende dal grado di precisione che si vuole raggiungere; ma basta considerare ad esempio $s = 7$ per avere $u/U = 0.99992$.

s	f'	$\frac{1}{2}(sf' - f)$
0.0	0.000000	0.000000
0.5	0.165902	0.020729
1.0	0.329812	0.082120
1.5	0.486835	0.180057
2.0	0.629819	0.304807
2.5	0.751314	0.440987
3.0	0.846093	0.570735
3.5	0.913078	0.679037
4.0	0.955544	0.758214
4.5	0.979530	0.808874
5.0	0.991550	0.837238
5.5	0.996883	0.851141
6.0	0.998974	0.857112
6.5	0.999700	0.859362
7.0	0.999922	0.860107
7.5	0.999982	0.860323
8.0	0.999996	0.860378
8.5	0.999999	0.860391
9.0	1.000000	0.860393
9.5	1.000000	0.860394

Tabella 4.1: Tabella di valori della soluzione dell'equazione di Blasius

solito considerata fissa, per comodità) e dei vuoti in cui scorre un fluido (i *pori*). La descrizione del moto di un fluido attraverso un mezzo poroso può essere molto complicata, se lo è la geometria del mezzo poroso; serve quindi un modo per descrivere il moto alla *macroscala*, mediando e smussando le complicazioni della geometria dei pori.

Nel lontano 1856 il francese Henry Darcy⁽¹⁵⁾ introdusse quella che oggi viene chiamata *legge di Darcy* per un fluido che si muove in un mezzo poroso sotto l'azione di una forza con densità volumetrica \mathbf{b} :

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}(\text{grad } p - \rho_0 \mathbf{b}), \quad (4.33)$$

dove \mathbf{v} è la velocità (media) del fluido, μ la viscosità, p la pressione e ρ_0 la densità del fluido. La costante k , detta *permeabilità*, ha l'unità di misura di una lunghezza al quadrato e tiene conto delle proprietà del mezzo poroso. Anche se questa equazione fu dedotta da Darcy in maniera sperimentale, essa può essere ricavata dalle equazioni di Navier-Stokes, sotto opportune ipotesi. In particolare, nel caso di struttura periodica, può essere dedotta a partire dall'*equazione di Stokes stazionaria*

$$0 = \rho_0 \mathbf{b} - \text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v}$$

mediante alcuni metodi della moderna Analisi Matematica che vanno sotto il nome di *teoria dell'omogeneizzazione*.

⁽¹⁵⁾Henry Philibert Gaspard DARCY (Digione, 10 giugno 1803 – Parigi, 2 gennaio 1858) è stato un ingegnere idraulico francese. La famosa legge è stata enunciata nel suo trattato “Les fontaines publiques de la ville de Dijon” del 1856.

Esempio 1. Supponiamo che un mezzo poroso sia composto da una matrice solida in cui ci sono n tubi circolari paralleli di raggio R . Calcoliamo la permeabilità di tale mezzo per un moto laminare in direzione dell'asse dei tubi.

Dalla formula (4.17) abbiamo che per il moto di Poiseuille in un tubo circolare di raggio R risulta

$$v_z(r) = -\frac{C}{4\mu}(R^2 - r^2), \quad p(z) = Cz + p_0,$$

dove l'asse z è parallelo al tubo, e la portata si scrive

$$P = \int_C v_z(r) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R r v_z(r) dr d\vartheta = -\frac{\pi C}{8\mu} R^4.$$

Quindi la portata di n tubi vale

$$P_{tot} = -\frac{n\pi C}{8\mu} R^4.$$

Poiché la legge di Darcy, in assenza di forza peso, si scrive

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} C,$$

la portata totale diventa

$$P_{tot} = Av = -\frac{k}{\mu} AC,$$

dove A denota l'area della sezione totale, ovvero $A = n\pi R^2$. Uguagliando le due espressioni per la portata totale si ottiene

$$-\frac{n\pi C}{8\mu} R^4 = -\frac{k}{\mu} n\pi R^2 C \quad \Rightarrow \quad k = \frac{R^2}{8}.$$

Quindi un sistema di tubi circolari di raggio R ha una permeabilità pari a $k = R^2/8$. \triangle

Esempio 2. Si trovino la velocità, la pressione e la portata di un fluido in moto radiale che attraversa una corona circolare porosa di raggi $R_i < R_e$ e permeabilità k .

Denotiamo con p_i, p_e la pressione sulla parete interna ed esterna del tubo. Prendendo la divergenza della legge di Darcy (4.33) (con $g = 0$) otteniamo

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{k}{\mu} \Delta p = 0$$

e dunque, in coordinate cilindriche,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0$$

da cui

$$p(r) = c_1 \log r + C_2 \quad \Rightarrow \quad p(r) = p_i + (p_e - p_i) \frac{\log(r/R_i)}{\log(R_e/R_i)}.$$

In particolare

$$\frac{dp}{dr} = \frac{p_e - p_i}{\log(R_e/R_i)} \frac{1}{r}.$$

Riprendendo ancora la legge di Darcy, poiché $\frac{dp}{dr} = 1/r$, se la velocità è solo radiale otteniamo

$$v_r(r) = -\frac{k}{\mu} \frac{p_e - p_i}{\log(R_e/R_i)} \frac{1}{r}$$

che quindi è la legge della velocità.

Per trovare la portata del flusso in uscita, poiché la velocità è costante sulla superficie esterna, basta calcolare

$$P = 2\pi R_2 v_r = -\frac{2\pi k(p_e - p_i)}{\mu \log(R_e/R_i)}. \quad \triangle$$

La legge di Darcy è stata generalizzata, sempre procedendo con valutazioni sperimentali, anche al caso di numeri di Reynolds alti. Sempre nel caso stazionario si giunge a come

$$\text{grad } p - \rho_0 \mathbf{b} = \mu \Delta \mathbf{v} - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} + b|\mathbf{v}|\mathbf{v}$$

dove la costante b va valutata sperimentalmente e dipende dalla densità del fluido, dalla permeabilità e dalla geometria.

Il termine $b|\mathbf{v}|\mathbf{v}$ è dovuto a Forchheimer⁽¹⁶⁾ (1901), mentre il termine $\mu \Delta \mathbf{v}$ è dovuto a Brinkman⁽¹⁷⁾ (1947). Se il termine di Forchheimer può essere trascurato, si parla di *equazione di Darcy-Brinkman*

$$\text{grad } p - \rho_0 \mathbf{b} = \mu \Delta \mathbf{v} - \frac{\mu}{k} \mathbf{v}.$$

Esempio 3. Si calcoli il campo di velocità nel caso di un mezzo poroso dato da un canale piano di altezza $2h$, usando l'equazione di Darcy-Brinkman.

Supponendo il moto laminare e tralasciando la forza peso otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mu}{k} u = C$$

dove l'asse y è trasverso al tubo piano. In più, mettendo in $y = 0$ l'asse centrale del tubo, avremo la condizione di aderenza $u(h) = 0$ e per simmetria la condizione $u'(0) = 0$. Risolvendo l'equazione lineare si ottiene

$$u(y) = -C \frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{\cosh(y/\sqrt{k})}{\cosh(h/\sqrt{k})} \right). \quad \triangle$$

In Figura 4.4 disegniamo il profilo della velocità per alcuni valori della costante di permeabilità.

⁽¹⁶⁾ Philipp FORCHHEIMER (Vienna, 7 agosto 1852 – Dürnstein, 2 ottobre 1933) è stato un ingegnere idraulico austriaco. Fu autore di un progetto per la costruzione di un tunnel sotto la Manica.

⁽¹⁷⁾ Henri Coenraad BRINKMAN (Amsterdam, 1908 – L'Aia, 1961) è stato un fisico-matematico olandese. A lui è dovuta l'introduzione del *numero di Brinkman*, che misura il rapporto tra dissipazione viscosa e diffusione termica.

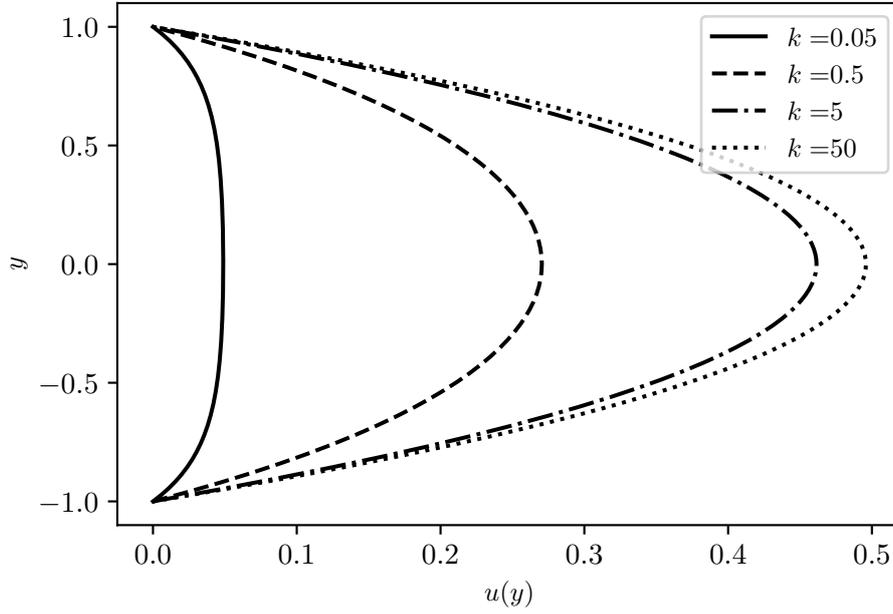


Figura 4.4: Il profilo della velocità per alcuni valori di k , con $C = -1 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$, $h = 1 \text{ m}$, $\mu = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

4.7 Complementi ed esercizi

Esercizio 4.1. Trovare il profilo del campo di velocità per il moto di Poiseuille in un tubo a sezione ellittica.

Svolgimento. Ricordiamo l'equazione cartesiana di un'ellisse centrata nell'origine con lunghezza dei semiassi orizzontale e verticale a e b rispettivamente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.34)$$

Vogliamo trovare un campo di velocità $\mathbf{v}(x, y) = w(x, y)\mathbf{e}_z$ che corrisponda ad un gradiente di pressione costante $\text{grad } p(x, y, z) = C\mathbf{e}_z$. Le equazioni del moto diventano allora

$$\mu\Delta w = C, \quad (4.35)$$

con $w(x, y) = 0$ nei punti che soddisfano l'equazione (4.34).

Operiamo ora il cambio di coordinate $x' = x$, $y' = \frac{a}{b}y$, che mappa l'ellisse (4.34) su di una circonferenza di raggio a . In questo nuovo sistema di coordinate l'equazione (4.35) diventa

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} = \frac{C}{\mu},$$

di cui cerchiamo una soluzione a simmetria cilindrica $w(r)$ con $r = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, che si annulli sulla circonferenza di raggio a . La scelta più semplice è

$$w(r) = c_1(r^2 - a^2) = c_1(x'^2 + y'^2 - a^2) \quad (4.36)$$

con c_1 costante da determinarsi. Sostituendola nell'equazione si trova

$$c_1 = \frac{C}{2\mu} \frac{b^2}{a^2 + b^2}.$$

Poiché esiste effettivamente un valore di c_1 per cui la (4.36) soddisfa il nostro problema, abbiamo trovato la soluzione. Torniamo infine alle coordinate originali e otteniamo

$$w(x, y) = \frac{C}{2\mu} \frac{b^2}{a^2 + b^2} \left(x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) = \frac{C}{2\mu} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

che è la soluzione cercata. ◇

Esercizio 4.2 (Moto generato da un piano oscillante). Considerare un fluido newtoniano incomprimibile e omogeneo che riempia il semispazio $x \geq 0$ e che aderisca al piano yz . Supponiamo che tale piano oscilli armonicamente lungo la direzione \mathbf{e}_y con frequenza ω . In tal modo si ha la condizione al bordo

$$\mathbf{v}(0, y, z, t) = v_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_y$$

ed imponiamo la condizione all'infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{0}.$$

Determinare una soluzione delle equazioni di Navier-Stokes che dipenda solo da x e dal tempo, ossia

$$\mathbf{v}(x, t) = u(x, t) \mathbf{e}_x + v(x, t) \mathbf{e}_y + w(x, t) \mathbf{e}_z, \quad p(x, t).$$

Svolgimento. Dall'equazione di continuità si ha immediatamente $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, cioè $u(x, t) = c(t)$; ma per ogni t $u(0, t) = 0$ e quindi $u(x, t) = 0$. Il termine non lineare risulta:

$$(\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni del moto diventano allora

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

con $v(0, t) = v_0 \cos(\omega t)$ e $w(0, t) = 0$.

Dalla prima equazione si ha che il campo di pressione è uniforme e dipende solo dal tempo, ma se fissiamo un valore costante di p , ad esempio all'infinito, sarà anch'essa costante.

Cerchiamo per il campo di velocità soluzioni di tipo oscillante:

$$v(x, t) = \text{Re}(A e^{i(kx - \omega t)}), \quad w(x, t) = \text{Re}(B e^{i(\kappa x - \omega t)}).$$

Dalle condizioni al bordo per w si ha, per ogni t , $w(0, t) = \text{Re}(B e^{-i\omega t}) = 0$, da cui $B = 0$. Poiché $w(x, t) = 0$ identicamente risolve la terza equazione del moto, è proprio l'unica soluzione di tipo oscillante.

La condizione al bordo per v diventa $v(0, t) = \operatorname{Re}(Ae^{-i\omega_v t}) = \operatorname{Re}(v_0 e^{-i\omega t})$, da cui $A = v_0$ e $\omega_v = \omega$. Resta soltanto da determinare il numero d'onda k mediante la seconda equazione del moto. Sostituendo in essa, pensata ora in campo complesso, l'espressione di v si ottiene

$$-i\omega v(x, t) = -k^2 \frac{\mu}{\rho_0} v(x, t),$$

da cui

$$k = \pm \sqrt{i \frac{\omega \rho_0}{\mu}} = \pm \sqrt{\frac{\omega \rho_0}{\mu}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right).$$

Se ora poniamo $m = \sqrt{\omega \rho_0 / 2\mu}$, abbiamo le due soluzioni

$$v(x, t) = \operatorname{Re}(v_0 e^{i[\pm m(1+i)x - \omega t]}) = v_0 e^{\mp mx} \cos(\pm mx - \omega t),$$

di cui soltanto quella che si annulla nel limite $x \rightarrow \infty$ è fisicamente accettabile. \diamond

Esercizio 4.3 (Moto piano di Poiseuille con gradiente di pressione periodico). Studiare il moto di un fluido sotto l'azione di un gradiente di pressione periodico.

Svolgimento. Se facciamo le solite ipotesi di fluido omogeneo e incomprimibile, assenza di forze esterne e moto laminare, l'equazione differenziale del moto diventa lineare, quindi ha senso sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica che dà il gradiente di pressione. Supponiamo che il canale abbia l'asse lungo l'asse x e che l'ampiezza sia data da $[-h, h]$ con pareti ferme. Possiamo quindi assumere che

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C + G \cos \omega t,$$

che riscriviamo nella forma complessa

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C + \operatorname{Re}(G e^{i\omega t}),$$

dove Re denota la parte reale del numero complesso. La prima componente dell'equazione del moto diventa

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -C - \operatorname{Re}(G e^{i\omega t}) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.37)$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$u(y, t) = u_P(y) + \operatorname{Re}(U(y) e^{i\omega t})$$

dove $u_P = \frac{C}{2\mu}(y^2 - h^2)$ è la soluzione del moto di Poiseuille stazionario con gradiente di pressione C . Se sostituiamo nella (4.37) otteniamo

$$i\omega \rho_0 U(y) = -G + \mu U''(y)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine con condizioni al contorno $U(-h) = U(h) = 0$. Si verifica che la soluzione di tale equazione è data da

$$U(y) = \operatorname{Re} \left[\frac{iG}{\rho_0 \omega} \left(1 - \frac{\cosh \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} y}{\cosh \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} h} \right) \right]. \quad (4.38)$$

Prendendo poi la parte reale di $Ue^{i\omega t}$ e ricordando che $\sqrt{i} = \pm(i+1)/\sqrt{2}$, si trova che

$$u(y, t) = u_P(y) - \frac{G}{\rho_0\omega} \left[\left(1 - \frac{\text{cch}(ky/h) \text{cch}(k) + \text{ssh}(ky/h) \text{ssh}(k)}{\text{cch}^2(k) + \text{ssh}^2(k)} \right) \sin \omega t - \frac{\text{cch}(ky/h) \text{ssh}(k) - \text{ssh}(ky/h) \text{cch}(k)}{\text{cch}^2(k) + \text{ssh}^2(k)} \cos \omega t \right]$$

dove abbiamo usato le abbreviazioni

$$\text{cch}(x) := \cos x \cosh x, \quad \text{ssh}(x) := \sin x \sinh x, \quad k = h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}.$$

Si noti che la quantità k è adimensionale.

È interessante studiare che cosa succede quando $k \ll 1$ (bassa frequenza) e quando $k \gg 1$ (alta frequenza). Nel primo caso, poiché si ha

$$\text{cch}(x) \sim 1, \quad \text{ssh}(x) \sim x^2 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

risulta, sviluppando in k e tenendo soltanto il termine di grado due, che è il più basso:

$$u(y, t) = u_P(y) + \frac{Gh^2}{2\rho_0\nu} \cos \omega t \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right),$$

che è ancora un profilo parabolico, dipendente dal tempo.

Nel secondo caso, poiché

$$\text{cch}(x) \sim \frac{1}{2}e^{\pm x} \cos x, \quad \text{ssh}(x) \sim \pm \frac{1}{2}e^{\pm x} \sin x \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty,$$

per k grande si trova che

$$u(y, t) = u_P(y) - \frac{G}{\rho_0\omega} (\sin \omega t - e^{-\eta} \sin(\omega t + \eta))$$

dove abbiamo posto $\eta := k(1 - |y|/h)$. All'allontanarsi dalle pareti, cioè per $|y| < h$, la variabile η è diversa da zero e dunque il termine aggiuntivo rispetto a u_P tende rapidamente a un profilo uniforme pulsante del tipo $-\frac{G}{\rho_0\omega} \sin \omega t$. \diamond

Capitolo 5

Fluidi non newtoniani

Il modello di fluidi newtoniano, che ha portato alla formulazione delle famose equazioni di Navier-Stokes, per quanto molto studiato dal punto di vista teorico e applicativo, non è in grado di descrivere il moto dei fluidi biologici in particolari canali e difficilmente cattura alcuni comportamenti tipici del sangue. Abbiamo infatti già osservato che l'ipotesi costitutiva del modello newtoniano (sforzo proporzionale a gradiente di velocità) è ragionevole solo nel caso in cui il sangue scorra in canali di grande ampiezza. Una fenomeno importante che si osserva sperimentalmente è che la viscosità del sangue dipende generalmente dal gradiente di velocità, cosa che non succede nel modello newtoniano. Occorre quindi trovare delle equazioni costitutive per il tensore degli sforzi che tengano conto dei fenomeni tipici del sangue. Osserviamo che la necessità di elaborare nuove equazioni costitutive per il tensore degli sforzi è dettata anche dal progresso industriale che porta a dover modellizzare sempre nuovi fluidi e materiali. Data la rilevanza biologica e industriale, sono state proposte una serie di equazioni costitutive che tengano conto della variabilità della viscosità e che permettano di descrivere i comportamenti tipici *non newtoniani* di tali fluidi.

In questo capitolo, proponiamo alcuni modelli non newtoniani.

5.1 Fluidi stokesiani

Abbiamo visto che nel caso generale di fluidi stokesiani l'equazione costitutiva del tensore di viscosità si scrive

$$\mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T} + p\mathbf{I} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2,$$

dove p è la pressione e α, β, γ sono funzioni degli invarianti principali di \mathbf{D} ovvero si suppone che α, β, γ siano funzioni soltanto di $\text{tr } \mathbf{D}$, $\frac{1}{2}[(\text{tr } \mathbf{D})^2 - \text{tr}(\mathbf{D}^2)]$, $\det \mathbf{D}$.

Ci poniamo per semplicità nel caso incomprimibile, per cui il primo invariante è nullo

$$\text{div } \mathbf{v} = \text{tr } \mathbf{D} = 0,$$

e il secondo invariante diventa

$$-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{D}^2) = -\frac{1}{2} |\mathbf{D}|^2.$$

Quindi in generale abbiamo un tensore di viscosità della forma

$$\mathbf{V} = \alpha(|\mathbf{D}|, \det \mathbf{D})\mathbf{I} + \beta(|\mathbf{D}|, \det \mathbf{D})\mathbf{D} + \gamma(|\mathbf{D}|, \det \mathbf{D})\mathbf{D}^2.$$

Il caso lineare, in cui α e β sono costanti e $\gamma = 0$, porta all'equazione di Navier-Stokes. Ora invece siamo interessati a scelte diverse per le funzioni α, β, γ . Se torniamo all'espressione del tensore degli sforzi \mathbb{T} , introducendo una nuova pressione⁽¹⁾ $\tilde{p} = p - \alpha$, otteniamo il modello generale dei cosiddetti *fluidi di Reiner-Rivlin*⁽²⁾⁽³⁾:

$$\mathbb{T} = -\tilde{p}\mathbf{I} + \beta(|\mathbf{D}|, \det \mathbf{D})\mathbf{D} + \gamma(|\mathbf{D}|, \det \mathbf{D})\mathbf{D}^2,$$

che rappresenta il più generale modello di fluido stokesiano incomprimibile. Naturalmente le funzioni β, γ dovranno anche sottostare ad alcune restrizioni termodinamiche, che non specifichiamo.

Un caso particolare di fluidi di Reiner-Rivlin sono i cosiddetti *fluidi newtoniani generalizzati*, in cui si pone $\gamma = 0$ e si assume β indipendente da $\det \mathbf{D}$, per cui

$$\mathbb{T} = -\tilde{p}\mathbf{I} + \beta(|\mathbf{D}|)\mathbf{D}.$$

Tale scelta corrisponde, fisicamente, ad avere un fluido la cui viscosità cambia al variare di $|\mathbf{D}|$, quindi una viscosità dipendente dall'entità della parte simmetrica del gradiente di velocità. In questo caso le restrizioni termodinamiche portano semplicemente a richiedere che $\beta \geq 0$.

A questo punto si aprono svariate scelte per la funzione β ; noi discuteremo quella di una legge di potenza (*power-law fluids*), per cui

$$\beta(|\mathbf{D}|) = 2k|\mathbf{D}|^{s-2},$$

dove $k > 0$ è una costante dimensionale e $s > 1$ una costante adimensionale.⁽⁴⁾ In particolare:

- se $s < 2$, la viscosità decresce al crescere di $|\mathbf{D}|$ (fluidi *pseudoplastici* o *shear-thinning*);
- se $s > 2$, la viscosità cresce al crescere di $|\mathbf{D}|$ (fluidi *dilatanti* o *shear-thickening*).

