UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Sede di Brescia
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Dispense del corso di

Equazioni differenziali della fisica matematica

Anno Accademico 2026-2027

Alessandro Musesti

14 settembre 2026

Queste dispense sono state composte esclusivamente mediante software libero: Emacs per scrivere il testo, LaTeX per compilarlo. Il tutto, naturalmente, nel sistema operativo GNU/Linux.

Un doveroso ringraziamento va al prof. Carlo Banfi e al prof. Alfredo Marzocchi, dai cui scritti ho attinto a piene mani.

Indice

1 Introduzione alle equazioni differenziali alle derivate parziali **3**

1.1 Esempi . . . 3
1.2 Elementi introduttivi . . . 5
1.3 Classificazione delle equazioni semilineari del secondo ordine . . . 6
1.4 Esempi . . . 8
1.5 Problema di Cauchy . . . 8
1.6 Problemi ben posti . . . 12
1.7 Operatori differenziali formalmente aggiunti . . . 13
1.8 Esempi . . . 14
1.9 Formula di Green . . . 15
1.10 Esercizi . . . 16

2 Argomenti propedeutici di Analisi **17**

2.1 Alcuni spazi funzionali . . . 17
2.2 Elementi della teoria delle distribuzioni . . . 18
2.3 Convoluzione . . . 24
2.4 Trasformata di Fourier . . . 27
2.5 Soluzioni generalizzate di equazioni differenziali lineari . . . 31
2.6 Esercizi . . . 35

3 L'operatore di Laplace **36**

3.1 Soluzione fondamentale . . . 36
3.2 Rappresentazione integrale . . . 38
3.3 Funzioni armoniche . . . 40
3.4 Principio del massimo . . . 43
3.5 Problemi di Dirichlet e di Neumann . . . 44
3.6 La funzione di Green per il problema di Dirichlet . . . 48
3.7 Problema di Dirichlet nella sfera. Formula di Poisson . . . 51

4 L'operatore del calore **55**

4.1 Soluzione fondamentale 55
4.2 Problema ai valori iniziali per l'equazione del calore 57
4.3 Problema misto per l'equazione del calore 59

5 L'operatore delle onde **63**
5.1 Soluzione fondamentale per l'operatore delle onde 63
5.2 Formula dei potenziali ritardati di Kirchhoff 66
5.3 Teoremi di unicità e di stabilità 70
5.4 Il caso bidimensionale 71
5.5 Caso unidimensionale 72

6 Metodi funzionali **74**
6.1 Introduzione 74
6.2 Riformulazione del problema di Dirichlet 76
6.3 Inverso dell'operatore di Laplace 79
6.4 Elementi di teoria spettrale per operatori compatti 80
6.5 Autovalori dell'operatore di Laplace 85
6.6 Metodo di Fourier per il problema di Dirichlet 87
6.7 Metodo di Fourier per il problema misto del calore 87
6.8 Esempi di calcolo degli autovalori per l'operatore di Laplace 90
6.8.1 Il caso unidimensionale 90
6.8.2 Il caso del rettangolo 90
6.8.3 Il caso del parallelepipedo 92
6.8.4 Il caso del cerchio 92
6.9 Esercizi 93

Introduzione

Le equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE, Partial Differential Equations) che studieremo in questo corso nascono in maniera molto naturale nella modellizzazione matematica. Un paradigma tipico è quello della *legge di bilancio* o *di conservazione*, che esprime appunto il bilancio di una certa quantità G in un sistema. Supponendo che G sia scalare, introduciamo la seguente notazione:

- γ: la densità di G per unità di volume;
- $\boldsymbol{j}$: la densità di flusso (o di corrente) di G per unità di superficie;
- f: la densità sorgente (o pozzo) di G per unità di volume.

Allora il bilancio di G su un insieme Ω si esprime tramite l'equazione integrale

$$\int_\Omega \frac{\partial \gamma}{\partial t}\, dV = -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\, dS + \int_\Omega f\, dV$$

dove $\boldsymbol{n}$ è la normale esterna alla superficie $\partial\Omega$.

Tramite il Teorema della divergenza, l'integrale di superficie si può riscrivere come integrale di volume, ottenendo

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} - f\right) dV = 0.$$

Se ora Ω può essere scelto con sufficiente arbitrarietà come sottoinsieme di un corpo B, si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = f$$

che è appunto un'equazione alle derivate parziali.

Ovviamente, con scelte modellistiche diverse potremo ottenere equazioni diverse: ad esempio, se supponiamo che

$$\boldsymbol{j} = \gamma\boldsymbol{v},$$

ovvero che la quantità G venga trasportata attraverso la superficie mediante un campo di velocità $\boldsymbol{v}$, otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\gamma + \gamma\operatorname{div}\boldsymbol{v} = f,$$

che per $f = 0$ e γ densità di massa è l'*equazione di continuità* della fluidodinamica.

Se invece assumiamo la *legge di Fourier*

$$\boldsymbol{j} = -k\operatorname{grad}\gamma$$

con $k > 0$ costante, otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} - k\Delta\gamma = f,$$

che è l'*equazione del calore*. Più in generale, se K è una matrice simmetrica e definita positiva di ordine n, assumendo

$$\boldsymbol{j} = -\mathsf{K}\,\mathrm{grad}\,\gamma$$

si ottiene

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} - \mathsf{K} \cdot \mathrm{grad}\,\mathrm{grad}\,\gamma = f$$

che è l'*equazione di diffusione anisotropa*.

Capitolo 1

Introduzione alle equazioni differenziali alle derivate parziali

1.1 Esempi

- Equazione di Poisson:
$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$
- Equazione di Laplace:
$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$
- Equazione del calore:
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - a^2 \Delta u(t,x) = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$$
- Equazione delle onde:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \Delta u(t,x) = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$$
- Equazione della trave:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t,x) = f(t,x), \quad t,x \in \mathbb{R}.$$
- Equazione di Schrödinger:
$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -\gamma \Delta u(t,x) + V(x)u(t,x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$$
- Equazione di Helmholtz:
$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$
- Equazione dei telegrafisti:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + b\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + au - c^2 \Delta u(t,x) = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$$

- Equazione di Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t,x \in \mathbb{R}$$

- Equazione di Tricomi:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad x,y \in \mathbb{R}$$

- Equazione di Korteweg-De Vries:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + 6u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,x) = 0, \quad t,x \in \mathbb{R}.$$

Esempio 1.1. Studiamo brevemente l'*equazione del trasporto non lineare*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c(u)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

con la condizione iniziale $u(0,x) = u_0(x)$, dove $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione regolare assegnata.

Sia $x_0(t,x)$ dato in forma implicita dall'equazione

$$x = x_0 + c\big(u_0(x_0)\big)t,$$

e definiamo $u(t,x) := u_0\big(x_0(t,x)\big)$, ovvero il valore di u in (t,x) è trasportato dal valore iniziale $(0,x_0)$ con velocità $c\big(u_0(x_0)\big)$. Verifichiamo che $u(t,x)$ è soluzione del problema dato.

Poiché per $t = 0$ si ha $x_0 = x$, si vede subito che la condizione iniziale è soddisfatta. Ora prendiamo l'equazione che definisce x_0 e deriviamola rispetto a t:

$$0 = \frac{\partial x_0}{\partial t} + c'\big(u_0(x_0)\big)u_0'\frac{\partial x_0}{\partial t}t + c\big(u_0(x_0)\big) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x_0}{\partial t} = -\frac{c\big(u_0(x_0)\big)}{1 + tc'\big(u_0(x_0)\big)u_0'}$$

Se invece la deriviamo rispetto a x otteniamo:

$$1 = \frac{\partial x_0}{\partial x} + c'\big(u_0(x_0)\big)u_0'\frac{\partial x_0}{\partial x}t \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{1}{1 + tc'\big(u_0(x_0)\big)u_0'}.$$

Quindi, derivando u per composizione e sostituendo nell'equazione differenziale, si ottiene

$$u_0'\frac{\partial x_0}{\partial t} + c(u)u_0'\frac{\partial x_0}{\partial x} = u_0'\left(-\frac{c\big(u_0(x_0)\big)}{1 + tc'\big(u_0(x_0)\big)u_0'} + c\big(u_0(x_0)\big)\frac{1}{1 + tc'\big(u_0(x_0)\big)u_0'}\right) = 0,$$

quindi anche l'equazione è soddisfatta.