Il caso $s = 2$ porta ai fluidi newtoniani. In Figura 5.1 riportiamo l'andamento di $\beta(|\mathbf{D}|)$ al variare di s .

Scriviamo ora l'equazione del moto nel caso della legge di potenza: si ha

$$\operatorname{div} \mathbb{T} = \operatorname{div}(-\tilde{p}\mathbf{I} + 2k|\mathbf{D}|^{s-2}\mathbf{D}) = -\operatorname{grad} \tilde{p} + 2k \operatorname{div}(|\mathbf{D}|^{s-2}\mathbf{D}).$$

Quindi l'equazione finale è

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v} = \rho \mathbf{b} - \operatorname{grad} \tilde{p} + 2k \operatorname{div}(|\mathbf{D}|^{s-2}\mathbf{D}). \quad (5.1)$$

⁽¹⁾Nel caso incomprimibile la pressione non ha significato termodinamico, ma è data dal moltiplicatore di Lagrange del vincolo $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$

⁽²⁾Markus REINER (Černivci, 5 gennaio 1886 – Haifa, 25 aprile 1976) è stato uno dei fondatori della *reologia*, la scienza che studia lo scorrimento dei fluidi sottoposti a forze esterne. È anche noto per avere introdotto il *numero di Deborah* (si veda pag. 65), una quantità adimensionale che indica quanto un materiale sia più vicino a un fluido o a un solido. Il nome della quantità gli fu ispirato da un cantico della profetessa Debora nel libro dei Giudici della Bibbia, in cui la prima parte del versetto 5, cap. 5, recita “The mountains flowed before the Lord”, che può essere tradotta come “Le montagne fluirono davanti al Signore”. Debora si era dunque accorta che perfino le montagne si comportano come un fluido se osservate in una scala di tempi sufficientemente lunga.

⁽³⁾Ronald Samuel RIVLIN (Londra, 6 maggio 1915 – Palo Alto, 4 ottobre 2005) è stato un matematico applicato inglese, che poi acquisì anche cittadinanza statunitense. È considerato uno dei fondatori dell'Elasticità non lineare, nonché uno dei più grandi esperti di fluidi non Newtoniani.

⁽⁴⁾Se $s > \frac{3}{2}$, il numero positivo $n = 2s - 3$ è detto *indice di potenza* del fluido.

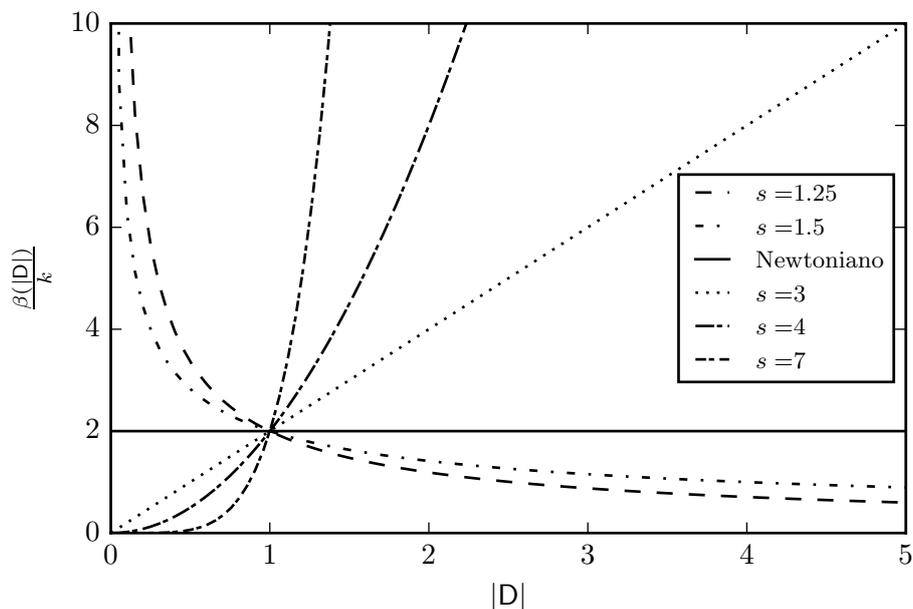


Figura 5.1: Modello Power law al variare dell'esponente.

Osserviamo che il sangue spesso presenta fenomeni di shear-thinning e quindi può essere schematizzato con il modello power-law con $s < 2$. Ciò avviene ad esempio quando si presenta il fenomeno della *tissotropia*, che abbiamo brevemente spiegato nel Capitolo 1.4.

Un esempio di fluido dilatante è invece un particolare tipo di gomma chiamata *silly putty* in quanto la sua viscosità sembra aumentare direttamente rispetto alla forza applicata. La gomma *silly putty*, elaborata durante la seconda guerra mondiale nell'industria chimica, contiene il polimero *polidimentilsilossano* che è responsabile del suo particolare comportamento: si comporta come un fluido viscoso se sottoposta a alte temperature o a tempi lunghi del moto, mentre può essere assimilata a un solido a basse temperature e a tempi brevi. Per tenere conto del cambiamento di comportamento da fluido a solido a seconda dello sforzo applicato si può sfruttare anche il modello di Bingham, mentre l'importanza del tempo viene descritta bene dai materiali viscoelastici. Di entrambi questi modelli, parleremo in seguito. Tuttavia, per spiegare il comportamento della *silly putty* al variare del tempo, sfruttiamo il *numero di Deborah*

$$De = \frac{\lambda}{T}, \quad (5.2)$$

dove λ è il tempo di rilassamento del materiale, mentre T quello di osservazione del moto. Il tempo λ della *silly putty* è dell'ordine di alcuni secondi. Se la *silly putty* è arrotolata a forma di sfera e lanciata contro il pavimento, allora rimbalza: il tempo del moto non è sufficientemente lungo da far "dimenticare" alla gomma la sua forma originale ($T \ll \lambda$). Se si lascia la pallina di *silly putty* sul tavolo, allora questa tenderà a diventare una sorta di pozzanghera dopo un tempo sufficientemente lungo. In questo caso $T \gg \lambda$. Il valore di λ è lo stesso in entrambi i casi: il tempo di osservazione del moto T è responsabile di un valore alto di De e di un

comportamento elastico nel primo caso, mentre di bassi De e di un comportamento simile a un fluido nel secondo caso.

5.1.1 Moto laminare in un tubo rettilineo per un fluido power-law

Per semplificare l'equazione (5.1) studiamo l'esempio del moto laminare in un tubo. Supponiamo di avere un tubo rettilineo di sezione $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Il dominio diventa quindi $\Omega \times \mathbb{R}$. Denotiamo con (x, y) le coordinate in Ω e con z la coordinata lungo l'asse del tubo. Facciamo poi al seguente ipotesi fondamentale di *moto laminare*: il campo di velocità $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$ abbia componente soltanto lungo l'asse del tubo (asse z), ovvero

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = w(x, y, z, t)\mathbf{e}_z.$$

Quindi la funzione w diventa la nuova incognita.

Dal vincolo $\text{div } \mathbf{v} = 0$ si ottiene subito

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

e dunque w è funzione solo di x, y, t . Inoltre il termine convettivo si annulla:

$$(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

quindi l'equazione del moto nel caso di fluido omogeneo per questo problema particolare diventa

$$\frac{\partial w}{\partial t}\mathbf{e}_z = \mathbf{b} + \frac{1}{\rho_0} \text{div } \mathbf{T}$$

in cui abbiamo già sfruttato il vincolo della divergenza nulla.

Mettiamo ora nell'equazione la scelta costitutiva di legge di potenza fatta per \mathbf{T} :

$$\frac{\partial w}{\partial t}\mathbf{e}_z = \mathbf{b} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } \tilde{p} + \frac{2k}{\rho_0} \text{div}(|\mathbf{D}|^{s-2}\mathbf{D}),$$

e osserviamo che nel nostro caso

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \end{bmatrix},$$

quindi

$$|\mathbf{D}|^{s-2} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{(s-2)/2} = 2^{(2-s)/2} |\text{grad } w|^{s-2}.$$

Proiettando l'equazione su \mathbf{e}_z si ottiene

$$\frac{\partial w}{\partial t} = b_z - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + 2^{(2-s)/2} \frac{k}{\rho_0} \text{div}(|\text{grad } w|^{s-2} \text{grad } w). \quad (5.3)$$

Il termine

$$\Delta_s w \stackrel{\text{def}}{=} \text{div}(|\text{grad } w|^{s-2} \text{grad } w)$$

si chiama s -laplaciano della funzione di due variabili $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Mettiamoci ora nel caso speciale $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Proiettando l'equazione del moto sugli assi x e y , tenendo conto che w non dipende da z , si ottiene

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = 0,$$

quindi \tilde{p} è funzione solo di z e t . Quindi nell'equazione (5.3) con $b_z = 0$ si ha la funzione w che dipende da x, y, t e la funzione $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}$ che dipende da z, t . Questo significa che $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}$ deve essere costante in z , ovvero

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = C(t).$$

La funzione $C(t)$ di solito viene determinata imponendo delle condizioni al contorno per la pressione, del tipo

$$\tilde{p}(z_0, t) = \tilde{p}_0(t), \quad \tilde{p}(z_1, t) = \tilde{p}_1(t),$$

e quindi

$$C(t) = \frac{\tilde{p}_1(t) - \tilde{p}_0(t)}{z_1 - z_0}.$$

L'equazione finale diventa

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{C(t)}{\rho_0} + 2^{(2-s)/2} \frac{k}{\rho_0} \operatorname{div} (|\operatorname{grad} w|^{s-2} \operatorname{grad} w), \quad (5.4)$$

dove $C(t)$ è una funzione nota.

Il caso $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ in generale non è semplice, ma si può arrivare ad un'equazione analoga alla (5.4) in alcuni casi notevoli tipo

$$\mathbf{b} = b_z(z) \mathbf{e}_z,$$

che include il caso di forza gravitazionale (anche non costante) su un tubo verticale.

5.1.2 Moto piano di Poiseuille per un fluido power law

Mettiamoci ora nel caso speciale unidimensionale in cui $\Omega = [0, h]$ e cerchiamo una soluzione stazionaria (quindi anche C non dipende dal tempo). Il problema (5.4) diventa

$$\begin{cases} (|w'|^{s-2} w')' = 2^{(s-2)/2} \frac{C}{k} & \text{in } [0, h] \\ w(0) = w(h) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Poniamo $A = 2^{(s-2)/2} \frac{C}{k}$, che è una costante legata al gradiente di pressione. Una prima integrazione dà

$$|w'|^{s-2} w' = Ax + a$$

e notiamo che $w' = 0$ per $x = -a/A$. Un'ulteriore integrazione dà

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{s-1}{sA} (Ax + a)^{\frac{s}{s-1}} + b_1 && \text{se } Ax + a \geq 0, \\ w(x) &= \frac{s-1}{sA} (-Ax - a)^{\frac{s}{s-1}} + b_2 && \text{se } Ax + a \leq 0. \end{aligned}$$

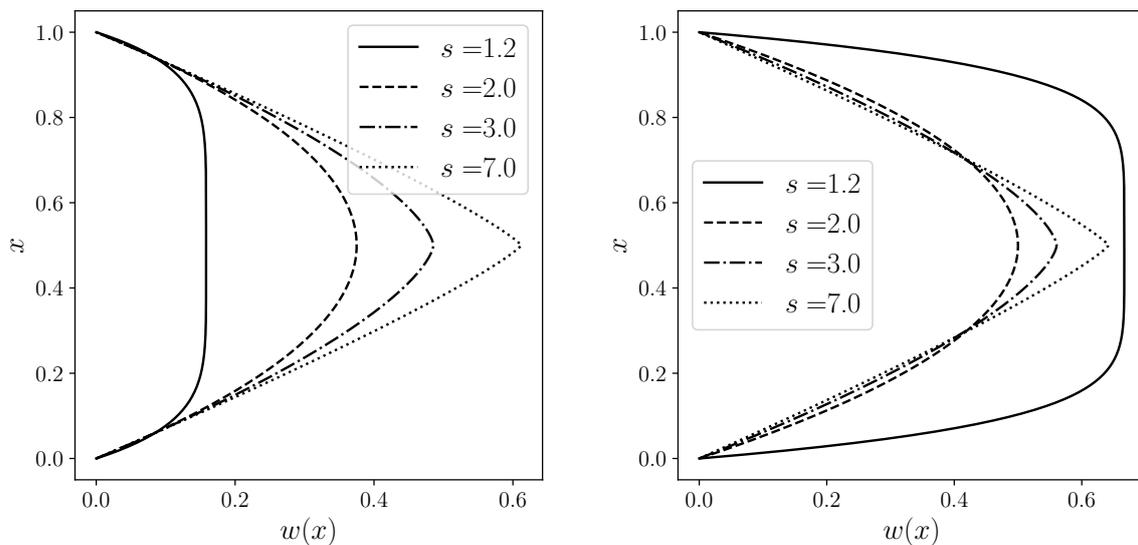


Figura 5.2: Il profilo della velocità per alcuni valori di s per $h = 1$ m, $k = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{s-3}$. A sinistra $C = -3 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$, a destra con $C = -4 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$

Se richiediamo che w sia continua in $x = -a/A$, otteniamo $b_1 = b_2 = b$ e

$$w(x) = \frac{s-1}{sA} |Ax + a|^{\frac{s}{s-1}} + b.$$

Ora imponiamo le condizioni al contorno $w(0) = w(h) = 0$:

$$\begin{cases} \frac{s-1}{sA} |a|^{\frac{s}{s-1}} + b = 0 \\ \frac{s-1}{sA} |Ah + a|^{\frac{s}{s-1}} + b = 0, \end{cases}$$

e, dopo alcuni conti, troviamo

$$a = -\frac{Ah}{2}, \quad b = -\frac{s-1}{sA} \left| \frac{Ah}{2} \right|^{\frac{s}{s-1}}.$$

La soluzione quindi è

$$w(x) = \frac{s-1}{s} \frac{k}{C} 2^{\frac{s-2}{2(s-1)}} \left[\left| \frac{C}{k} \left(x - \frac{h}{2} \right) \right|^{\frac{s}{s-1}} - \left| \frac{C h}{k 2} \right|^{\frac{s}{s-1}} \right]. \quad (5.6)$$

Nella Figura 5.2 sono rappresentate le funzioni $w(x)$ per qualche valore di s per due valori di C . Si noti che per $s \rightarrow \infty$ il profilo della velocità tende verso un comportamento lineare, mentre per $s \rightarrow 1^+$ si può vedere la formazione al centro del tubo di un nucleo che trasla di moto rigido.

5.1.3 Modelli newtoniani generalizzati per il sangue

Il modello power law, sebbene possa descrivere molti fenomeni tipici dei fluidi non newtoniani, presenta anche alcune incongruenze: ad esempio, la funzione di viscosità $\beta(|\mathbf{D}|) = 2k|\mathbf{D}|^{s-2}$ per $s \neq 2$ assume tutti i valori tra 0 e $+\infty$, mentre nella realtà ci si aspetta sempre una viscosità limitata e non nulla. Inoltre, i soli parametri k e s non sono sufficienti per catturare le peculiarità di un fluido complesso come il sangue in tutte le sue sfumature. Quindi nel tempo si sono introdotti tanti tipi di modelli di fluidi newtoniani generalizzati specifici del sangue. In questa sezione ne presentiamo alcuni. Sottolineiamo che questi modelli vengono soprattutto sfruttati quando il sangue scorre in canali di piccola e media ampiezza e nella situazione in cui, una volta rotte le pile di rouleaux, i globuli rossi si deformano assumendo una forma ellissoidale che si allinea stabilmente nella direzione del flusso. In queste situazioni, pur essendo la dimensione delle particelle confrontabile con la sezione del canale, non ha dunque senso considerare modelli matematici particellari.

Denotando rispettivamente con μ_∞ ed μ_0 le viscosità limite per $|\mathbf{D}| = \infty$ e $|\mathbf{D}| = 0$, scriviamo la funzione di viscosità nella forma

$$\beta(|\mathbf{D}|) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)f(\lambda|\mathbf{D}|),$$

dove, poiché il sangue si comporta in modo shear-thinning, si deve avere $\mu_\infty < \mu_0$ e $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione decrescente con $f(0) = 1$ e $f(\infty) = 0$. Il parametro λ , che dovrà essere scelto caso per caso, ha l'unità di misura di un tempo e serve ad adimensionalizzare la quantità \mathbf{D} .

Il primo modello che vediamo è quello di **Powell-Eyring**, in cui si ha

$$f(x) = \frac{\operatorname{arcsinh} x}{x}.$$

Un modello simile è il cosiddetto **Powell-Eyring modificato**, dato da

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x^m}.$$

Si noti che, per $m \neq 1$, quest'ultima funzione non verifica il requisito $f(0) = 1$; tuttavia, nelle applicazioni di solito vengono scelti dei valori di m abbastanza vicini a 1, in modo da mitigare questo difetto.

Un'altra possibile scelta è il cosiddetto **modello di Cross**, dato da

$$f(x) = \frac{1}{1+x^m},$$

dove $m > 0$ è un altro parametro adimensionale. Se $m = 1$ tale modello viene detto **modello di Cross semplificato**.

Infine, un modello più recente è quello di **Carreau-Yasuda**, dato da

$$f(x) = (1+x^a)^{\frac{n-1}{a}},$$

dove $a > 0$ e $0 < n < 1$ sono parametri adimensionali. Se $a = 2$ si ottiene il cosiddetto **modello di Carreau**.

La preferenza per uno di questi modelli e la scelta dei parametri che li caratterizzano dipenderà da molti fattori, quali la geometria e la sezione dell'arteria, la pressione sistolica,

eventuali patologie del liquido sanguigno e del tessuto della parete arteriosa. In ogni caso, l'equazione del moto diventa

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_0 (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v} = \rho_0 \mathbf{b} - \text{grad } \tilde{p} + \frac{\mu_\infty}{2} \Delta \mathbf{v} + (\mu_0 - \mu_\infty) \text{div}(f(\lambda|\mathbf{D}|\mathbf{D})), \quad (5.7)$$

soggetta al vincolo di incomprimibilità.

Nella Figura 5.3 possiamo vedere il confronto tra alcuni di questi modelli.

5.1.4 Effetto rod-climbing

Uno degli effetti non newtoniani comuni a molti liquidi biologici e ad alcune sostanze polimeriche è quello che si chiama rod-climbing o effetto Weissenberg⁽⁵⁾.

Questo effetto, a cui abbiamo già accennato nel Capitolo 1.4, si verifica quando un'asta viene fatta ruotare all'interno di un recipiente che contiene alcuni tipi di fluidi, come ad esempio i liquidi biologici: questi infatti tendono a "scalare" l'asta stessa avvitandovisi intorno (Figura 5.4). Contrariamente, nel caso newtoniano l'inerzia domina il comportamento del fluido e questo si muove verso i lati del contenitore, lontano dall'asta. In alcuni modelli di fluidi non newtoniani, invece, le forze elastiche generate dalla rotazione dell'asta provocano la risalita del fluido lungo l'asta (le catene polimeriche della soluzione si deformano).

Dal punto di vista matematico, una dimostrazione rigorosa del fenomeno del rod-climbing nel caso evolutivo risulta ancora una questione aperta. Tuttavia mostriamo che, con un opportuno modello di fluido non newtoniano, è possibile dare una giustificazione matematica di questo fenomeno nel caso stazionario.

Sia C un contenitore cilindrico di raggio R_2 che contiene un fluido incomprimibile e omogeneo, ovvero un liquido. Immergiamo dentro il contenitore un'asta cilindrica di raggio R_1 con asse parallelo a quello di C . Facciamo ruotare l'asta con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_z$, dove \mathbf{e}_z indica l'asse dell'asta. Supponiamo che sul moto agisca solo la forza peso $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_z$. Il nostro scopo è mostrare che ad istante fissato (caso stazionario) esiste un profilo di velocità ammissibile che risalga lungo l'asta: troveremo infatti una condizione sufficiente affinché possa verificarsi il rod-climbing.

Le equazioni che descrivono il moto di un generico fluido incomprimibile e omogeneo sottoposto alla forza peso $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_z$ nel caso stazionario sono

$$\begin{cases} \rho_0 (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\rho_0 g \mathbf{e}_z + \text{div } \mathbb{T} \\ \text{div } \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Grazie alla simmetria del problema, cerchiamo una soluzione della forma

$$\mathbf{v} = v(r)\mathbf{e}_\vartheta, \quad p = p(r, z),$$

⁽⁵⁾Karl WEISSENBERG (Vienna, 11 giugno 1893 – L'Aia, 6 aprile 1976) è stato un fisico e matematico austriaco conosciuto per il suo contributo alla reologia e alla cristallografia. È anche noto per avere introdotto il *numero di Weissenberg*

$$Wi = \frac{\text{forze viscosse}}{\text{forze elastiche}}.$$

Questa quantità adimensionale viene spesso confusa con il numero di Deborah (5.2), ma, a differenza di quest'ultimo, è utile per descrivere fluidi con allungamento costante, ad esempio un flusso sottoposto a uno sforzo di taglio semplice, ed indica il grado di anisotropia o orientazione generato dalla deformazione.