La retta $x = x_0 + c(u_0)t$ è una *caratteristica* dell'equazione. ⋆

Esercizio 1. Si verifichi che la funzione

$$u(t,x) = f(x - ct), \quad f(\xi) := \frac{c}{2\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - \xi_0)\right)}$$

è soluzione dell'equazione di Korteweg-De Vries.

Esercizio 2. Si applichi la *trasformazione di Cole-Hopf*

$$u(t,x) = -\frac{2\nu}{z(t,x)}\frac{\partial z}{\partial x}(t,x)$$

all'equazione di Burgers e si mostri che si giunge per z all'equazione del calore unidimensionale

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 z}{\partial x}.$$

1.2 Elementi introduttivi

Per lo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali conviene introdurre la notazione dei *multi-indici*.

Definizione 1.2 (Multiindici). I *multiindici* sono elementi di $\mathbb{N}^n$. Porremo

$$\alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \text{ossia} \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \quad \text{con} \quad \alpha_k \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2 \dots n.$$

Indicheremo con $|\alpha|$ la *lunghezza* del multiindice definita da

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n. \qquad \diamond$$

Mediante i multiindici, fissato un vettore $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, possiamo denotare il generico monomio nelle variabili $x_1, \dots, x_n$ come

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Fondamentalmente si ha poi la seguente comoda notazione per le derivate parziali di una funzione $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Per le derivate del primo e del secondo ordine useremo anche la notazione

$$u_{x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad u_{x_j x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Osservazione 1.3. Il numero dei multiindici $\alpha \in \mathbb{N}^n$ di lunghezza k è dato da

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Infatti, è sufficiente ricondurre il calcolo alle combinazioni con ripetizione.

Si può poi dimostrare che il numero dei multiindici $\alpha \in \mathbb{N}^n$ di lunghezza *minore o uguale* a k è dato da

$$\binom{n+k}{k}. \qquad \star$$

Definizione 1.4 (Equazioni differenziali alle derivate parziali). Sia $p \in \mathbb{N}$ e indichiamo con $m = \binom{n+p}{p}$ il numero di multiindici α con $|\alpha| \leqslant p$. Data la funzione $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, una *equazione differenziale alle derivate parziali* di ordine p nelle variabili $x \in \mathbb{R}^n$ e nella funzione incognita $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, è data dalla relazione

$$F\big(x, (\partial^\alpha u(x))_{|\alpha|\leqslant p}\big) = 0. \qquad \diamond$$

Consideriamo in particolare i seguenti tipi di equazioni differenziali alle derivate parziali:

$$\begin{aligned}
&\text{Quasilineari:} && \sum_{|\alpha|=p} a_\alpha\big(x, (\partial^\beta u(x))_{|\beta|<p}\big)\partial^\alpha u(x) + F\big(x, (\partial^\beta u(x))_{|\beta|<p}\big) = 0\\
&\text{Semilineari:} && \sum_{|\alpha|=p} a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x) + F\big(x, (\partial^\beta u(x))_{|\beta|<p}\big) = 0\\
&\text{Lineari:} && \sum_{|\alpha|\leqslant p} a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x) = f(x).
\end{aligned}$$

Un esempio tipico di equazione *non* quasilineare è l'equazione di Monge-Ampére:

$$\det(\operatorname{grad}\operatorname{grad} u) = f(x, u, \operatorname{grad} u).$$

Diamo alcuni esempi di equazioni differenziali alle derivate parziali. Ricordiamo l'espressione dell'operatore di Laplace

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

1.3 Classificazione delle equazioni semilineari del secondo ordine

Consideriamo la generica equazione semilineare del secondo ordine

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F\big(x, u, \operatorname{grad} u\big) = 0. \tag{1.1}$$

Possiamo supporre che i coefficienti $a_{ij}(x)$ siano continui e costituiscano una matrice simmetrica

$$A(x) = \big[a_{ij}(x)\big].$$

La parte nelle derivate seconde viene detta *parte principale* dell'equazione.