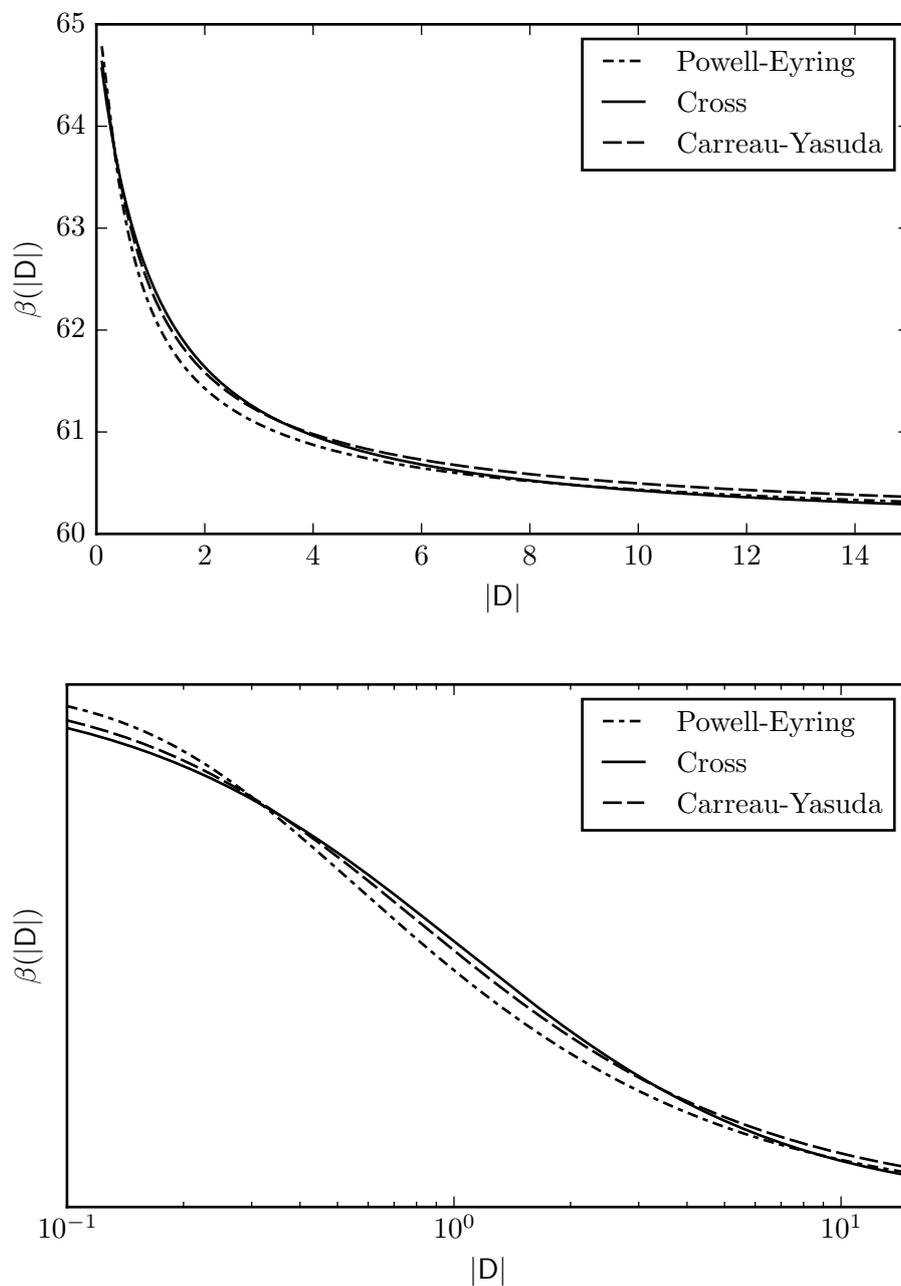


Figura 5.3: Un confronto in scala normale (sopra) e logaritmica (sotto) fra i tre modelli newtoniani generalizzati principali per il sangue, con $\mu_\infty = 60 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ e $\mu_0 = 65 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Inoltre, per il modello di Powell-Eyring si è scelto $\lambda = 5.383 \text{ s}$, per quello di Cross $\lambda = 1.007 \text{ s}$ e $m = 1.028$, per quello di Carreau-Yasuda $\lambda = 1.902 \text{ s}$, $n = 0.22$ e $a = 1.25$.

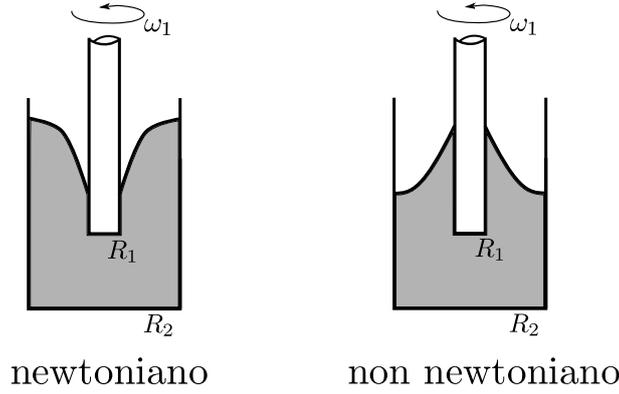


Figura 5.4: Effetto rod-climbing.

che soddisfino alle condizioni al contorno

$$v(R_1) = \omega_1 R_1, \quad v(R_2) = 0.$$

Il modello opportuno da considerare è quello di Reiner-Rivlin a coefficienti costanti. Per questo fluido possiamo scrivere il tensore degli sforzi di Cauchy come

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2,$$

dove μ e γ sono costanti, per cui

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = -\operatorname{grad} p + 2\mu \operatorname{div} \mathbf{D} + \gamma \operatorname{div} \mathbf{D}^2.$$

Osserviamo che

$$[\operatorname{div} \mathbf{D}^2]_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (D_{ik} D_{kj}) = \frac{\partial D_{ik}}{\partial x_j} D_{kj} + D_{ik} \frac{\partial D_{kj}}{\partial x_j} = (\operatorname{grad} \mathbf{D})_{ikj} D_{kj} + D_{ik} (\operatorname{div} \mathbf{D})_k$$

e quindi

$$\operatorname{div} \mathbf{D}^2 = (\operatorname{grad} \mathbf{D})\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{D}\Delta\mathbf{v}.$$

Sfruttando le relazioni (A.33) e la forma di \mathbf{v} , abbiamo

$$\operatorname{grad} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{v}{r} & 0 \\ v' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & v' - \frac{v}{r} & 0 \\ v' - \frac{v}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{v^2}{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 2\mu \operatorname{div} \mathbf{D} = \mu \begin{bmatrix} 0 \\ (v' - \frac{v}{r})' + \frac{2}{r}(v' - \frac{v}{r}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (v' - \frac{v}{r})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (v' - \frac{v}{r})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma \operatorname{div} \mathbf{D}^2 = \frac{\gamma}{4} \begin{bmatrix} ((v' - \frac{v}{r})^2)' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove con ' abbiamo denotato la derivata rispetto a r .

Proiettando l'equazione del moto sugli assi otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -\rho_0 \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\gamma}{4} \left(\left(v' - \frac{v}{r} \right)^2 \right)' \\ 0 = \mu \left[\left(v' - \frac{v}{r} \right)' + \frac{2}{r} \left(v' - \frac{v}{r} \right) \right] \\ 0 = -\rho_0 g - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Dalla seconda equazione, per determinare la velocità dobbiamo risolvere il problema differenziale

$$\begin{cases} v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2} = 0 \\ v(R_1) = \omega_1 R_1 \\ v(R_2) = 0, \end{cases}$$

che è il problema che fornisce il moto di Couette, la cui soluzione è stata determinata nel capitolo precedente e precisamente:

$$v = \frac{\omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{R_2^2}{r} - r \right).$$

Dalla terza equazione del sistema (5.9) abbiamo

$$p = -\rho_0 g z + f(r),$$

dove f è un'opportuna funzione di r che va determinata dalla prima equazione di (5.9):

$$\frac{\partial p}{\partial r} = f' = \rho_0 \frac{v^2}{r} + \frac{\gamma}{4} \left(\left(v' - \frac{v}{r} \right)^2 \right)'.$$

Per semplicità, poniamo

$$v = \frac{A}{r} + Br, \quad \text{con} \quad A = \omega_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = -\frac{\omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2},$$

allora

$$v' - \frac{v}{r} = -\frac{2A}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\left(v' - \frac{v}{r} \right)^2 \right)' = -\frac{16A^2}{r^5},$$

e dunque

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho_0 \frac{1}{r} \left(\frac{A^2}{r^2} + B^2 r^2 + 2AB \right) - 4\gamma \frac{A^2}{r^5}.$$

Integrando questa ultima equazione troviamo

$$p(r, z) = -\rho_0 g z + \rho_0 \left(-\frac{A^2}{2r^2} + \frac{B^2}{2} r^2 + 2AB \log r \right) + \gamma \frac{A^2}{r^4} + p_0.$$

Per trovare una condizione sufficiente al verificarsi del rod-climbing, vediamo cosa succede sul pelo libero $h(r)$. Su tale superficie, la pressione del fluido deve essere uguale a quella atmosferica p_{atm} :

$$p_{atm} = -\rho_0 g h(r) + \rho_0 \left(-\frac{A^2}{2r^2} + \frac{B^2}{2} r^2 + 2AB \log r \right) + \gamma \frac{A^2}{r^4} + p_0,$$

che fornisce il profilo del pelo libero $h(r)$

$$h(r) = -\frac{p_{atm} - p_0}{\rho_0 g} + \frac{1}{g} \left(-\frac{A^2}{2r^2} + \frac{B^2}{2} r^2 + 2AB \log r \right) + \frac{\gamma}{\rho_0 g} \frac{A^2}{r^4}.$$

Derivando rispetto a r e valutando per $r = R_1$, abbiamo

$$\begin{aligned} \left. \frac{dh}{dr} \right|_{r=R_1} &= \frac{1}{g} \left(\frac{A^2}{R_1^3} + B^2 R_1 + \frac{2AB}{R_1} \right) - 4 \frac{\gamma}{\rho_0 g} \frac{A^2}{R_1^5} \\ &= \frac{A^2}{g R_1^5} \left[R_1^2 \left(1 + \frac{B}{A} R_1^2 \right)^2 - 4 \frac{\gamma}{\rho_0} \right] \\ &= \frac{A^2}{g R_1^5} \left[R_1^2 \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right)^2 - 4 \frac{\gamma}{\rho_0} \right]. \end{aligned}$$

Dunque abbiamo che il liquido risale lungo l'asta se e solo se questa derivata è negativa, e quindi, poiché $\left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right)^2 < 1$, una condizione sufficiente perché ciò accada è che

$$R_1^2 < 4 \frac{\gamma}{\rho_0},$$

ovvero il raggio dell'asta deve essere sufficientemente piccolo (un altro caso si ha invece quando R_1/R_2 è molto vicino a 1).

Osserviamo che nel caso newtoniano $\gamma = 0$ e dunque $\left. \frac{dh}{dr} \right|_{r=R_1} > 0$.

5.2 Fluidi di Rivlin-Ericksen

Il fenomeno del rod-climbing è uno degli effetti dovuti alla *viscoelasticità* che caratterizza il comportamento di molti materiali reali e nel caso del sangue è dovuta alla capacità di aggregamento dei globuli rossi. D'altra parte abbiamo già osservato con il caso della silly putty che è spesso importante tenere in considerazione nella risposta del materiale (quindi nel tensore degli sforzi) del variare del tempo e degli eventi precedenti a quello attuale (si parla quindi di *storia* del materiale). Per considerare gli effetti viscoelastici, nel 1950 Noll⁽⁶⁾ ha elaborato la classe più generale di *fluidi semplici* (simple fluids). Per tali fluidi la risposta del materiale non dipende solo dallo stato attuale ma anche dalla sua storia. L'equazione costitutiva di \mathbf{T} non dipende dunque solo dalla deformazione al tempo corrente t , ma da tutta

⁽⁶⁾Walter NOLL (Berlino, 7 gennaio 1925 – Pittsburgh, 6 giugno 2017) è stato un matematico della Carnegie Mellon University che ha dato importanti contributi nel campo delle teorie matematiche della Meccanica dei Continui e della termodinamica.

la storia della deformazione. Questa classe molto generale di materiali è però di scarso utilizzo pratico ed è stata successivamente semplificata da Coleman⁽⁷⁾ e Noll considerando il concetto di *memoria evanescente* (fading memory), ovvero tenendo conto di quanto indietro un fluido può ricordare il passato: le deformazioni in un passato recente dovrebbero influenzare di più lo stato attuale rispetto a quelle più vecchie.

Tre classi costitutive di fluidi con memoria sono quelli chiamati *di tipo integrale*, *di tipo rate* o *di tipo differenziale*, anche detti di Rivlin-Ericksen⁽⁸⁾. Questi modelli, nel caso incomprimibile, schematizzano bene materiali che sono altamente viscosi, a metà tra liquidi e solidi. I *fluidi di tipo integrale* sono fluidi dotati di memoria il cui tensore di viscosità dipende da integrali rispetto al tempo della storia passata della deformazione, integrali che vanno in genere da $-\infty$ o 0 sino all'istante t preso in considerazione. I *fluidi di tipo rate* sono caratterizzati dal fenomeno detto di *rilassamento dello sforzo* per cui, se vengono sottoposti ad una deformazione istantanea, il tensore di viscosità decresce col tempo esponenzialmente tendendo a zero. Questi tipi di fluidi schematizzano abbastanza bene i materiali polimerici. Ci occupiamo ora nel dettaglio dei fluidi di Rivlin-Ericksen.

I *fluidi di tipo differenziale* sono stati introdotti da Rivlin ed Ericksen nel 1955 e sono utilizzati per rappresentare liquidi biologici (ad esempio il sangue in canali di piccole dimensioni), gel, schiuma da barba, gelatine, maionese. Per questi fluidi il tensore di viscosità \mathbf{V} è funzione di $\text{grad } \mathbf{v}$ e delle sue derivate materiali:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{V} \left(\text{grad } \mathbf{v}, \frac{d}{dt}(\text{grad } \mathbf{v}), \dots \right).$$

Poniamo per semplicità $\mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{=} \text{grad } \mathbf{v}$. Per definire i fluidi differenziali, sfruttiamo i *tensori di Rivlin-Ericksen* $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$, che sono tensori del secondo ordine definiti per ricorsione nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{L} + \mathbf{L}^\top = 2\mathbf{D} \\ &\vdots \\ \mathbf{A}_n &= \frac{d}{dt}(\mathbf{A}_{n-1}) + \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{L} + \mathbf{L}^\top\mathbf{A}_{n-1}. \end{aligned}$$

Osserviamo che il termine $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}_{n-1})$ tiene conto dell'effetto di memoria.

Chiamiamo fluido di tipo differenziale (o di Rivlin-Ericksen) *di complessità n* un fluido caratterizzato dalla relazione costitutiva

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{V}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n).$$

In generale \mathbf{V} dipende anche da altre variabili termodinamiche, ma trascuriamo al momento la dipendenza esplicita. Ci occupiamo inoltre solo di modelli incomprimibili.

Introduciamo ora una importante sottoclasse incomprimibile dei fluidi differenziali di complessità n . Un fluido di tipo differenziale (o di Rivlin-Ericksen) *di grado n* è caratterizzato da $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{V}$, dove

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_i),$$

⁽⁷⁾Bernard David COLEMAN (New York, 5 luglio 1930 -) è un fisico-matematico statunitense, esperto nel campo della termodinamica.

⁽⁸⁾Jerald LaVerne ERICKSEN (Portland, 20 dicembre 1924 -) è un matematico statunitense, esperto di Termodinamica dei Continui e studioso dei cristalli liquidi.

A questo sistema dobbiamo aggiungere le opportune condizioni al contorno: a differenza dei fluidi visti fino ad ora compare il termine $\frac{\partial \Delta \mathbf{v}}{\partial t}$ quindi non è più sufficiente la condizione $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ ma occorre aggiungere altre condizioni iniziali.

5.3 Fluidi micropolari

I modelli di fluidi di cui ci siamo occupati fino ad adesso rientrano nella classe più generale di *corpi continui non polari* perché non sono presenti coppie di massa o di contatto. La teoria classica infatti non tiene conto della struttura interna di tipo particellare dei corpi reali.

Ci sono, però, dei materiali reali che non possono essere schematizzati in modo soddisfacente se non si tiene conto della loro struttura particellare: ad esempio le sospensioni, ossia quei fluidi in cui sono sospese delle particelle, i liquidi biologici, i cristalli liquidi o i materiali che sono composti. Inoltre per descrivere certi fenomeni fisici è importante tenere conto delle diverse scale di lunghezza che intervengono all'interno dei materiali reali (ad esempio le strutture cellulari e le particelle nel plasma). Per poter schematizzare i materiali composti tenendo conto della loro struttura interna sono state introdotte le *teorie polari dei corpi continui* in cui sono studiati i materiali dotati di *microstruttura*. Si suppone cioè che le particelle di tali corpi, pur occupando nello spazio solo singoli punti geometrici, si possano riguardare esse stesse come dei corpi continui, deformabili o rigidi.

La teoria polare è stata formulata per la prima volta da Cosserat⁽⁹⁾ all'inizio del '900 ed è stata poi sviluppata da diversi autori.

Noi siamo interessati a sviluppare la teoria dei *fluidi micropolari* che costituiscono una sottoclasse dei *fluidi micromorfi* introdotta da Eringen⁽¹⁰⁾ fra il 1970 e il 1980. In questa teoria le particelle dei fluidi si possono riguardare come corpi continui deformabili. Una sottoclasse dei fluidi micromorfi è quella costituita dai *fluidi con microstretch*, per i quali le particelle sono corpi deformabili che possono soltanto espandersi o contrarsi. Infine, una sottoclasse dei fluidi con microstretch è costituita appunto dai fluidi micropolari, in cui le particelle vengono guardate come dei corpi rigidi dotati solo di atti di moto rotatori.

Vogliamo ora sviluppare la teoria dei fluidi micropolari attraverso la formulazione proposta da Lukaszewicz⁽¹¹⁾ che tratta il modello micropolare come una teoria a sé stante e non lo inserisce in una classe più generale, diversamente dalla teoria originaria di Eringen. I fluidi micropolari schematizzano il comportamento di quei materiali reali che sono costituiti da particelle sospese in un mezzo viscoso, disposte a caso e dotate ognuna di un proprio atto di moto di rotazione indipendente dal moto del mezzo in cui sono immerse.

Ci occupiamo del caso isotropo (le proprietà meccaniche e termiche sono indipendenti dalla direzione), ma questo modello è stato poi generalizzato al caso anisotropo.

Abbiamo già detto che un fluido micropolare è un fluido viscoso ad ogni particella del quale viene associato un corpo rigido che può avere solo atti di moto rotatori. Accanto al campo della velocità \mathbf{v} , si introduce un altro campo vettoriale $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, detto *vettore di microrotazione*, che rappresenta la velocità angolare totale delle particelle. Precisamente \mathbf{w}

⁽⁹⁾ Eugène Maurice Pierre COSSERAT (Amiens, 4 marzo 1866 – Tolosa, 31 maggio 1931) è stato un matematico e astronomo francese. Insieme al fratello ingegnere François Nicolas COSSERAT (Douai, 26 ottobre 1852 – 22 marzo 1914) si è occupato nella seconda parte della sua carriera di estendere la Meccanica dei Continui per corpi polari.

⁽¹⁰⁾ Ahmed Cemal ERINGEN (Kayseri 15 febbraio 1921 – 7 dicembre 2009) è stato professore alla Princeton University e fondatore della Society of Engineering Science. La “Eringen Medal” è stata intitolata in suo onore.

⁽¹¹⁾ Grzegorz LUKASZEWICZ è un matematico polacco, esperto di fluidodinamica.

indica la velocità angolare totale all'istante t della particella che in tale istante si trova in \mathbf{x} . Il vettore \mathbf{w} entra nelle equazioni che descrivono il moto di un fluido micropolare attraverso il campo $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$ chiamato *densità del momento angolare interno per unità di massa* o anche *densità di spin*. Tale campo descrive il *momento interno angolare delle quantità di moto* su $P(t)$:

$$\int_{P(t)} \rho \mathbf{l} dV,$$

in questo modo il momento delle quantità di moto per un fluido micropolare è dato da

$$\int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV + \int_{P(t)} \rho \mathbf{l} dV,$$

dove il primo integrale è detto *momento esterno delle quantità di moto*.

Assumiamo inoltre che il momento angolare interno sia della forma

$$\mathbf{l} = \mathcal{L}\mathbf{w}, \quad l_i = \mathcal{L}_{ik}w_k, \quad i = 1, 2, 3,$$

dove \mathcal{L} è detto *tensore di microinerzia*.

Siamo interessati a fluidi isotropi, per cui studiamo il caso semplice

$$\mathcal{L} = lI \quad \Rightarrow \quad l_i = l\delta_{ik}w_k = lw_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

dove l viene chiamato *coefficiente di microinerzia*. Si può dimostrare che

$$\frac{dl}{dt} = 0. \quad (5.12)$$

Oltre al vettore di microrotazione e alle quantità di microinerzia, dobbiamo introdurre altri nuovi campi che descrivano la presenza di coppie di forze di massa e di contatto nei corpi polari.

Accanto alla densità di forza \mathbf{b} , introduciamo il campo $\mathbf{m}(\mathbf{x}, t)$ detto *densità del momento delle coppie esterne di massa* o anche *momento torcente di coppia*, in modo tale che il momento risultante delle coppie esterne di massa su $P(t)$ sia

$$\int_{P(t)} \rho \mathbf{m} dV.$$

Accanto invece alle forze di superficie \mathbf{t} , adotteremo il *Postulato di Cauchy per le coppie di contatto*: se S è una superficie nel nostro corpo continuo $\mathcal{B}(t)$ all'istante t , orientata mediante una normale \mathbf{n} , allora supponiamo che esista una distribuzione di *sforzi dovuta alle coppie di contatto*

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}, t; S)$$

che rappresenta la densità del momento delle coppie di contatto, in modo tale che il *momento risultante delle coppie di contatto* sia dato da

$$\int_{\partial P(t)} \mathbf{c} dS.$$

Inoltre assumiamo che \mathbf{c} dipenda da S solo attraverso la normale \mathbf{n} , ovvero si abbia

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}, t; S) = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}).$$

Completiamo infine il Postulato di Cauchy imponendo che la dipendenza di \mathbf{c} dalla normale sia continua. Supporremo poi come al solito che \mathbf{c} sia di classe C^1 in \mathbf{x} .

Si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 5.1. (Teorema di Cauchy sugli sforzi di coppia) *Per ogni (\mathbf{x}, t) il vettore $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$ è lineare in \mathbf{n} , quindi esiste un tensore \mathbf{C} di ordine due tale che*

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}.$$

Tale tensore \mathbf{C} si dice *tensore degli sforzi di coppia*.

Le quantità che abbiamo introdotto servono a descrivere le interazioni tra le particelle del fluido e come abbiamo spiegato modificano solo l'espressione del momento delle quantità di moto. Il bilancio della massa e il bilancio delle quantità di moto forniscono quindi ancora l'equazione di continuità (2.8) e l'equazione del moto (2.12). Quello che viene modificato invece è che il bilancio del momento delle quantità di moto non comporta più la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy, come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 5.2. *Dato il bilancio della massa e della quantità di moto, come conseguenza del bilancio del momento della quantità di moto vale*

$$\rho l \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \rho \mathbf{m} + \operatorname{div} \mathbf{C} + \mathbf{t}^{(w)}, \quad (5.13)$$

dove $\mathbf{t}^{(w)} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \mathbb{T}$.

Dimostrazione. Nel caso di un fluido polare, il bilancio del momento della quantità di moto si scrive come

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v} + \mathbf{l}) dV = \int_{P(t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{b} + \mathbf{m}) dV + \int_{\partial P(t)} (\mathbf{x} \times \mathbf{t} + \mathbf{c}) dS, \quad (5.14)$$

per ogni t e per ogni P .

Possiamo riscrivere tale bilancio lavorando sugli integrali di superficie:

$$\int_{\partial P(t)} (\mathbf{c} + \mathbf{x} \times \mathbf{t}) dS = \int_{\partial P(t)} \mathbf{C} \mathbf{n} dS + \int_{\partial P(t)} \mathbf{x} \times (\mathbb{T} \mathbf{n}) dS.$$

Se applichiamo il teorema della divergenza, abbiamo

$$\int_{\partial P(t)} \mathbf{C} \mathbf{n} dS = \int_{P(t)} \operatorname{div} \mathbf{C} dV.$$

D'altra parte, calcolando l' i -esima componente del secondo integrale otteniamo

$$\begin{aligned} \left[\int_{\partial P(t)} \mathbf{x} \times (\mathbb{T} \mathbf{n}) dS \right]_i &= \int_{\partial P(t)} [\mathbf{x} \times (\mathbb{T} \mathbf{n})]_i dS = \int_{\partial P(t)} \varepsilon_{ijr} x_j T_{rk} n_k dS = \\ &= \int_{P(t)} \frac{\partial}{\partial x_k} (\varepsilon_{ijr} x_j T_{rk}) dV = \\ &= \int_{P(t)} \left(\varepsilon_{ijr} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} T_{rk} + \varepsilon_{ijr} x_j \frac{\partial T_{rk}}{\partial x_k} \right) dV = \\ &= \int_{P(t)} [\varepsilon_{ijr} \delta_{jk} T_{rk} + \varepsilon_{ijr} x_j (\operatorname{div} \mathbb{T})_r] dV = \\ &= \int_{P(t)} [\varepsilon_{ijr} T_{rj} + \varepsilon_{ijr} x_j (\operatorname{div} \mathbb{T})_r] dV = \\ &= \int_{P(t)} [(\varepsilon \mathbb{T})_i + (\mathbf{x} \times \operatorname{div} \mathbb{T})_i] dV. \end{aligned}$$

Denotando con $\varepsilon\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t}^{(w)}$, che è legato alla parte antisimmetrica di \mathbf{T} , il bilancio del momento delle quantità di moto diventa allora

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho (\mathbf{l} + \mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \int_{P(t)} \left[\rho (\mathbf{m} + \mathbf{x} \times \mathbf{b}) + \text{div } \mathbf{C} + \mathbf{x} \times \text{div } \mathbf{T} + \mathbf{t}^{(w)} \right] dV.$$

Il Corollario 2.2 implica che

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho (\mathbf{l} + \mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \int_{P(t)} \left[\rho \frac{d\mathbf{l}}{dt} + \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \right] dV.$$

Dall'arbitrarietà di $P(t)$, poiché i campi sono regolari, si ottiene l'equazione locale

$$\rho \frac{d\mathbf{l}}{dt} + \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) = \rho (\mathbf{m} + \mathbf{x} \times \mathbf{b}) + \text{div } \mathbf{C} + \mathbf{x} \times \text{div } \mathbf{T} + \mathbf{t}^{(w)},$$

da cui, ricordando l'equazione del moto (2.12) e osservando che dall'equazione (5.12) si ha $\frac{d\mathbf{l}}{dt} = l \frac{d\mathbf{w}}{dt}$, otteniamo la tesi. \square

L'equazione (5.13) viene chiamata *equazione per il momento angolare interno* ed insieme alle equazioni (5.12), (2.8) e (2.12) governa il moto di un generico fluido micropolare. Osserviamo che se il fluido non è polare, dall'equazione (5.13) si ottiene

$$\mathbf{t}^{(w)} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad T_{rj} = T_{jr}, \quad r \neq j,$$

ovvero \mathbf{T} è simmetrico, come abbiamo già dimostrato nella Proposizione 2.5.

Riassumendo, le equazioni che descrivono il moto di un generico fluido micropolare sono

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} + \text{div } \mathbf{T} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ \rho l \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \rho \mathbf{m} + \text{div } \mathbf{C} + \mathbf{t}^{(w)} \\ \frac{dl}{dt} = 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

È giunto finalmente il momento di caratterizzare alcuni tipi particolari di fluidi micropolari. Per fare ciò, analogamente a quanto fatto con gli altri modelli di fluidi da noi studiati, è necessario formulare delle ipotesi sul tensore di Cauchy e sul tensore degli sforzi di coppia, che descrivono il comportamento del materiale. Questo si esprime prescrivendo una *equazione costitutiva* per \mathbf{T} e \mathbf{C} .

5.3.1 Fluidi micropolari viscosi lineari

Ci occupiamo in questa sezione di ricavare le equazioni del moto (5.15) per un particolare tipo di fluido micropolare.

Chiamiamo *fluido micropolare viscoso lineare* un fluido micropolare caratterizzato dalle seguenti relazioni costitutive

$$\mathbf{T} = (-p + \lambda \text{div } \mathbf{v}) \mathbf{l} + 2\mu \mathbf{D} + 2\mu_r \mathbf{W} + 2\mu_r \varepsilon \mathbf{w}, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{C} = c_0 \text{div } \mathbf{w} \mathbf{l} + 2c_d \mathbf{D}_w + 2c_a \mathbf{W}_w, \quad (5.17)$$

dove $D_{\mathbf{w}} = \frac{\text{grad } \mathbf{w} + (\text{grad } \mathbf{w})^\top}{2}$ e $W_{\mathbf{w}} = \frac{\text{grad } \mathbf{w} - (\text{grad } \mathbf{w})^\top}{2}$ denotano la parte simmetrica e antisimmetrica del vettore microrotazione \mathbf{w} . I parametri $\lambda, \mu, \mu_r, c_0, c_a, c_d$ sono costanti rispetto alle variabili cinematiche, ma possono in generale dipendere dalle variabili termodinamiche e sono forniti dall'esperienza. In particolare, λ e μ sono i *coefficienti di viscosità classica*, $\mu_r \geq 0$ viene detto *coefficiente di viscosità di microrotazione*, mentre c_0, c_a, c_d sono chiamati *coefficienti di viscosità angolare*.

Osserviamo che la parte simmetrica di \mathbf{T}

$$(-p + \lambda \text{div } \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

coincide con il tensore degli sforzi di Cauchy per un fluido newtoniano. Inoltre la parte antisimmetrica è data da

$$2\mu_r W + 2\mu_r \varepsilon \mathbf{w},$$

dunque μ_r ci dà una misura di quanto il fluido si allontana dal modello non polare (per $\mu_r = 0$ otteniamo infatti un fluido newtoniano).

Guardiamo che forma assumono le equazioni del moto. Dobbiamo calcolare $\text{div } \mathbf{T}$ e $\text{div } \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{T} &= \text{div} [(-p + \lambda \text{div } \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + 2\mu_r W + 2\mu_r \varepsilon \mathbf{w}] = \\ &= -\text{grad } p + \text{grad}(\lambda \text{div } \mathbf{v}) + 2 \text{div} (\mu\mathbf{D} + \mu_r W + \mu_r \varepsilon \mathbf{w}), \\ \text{div } \mathbf{C} &= \text{div} (c_0 \text{div } \mathbf{w} \mathbf{I} + 2c_d D_{\mathbf{w}} + 2c_a W_{\mathbf{w}}) = \text{grad}(c_0 \text{div } \mathbf{w}) + 2 \text{div} (c_d D_{\mathbf{w}} + c_a W_{\mathbf{w}}). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} t_i^{(w)} &= (\varepsilon \mathbf{T}^\top)_i = \varepsilon_{ijk} T_{kj} = \\ &= \varepsilon_{ijk} [(-p + \lambda \text{div } \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + 2\mu_r W + 2\mu_r \varepsilon \mathbf{w}]_{kj} = \\ &= 2\mu_r \varepsilon_{ijk} [W_{kj} + \varepsilon_{kjl} w_l] = \\ &= 2\mu_r \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kjl} w_l \right]. \end{aligned}$$

Guardiamo ai singoli termini:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} &= (\text{rot } \mathbf{v})_i \\ -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} &= \varepsilon_{ikj} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = (\text{rot } \mathbf{v})_i \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kjl} &= -\varepsilon_{kji} \varepsilon_{kjl} = -(\delta_{jj} \delta_{il} - \delta_{jl} \delta_{ij}) = -(3\delta_{il} - \delta_{il}) = -2\delta_{il}, \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato l'identità (A.3), ottenendo così

$$t_i^{(w)} = 2\mu_r [(\text{rot } \mathbf{v})_i - 2\delta_{il} w_l] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}^{(w)} = 2\mu_r (\text{rot } \mathbf{v} - 2\mathbf{w}).$$

Dunque le equazioni che descrivono il moto di un fluido micropolare viscoso lineare sono

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} - \text{grad } p + \text{grad}(\lambda \text{div } \mathbf{v}) + 2 \text{div} (\mu\mathbf{D} + \mu_r W + \mu_r \varepsilon \mathbf{w}) \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ \rho l \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \rho \mathbf{m} + \text{grad}(c_0 \text{div } \mathbf{w}) + 2 \text{div} (c_d D_{\mathbf{w}} + c_a W_{\mathbf{w}}) + 2\mu_r (\text{rot } \mathbf{v} - 2\mathbf{w}) \\ \frac{dl}{dt} = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Se in aggiunta i coefficienti di viscosità sono costanti, allora abbiamo

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= \operatorname{div} \left[\frac{\operatorname{grad} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})^\top}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{v})^\top \right] = \\ &= \frac{1}{2} [\Delta \mathbf{v} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v})] \\ (\operatorname{div} \mathbf{W})_i &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\Delta v_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{v} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v})_i \\ [\operatorname{div}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{w})]_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon_{ijl} w_l) = \varepsilon_{ijl} \frac{\partial w_l}{\partial x_j} = (\operatorname{rot} \mathbf{w})_i \\ \operatorname{div} \mathbf{T} &= \operatorname{div} [(-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})\mathbf{l} + 2\mu \mathbf{D} + 2\mu_r \mathbf{W} + 2\mu_r \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{w}] = \\ &= -\operatorname{grad} p + \lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v} + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu_r \Delta \mathbf{v} - \mu_r \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} \\ &= -\operatorname{grad} p + (\lambda + \mu - \mu_r) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}) + (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{v} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w}.\end{aligned}$$

Sfruttando analoghi passaggi per l'equazione del momento angolare, abbiamo che nel caso di coefficienti costanti le equazioni che governano il moto sono

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} - \operatorname{grad} p + (\lambda + \mu - \mu_r) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}) + (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{v} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \rho l \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \rho \mathbf{m} + (c_0 + c_d - c_a) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{w}) + (c_d + c_a) \Delta \mathbf{w} + 2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{v} - 2\mathbf{w}) \\ \frac{dl}{dt} = 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Nel caso incomprimibile e omogeneo queste equazioni diventano

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho_0 \mathbf{b} - \operatorname{grad} p + (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{v} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \rho_0 l \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \rho_0 \mathbf{m} + (c_0 + c_d - c_a) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{w}) + (c_d + c_a) \Delta \mathbf{w} + 2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{v} - 2\mathbf{w}) \\ \frac{dl}{dt} = 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

Osserviamo che in questo caso, vi è pareggiamento tra numero di incognite ed equazioni scalari: il problema del moto per un fluido micropolare viscoso lineare incomprimibile è impostato in maniera completa rimanendo in un ambito puramente meccanico. Tale modello è spesso utilizzato per descrivere il moto del sangue in condotti di media ampiezza.

Nel caso delle equazioni (5.18) e (5.19), invece, per avere pareggiamento tra equazioni scalari e incognite è necessario ad esempio legare pressione e densità di massa o ricorrere all'ambito termodinamico.

In generale, si dimostra che affinché sia soddisfatto il secondo assioma della termodinamica, devono valere

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \mu_r \geq 0, \quad 3c_0 + 2c_d \geq 0, \quad c_d \geq 0, \quad c_a \geq 0.$$

Ai problemi (5.18), (5.19) e (5.20), dobbiamo associare inoltre opportunamente condizioni al contorno. Per quanto riguarda la velocità, come nel paragrafo 4.2.2, assumiamo la condizione iniziale $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ e la condizione di no-slip (4.11). Per quanto riguarda la microrotazione, oltre alla condizione iniziale $\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x})$, assumiamo la *condizione di stretta aderenza*

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\omega} \quad \text{su } \partial\mathcal{B}(t) \quad (5.21)$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ indica la velocità angolare dell'atto di moto \mathbf{V} della parete. In particolare si ha

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{sui bordi fissi.}$$

Questa condizione in letteratura è a volte sostituita dalla richiesta più generale:

$$\mathbf{w} - n \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{su } \partial\mathcal{B}(t)$$

dove $n \in [0, 1]$ descrive la concentrazione di particelle sulla frontiera rigida.

5.4 Modelli con sforzo di soglia

I modelli di fluidi con *sforzo di soglia* (yield stress) prevedono un'equazione costitutiva che cambia se lo sforzo supera o meno una certa soglia. Il fenomeno tipico, che avviene anche nel sangue, è il seguente: se lo sforzo di taglio cui è sottoposto il materiale è basso, allora i legami chimici tra le varie particelle prevalgono e il materiale si comporta come un solido, secondo una certa equazione costitutiva, mentre se lo sforzo di taglio è alto, allora i legami chimici si rompono e il materiale comincia a scorrere alla maniera di un fluido. Il valore dello sforzo in cui cambia il regime del materiale è detto appunto *sforzo di soglia* o yield stress.

Introduciamo la parte viscosa dello sforzo:

$$\mathbf{V} = \mathbf{T} + p\mathbf{I},$$

dove \mathbf{T} è lo sforzo di Cauchy e p la pressione. Supponiamo poi che il fluido sia incomprimibile e che \mathbf{V} sia a traccia nulla. Scegliamo poi come misura dello sforzo proprio la norma di \mathbf{V} , che nel caso incomprimibile è legata al secondo invariante (più in generale si possono scegliere delle misure di sforzo che dipendono anche dagli altri invarianti di \mathbf{V}). Denotando con T_Y la soglia di sforzo (Y sta per yield), si avrà che:

- se $|\mathbf{V}| < T_Y$, allora non c'è scorrimento;
- se $|\mathbf{V}| > T_Y$, allora il materiale fluisce.

5.4.1 Fluidi di Bingham

Tra i modelli a sforzo di soglia, il più semplice è il **modello di Bingham**, in cui il comportamento solido del materiale è supposto rigido, mentre quello fluido come newtoniano. Consideriamo il caso di uno scorrimento semplice in cui il campo di velocità sia dato da

$$\mathbf{v} = 2dy\mathbf{e}_x, \quad d \geq 0$$

e quindi $\mathbf{D} = d(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x)$. Allora nel modello di Bingham si assume che \mathbf{V} sia un multiplo di \mathbf{D} , come nel caso newtoniano, ovvero

$$\mathbf{V} = V(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x).$$

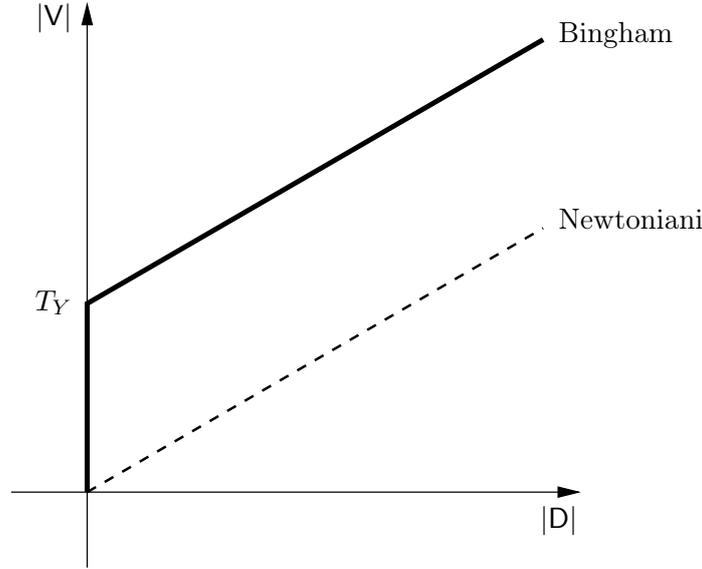


Figura 5.5: Lo sforzo in funzione della viscosità in un fluido di Bingham.

Inoltre deve valere che, se $|V| < T_Y$, allora il moto è rigido e quindi $d = 0$; se invece $|V| > T_Y$ allora il moto è newtoniano e $V = T_Y + 2\mu d$, dove $\mu > 0$ è un coefficiente di viscosità. Questa legge si può scrivere sinteticamente come

$$d = \frac{(V - T_Y)_+}{2\mu},$$

dove $(x)_+$ denota la parte positiva di x . Si noti che non è più possibile scrivere lo sforzo in funzione di D , perché la relazione non è più il grafico di una funzione (si veda la Figura 5.5).

Osserviamo che si ha $|V| = \sqrt{2}|V|$, quindi possiamo riscrivere la relazione a livello tensoriale come

$$D = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\sqrt{2}T_Y}{|V|} \right)_+ V. \quad (5.22)$$

Tale relazione ha senso anche quando il moto non è un scorrimento semplice e la assumeremo come equazione costitutiva per un fluido di Bingham. Essa non è completamente esplicitabile; tuttavia, possiamo renderla quasi esplicita. Intanto notiamo che

$$D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |V| \leq \sqrt{2}T_Y;$$

in questo caso, anche se V non ha un'espressione definita, sappiamo che il moto è rigido. Viceversa, se $D \neq 0$, prendendo la norma di entrambi i membri della (5.22) otteniamo

$$|D| = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\sqrt{2}T_Y}{|V|} \right) |V| = \frac{1}{2\mu} (|V| - \sqrt{2}T_Y)$$

da cui

$$|V| = 2\mu|D| + \sqrt{2}T_Y.$$

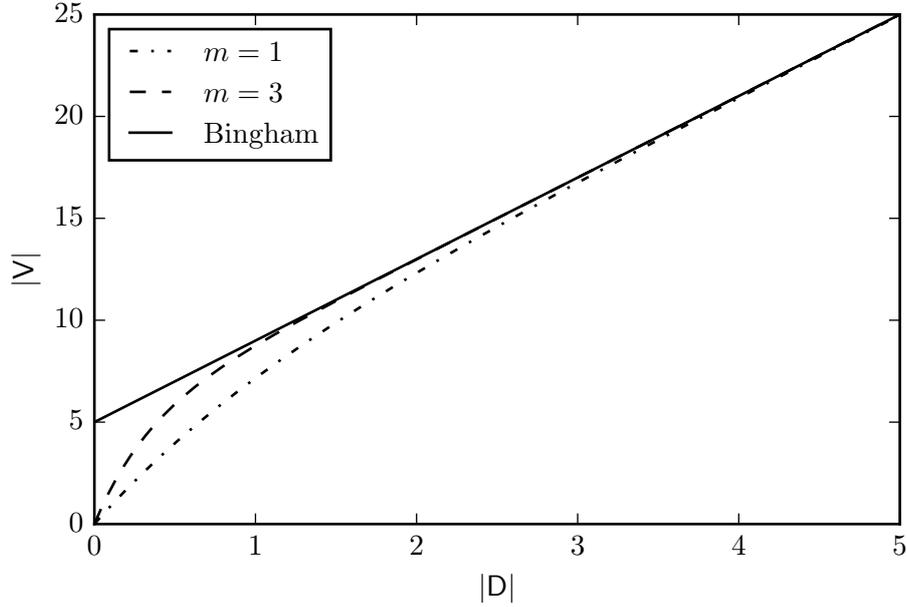


Figura 5.6: Confronto dello sforzo in funzione della viscosità tra un fluido di Bingham e la regolarizzazione di Papanastasiou (5.24).

Quindi risostituendo nella (5.22) troviamo

$$2\mu D = \left(1 - \frac{\sqrt{2}T_Y}{2\mu|D| + \sqrt{2}T_Y}\right) V$$

e svolgendo alcuni semplici passaggi

$$V = 2\mu D + \sqrt{2}T_Y \frac{D}{|D|}, \quad D \neq 0. \quad (5.23)$$

Esistono anche dei modelli regolarizzati dei fluidi di Bingham, in cui la discontinuità viene approssimata da una funzione più regolare: ad esempio, nel modello di Bingham-Papanastasiou del 1987 si propone l'equazione costitutiva

$$V = 2\mu D + \sqrt{2}T_Y \left(1 - e^{-m|D|}\right) \frac{D}{|D|} \quad (5.24)$$

che ha senso anche per $D \rightarrow 0$ (si veda la Figura 5.6).

5.4.2 Moto piano di Poiseuille per un fluido di Bingham

Esaminiamo il moto laminare e stazionario di un fluido di Bingham incomprimibile e omogeneo che si muova nel piano compreso tra le rette $y = -h$ e $y = h$ in assenza di forze esterne, supponendo che le pareti siano entrambe ferme.

Essendo il moto laminare e stazionario, si ha $\mathbf{v}(x, y) = u(x, y)\mathbf{e}_1$ e dalle condizioni di aderenza $u(x, -h) = 0$ e $u(x, h) = 0$. Inoltre sappiamo già che u può dipendere solo da y e che il termine convettivo $(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}$ si annulla, quindi la prima componente dell'equazione del moto diventa

$$0 = -\text{grad } p + \text{div } \mathbf{V}.$$

Ricordiamo ora l'equazione (5.23):

$$\mathbf{V} = 2\mu\mathbf{D} + \sqrt{2}T_Y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}, \quad \mathbf{D} \neq 0.$$

Poiché $\mathbf{D} = \frac{u'}{2}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x)$, allora si ha

$$\mathbf{V} = \left(\mu u' + T_Y \frac{u'}{|u'|} \right) (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x), \quad u' \neq 0.$$

Quindi anche \mathbf{V} dipende solo da y e la seconda componente dell'equazione del moto diventa semplicemente

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(x).$$

La prima componente quindi si scrive

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial V_{xy}}{\partial y} = 0$$

da cui $\frac{\partial p}{\partial x} = C$ e

$$\frac{\partial V_{xy}}{\partial y} = C \quad \Rightarrow \quad V_{xy} = Cy + a.$$

Per questioni di simmetria richiediamo che al centro del tubo (cioè per $y = 0$) lo sforzo di taglio sia nullo, quindi $a = 0$.

Ora ricordiamo anche che per un fluido di Bingham si ha

$$\mathbf{D} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{V}| \leq \sqrt{2}T_Y$$

e che nel nostro caso $|\mathbf{V}| = \sqrt{2}|V_{xy}|$, da cui

$$u' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |V_{xy}| \leq T_Y \quad \Leftrightarrow \quad |Cy| \leq T_Y.$$

Poiché $|Cy|$ è massimo per $y = \pm h$, se $|C| \leq T_Y/h$ allora tutto il fluido si muove di moto rigido; ma dalle condizioni al contorno segue subito che il fluido resta fermo. Quindi se il gradiente di pressione, che in questo esercizio è l'unica cosa che mette in movimento il fluido, è troppo basso, non c'è movimento.