Consideriamo in $\mathbb{R}^n$ una trasformazione di coordinate di classe C^2

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x) \quad \text{con} \quad J = \det\left[\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right] \neq 0.$$

Se si fissa un punto x_0 la trasformazione è localmente invertibile con la funzione

$$x = x(\tilde{x}).$$

Per la funzione incognita u si ha allora

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = u\big(x(\tilde{x})\big) \quad \text{e} \quad u(x) = \tilde{u}\big(\tilde{x}(x)\big),$$

e per le derivate

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_h} \frac{\partial \tilde{x}_h}{\partial x_j};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] = \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_h \partial \tilde{x}_k} \frac{\partial \tilde{x}_h}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial x_j} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_h} \frac{\partial^2 \tilde{x}_h}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione si ha

$$\sum_{h,k=1}^{n} \tilde{a}_{hk}(\tilde{x}) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_h \partial \tilde{x}_k} + \tilde{F}\big(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_x\big) = 0, \tag{1.2}$$

dove i coefficienti $\tilde{a}_{hk}$ sono dati da

$$\tilde{a}_{hk}(\tilde{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{x}_h}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial x_j}. \tag{1.3}$$

Se ci mettiamo nel punto x_0 e poniamo

$$\tilde{x}_0 = \tilde{x}(x_0), \quad b_{ih} = \left.\frac{\partial \tilde{x}_h}{\partial x_i}\right|_{x=x_0}, \quad A_0 = A(x_0), \quad B = \big[b_{ih}\big]$$

indicando con B' la trasposta di B, la (1.3) può essere scritta nella forma matriciale

$$\tilde{A}_0 = B' A_0 B.$$

Se si determina la trasformazione di coordinate B in modo che nel punto x_0 la matrice A venga diagonalizzata, nel punto x_0 i coefficienti della parte principale dell'equazione sono gli autovalori di A_0.

Definizione 1.5 (Classificazione). Siano

p	il numero degli autovalori positivi;
q	il numero degli autovalori negativi;
r	il numero degli autovalori nulli.

Ovviamente risulterà $p + q + r = n$. Diremo allora che nel punto x_0 l'equazione è del tipo (p, q, r). Evidentemente sono da considerarsi equivalenti le equazioni (p, q, r) e (q, p, r).

Per un'equazione in cui la parte principale è a coefficienti costanti la classificazione data può essere riferita alla stessa equazione. Se i coefficienti sono invece funzioni continue si avranno regioni dove l'equazione è di un determinato tipo. ◇

Segnaliamo i più importanti tipi di equazioni differenziali.

i.	$(n, 0, 0)$	oppure	$(0, n, 0)$	*equazioni ellittiche*;
ii.	$(n-1, 0, 1)$	oppure	$(0, n-1, 1)$	*equazioni paraboliche*;
iii.	$(n-1, 1, 0)$	oppure	$(1, n-1, 0)$	*equazioni iperboliche*;
iv.	$(n-k, 0, k)$	oppure	$(0, n-k, k)$	*equazioni ultraparaboliche*;
v.	$(n-k, k, 0)$	oppure	$(k, n-k, 0)$	*equazioni ultraiperboliche*.

Ci si limiterà a considerare equazioni dei primi tre tipi.

1.4 Esempi

1. *Equazione di Laplace in* $\mathbb{R}^3$ $\qquad \Delta u = 0.$

La matrice A è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi l'equazione è ellittica.

2. *Equazione del calore in* $\mathbb{R}^3$. Alle variabili spaziali va aggiunta la variabile tempo.

$$\Delta u - k\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

La matrice A è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi l'equazione è parabolica.

3. *Equazione delle onde in* $\mathbb{R}^3$.

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

La matrice A è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c^2 \end{bmatrix}$$

quindi l'equazione è iperbolica.

4. *Equazione di Tricomi*.

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

La matrice è

$$A = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi l'equazione è iperbolica per $y < 0$, parabolica per $y = 0$ ed ellittica per $y > 0$.

1.5 Problema di Cauchy

Consideriamo ora il problema di Cauchy per equazioni semilineari del secondo ordine. Data l'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, Du) = 0 \tag{1.4}$$

con a_{ij} ed F funzioni continue nei loro argomenti, formuliamo il problema nel seguente modo.