Se invece $|C| > T_Y/h$, poniamo $y_Y := T_Y/|C| < h$; per $|y| > y_Y$ ci sarà movimento del fluido, secondo l'equazione

$$\mu u' + T_Y \frac{u'}{|u'|} = Cy.$$

In particolare, se u' è positivo allora y deve avere lo stesso segno di C , mentre se u' è negativo allora y deve avere segno opposto a C . Per fissare le idee, supponiamo $C < 0$, cosicché $u' > 0$ per $y \in [-h, -y_Y]$ e $u' < 0$ per $y \in [y_Y, h]$. In questo caso per $y \in [y_Y, h]$ si ha

$$u(y) = \frac{C}{2\mu}y^2 + \frac{T_Y}{\mu}y + b$$

e imponendo $u(h) = 0$ si trova

$$b = -\frac{C}{2\mu}h^2 - \frac{T_Y}{\mu}h$$

da cui

$$u(y) = \frac{C}{2\mu}(y^2 - h^2) + \frac{T_Y}{\mu}(y - h) = \frac{h - y}{2\mu}(-C(h + y) - 2T_Y) \quad \text{per } y \in [y_Y, h].$$

Nel caso $y \in [-h, -y_Y]$ il conto è analogo e si perviene all'espressione

$$u(y) = \frac{C}{2\mu}(y^2 - h^2) - \frac{T_Y}{\mu}(y + h) = \frac{h + y}{2\mu}(-C(h - y) - 2T_Y) \quad \text{per } y \in [-h, -y_Y].$$

Quindi nelle due regioni di flusso il profilo delle velocità è parabolico, come nel caso newtoniano. In questo caso però ci sono due parabole diverse, una sopra e una sotto.

Nella regione centrale $[-y_Y, y_Y]$ il moto è rigido e la velocità, per continuità, sarà la stessa delle altre regioni per $y = \pm y_Y$, ovvero

$$u_{max}(y) = \frac{h - y_Y}{2\mu}(-C(h + y_Y) - 2T_Y)$$

e ricordando l'espressione di $y_Y = -T_Y/C$ (nel caso $C < 0$) si ha

$$u_{max}(y) = -\frac{(Ch + T_Y)^2}{2\mu C}.$$

Quindi in definitiva il campo di velocità è dato da

$$u(y) = \begin{cases} \frac{h + y}{2\mu}(-C(h - y) - 2T_Y) & \text{per } y \in [-h, -y_Y] \\ -\frac{(Ch + T_Y)^2}{2\mu C} & \text{per } [-y_Y, y_Y] \\ \frac{h - y}{2\mu}(-C(h + y) - 2T_Y) & \text{per } y \in [y_Y, h] \end{cases}$$

e in Figura 5.7 possiamo vederne una rappresentazione.

5.4.3 Altri modelli a sforzo di soglia

Il modello di Bingham è il più semplice modello che presenta uno sforzo di soglia, ma nel caso del sangue di solito vengono usati modelli più complessi, sia per quanto riguarda il comportamento sotto la soglia che quello oltre la soglia.

Ad esempio, per quanto riguarda il comportamento della fase sotto la soglia, invece di assumere che il materiale si comporti rigidamente si possono fare delle ipotesi di comportamento elastico o addirittura viscoelastico. Oppure ci sono modelli **a due viscosità**, in cui sotto la soglia il fluido è newtoniano con una certa viscosità e sopra la soglia la viscosità è ancora costante ma più piccola.

Un modello molto usato nel caso del sangue (ma non solo) è quello di **Herschel & Bulkley** (1925), in cui il comportamento è rigido sotto la soglia, ma diventa un fluido power law oltre la soglia. In questo caso si ha

$$\mathbf{V} = 2k|\mathbf{D}|^{s-2}\mathbf{D} + \sqrt{2}T_Y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}, \quad \mathbf{D} \neq 0. \quad (5.25)$$

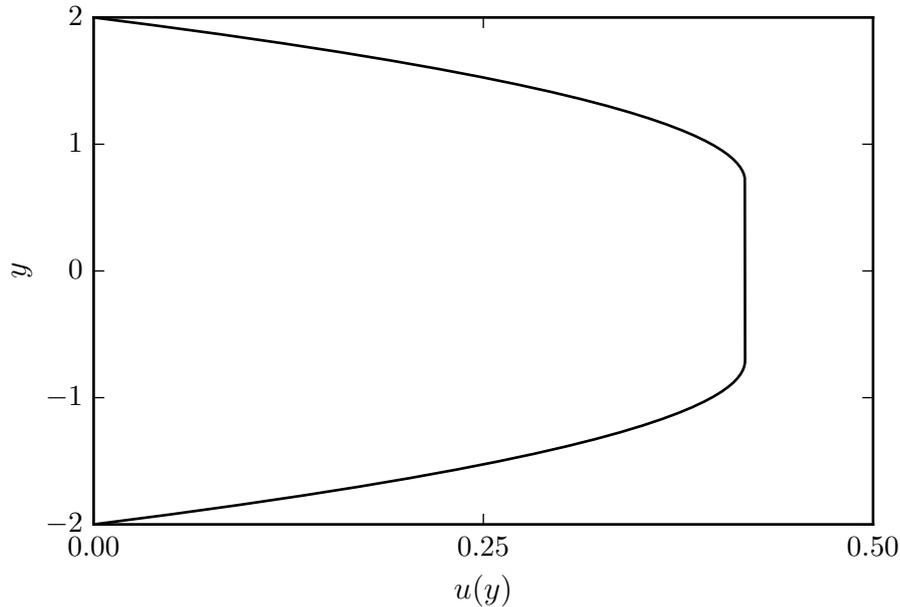


Figura 5.7: Il profilo delle velocità per il moto di Poiseuille di un fluido di Bingham, con $\mu = 2 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $T_Y = \sqrt{2}/2 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$, $C = -1 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$, $h = 2 \text{ m}$.

Un altro modello, che funziona molto bene per descrivere certi comportamenti del sangue, è il **modello di Casson** (1957), che mette in relazione le radici quadrate di sforzo e gradiente di velocità:

$$\mathbf{v} = \left(\sqrt{2\mu} + \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{T_Y}}{\sqrt{|\mathbf{D}|}} \right)^2 \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} \neq \mathbf{0}. \quad (5.26)$$

5.5 Complementi ed esercizi

Esercizio 5.1 (Moto piano di Poiseuille per un fluido di Reiner-Rivlin a coefficienti costanti). Esaminiamo il problema studiato nel paragrafo 4.4.1 per un fluido di Reiner-Rivlin a coefficienti costanti. Ovvero, supponiamo che si muova nel piano compreso tra le rette $y = 0$ e $y = h$. Assumiamo di essere in assenza di forze esterne ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$) e che $\mathbf{v}(x, y, t) = u(x, y, t)\mathbf{e}_1$ (moto di scorrimento semplice). Supponiamo che le pareti siano entrambe ferme, ovvero (per le condizioni di aderenza) $u(x, 0, t) = 0$ e $u(x, h, t) = 0$.

Cercare le soluzioni *stazionarie* di questo problema e determinare che forma assume il tensore degli sforzi di Cauchy.

Svolgimento. Dall'equazione di continuità si ha subito $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e dunque $u = u(y)$.

Per un fluido di Reiner-Rivlin a coefficienti costanti l'equazione del moto nel caso stazionario in assenza di forze esterne diventa

$$\rho_0(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} = -\text{grad } p + 2\mu \text{div } \mathbf{D} + \gamma \text{div } \mathbf{D}^2. \quad (5.27)$$

Osserviamo che per il nostro moto si ha

$$(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{du}{dy} & 0 \\ \frac{du}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{D}^2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \left(\frac{du}{dy}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{du}{dy}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'equazione (5.27) proiettata sugli assi ci dà:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\gamma}{4} \frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Dalla terza equazione abbiamo che $p = p(x, y)$. Introduciamo la pressione modificata

$$p^*(x, y) = p(x, y) - \frac{\gamma}{4} \left(\frac{du}{dy}\right)^2,$$

tale per cui $\frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}$. Osserviamo che dalla seconda equazione si ha $\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0$ e dunque $p^* = p^*(x)$. Quindi la prima equazione fornisce

$$\frac{dp^*}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}.$$

Dunque, analogamente al caso newtoniano, sfruttando le condizioni al contorno, otteniamo

$$p^* = Cx + p_1, \quad u(y) = \frac{C}{2\mu}(y^2 - hy),$$

che forniscono la pressione

$$p(x, y) = Cx + p_1 + \frac{\gamma}{16} \frac{C^2}{\mu^2} (4y^2 - 4hy + h^2).$$

Osserviamo quindi che il profilo della velocità non cambia rispetto al caso newtoniano, ma viene modificata la pressione.

Determiniamo che forma assume il tensore degli sforzi di Cauchy ricordando che le sue componenti per un fluido di Reiner-Rivlin a coefficienti costanti sono date da

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + \gamma D_{ik} D_{kj}.$$

Per quanto riguarda il tensore velocità di deformazione abbiamo

$$\begin{aligned} D_{12} = D_{21} &= \frac{du}{dy} = \frac{C}{4\mu}(2y - h) \\ D_{11}^2 = D_{22}^2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \frac{C^2}{16\mu^2}(2y - h)^2, \end{aligned}$$

che fornisce

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} -Cx - p_1 & Cy - \frac{C}{2}h & 0 \\ Cy - \frac{C}{2}h & -Cx - p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -Cx - p_1 + \gamma \frac{C^2}{16\mu^2}(2y - h)^2 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che T_{33} è l'unica componente diversa dal caso newtoniano. Il fatto che $T_{11} = T_{22} \neq T_{33}$ è in contrasto con le osservazioni sperimentali ed è uno dei motivi per cui i liquidi altamente viscosi non vengono rappresentati con questo modello, ma piuttosto si preferisce sfruttare i fluidi di tipo differenziale. \diamond

Esercizio 5.2 (Moto piano di Poiseuille per un fluido di Rivlin-Ericksen di grado 2). Esaminiamo il problema introdotto nell'esercizio 5.1 per un fluido di Rivlin-Ericksen di grado 2. Cerchiamo cioè le soluzioni *stazionarie* del problema di Poiseuille tra le rette fisse $y = 0$ e $y = h$ in assenza di forze esterne di massa. Determinare inoltre che forma assume il tensore degli sforzi di Cauchy.

Svolgimento. Le equazioni (5.11) nel caso stazionario in assenza di forze esterne diventano

$$\begin{cases} \rho_0(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} = -\text{grad } p + \alpha_0 \Delta \mathbf{v} + \alpha_1 \text{grad}(\Delta \mathbf{v})\mathbf{v} + \alpha_1 \text{div}((\text{grad } \mathbf{v})^\top (\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^\top)) \\ \text{div } \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Il moto piano di Poiseuille è descritto da $\mathbf{v}(x, y) = u(x, y)\mathbf{e}_1$ e $p = p(x, y, z)$. La condizione di incomprimibilità ci fornisce $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e dunque $u = u(y)$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{v} &= \frac{d^2 u}{dy^2} \mathbf{e}_1 \\ \text{grad}(\Delta \mathbf{v})\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \text{div}((\text{grad } \mathbf{v})^\top (\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^\top)) &= \frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \end{aligned}$$

che per mettono di scrivere l'equazione del moto proiettata sugli assi nel seguente modo

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_0 \frac{d^2 u}{dy^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \alpha_1 \frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Possiamo quindi ragionare come nell'esercizio 5.1.

Dalla terza equazione abbiamo che $p = p(x, y)$. Introduciamo la pressione modificata

$$p^*(x, y) = p(x, y) - \alpha_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^2,$$

tale per cui $\frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}$. Osserviamo che dalla seconda equazione si ha $\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0$ e dunque $p^* = p^*(x)$. Quindi la prima equazione fornisce

$$\frac{dp^*}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}.$$

Dunque, sfruttando le condizioni al contorno, otteniamo

$$p^* = Cx + p_1, \quad u(y) = \frac{C}{2\alpha_0}(y^2 - hy),$$

che forniscono la pressione

$$p(x, y) = Cx + p_1 + \frac{\alpha_1 C^2}{4 \alpha_0^2} (4y^2 - 4hy + h^2).$$

Osserviamo quindi che il profilo della velocità non cambia rispetto al caso newtoniano e al caso dei fluidi di Reiner-Rivlin a coefficienti costanti. La pressione risulta simile a quella dell'esercizio precedente, ma diversa dai fluidi newtoniani.

Benché il moto sembri lo stesso di quello dei fluidi di Reiner-Rivlin a coefficienti costanti, vediamo che i due modelli si differenziano sulla forma del tensore degli sforzi di Cauchy. In questo caso le componenti di \mathbf{T} sono date da

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \alpha_0 A_{1ij} + \left[(\text{grad } \mathbf{A}_1) \mathbf{v} + \mathbf{A}_1 \text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^\top \mathbf{A}_1 \right]_{ij} - \alpha_1 A_{1ik} A_{1kj},$$

dove con A_{1ij} abbiamo indicato le componenti di \mathbf{A}_1 . Osserviamo che

$$A_{112} = A_{121} = \frac{du}{dy}$$

$$(\text{grad } \mathbf{A}_1) \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

che in particolare ci danno

$$T_{11} = -Cx - p_1 - \alpha_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 - \alpha_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

$$T_{22} = -Cx - p_1 - \alpha_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \alpha_1 \left[A_{121} \frac{du}{dy} + \frac{du}{dy} A_{112} \right] - \alpha_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

$$T_{33} = -Cx - p_1 - \alpha_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^2.$$

Dopo alcuni conti, abbiamo

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -Cx - p_1 - \alpha_1 \frac{C^2}{2\alpha_0^2} (2y - h)^2 & Cy - \frac{C}{2}h & 0 \\ Cy - \frac{C}{2}h & -Cx - p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -Cx - p_1 - \alpha_1 \frac{C^2}{4\alpha_0^2} (2y - h)^2 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che $T_{11} \neq T_{22} \neq T_{33}$.

◇

Esercizio 5.3 (Moto piano di Poiseuille per un fluido micropolare). Esaminiamo il problema studiato nel paragrafo 4.4.1 per un fluido di micropolare viscoso lineare incomprimibile e omogeneo. Questa volta però, per semplicità di conti, supponiamo che si muova nel piano compreso tra le rette $y = -h$ e $y = h$. Cercare le soluzioni *stazionarie* di questo problema. Assumiamo di essere in assenza di forze esterne e di coppie esterne di massa ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{m} = \mathbf{0}$) e che $\mathbf{v} = u(x, y)\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{w} = w(y)\mathbf{e}_3$ (moto di scorrimento semplice). Supponiamo che le pareti siano entrambe ferme, ovvero (per le condizioni di aderenza) $u(x, -h) = u(x, h) = 0$ e $w(-h) = w(h) = 0$, e che $p(0, y, 0) = p_1$ e $p(L, y, 0) = p_2$.

Determinare il campo di velocità, di microrotazione e di pressione.

Svolgimento. Nel caso stazionario in assenza di forze esterne di massa le equazioni (5.20) diventano

$$\begin{cases} \rho_0(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} = -\text{grad } p + (\mu + \mu_r)\Delta\mathbf{v} + 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w} \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ \rho_0 l(\text{grad } \mathbf{w})\mathbf{v} = (c_0 + c_d - c_a)\text{grad}(\text{div } \mathbf{w}) + (c_d + c_a)\Delta\mathbf{w} + 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{v} - 2\mathbf{w}) \\ \frac{d\mathbf{l}}{dt} = 0. \end{cases} \quad (5.28)$$

La condizione di incomprimibilità ci fornisce $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e dunque $u = u(y)$. Osserviamo che $\text{rot } \mathbf{v} = -\frac{du}{dy}\mathbf{e}_3$ e quindi, visto la forma dell'equazione per il momento angolare, è ragionevole supporre che \mathbf{w} sia diretta solo lungo \mathbf{e}_3 .

Le equazioni (5.28) proiettate sugli assi forniscono

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + \mu_r)\frac{d^2 u}{dy^2} + 2\mu_r \frac{dw}{dy} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \\ 0 = (c_d + c_a)\frac{d^2 w}{dy^2} - 2\mu_r \left(\frac{du}{dy} + 2w \right). \end{cases} \quad (5.29)$$

Ragionando analogamente al caso newtoniano otteniamo

$$p(x) = Cx + p_1, \quad C = \frac{p_2 - p_1}{L},$$

che nella prima equazione fornisce

$$(\mu + \mu_r)\frac{d^2 u}{dy^2} + 2\mu_r \frac{dw}{dy} = C.$$

Questa identità può essere facilmente integrata

$$(\mu + \mu_r)\frac{du}{dy} + 2\mu_r w = Cy + c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = \frac{Cy + c_1 - 2\mu_r w}{\mu + \mu_r},$$

in modo da ottenere un'equazione differenziale solo per w dalla quarta equazione di (5.29):

$$(c_d + c_a)\frac{d^2 w}{dy^2} - 2\frac{\mu_r}{\mu + \mu_r}(2\mu_r w + Cy + c_1)w = 0.$$

Poniamo ora

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\mu_r}{\mu + \mu_r}}, \quad \ell \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{c_a + c_d}{4\mu}},$$

dove N è un numero puro, mentre ℓ ha le dimensioni fisiche di una lunghezza. In particolare $N \in [0, 1[$ ci dà informazioni su quanto il fluido è micropolare (per $N = 0$ otteniamo il caso newtoniano), mentre ℓ è tanto più grande quanto sono grandi le particelle sospese nel fluido. L'equazione precedente si riscrive quindi come

$$\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{N^2}{\ell^2} w - \frac{N^2}{2\mu\ell^2} Cy - \frac{N^2}{2\mu\ell^2} c_1 = 0,$$

la cui soluzione, dopo alcuni conti, può essere scritta come

$$w = c_2 \cosh\left(\frac{N}{\ell}y\right) + c_3 \sinh\left(\frac{N}{\ell}y\right) - \frac{1}{2\mu}(Cy + c_1).$$

Se sostituiamo ora w nell'equazione del moto integrata abbiamo

$$\frac{du}{dy} = \frac{C}{\mu}y + \frac{c_1}{\mu} - 2N^2 c_2 \cosh\left(\frac{N}{\ell}y\right) - 2N^2 c_3 \sinh\left(\frac{N}{\ell}y\right),$$

che fornisce

$$u = \frac{C}{2\mu}y^2 + \frac{c_1}{\mu}y - 2N\ell c_2 \sinh\left(\frac{N}{\ell}y\right) - 2N\ell c_3 \cosh\left(\frac{N}{\ell}y\right) + c_4. \quad (5.30)$$

Le costanti c_1, c_2, c_3, c_4 vanno determinate attraverso le condizioni al contorno e precisamente, ponendo

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h}{\ell},$$

abbiamo

$$w(-h) : c_2 \cosh(NL) - c_3 \sinh(NL) + \frac{C}{2\mu}h - \frac{c_1}{2\mu} = 0$$

$$w(h) : c_2 \cosh(NL) + c_3 \sinh(NL) - \frac{C}{2\mu}h - \frac{c_1}{2\mu} = 0$$

$$u(-h) : \frac{C}{2\mu}h^2 - \frac{c_1}{\mu}h + 2N\ell c_2 \sinh(NL) - 2N\ell c_3 \cosh(NL) + c_4 = 0$$

$$u(h) : \frac{C}{2\mu}h^2 + \frac{c_1}{\mu}h - 2N\ell c_2 \sinh(NL) - 2N\ell c_3 \cosh(NL) + c_4 = 0.$$

Dopo alcuni conti otteniamo

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{C}{2\mu} \frac{h}{\sinh(NL)}, \quad c_4 = -\frac{C}{2\mu}h^2 + N\ell \frac{C}{\mu}h \frac{\cosh(NL)}{\sinh(NL)}.$$

Dunque il moto di Poiseuille per un fluido micropolare viscoso lineare è dato da

$$w(y) = \frac{C}{2\mu}h \left[\frac{\sinh\left(NL\frac{y}{h}\right)}{\sinh(NL)} - \frac{y}{h} \right],$$

$$u(y) = \frac{C}{2\mu}h^2 \left[\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1 + 2\frac{N}{L} \frac{\cosh(NL) - \cosh\left(NL\frac{y}{h}\right)}{\sinh(NL)} \right].$$

Osserviamo che se $N = 0$ otteniamo la velocità newtoniana.

Il grafico di u e w per alcuni valori dei parametri è fornito nelle Figure 5.8 e 5.9. \diamond

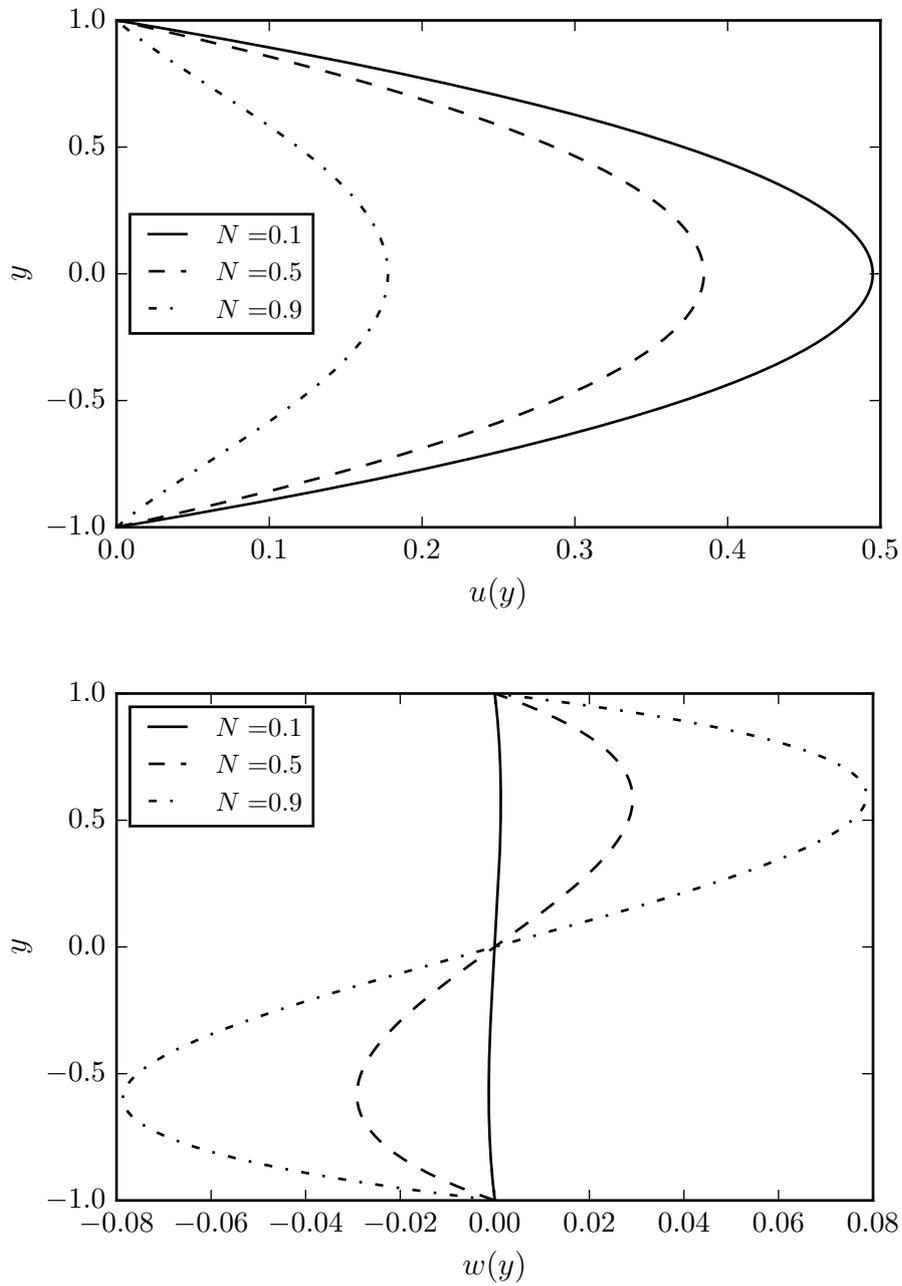


Figura 5.8: Il profilo della velocità e della microrotazione per alcuni valori di N , con $C = -1 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$, $h = 1 \text{ m}$, $\mu = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\mu_r = 0.3 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\ell = 0.5 \text{ m}$.

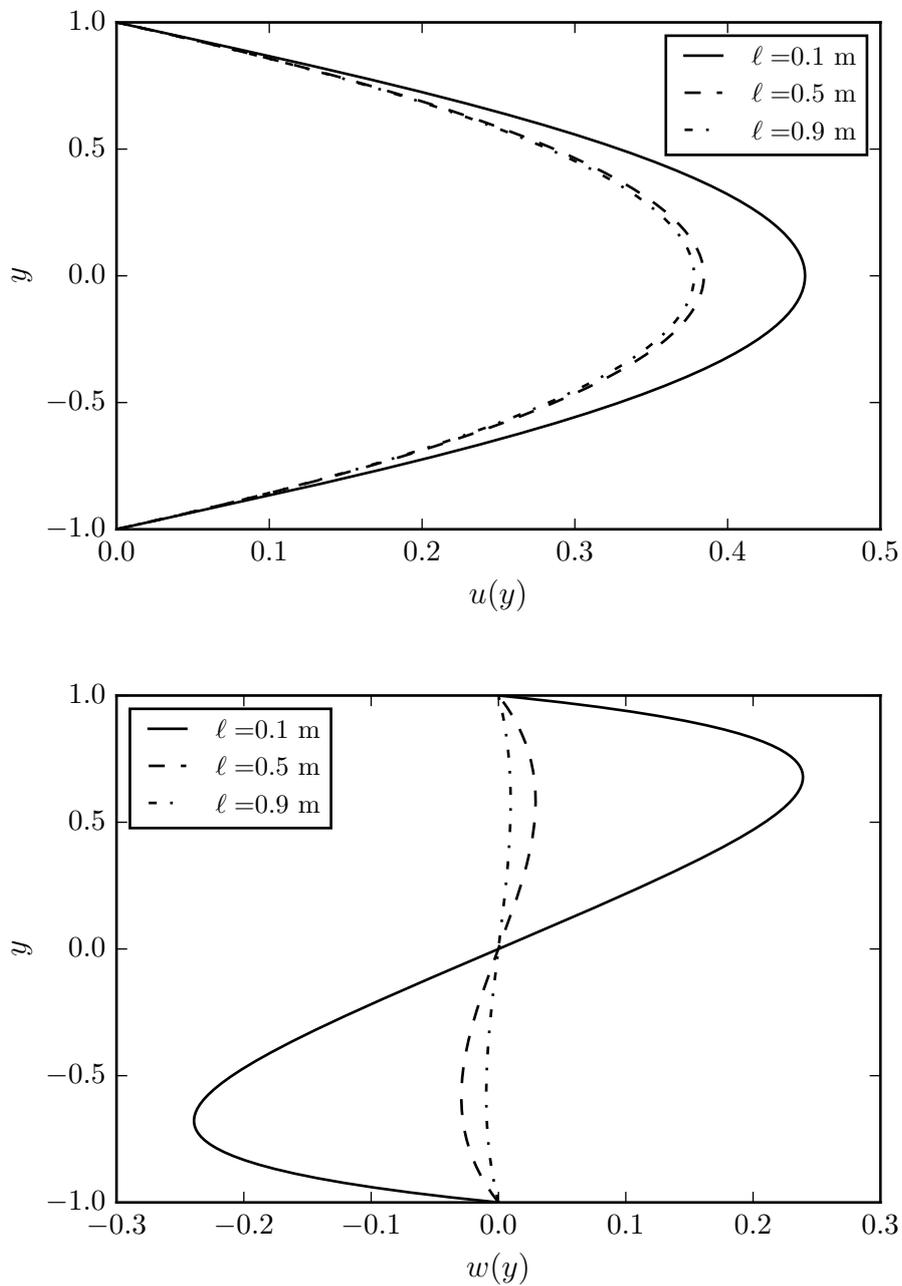


Figura 5.9: Il profilo della velocità e della microrotazione per alcuni valori di ℓ , con $C = -1$ $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$, $h = 1$ m, $\mu = 1$ $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$, $\mu_r = 0.3$ $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$, $N = 0.5$.

Capitolo 6

Stabilità e turbolenza nei fluidi newtoniani incomprimibili

A tutt'oggi non esiste una teoria soddisfacente, dal punto di vista matematico, del problema ai valori iniziali per il sistema di equazioni di Navier-Stokes in tre dimensioni per un fluido incomprimibile. In particolare, è noto che è possibile definire vari tipi di soluzioni, più o meno regolari, ma anche che se si richiede troppa regolarità, restringendo la classe di soluzioni ammissibili, si può dimostrare l'unicità ma non si riesce a dimostrare l'esistenza, mentre se si richiede poca regolarità, allargando quindi la classe di soluzioni ammissibili, si riesce a dimostrare l'esistenza ma non l'unicità. Sino ad oggi nessuno è riuscito a formulare una definizione adeguata di soluzione dimostrandone l'esistenza e l'unicità nella stessa classe di funzioni. In due dimensioni, invece, ciò è possibile, probabilmente grazie al fatto che la vorticità in due dimensioni ha direzione costante.

D'altro canto, anche se in linea di principio le difficoltà di cui sopra potrebbero essere ascrivibili al modello, non è ragionevole rinunciare a una teoria che prescindendo dalla buona formulazione del problema matematico. In questo senso si possono seguire due strade fondamentali: ragionare *a priori* sulle proprietà delle soluzioni, senza pretendere la certezza che esistano, o approssimare il problema risolvendo esattamente un problema più semplice, però rinunciando alla certezza che le soluzioni trovate approssimino qualcosa. Entrambe le strade si sono rivelate fruttuose e hanno portato ad una migliore comprensione della meccanica dei fluidi.

6.1 L'esperimento di Reynolds

Quando si possiede la soluzione esatta ad un problema fisico, non è assolutamente detto che essa possa essere utile a qualcosa. Perché? Perché la modellizzazione e la schematizzazione matematica comportano necessariamente delle ipotesi semplificatrici, a vari livelli, che non saranno mai vere in laboratorio o nella realtà. Se quindi la soluzione trovata dipende in maniera essenziale da queste ipotesi, potrebbe essere assolutamente non osservabile. Per esempio, abbiamo già incontrato in (4.17) la soluzione di Poiseuille per il moto stazionario in un tubo cilindrico di raggio R soggetto a un gradiente di pressione C costante, in coordinate cilindriche:

$$\mathbf{v}(r) = -\frac{C}{4\mu}(R^2 - r^2)\mathbf{e}_1.$$

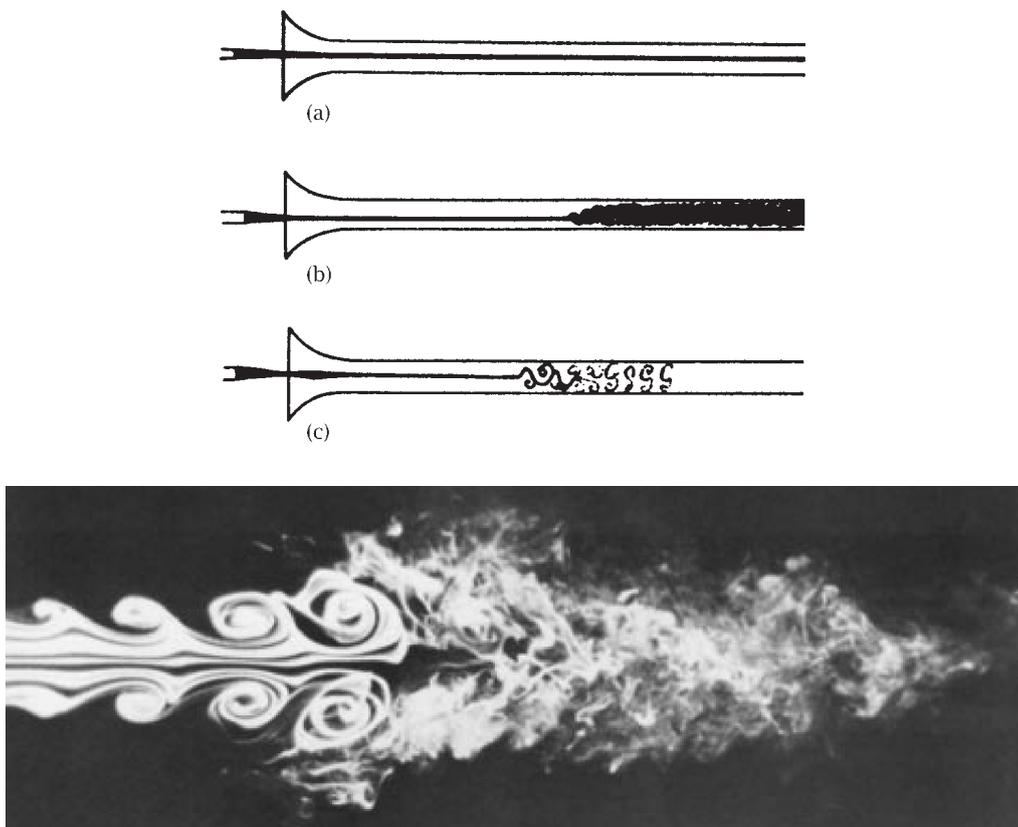


Figura 6.1: Sopra: i risultati qualitativi dell'esperimento di O. Reynolds, come riportati nel suo lavoro originale (1883). Sotto: una nota immagine rappresentativa dell'instabilità del moto nelle volute di fumo, presa dal libro *An album of fluid motion* di M. Van Dyke (1982), pag. 60.

Ebbene, se la viscosità è alta e il gradiente di pressione basso tale soluzione si osserva, ma se la viscosità è bassa o il gradiente di pressione è alto no. In pratica, tale soluzione si osserva solo per bassi numeri di Reynolds. Eppure la soluzione esiste per ogni valore di C e μ . Quello che capita è che in laboratorio la sezione del tubo non sarà mai esattamente circolare, o il tubo rettilineo, o il moto stazionario, o il gradiente di pressione costante, per cui la soluzione *vera* sarà differente. Se quindi il moto di Poiseuille è *instabile*, si osserverà al suo posto una soluzione radicalmente diversa. Ciò non ha nulla a che fare con l'unicità della soluzione, che può esserci comunque; una soluzione esatta, per essere osservabile, deve anche “cambiare di poco” quando “cambiano di poco” le condizioni iniziali o al contorno.

In un famoso esperimento del 1883, Osborne Reynolds (che già abbiamo conosciuto) studiò qualitativamente l'instabilità del moto laminare e l'insorgere della turbolenza facendo passare una piccola quantità d'inchiostro in un tubo in cui scorreva acqua. Per velocità basse l'inchiostro formava una riga quasi perfettamente dritta lungo l'asse del tubo, mentre all'aumentare della velocità prima si formavano delle oscillazioni e poi addirittura l'inchiostro cominciava a mescolarsi con l'acqua, colorandola tutta.

6.2 Stabilità

Quindi vogliamo introdurre una nozione di *stabilità* di una soluzione. I concetti che introdurremo non differiscono da quelli introdotti nella Meccanica dei sistemi a un numero finito di particelle. Vi è però una differenza di fondo: mentre in dimensione finita (come accade nella Meccanica delle particelle) vi è un unico concetto di intorno (infatti tutte le norme sono equivalenti), nella Meccanica dei fluidi il concetto di “soluzione vicina ad un’altra” può dipendere dalla norma scelta, e questa scelta è suggerita dal modello. Per questo enunciamo la definizione di stabilità senza riferimento a una precisa norma. Per semplicità, ci limitiamo anche al caso di un moto stazionario.

Definizione 6.1. Un moto stazionario \mathbf{v} di un fluido si dirà *stabile (rispetto alle condizioni iniziali)* se per ogni intorno V di \mathbf{v} esiste un intorno U di \mathbf{v} tale che per ogni condizione iniziale \mathbf{u}_0 in U si abbia per ogni $t \geq 0$ che la corrispondente soluzione $\mathbf{u}(t)$ appartenga a V .

Questa definizione è identica a quella della Meccanica delle particelle, con la differenza che nel nostro caso il moto \mathbf{v} è una funzione delle coordinate spaziali \mathbf{x} , e quindi appartiene a spazi di dimensione infinita. Naturalmente esiste la possibilità di studiare la stabilità rispetto ad altri dati assegnati, come il dominio, ma ci limiteremo rispetto a quella data sopra. Enunciamo anche la definizione di stabilità asintotica.

Definizione 6.2. Si dice che un moto stazionario \mathbf{v} di un fluido *attrae* un moto $\mathbf{u}(t)$, se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}.$$

Un moto stazionario \mathbf{v} si dirà *asintoticamente stabile* rispetto alle condizioni iniziali, se è stabile rispetto alle condizioni iniziali e se esiste un intorno U di \mathbf{v} tale che \mathbf{v} attragga ogni moto $\mathbf{u}(t)$ con condizione iniziale $\mathbf{u}_0 \in U$.

Quali metodi si possono applicare per studiare la stabilità di una soluzione stazionaria e incomprimibile delle equazioni di Navier-Stokes? E con quale norma? La prima idea è semplice: introdurre la *perturbazione*

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (6.1)$$

e studiarne il comportamento. La perturbazione è comoda perché, essendo \mathbf{v} stazionaria, le sue condizioni iniziali restano costanti, col che

$$\mathbf{w}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

e dunque \mathbf{u}_0 apparterrà a un intorno di \mathbf{v} se e solo se \mathbf{w}_0 apparterrà a un intorno di zero.

Poi, siccome sia \mathbf{v} che \mathbf{u} rappresentano soluzioni del problema, e inoltre \mathbf{v} è stazionaria, si deve avere

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Le funzioni \mathbf{v} e \mathbf{u} devono poi soddisfare l’equazione di Navier-Stokes, che scriviamo nella forma adimensionale e in assenza di forze esterne

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v} &= -\operatorname{grad} P + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})\mathbf{u} &= -\operatorname{grad} p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \end{aligned}$$

dove ovviamente P è la pressione per il moto \mathbf{v} (divisa per ρ_0), p quella per il moto \mathbf{u} e Re il numero di Reynolds. Si supponrà che il moto avvenga in un dominio limitato $\Omega(t)$ con le solite condizioni di aderenza alle pareti. Sottraendo la prima equazione dalla seconda, otteniamo

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{u})\mathbf{u} - (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} = -\text{grad } \pi + \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{w}$$

dove abbiamo posto $\pi = p - P$. Ora, siccome $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, abbiamo

$$(\text{grad } \mathbf{u})\mathbf{u} - (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} = (\text{grad } \mathbf{w})\mathbf{w} + (\text{grad } \mathbf{w})\mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

e quindi in definitiva si trova per \mathbf{w} l'equazione

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{w})\mathbf{w} + (\text{grad } \mathbf{w})\mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{w} = -\text{grad } \pi + \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{w}. \quad (6.2)$$

Infine, siccome \mathbf{v} e \mathbf{u} sono soluzioni dello stesso problema (con condizioni iniziali diverse ma con le stesse condizioni al contorno), sul bordo $\partial\Omega$ del dominio nel quale avviene il moto assumeranno gli stessi valori, dunque avremo l'ulteriore condizione

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (6.3)$$

6.2.1 Stabilità in norma dell'energia

Per studiare la stabilità, c'è una norma "naturale" che si presenta, ossia l'energia cinetica totale del moto (divisa per la densità)

$$\|\mathbf{w}(t)\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} K(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)|^2 dx$$

che coincide con la norma nello spazio L^2 della soluzione (nelle variabili spaziali).

Per trovare un'equazione per l'energia cinetica, moltiplichiamo scalarmente per \mathbf{w} l'equazione (6.2) e integriamo su Ω , osservando che

$$K'(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \cdot \mathbf{w} dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \mathbf{w} + (\text{grad } \mathbf{w})\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \right) dx$$

dal Teorema del trasporto e l'incomprimibilità.⁽¹⁾ Dalla condizione $\text{div } \mathbf{w} = 0$ si ha poi

$$(\text{grad } \mathbf{w})\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot (\text{grad } \mathbf{w})'\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \text{grad}(w^2) = \frac{1}{2} \text{div}(w^2 \mathbf{w}),$$

e integrando su Ω , dal teorema della divergenza e la condizione (6.3) troviamo

$$\int_{\Omega} (\text{grad } \mathbf{w})\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} w^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Infine abbiamo, in maniera analoga,

$$\int_{\Omega} \text{grad } \pi \cdot \mathbf{w} dx = \int_{\Omega} \text{div}(\pi \mathbf{w}) dx - \int_{\Omega} \pi \text{div } \mathbf{w} dx = \int_{\partial\Omega} \pi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

⁽¹⁾In realtà si può dimostrare che

$$\int_{\Omega} (\text{grad } \mathbf{w})\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} dx = 0,$$

anche se non ci serve.

e, usando la (A.16),

$$\int_{\Omega} \Delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \, dx = \int_{\Omega} [\operatorname{div}((\operatorname{grad} \mathbf{w})' \mathbf{w}) - |\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2] \, dx = \int_{\Omega} -|\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2 \, dx$$

Dopo tutti questi passaggi, dalla (6.2) otteniamo

$$K'(\mathbf{w}) = - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{w} \, dx - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2 \, dx. \quad (6.4)$$

Questa equazione è particolarmente suggestiva anche in sé: infatti mostra che la variazione nel tempo dell'energia cinetica della perturbazione del moto “base” \mathbf{v} è pari alla somma di un termine sempre negativo, dovuto alla viscosità e di un termine a segno non definito, legato anche al moto base \mathbf{v} .

D'ora in poi supponiamo Ω limitato e poniamo

$$F_{\mathbf{v}}[\mathbf{w}] := - \frac{\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{w} \, dx}{\int_{\Omega} |\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2 \, dx}.$$

Una volta fissato il moto base \mathbf{v} , $F_{\mathbf{v}}$ è un funzionale limitato. Infatti, siccome il dominio è limitato e \mathbf{w} è nulla al bordo, vale la cosiddetta *disuguaglianza di Poincaré*.⁽²⁾

$$\int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 \, dx \leq C_{\Omega} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2 \, dx \quad (6.5)$$

dove C_{Ω} è una costante positiva che dipende solo dalla misura di Ω . Quindi si ha

$$|F_{\mathbf{v}}[\mathbf{w}]| \leq \|\operatorname{grad} \mathbf{v}\|_{\infty} \frac{\int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 \, dx}{\int_{\Omega} |\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2 \, dx} \leq C_{\Omega} \|\operatorname{grad} \mathbf{v}\|_{\infty}.$$

Possiamo porre allora

$$\frac{1}{Re^*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{w}} F_{\mathbf{v}}[\mathbf{w}] \leq C_{\Omega} \|\operatorname{grad} \mathbf{v}\|_{\infty} \quad (6.6)$$

e riscrivere la (6.4) così:

$$K'(\mathbf{w}) = \left(F_{\mathbf{v}}[\mathbf{w}] - \frac{1}{Re} \right) \int_{\Omega} |\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2 \, dx$$

e dunque

$$K'(\mathbf{w}) \leq - \left(\frac{1}{Re} - \frac{1}{Re^*} \right) \int_{\Omega} |\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2 \, dx. \quad (6.7)$$

Da questa equazione si vede che se $Re < Re^*$, allora l'energia cinetica della perturbazione decresce nel tempo. Ma c'è di più: utilizzando di nuovo la disuguaglianza di Poincaré, se $Re < Re^*$ si ottiene

$$K'(\mathbf{w})(t) \leq - \frac{2}{C_{\Omega}} \left(\frac{1}{Re} - \frac{1}{Re^*} \right) K(\mathbf{w})(t)$$

⁽²⁾Jules Henri POINCARÉ (Nancy, 29 aprile 1854 – Parigi, 17 luglio 1912) è stato matematico, fisico e filosofo. Considerato tra i più grandi pensatori del XIX secolo, viene anche ritenuto l'ultima persona che fu in grado di dominare tutti i campi della matematica nota nel suo tempo.

da cui segue subito, integrando,

$$K(\mathbf{w})(t) \leq K(\mathbf{w})(0) \exp\left(-\frac{2}{C_\Omega} \left(\frac{1}{Re} - \frac{1}{Re^*}\right) t\right).$$

Da qui si vede subito la stabilità asintotica rispetto alla norma dell'energia. Infatti, se $K(\mathbf{w})(0) < \delta$, si avrà $K(\mathbf{w})(t) < \delta$ per ogni $t \geq 0$. Inoltre, se $t \rightarrow +\infty$, è evidente che $K(\mathbf{w})(t) \rightarrow 0$.

La determinazione del valore critico Re^* dipende dalla soluzione del problema di massimo (6.6) e in particolare è legata alla costante ottimale della disuguaglianza di Poincaré e al tipo di soluzione \mathbf{v} che si sta studiando, ma non è un problema molto difficile. Poiché esso comunque coinvolge la soluzione di problemi legati a equazioni differenziali, non ci addentreremo in questo argomento. Sottolineiamo inoltre il fatto che la condizione $Re < Re^*$ è sufficiente per avere la stabilità, ma non è necessaria: sperimentalmente si osserva spesso un regime di stabilità anche per numeri di Reynolds maggiori di Re^* ; se siamo quindi interessati a trovare valori critici che caratterizzino l'instabilità del moto, si possono introdurre altri metodi di analisi, che qui non vediamo.