Definizione 1.6 (Problema di Cauchy). Data una varietà $(n-1)$-dimensionale regolare Γ, il problema di Cauchy per l'equazione differenziale data sopra consiste nel determinare, in un intorno di Γ, la soluzione di (1.4) che soddisfa le seguenti condizioni

$$u\big|_{\Gamma} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi_1(x), \tag{1.5}$$

dove $\partial/\partial n$ è la derivata secondo la normale a Γ, con $\varphi_0(x)$ funzione di classe C^2 e $\varphi_1(x)$ di classe C^1. ◇

La varietà Γ su cui si assegnano i dati deve avere delle proprietà geometriche particolari, legate a come è fatta la parte principale dell'equazione differenziale.

Definizione 1.7. Consideriamo la parte di ordine massimo di un operatore differenziale omogeneo di ordine k, a coefficienti continui in $\mathbb{R}^n$:

$$\mathsf{L} = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\, \partial^\alpha.$$

Fissato x, il *polinomio caratteristico* associato all'operatore differenziale è il polinomio in ξ

$$P_{\mathsf{L}}(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

L'insieme

$$\mathrm{dir}_{\mathsf{L}}(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ \xi \neq 0 \text{ e } P_{\mathsf{L}}(x,\xi) = 0\} \tag{1.6}$$

definisce l'insieme delle *direzioni caratteristiche* per L in x. Una ipersuperficie regolare S in $\mathbb{R}^n$ si dirà *non caratteristica per l'operatore differenziale* L se in ogni punto $x \in S$ il vettore normale a S non è una direzione caratteristica per L in x, ovvero se

$$n_S(x) \notin \mathrm{dir}_{\mathsf{L}}(x) \qquad \text{per ogni } x \in S.$$

Chiameremo invece *varietà caratteristica* per L una ipersuperficie S tale che $n_S(x)$ sia una direzione caratteristica per ogni $x \in S$. ◇

Osservazione 1.8. Nel caso di un operatore semilineare del secondo ordine (1.4), denotando con $\mathsf{A}(x)$ la matrice simmetrica dei coefficienti $a_{ij}(x)$ si ha che una direzione ξ è non caratteristica se e solo se

$$\xi \cdot \mathsf{A}\xi \neq \mathbf{0}.$$ ★

Ora possiamo enunciare il seguente importantissimo teorema.

Teorema 1.9 (Teorema di Cauchy-Kovalevskaya). *Se nell'equazione* (1.4) *tutti i coefficienti ed F sono funzioni analitiche, le funzioni φ_0 e φ_1 delle condizioni di Cauchy sono pure funzioni analitiche e la varietà Γ è non caratteristica, allora esiste ed è unica la soluzione della* (1.4) *in un intorno di Γ, e tale soluzione è analitica.*

L'ipotesi di analiticità della funzione è fondamentale: esiste un famoso esempio del 1957, dovuto a Hans Lewy, con F di classe C^∞ ma non analitica, per cui un'equazione (lineare!) non ammette soluzione.

La dimostrazione, su cui non ci soffermeremo, consiste nel mostrare che gli sviluppi in serie della soluzione u, ottenuti calcolando le derivate di u sono convergenti, e si basa sulla seguente idea.

Proposizione 1.10. *Consideriamo il problema di Cauchy della Definizione 1.6. Fissato un punto x_0 su Γ, se Γ in x_0 è non caratteristica, si possono determinare in x_0 tutte le derivate parziali di u fino al secondo ordine.*

Dimostrazione. Fissiamo in x_0 un sistema di coordinate locali $(\tilde{x}_1, \dots \tilde{x}_n)$ tali che $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}$ siano coordinate sulla varietà Γ e $\tilde{x}_n$ sia secondo la normale a Γ. Con ciò l'equazione della varietà nell'intorno di x_0 può essere data nella forma

$$\tilde{x}_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots \tilde{x}_{n-1}) = 0 \tag{1.7}$$

Ora indicando con $\tilde{u}$ l'espressione di u in funzione delle nuove coordinate $\tilde{x}$, essendo u assegnata su Γ tramite la prima delle (1.5) possiamo determinare in x_0 le derivate

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_i} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots n-1.$$

Inoltre dalla seconda delle (1.5) si ha

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_n}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \varphi_1(x_0).$$

Per la determinazione delle derivate seconde basta tener presente che, essendo φ_0 e φ_1 note su tutto Γ, si possono calcolare le derivate

$$\left.\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j}\right|_\Gamma \quad \text{per } i = 1, 2, \dots n \text{ e } j = 1, 2, \dots (n-1).$$