6.3 Turbolenza

Abbiamo osservato che i moti laminari risultano instabili per numeri di Reynolds sufficientemente alti. Vi sono anche esempi di regimi in cui una nuova soluzione stazionaria diventa stabile ed osservabile quando il moto laminare non lo è più (ad esempio i vortici di Taylor). Tuttavia al crescere di Re il moto del fluido diventa inesorabilmente caotico, caratterizzato da grandi fluttuazioni del campo di velocità, ma soprattutto della vorticità, su piccoli intervalli spazio-temporali: si instaura il *regime turbolento*.

Sottolineiamo che la turbolenza non è una proprietà del fluido, ma del flusso, cioè del tipo di moto, in quanto il parametro che la caratterizza è il numero di Reynolds, che, come sappiamo, combina la viscosità cinematica (caratterizzante il fluido) con una lunghezza ed una velocità che dipendono dalla geometria del moto; è quindi possibile progettare moti con un dato numero di Reynolds per qualunque fluido newtoniano.

Un'analisi troppo dettagliata di un moto turbolento, come la ricerca di una soluzione esplicita delle equazioni di Navier-Stokes in tale regime, sarebbe un'impresa tanto sovrumana quanto inutile. Infatti risulta molto più interessante cercare di descrivere delle proprietà globali del moto, delle quantità medie che possano rendere conto, talvolta anche solo qualitativamente, dei fenomeni osservati.

L'obiettivo delle prossime sezioni è, quindi, quello di presentare i tratti salienti della turbolenza in generale e di qualche moto particolare, mediante considerazioni di tipo qualitativo o statistico e modelli naturalmente semplificati.

6.3.1 Equazione mediata di Reynolds

Anche se il modo in cui vi si giunge dipende sensibilmente dal tipo di situazione osservata, l'esito finale di ogni moto fluido al crescere di Re è la turbolenza. In una tale situazione è necessario fare alcune ipotesi ulteriori e affidarsi in parte a concetti statistico-probabilistici.

Poiché però, per quanto irregolari, i moti turbolenti sono delle soluzioni \mathbf{v} del sistema di equazioni di Navier-Stokes, tale sarà anche, sotto ragionevoli ipotesi di convergenza che non

enunciamo estesamente, la loro *media temporale*

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) d\tau.$$

Questo moto potrebbe essere, in linea di principio, tanto caotico quanto il moto di partenza \mathbf{v} . Eppure, in molte situazioni esso è più semplice, e per questo si fa l'ipotesi che esso non dipenda dall'istante t dal quale si comincia a prendere la media. In altre parole, il moto medio è supposto stazionario.

Introduciamo ora la *fluttuazione* \mathbf{w} definita da

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{U}. \quad (6.8)$$

Se introduciamo il *valore medio* di una generica quantità (scalare o vettoriale) f con la formula⁽³⁾

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

si ha che $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{U}$. Quindi troviamo che, essendo \mathbf{U} stazionario,

$$\bar{\mathbf{w}} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\mathbf{v} - \mathbf{U}) dt = \mathbf{U} - \mathbf{U} = \mathbf{0},$$

cioè che la fluttuazione ha media temporale nulla.

Il nostro scopo è ora di trovare una relazione che permetta di dire qualcosa sul moto medio \mathbf{U} . Poiché \mathbf{v} è una soluzione, si ha $\text{div } \mathbf{v} = 0$ e dunque anche $\text{div } \mathbf{U} = 0$. Quindi si dovrà avere $\text{div } \mathbf{w} = 0$. Vediamo ora cosa accade se si prende la media temporale dell'equazione di Navier-Stokes, scritta per \mathbf{v} , per un fluido newtoniano incomprimibile:

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}} + \overline{(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{b}} + \frac{1}{\rho_0} \overline{\text{div } \mathbb{T}[\mathbf{v}]}, \quad (6.9)$$

dove $\mathbb{T}[\mathbf{v}]$ è il tensore degli sforzi di Cauchy per il moto viscoso \mathbf{v} . Supponendo che le derivazioni, sia spaziali che temporali, commutino con la media temporale, avremo intanto

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad \overline{(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}} = \text{div}(\overline{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}).$$

Ora abbiamo

$$\overline{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}} = \overline{\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + \mathbf{U} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{U} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}} = \overline{\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}} + \overline{\mathbf{U} \otimes \mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{U}} + \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}$$

e ci si rende conto subito da un calcolo in componenti che

$$\overline{\mathbf{U} \otimes \mathbf{w}} = \mathbf{U} \otimes \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{0}, \quad \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{U}} = \bar{\mathbf{w}} \otimes \mathbf{U} = \mathbf{0},$$

cosicchè

$$\overline{(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}} = \text{div}(\overline{\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}} + \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}).$$

⁽³⁾Si può usare un qualsiasi operatore di media che soddisfi le proprietà

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f}, \quad \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad \overline{fg} = \bar{f}\bar{g}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}.$$

Infine abbiamo

$$\overline{\mathbb{T}[\mathbf{v}]} = \mathbb{T}[\overline{\mathbf{v}}] = \mathbb{T}[\mathbf{U}]$$

per cui la (6.9) diventa

$$(\text{grad } \mathbf{U})\mathbf{U} = \overline{\mathbf{b}} + \frac{1}{\rho_0} \text{div}(\mathbb{T}[\mathbf{U}] - \rho_0 \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}) \quad (6.10)$$

ovvero, se esplicitiamo \mathbb{T} ,

$$(\text{grad } \mathbf{U})\mathbf{U} = \overline{\mathbf{b}} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } \overline{p} + \nu \Delta \mathbf{U} - \text{div } \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}},$$

dove \overline{p} è la media temporale del campo di pressione. Il termine $\mathbf{S} = -\rho_0 \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}$ si dice *tensore degli sforzi di Reynolds* e contribuisce a modificare il tensore di Cauchy.

Osservazione 1. Per giungere alla (6.10) si possono anche usare altri operatori di media $\overline{\cdot}$; le uniche proprietà richieste sono:

- $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$;
- $\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$;
- $\overline{fg} = \overline{f} \overline{g}$;
- $\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial t}$, $\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}$.

L'equazione (6.10) è nota come *equazione della quantità di moto di Reynolds*. Essa mostra che le fluttuazioni \mathbf{w} contribuiscono al bilancio della quantità di moto nel moto base, interagendo con esso. Naturalmente le fluttuazioni non sono note, per cui l'equazione (6.10) contiene di fatto più incognite dell'equazione originale per \mathbf{v} , ma in essa si vede che potrebbe essere possibile *modellizzare* i contributi provenienti dallo sforzo di Reynolds in termini del moto base \mathbf{U} , chiudendo così il problema, almeno per il moto medio. Per certi versi, è un po' come se nel fluido circolasse un altro fluido, la fluttuazione, che scambia quantità di moto con il moto base. Si può inoltre vedere che la parte turbolenta del moto ha caratteristiche dissipative, ossia che sottrae energia cinetica al moto base. Ciò ha da sempre motivato gli studi sull'insorgere della turbolenza, in quanto per questo motivo la portata netta di un moto turbolento risulta inferiore a quella di un moto laminare.

6.3.2 Viscosità cinematica turbolenta

Tenendo conto del tensore degli sforzi di Reynolds $\mathbf{S} = -\rho_0 \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}$, il tensore degli sforzi di Cauchy \mathbb{T} per la legge costitutiva di Cauchy-Poisson per i fluidi newtoniani diventa

$$\mathbb{T} = -\overline{p} \mathbf{1} + 2\mu \overline{\mathbf{D}} + \mathbf{S},$$

dove $\overline{\mathbf{D}}$ è il tensore velocità di deformazione medio associato al moto medio, ossia la parte simmetrica del gradiente della velocità media. L'ipotesi più semplice è quella di assumere che \mathbf{S} dipenda in modo affine da $\overline{\mathbf{D}}$, ovvero

$$\mathbf{S}(\overline{\mathbf{D}}) = \mathbb{M} \overline{\mathbf{D}} + c \mathbf{1},$$

dove \mathbb{M} è un tensore del quarto ordine e c è un coefficiente legato all'energia cinetica turbolenta.

Poiché \mathbb{S} e $\bar{\mathbb{D}}$ sono simmetrici, e dunque sono individuati da 6 elementi, il tensore \mathbb{M} è individuato da 36 elementi. Inoltre, nel caso di fluidi incomprimibili si ha $\text{tr } \bar{\mathbb{D}} = 0$ che riduce a 5 le componenti libere di $\bar{\mathbb{D}}$, quindi \mathbb{M} è descritto da 30 parametri.

Una riduzione drastica è rappresentata dall'*ipotesi di Boussinesq*⁽⁴⁾, che suppone l'isotropia del tensore \mathbb{M} . In questo caso, siccome $\text{tr } \bar{\mathbb{D}} = 0$, \mathbb{M} diventa semplicemente uno scalare, ovvero esiste un parametro $\nu_t > 0$, detto *viscosità cinematica turbolenta*, tale che

$$\mathbb{S} = 2\rho_0\nu_t\bar{\mathbb{D}} + c\mathbb{I}.$$

Tale parametro verrà assunto positivo, per tener conto dell'effetto dissipativo della turbolenza. Inoltre, poiché ν_t dipende dal moto e non dal fluido, non può essere considerato costante, ma funzione della posizione (ed eventualmente del tempo). Comunque, in questo caso si può esprimere il coefficiente c facendo la traccia di \mathbb{S} :

$$3c = \text{tr } \mathbb{S} = -\rho_0|\bar{\mathbf{w}}|^2 = -2\bar{k},$$

dove con \bar{k} si è denotata la densità di energia cinetica della fluttuazione. Quindi si ha

$$\mathbb{S} = 2\rho_0\nu_t\bar{\mathbb{D}} - \frac{2}{3}\bar{k}\mathbb{I}$$

e il tensore di Cauchy diventa

$$\mathbb{T} = -\left(\bar{p} + \frac{2}{3}\bar{k}\right)\mathbb{I} + 2\mu\bar{\mathbb{D}} + 2\rho_0\nu_t\bar{\mathbb{D}},$$

da cui si ottiene l'equazione del moto

$$(\text{grad } \mathbf{U})\mathbf{U} = \bar{\mathbf{b}} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} \left(\bar{p} + \frac{2}{3}\bar{k} \right) + (\nu + \nu_t)\Delta\mathbf{U} + 2\bar{\mathbb{D}} \text{grad } \nu_t. \quad (6.11)$$

In questo caso l'effetto della turbolenza può essere interpretato da un punto di vista quantitativo come dato da un termine aggiuntivo per la pressione ($2\bar{k}/3$, la *pressione turbolenta*) e un termine aggiuntivo di tipo viscosità, descritto da ν_t , che in generale non è spazialmente costante; anzi, nelle teorie di strato limite il valore di ν_t è molto alto vicino alle pareti (ma non vicinissimo!), e decade piuttosto in fretta allontanandosi da esse. Il valore di ν_t , che comunque dipende da \mathbf{U} e quindi dalla particolare situazione di moto in cui ci si trova, può essere imposto a priori da situazioni sperimentali oppure, raffinando il modello, dedotto da altre equazioni differenziali in cui viene accoppiato ad altri fenomeni. È chiaro che la situazione è molto varia e dipende dalla specificità di ogni problema.

6.3.3 Equazioni filtrate e *Large Eddy Simulations*

Nelle precedenti sezioni abbiamo visto un'analisi delle equazioni di Navier-Stokes effettuata attraverso una media temporale. Introduciamo ora un diverso modo di selezionare informazioni statisticamente rilevanti, che ci permettano di analizzare il moto senza risolvere le equazioni di Navier-Stokes.

⁽⁴⁾Joseph Valentin BOUSSINESQ (Saint-André-de-Sangonis, 13 marzo 1842 – Parigi, 19 febbraio 1929) diede importanti contributi allo studio matematico della fluidodinamica. La sua principale attività fu però la didattica universitaria, prima a Lille e poi a Parigi, per la quale scrisse numerose opere.

L'idea è quella di definire un nuovo campo, detto *velocità filtrata*, il cui valore in un punto è ottenuto come media del campo di velocità reale in un opportuno intorno. Sia l'intorno in questione, sia il peso con cui la velocità in ogni punto dell'intorno contribuisce alla media, sono determinati da una funzione $G_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ detta *filtro*.

Dal punto di vista matematico esso è un nucleo di convoluzione normalizzato, cioè

$$\int G_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1,$$

e la velocità filtrata \mathbf{v}^f risulta

$$\mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t) = \int G_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad (6.12)$$

ossia la convoluzione tra la velocità reale \mathbf{v} ed il filtro.

Il pedice Δ indica la dimensione tipica del supporto del filtro. Un filtro è detto *omogeneo* se non dipende da \mathbf{x} , ed *isotropo* se dipende solo dal modulo di \mathbf{y} e non dalla sua direzione. Notiamo che la derivata temporale commuta sempre con l'operazione di filtraggio, mentre le derivate spaziali commutano con essa solo in presenza di un filtro omogeneo; inoltre, diversamente da quanto accade per la media temporale, l'operazione di filtraggio non lascia invariate quantità già filtrate, cioè $[\mathbf{v}^f]^f \neq \mathbf{v}^f$, se non in casi molto particolari.

Dal punto di vista analitico, le equazioni che si ottengono filtrando il sistema di Navier-Stokes non sono particolarmente suggestive, mentre su questa procedura si basa un'importante classe di metodi numerici detti *Large Eddy Simulations*.

L'idea alla base di questa tecnica è quella di costruire un filtro che, visto nello spazio dei momenti attraverso la sua trasformata di Fourier, corrisponde a fare una media in cui contano soltanto alcuni modi normali. L'obiettivo di tale restrizione è quello di diminuire sensibilmente il numero di gradi di libertà (davvero molto alto nella stima di Landau) necessari per dare una descrizione approssimata ma utile del moto turbolento.

La scelta di quali modi normali selezionare è guidata dalla teoria di Kolmogorov: si considerano solo i modi più energetici, cioè quelli con k piccoli, nella parte iniziale del settore inerziale dello spettro. Chiaramente a k piccoli corrispondono vortici di grandi dimensioni (*large eddies*) nello spazio reale, la cui dinamica coglie le caratteristiche fondamentali del moto turbolento.

Appendice A

Elementi di calcolo tensoriale

In questo breve capitolo richiamiamo, senza pretesa di completezza, alcune formule di calcolo tensoriale che saranno utili nell'affrontare molte tematiche riguardanti la Dinamica dei Fluidi. L'ambientazione tipica sarà uno spazio euclideo di dimensione finita, che possiamo identificare con \mathbb{R}^n , dotato di una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Le applicazioni più frequenti si avranno poi per $n = 1, 2, 3$.

Adotteremo qui la *convenzione di somma di Einstein*⁽¹⁾ che consiste, se non diversamente specificato, nell'omettere il segno di sommatoria quando si hanno indici ripetuti. Tale sommatoria è sempre intesa tra 1 e n .

Ad esempio,

$$\begin{aligned} a_i b_i & \text{ sta per } \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\ T_{ij} a_j & \text{ sta per } \sum_{j=1}^n T_{ij} a_j \quad (\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T} \mathbf{a}), \\ \mathcal{A}_{ijk} T_{kj} & \text{ sta per } \sum_{j,k=1}^n \mathcal{A}_{ijk} T_{kj} \quad (\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \mathbb{T}). \end{aligned}$$

Gli indici ripetuti si dicono *muti* o *saturati* (dummy indices). Visto che sono indici di sommatorie, le espressioni sopra scritte non dipendono da essi.

Nelle precedenti formule abbiamo anche introdotto una notazione che è standard nella Meccanica, ovvero quella di denotare in corsivo gli *scalari* (tensori di ordine 0), in grassetto minuscolo i *vettori* (tensori di ordine 1) e con il maiuscolo gli *endomorfismi* (tensori di ordine 2). Per tensori di ordine superiore non introdurremo una simbologia tipica.

Occupiamoci ora di chiarire la definizione di tensore.

A.1 Tensori di ordine 2

Indichiamo con $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei tensori di ordine 2 (applicazioni lineari da \mathbb{R}^n in se stesso). Essi vengono identificati con le matrici $n \times n$ date dalla loro rappresentazione nella

⁽¹⁾ Albert EINSTEIN (Ulma, 14 marzo 1879 – Princeton, 18 aprile 1955) di cui non aggiungiamo altro.

base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Tale spazio può essere munito del prodotto scalare dato da

$$\mathbb{T} \cdot \mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} T_{ij} S_{ij}.$$

Si può vedere che la norma indotta da tale prodotto scalare è la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti (la cosiddetta *norma euclidea*).

Possiamo definire l'applicazione di un tensore a un vettore nel modo seguente:

$$(\mathbb{T}\mathbf{a})_i \stackrel{\text{def}}{=} T_{ij} a_j.$$

Denotiamo con \mathbb{I} il *tensore identico* (o *fondamentale*), ovvero il tensore tale che $\mathbb{I}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Questo tensore viene spesso indicato con il simbolo δ di Kronecker⁽²⁾, definito da

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Esso gode della cosiddetta *proprietà di scambio*, ovvero elimina l'indice ripetuto e lo sostituisce con quello libero. Esempio:

$$\delta_{ij} v_j = v_i, \quad \delta_{ik} T_{ik} = T_{ii} = T_{kk}, \quad \delta_{ik} T_{ih} = T_{kh}.$$

Mediante \mathbb{I} (o δ) è possibile riscrivere il *prodotto scalare* tra due vettori:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} a_i b_i = \delta_{ij} a_i b_j.$$

Allo stesso modo si può riscrivere l'applicazione di un tensore a un vettore:

$$(\mathbb{T}\mathbf{a})_i \stackrel{\text{def}}{=} T_{ij} a_j = \delta_{jk} T_{ij} a_k$$

e l'applicazione di un tensore di ordine 3 a un tensore di ordine 2:

$$(\mathcal{A}\mathbb{T})_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{ijk} T_{kj} = \delta_{jm} \delta_{kl} \mathcal{A}_{ijk} T_{lm}.$$

Dati due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ si può definire un elemento di $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ ponendo

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} \tag{A.1}$$

(*prodotto diadico*). In componenti, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$. In particolare, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$.

È facile vedere che $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}_{i,j=1,\dots,n}$ è una base ortonormale per $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ e vale

$$T_{ij} = \mathbb{T} \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), \quad \mathbb{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Inoltre si ha $\|\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}\| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$.

Analogamente, si può definire il prodotto diadico di un tensore con un vettore, ponendo

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \quad (\mathbb{T} \otimes \mathbf{a})\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbb{T}, \tag{A.2}$$

⁽²⁾Leopold KRONECKER (Liegnitz, 7 dicembre 1823 – Berlino, 29 dicembre 1891) matematico e logico, è famoso per la sua convinzione che l'analisi potesse essere interamente fondata sui numeri interi, convinzione che viene bene rappresentata dal suo noto aforisma: "Dio fece i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo".

che in componenti dà $(\mathbb{T} \otimes \mathbf{a})_{ijk} = T_{ij}a_k$. Si ha dunque $\mathbb{T} \otimes \mathbf{a} \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n; \text{End}(\mathbb{R}^n))$ ed è un *tensore di ordine 3*. Naturalmente nessuno vieta di procedere in modo simile per tensori di ordine superiore, ma in questo corso sarà sufficiente fermarci a questo livello.

Si provi per esercizio che $\mathbb{T}\mathbf{a} = (\mathbb{T} \otimes \mathbf{a})\delta$.

Un tensore del terz'ordine particolarmente interessante è il tensore ε di Ricci-Curbastro⁽³⁾ quest'ultimo definito nel caso $n = 3$. Il tensore ε è un tensore di ordine 3 (quindi una matrice cubica $3 \times 3 \times 3$) di componenti

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (ijk) \text{ è una permutazione di ordine pari di } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{se } (ijk) \text{ è una permutazione di ordine dispari di } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{se almeno un indice è ripetuto.} \end{cases}$$

Tale tensore è legato al tensore identico tramite l'*identità* $\varepsilon - \delta$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}. \quad (\text{A.3})$$

Mediante ε , inoltre, si scrive in modo sintetico il *prodotto vettoriale*:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{ijk}a_jb_k.$$

Vediamo ora altre operazioni sui tensori:

- si definisce *prodotto* (o *composizione*) di \mathbb{T} e \mathbb{U} il tensore $\mathbb{T}\mathbb{U}$ dato da

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : (\mathbb{T}\mathbb{U})\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}(\mathbb{U}\mathbf{a}).$$

In componenti si ha $(\mathbb{T}\mathbb{U})_{ij} = T_{ik}U_{kj}$, ovvero l'usuale prodotto di matrici.

- Si dice *aggiunto* di un tensore \mathbb{T} il tensore \mathbb{T}^\top tale che

$$\mathbf{a} \cdot \mathbb{T}^\top \mathbf{b} = \mathbb{T} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

per ogni \mathbf{a}, \mathbf{b} . Si dimostra che tale tensore esiste ed è unico e in componenti (rispetto alla nostra base ortonormale) vale $\mathbb{T}^\top_{ij} = T_{ji}$. In particolare si ha

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^\top = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}.$$

- La *traccia* è la funzione lineare $\text{tr} : \text{End}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\text{tr}(\mathbb{T}) = \mathbb{T} \cdot \mathbf{1} = T_{ij}\delta_{ij}, \quad (\text{A.4})$$

ovvero $\text{tr}(\mathbb{T}) = T_{ii}$; in particolare $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Notiamo poi che la traccia corrisponde alla somma degli autovalori di una matrice, ovvero è il cosiddetto *invariante lineare*. Si può verificare inoltre che

$$\text{tr}(\mathbb{T}\mathbb{U}) = \text{tr}(\mathbb{U}\mathbb{T}), \quad \text{tr}(\mathbb{T}^\top) = \text{tr}(\mathbb{T}), \quad \mathbb{T} \cdot \mathbb{U} = \text{tr}(\mathbb{T}^\top \mathbb{U}) = \text{tr}(\mathbb{T}\mathbb{U}^\top).$$

⁽³⁾Gregorio RICCI-CURBASTRO (Lugo, 12 gennaio 1853 – Bologna, 6 agosto 1925) matematico, scrisse un fondamentale trattato sul calcolo differenziale assoluto con coordinate, ovvero sul calcolo tensoriale su una varietà riemanniana, che diventò il linguaggio di base della teoria della relatività generale di Einstein.

Allo stesso modo si può definire un operatore di traccia sui tensori di ordine 3 ponendo

$$\text{tr}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\delta = \mathcal{A}_{ijk}\delta_{jk}, \quad (\text{A.5})$$

ovvero $(\text{tr}(\mathcal{A}))_i = \mathcal{A}_{ijj}$. In particolare,

$$\text{tr}(\mathbb{T} \otimes \mathbf{a}) = \mathbb{T}\mathbf{a}. \quad (\text{A.6})$$

Anche in questo caso, la traccia abbassa di due l'ordine tensoriale.

- La *parte simmetrica* e la *parte antisimmetrica* di un tensore \mathbb{T} sono date rispettivamente da

$$\mathbb{T}^s = \frac{1}{2}(\mathbb{T} + \mathbb{T}^\top), \quad \mathbb{T}^w = \frac{1}{2}(\mathbb{T} - \mathbb{T}^\top).$$

È ovvio che $\mathbb{T}^s + \mathbb{T}^w = \mathbb{T}$. Se $\mathbb{T}^w = 0$, il tensore si dice *simmetrico*, se $\mathbb{T}^s = 0$ il tensore si dice *antisimmetrico*. L'insieme dei tensori simmetrici $\text{Sym}(\mathbb{R}^n)$, così come quello dei tensori antisimmetrici $\text{Skw}(\mathbb{R}^n)$, è sottospazio vettoriale di $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ e si ha

$$\text{End}(\mathbb{R}^n) = \text{Sym}(\mathbb{R}^n) \oplus \text{Skw}(\mathbb{R}^n).$$

La dimensione di $\text{Sym}(\mathbb{R}^n)$ è $n(n+1)/2$, quella di $\text{Skw}(\mathbb{R}^n)$ è $n(n-1)/2$. Si può osservare che

$$\text{tr}(\mathbb{T}^s) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbb{T}) + \text{tr}(\mathbb{T}^\top)) = \text{tr}(\mathbb{T}), \quad \text{dunque} \quad \text{tr}(\mathbb{T}^w) = 0.$$

In particolare, poiché $\varepsilon\mathbb{T}^\top = -\varepsilon\mathbb{T}$, si ha $\varepsilon\mathbb{T} = \varepsilon\mathbb{T}^w$ e $\varepsilon\mathbb{T}^s = 0$.

Inoltre, se $\mathbb{S} \in \text{Sym}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{W} \in \text{Skw}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\mathbb{S} \cdot \mathbb{W} = \text{tr}(\mathbb{S}^\top \mathbb{W}) = \text{tr}(\mathbb{S}\mathbb{W}) \quad \text{e anche} \quad \mathbb{S} \cdot \mathbb{W} = \text{tr}(\mathbb{S}\mathbb{W}^\top) = -\text{tr}(\mathbb{S}\mathbb{W}),$$

dunque $\mathbb{S} \cdot \mathbb{W} = 0$ e la precedente decomposizione è ortogonale.

Nel caso $n = 3$ è ben noto che i tensori antisimmetrici sono legati al prodotto vettoriale, in questo senso: dato $\mathbb{W} \in \text{Skw}(\mathbb{R}^3)$, esiste $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 : \quad \mathbb{W}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}.$$

Tale risultato si ottiene ponendo

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\varepsilon\mathbb{W} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{jk}\mathbf{e}_i. \quad (\text{A.7})$$

Infatti, ricordando l'identità $\varepsilon - \delta$ (A.3), verifichiamo che $(\varepsilon\mathbb{W}) \times \mathbf{a} = 2\mathbb{W}\mathbf{a}$:

$$((\varepsilon\mathbb{W}) \times \mathbf{a})_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jpk}W_{qp}a_k = (\delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip})W_{qp}a_k = (W_{ik}a_k - W_{ki}a_k) = 2(\mathbb{W}\mathbf{a})_i.$$

Viceversa, è immediato verificare che

$$\mathbb{W} = -\varepsilon\boldsymbol{\omega}, \quad \text{ovvero} \quad W_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k.$$

A.2 Analisi dei campi tensoriali

Un *campo tensoriale* è una funzione regolare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$, ovvero una funzione che associa ad ogni elemento di \mathbb{R}^n un tensore di ordine 2. Se invece il codominio è \mathbb{R}^n o \mathbb{R} , si parlerà rispettivamente di *campo vettoriale* o *campo scalare*.

A.2.1 Gradiente

Chiameremo *differenziale* di ψ in \mathbf{x} l'applicazione lineare $d\psi(\mathbf{x})$ tale che

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \quad \psi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \psi(\mathbf{x}) + d\psi(\mathbf{x})\mathbf{h} + o(\mathbf{h}), \quad \text{dove} \quad \lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow 0} \frac{|o(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Vediamone i tre casi:

- sia $\psi = f$ un campo scalare; allora $df(\mathbf{x}) \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n)$; il vettore che rappresenta tale applicazione lineare si denota con $\text{grad } f(\mathbf{x})$ e si chiama *gradiente* di f in \mathbf{x} . Quindi $\text{grad } f$ è un campo vettoriale e si ha

$$(\text{grad } f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

- Sia $\psi = \mathbf{u}$ un campo vettoriale; si ha $d\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ e si può identificare con un tensore di ordine 2, che indicheremo con $\text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x})$ o anche con $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$. In componenti si ha

$$(\text{grad } \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

ovvero la matrice jacobiana di \mathbf{u} .

- Sia $\psi = \mathbb{T}$ un campo tensoriale. In questo caso $d\mathbb{T}(\mathbf{x})$ si può identificare con un *tensore di ordine 3* e si ha

$$(\text{grad } \mathbb{T})_{ijk} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}.$$

In ogni caso, il gradiente aumenta di uno l'ordine tensoriale.

Ragionando in componenti si possono verificare le seguenti formule:

$$\text{grad}(fg) = f \text{grad } g + g \text{grad } f \tag{A.8}$$

$$\text{grad}(f\mathbf{u}) = f \text{grad } \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \text{grad } f \tag{A.9}$$

$$\text{grad}(f\mathbb{T}) = f \text{grad } \mathbb{T} + \mathbb{T} \otimes \text{grad } f \tag{A.10}$$

$$\text{grad}(f \circ \mathbf{u}) = (\text{grad } \mathbf{u})^\top \text{grad } f \tag{A.11}$$

$$\text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\text{grad } \mathbf{v})^\top \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})^\top \mathbf{v}. \tag{A.12}$$

A titolo di esempio, vediamo la seconda:

$$\begin{aligned} (\text{grad}(f\mathbf{u}))_{ij} &= \frac{\partial (f\mathbf{u})_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \mathbf{u}_i + f \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} \\ &= \mathbf{u}_i (\text{grad } f)_j + f (\text{grad } \mathbf{u})_{ij} = (\mathbf{u} \otimes \text{grad } f)_{ij} + (f \text{grad } \mathbf{u})_{ij}. \end{aligned}$$

A.2.2 Divergenza

Sia \mathbf{u} un campo vettoriale di classe C^1 . Definiamo la *divergenza* di \mathbf{u} come il campo scalare dato dalla traccia del gradiente di \mathbf{u} :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}(\operatorname{grad} \mathbf{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Si ha che $\operatorname{div} \mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ricordando che l'operatore div è lineare (in quanto lo è la traccia) e prendendo la traccia della formula (A.9) si ottiene

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = f \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f. \quad (\text{A.13})$$

Se invece \mathbb{T} è un campo tensoriale di classe C^1 , definiamo la divergenza di \mathbb{T} come il campo vettoriale dato dalla traccia del gradiente di \mathbb{T} :

$$\operatorname{div} \mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}(\operatorname{grad} \mathbb{T}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.14})$$

Quindi il vettore $\operatorname{div} \mathbb{T}$ ha per componenti le divergenze dei vettori-riga che compongono \mathbb{T} . Valgono inoltre le seguenti formule:

$$\operatorname{div}(f\mathbb{T}) = f \operatorname{div} \mathbb{T} + \mathbb{T} \operatorname{grad} f \quad (\text{A.15})$$

$$\operatorname{div}(\mathbb{T}^\top \mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbb{T} \cdot \mathbf{u} + \mathbb{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} \quad (\text{A.16})$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})\mathbf{v}. \quad (\text{A.17})$$

La prima si dimostra prendendo la divergenza della (A.10) e ricordando la (A.6), mentre le altre possono essere verificate per componenti.

Inoltre, se \mathbf{u} è un campo vettoriale di classe C^2 (affinché valga il Lemma di Schwarz⁽⁴⁾), vale l'utile formula

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{u})^\top, \quad (\text{A.18})$$

la cui verifica in componenti è

$$(\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u})_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = (\operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{u})^\top)_i.$$

Citiamo infine un teorema importante del calcolo integrale.

Teorema della divergenza. Sia A un aperto regolare limitato di \mathbb{R}^n e siano f un campo scalare, \mathbf{u} un campo vettoriale e \mathbb{T} un campo tensoriale di classe C^1 su A . Allora, detta \mathbf{n} la normale esterna ad ∂A , si ha

$$\int_A \operatorname{grad} f \, dV = \int_{\partial A} f \mathbf{n} \, dS, \quad \int_A \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV = \int_{\partial A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \int_A \operatorname{div} \mathbb{T} \, dV = \int_{\partial A} \mathbb{T} \mathbf{n} \, dS.$$

La formula (A.16) e il Teorema della divergenza portano alla notissima *formula di Gauss-Green*:

$$\int_A \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \mathbb{T} \, dV = \int_{\partial A} \mathbf{u} \cdot \mathbb{T} \mathbf{n} \, dS - \int_A \operatorname{grad} \mathbf{u} \cdot \mathbb{T} \, dV. \quad (\text{A.19})$$

⁽⁴⁾ Karl Hermann Amandus SCHWARZ (Hermsdorf, 25 gennaio 1843 – Berlino, 30 novembre 1921) oltre ad essere un illustre matematico era capitano del corpo volontari dei vigili del fuoco ed aiutava regolarmente la capostazione nei suoi uffici.

A.2.3 Laplaciano

Sia ψ un campo scalare o vettoriale di classe C^2 . Definiamo il *laplaciano* di ψ come:

$$\Delta\psi \stackrel{\text{def}}{=} \text{div grad } \psi.$$

In componenti: se f è un campo scalare si ha

$$\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2};$$

se \mathbf{u} è un campo vettoriale si ha

$$(\Delta\mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \Delta u_i$$

ovvero il laplaciano ha per componenti i laplaciani delle componenti. Tale affermazione però vale soltanto per le coordinate ortonormali da noi fissate: se il laplaciano è espresso in coordinate curvilinee, non è più vero che il laplaciano di un vettore è il laplaciano delle componenti. Anticipando i risultati della Sezione A.3, diamo l'espressione del laplaciano in coordinate cilindriche (r, ϑ, z) . Per un campo scalare

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

mentre per un campo vettoriale

$$\Delta\mathbf{u} = \left[\Delta u_r - \frac{1}{r^2} \left(u_r + 2 \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) \right] \mathbf{e}_r + \left[\Delta u_\vartheta - \frac{1}{r^2} \left(u_\vartheta - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right) \right] \mathbf{e}_\vartheta + \Delta u_z \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.20})$$

A.2.4 Rotore

D'ora in poi fisseremo la nostra attenzione al caso $n = 3$.

Sia \mathbf{u} un campo vettoriale di classe C^1 . Il *rotore* o *rotazionale* di \mathbf{u} è il campo vettoriale

$$\text{rot } \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \text{ grad } \mathbf{u} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3.$$

È chiaro che il rotore è lineare in \mathbf{u} . Dalla (A.7) e ricordando che $\varepsilon \mathbf{T} = \varepsilon \mathbf{T}^w$, si ottiene

$$(\text{grad } \mathbf{u})^w \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{u}) \times \mathbf{v}. \quad (\text{A.21})$$

Richiamiamo infine alcune utili formule:

$$\text{rot}(f\mathbf{u}) = f \text{rot } \mathbf{u} + (\text{grad } f) \times \mathbf{u} \quad (\text{A.22})$$

$$\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \quad (\text{A.23})$$

$$\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\text{grad } \mathbf{u})\mathbf{v} - (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{u} \text{ div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{u}, \quad (\text{A.24})$$

di cui verifichiamo la seconda:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} u_j v_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_k + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} u_j \\ &= \varepsilon_{kij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_k - \varepsilon_{jik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} u_j = (\operatorname{rot} \mathbf{u})_k v_k - (\operatorname{rot} \mathbf{v})_j u_j. \end{aligned}$$

Vediamo poi un altro teorema importante del calcolo integrale.

Teorema di Stokes. Sia S una superficie regolare in \mathbb{R}^3 di normale \mathbf{n} , con bordo ∂S regolare e sia \mathbf{u} un campo vettoriale di classe C^1 su S . Allora si ha

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

A.2.5 Altre proprietà del calcolo tensoriale tridimensionale

Vediamo ora alcune proprietà notevoli che riguardano l'analisi tensoriale nello spazio tridimensionale. Tutti i campi si supporranno di classe C^2 .

- Si ha

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}. \quad (\text{A.25})$$

Infatti, riscrivendo la (A.21) con $\mathbf{v} = \mathbf{a}$ costante si ha

$$(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \times \mathbf{a} = (\operatorname{grad} \mathbf{u} - (\operatorname{grad} \mathbf{u})^\top) \mathbf{a} \quad (\text{A.26})$$

e prendendo la divergenza di entrambi i membri si ha, applicando (A.23) a sinistra e (A.16) a destra,

$$\mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \operatorname{div}((\operatorname{grad} \mathbf{u})^\top - \operatorname{grad} \mathbf{u}).$$

Applicando poi (A.18) e la definizione di laplaciano, si ottiene la tesi.

In particolare, se $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ e $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$, allora si ha $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$, ovvero \mathbf{u} è *armonica*.

- Se nella precedente equazione (A.26) si sceglie $\mathbf{a} = \mathbf{u}$ si ottiene

$$(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = (\operatorname{grad} \mathbf{u} - (\operatorname{grad} \mathbf{u})^\top) \mathbf{u};$$

osservando poi che ponendo $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ nella (A.12) si ha

$$\operatorname{grad} \mathbf{u}^2 = 2(\operatorname{grad} \mathbf{u})^\top \mathbf{u},$$

si ottiene la formula

$$(\operatorname{grad} \mathbf{u}) \mathbf{u} = (\operatorname{rot} \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{u}^2. \quad (\text{A.27})$$

- Si ha $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$. Infatti, usando le componenti e il Lemma di Schwarz,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

poiché scambiando gli indici muti i e j la derivata seconda non cambia mentre ε_{ijk} cambia di segno.

- Allo stesso modo, $\text{rot grad } f = \mathbf{0}$. Infatti,

$$(\text{rot grad } f)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$

Una dimostrazione alternativa per questa formula, senza ricorrere alle componenti (ma appoggiandosi alla formula precedente) si può dare fissando un generico $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ e utilizzando la (A.23):

$$\mathbf{a} \cdot \text{rot grad } f = \text{div}(\text{grad } f \times \mathbf{a}) = \text{div rot}(f\mathbf{a}) = 0.$$

- *Teorema del potenziale scalare.* Sia \mathbf{u} un campo vettoriale di classe C^1 tale che $\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0}$ su un aperto semplicemente connesso $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Allora esiste un campo scalare φ tale che $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$ su A .
- *Teorema del potenziale vettore.* Sia \mathbf{u} un campo vettoriale di classe C^1 tale che $\text{div } \mathbf{u} = 0$ su un aperto semplicemente connesso $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Allora esiste un campo vettoriale \mathbf{a} tale che $\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{a}$ su A .

A.3 Operatori differenziali in coordinate polari

Vediamo un modo interessante di trovare l'espressione di gradiente e divergenza in coordinate polari. Ci avvarremo del teorema della divergenza.

Supponiamo di voler calcolare $\text{grad } f$, dove f è un campo scalare, in coordinate polari: poiché si ha

$$\int_D \text{grad } f \, dV = \int_{\partial D} f \mathbf{n} \, dS, \quad (\text{A.28})$$

fissato un punto $(\hat{r}, \hat{\vartheta})$ scegliamo un dominio

$$D_\varepsilon = \{(r, \vartheta) : |r - \hat{r}| < \varepsilon, |\vartheta - \hat{\vartheta}| < \varepsilon\}.$$

Ora, la frontiera di D_ε è formata da quattro curve: due archi di circonferenza (di normale esterna $\pm \mathbf{e}_r$) e due segmenti (di normale esterna $\pm \mathbf{e}_\vartheta$). Riscrivendo la (A.28) in coordinate polari (e tenendo conto che per il dominio D_ε e gli archi di circonferenza abbiamo lo jacobiano r) si ha

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\vartheta}-\varepsilon}^{\hat{\vartheta}+\varepsilon} \int_{\hat{r}-\varepsilon}^{\hat{r}+\varepsilon} r \text{grad } f(r, \vartheta) \, dr \, d\vartheta &= \int_{\hat{\vartheta}-\varepsilon}^{\hat{\vartheta}+\varepsilon} \left[(\hat{r} + \varepsilon) f(\hat{r} + \varepsilon, \vartheta) - (\hat{r} - \varepsilon) f(\hat{r} - \varepsilon, \vartheta) \right] \mathbf{e}_r(\vartheta) \, d\vartheta \\ &+ \int_{\hat{r}-\varepsilon}^{\hat{r}+\varepsilon} \left[f(r, \hat{\vartheta} + \varepsilon) \mathbf{e}_\vartheta(\hat{\vartheta} + \varepsilon) - f(r, \hat{\vartheta} - \varepsilon) \mathbf{e}_\vartheta(\hat{\vartheta} - \varepsilon) \right] \, dr. \end{aligned}$$

Se ora applichiamo il teorema della media, ne risulta che esistono $(r_1, \vartheta_1), (r_2, \vartheta_2) \in \overline{D_\varepsilon}$ tali che

$$\begin{aligned} 4\varepsilon^2 r_1 \text{grad } f(r_1, \vartheta_1) &= 2\varepsilon \left[(\hat{r} + \varepsilon) f(\hat{r} + \varepsilon, \vartheta_2) - (\hat{r} - \varepsilon) f(\hat{r} - \varepsilon, \vartheta_2) \right] \mathbf{e}_r(\vartheta_2) \\ &+ 2\varepsilon \left[f(r_2, \hat{\vartheta} + \varepsilon) \mathbf{e}_\vartheta(\hat{\vartheta} + \varepsilon) - f(r_2, \hat{\vartheta} - \varepsilon) \mathbf{e}_\vartheta(\hat{\vartheta} - \varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Dividendo tutto per $4\varepsilon^2$ e semplificando, per $\varepsilon \rightarrow 0$ otteniamo

$$\hat{r} \operatorname{grad} f(\hat{r}, \hat{\vartheta}) = \frac{\partial}{\partial r}(rf) \Big|_{(\hat{r}, \hat{\vartheta})} \mathbf{e}_r(\hat{\vartheta}) + \frac{\partial}{\partial \vartheta}(f \mathbf{e}_\vartheta) \Big|_{(\hat{r}, \hat{\vartheta})},$$

da cui, omettendo le variabili,

$$\operatorname{grad} f = \frac{f}{r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{f}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta}.$$

Considerando infine che $\frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -\mathbf{e}_r$, i termini estremi del secondo membro si semplificano, dando l'espressione del *gradiente di un campo scalare in coordinate polari*:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta. \quad (\text{A.29})$$

Se ora consideriamo un campo vettoriale $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta$, partendo dal Teorema della Divergenza

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int_{\partial D} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

e applicando come in precedenza il Teorema della Media sul medesimo dominio D otteniamo

$$4\varepsilon^2 r_1 \operatorname{div} \mathbf{u}(r_1, \vartheta_1) = 2\varepsilon \left[(\hat{r} + \varepsilon) u_r(\hat{r} + \varepsilon, \vartheta_2) - (\hat{r} - \varepsilon) u_r(\hat{r} - \varepsilon, \vartheta_2) \right] \\ + 2\varepsilon \left[u_\vartheta(r_2, \hat{\vartheta} + \varepsilon) - u_\vartheta(r_2, \hat{\vartheta} - \varepsilon) \right],$$

da cui, dividendo e mandando $\varepsilon \rightarrow 0$, viene l'espressione della *divergenza di un campo vettoriale in coordinate polari*:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta}. \quad (\text{A.30})$$

Dalle (A.29) e (A.30) si può poi ricavare facilmente l'espressione del *laplaciano di un campo scalare in coordinate polari*:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}. \quad (\text{A.31})$$

Per calcolare il gradiente di un campo vettoriale \mathbf{u} è sufficiente partire dalla formula

$$\int_D \operatorname{grad} \mathbf{u} dV = \int_{\partial D} \mathbf{u} \otimes \mathbf{n} dS,$$

da cui si ricava la formula, analoga alla (A.29)

$$\operatorname{grad} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \vartheta} \otimes \mathbf{e}_\vartheta. \quad (\text{A.32})$$

Considerato che $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta$ dipendono solo da ϑ e che $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} = \mathbf{e}_\vartheta$ e $\frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -\mathbf{e}_r$, si ottiene

$$\operatorname{grad} \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} \mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - u_\vartheta \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_r \right) \mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_\vartheta.$$

Più in generale, abbiamo

$$\begin{aligned}
\text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z, \\
\text{div } \mathbf{u} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
\text{grad } \mathbf{u} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} \mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - u_\vartheta \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_r \right) \mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_\vartheta \\
&\quad + \frac{\partial u_r}{\partial z} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z} \mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\partial u_z}{\partial r} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\vartheta, \\
\Delta \mathbf{u} &= \left[\Delta u_r - \frac{1}{r^2} \left(u_r + 2 \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) \right] \mathbf{e}_r + \left[\Delta u_\vartheta - \frac{1}{r^2} \left(u_\vartheta - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right) \right] \mathbf{e}_\vartheta + \Delta u_z \mathbf{e}_z, \\
\Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \\
\text{div } \mathbf{T} &= + \left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rr} - T_{\vartheta\vartheta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\vartheta r}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \\
&\quad + \left[\frac{\partial T_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{2T_{r\vartheta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial T_{z\vartheta}}{\partial z} + \frac{T_{\vartheta r} - T_{r\vartheta}}{r} \right] \mathbf{e}_\vartheta + \\
&\quad + \left[\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{T_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right] \mathbf{e}_z,
\end{aligned} \tag{A.33}$$

dove con \mathbf{T} si intende un tensore del secondo ordine.

Bibliografia

- [1] C. Banfi, *Introduzione alla meccanica dei continui*, CEDAM, Padova, 1990.
- [2] A. J. Chorin, J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. Third edition*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [3] Y.C. Fung, *Biomechanics. Circulation*, Springer-Verlag, 1997.
- [4] G.P. Galdi, R. Rannacher, A.M. Robertson, S. Turek, *Hemodynamical Flows*, Birkäuser, 2008.
- [5] M. E. Gurtin, *An introduction to continuum mechanics*, Mathematics in Science and Engineering 158, Academic Press, New York-London, 1981.
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Fluid mechanics*, Pergamon Press, London, 1959.
- [7] G. Lukaszewicz, *Micropolar Fluids Theory and Applications*, Birkäuser, 1999.
- [8] P. Manneville, *Instabilities, Chaos and Turbulence*, Imperial College Press, London, 2004.
- [9] S.B. Pope, *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, 2000.
- [10] J. Serrin, Mathematical principles of classical fluid mechanics, in *Handbuch der Physik* 8/1, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1959), pag. 125–263.