La determinazione di

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_n^2} \tag{1.8}$$

può essere fatta tramite l'equazione stessa purché il coefficiente $\tilde{a}_{nn}(x_0)$ sia diverso da zero. Ciò è vero se e solo se Γ in x_0 non è tangente ad una varietà caratteristica: infatti, nelle nuove coordinate il vettore normale alla superficie è dato da

$$\boldsymbol{n}_\Gamma(x_0) = \tilde{\boldsymbol{e}}_n$$

e la condizione di direzione non caratteristica, in base all'Osservazione 1.8, si scrive

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_n \cdot \mathsf{A}(x_0)\tilde{\boldsymbol{e}}_n \neq \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \tilde{a}_{nn}(x_0) \neq 0. \qquad \square$$

Se le funzioni $\varphi_0(x)$ e $\varphi_1(x)$ sono indefinitamente derivabili e Γ è non caratteristica in ogni suo punto, in modo analogo a quanto visto sopra, si possono calcolare su Γ tutte le derivate di u. Su questo fatto si basa l'idea della dimostrazione del Teorema di Cauchy-Kovalevskaya.

A titolo di esempio, studiamo le direzioni caratteristiche di alcuni operatori visti in precedenza.

(1) Operatore di Laplace: si ha

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\xi| = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0$$

quindi non ci sono direzioni caratteristiche e tutte le superfici sono non caratteristiche per il laplaciano. Questa è la proprietà fondamentale degli operatori ellittici.

(2) Operatore del calore: l'equazione delle direzioni caratteristiche è la stessa del caso precedente, ma in questo caso ξ ha una componente in più, che indichiamo con t, quindi le direzioni caratteristiche sono date da

$$\{(0, \dots, 0, t) : \ t \in \mathbb{R}\}$$

e corrispondono alla direzione $(0, \dots, 0, 1)$. Le superfici del tipo $\{t = \text{cost.}\}$ sono invece varietà caratteristiche per l'operatore del calore.

(3) Operatore delle onde: in questo caso si ha che le direzioni caratteristiche sono i vettori (x, t) tali che

$$t^2 - c^2|\xi|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \{(\xi, t) : \ t = \pm c|\xi|\}.$$

Le superfici date da

$$c^2(t - t_0)^2 - |x - x_0|^2 = 0$$

sono quindi varietà caratteristiche nel punto (x_0, t_0).

(4) Operatore di Tricomi: consideriamo l'operatore in $\mathbb{R}^2$

$$\mathsf{L} = y\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Le sue direzioni caratteristiche nel punto (x_0, y_0) sono date da

$$y_0\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_2^2 = -y_0\xi_1^2.$$

Quindi per $y_0 > 0$ non ci sono direzioni caratteristiche, mentre per $y_0 = 0$ si ha $\xi_2 = 0$ e quindi si ha la direzione caratteristica $(1, 0)$ e per $y_0 < 0$ si ha

$$\xi_2 = \pm\sqrt{-y_0}\xi_1$$

da cui le direzioni caratteristiche $(1, \sqrt{-y_0})$. Ci sono poi delle varietà caratteristiche date da

$$x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{-y^3} + \text{cost.}$$

Esempio 1.11 (Condizione di compatibilità sui dati). Data per la funzione $u(t, x)$, con $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^3$, l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0,$$

assumiamo come varietà Γ la varietà caratteristica di equazione $t = 0$, con i dati di Cauchy

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Dall'equazione data sopra si ha facilmente che tra φ_0 e φ_1 sussiste la relazione

$$\varphi_1(x) - \Delta\varphi_0(x) = 0.$$

★

Esempio 1.12 (Valori al contorno per l'equazione delle onde). Si consideri l'equazione

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

nel dominio $A = \{(t, x) : |x \pm ct| < 1\}$, con la condizione al contorno

$$u\big|_{\partial A} = u_0.$$

Si può vedere facilmente che con la trasformazione di coordinate $\xi = x + ct$ e $\eta = x - ct$ questa diventa l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

nel quadrato

$$\Omega = \big\{(\xi, \eta) : \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \eta \leqslant 1\big\},$$

con le condizioni al bordo

$$u(1, \eta) = u_{01}(\eta), \quad u(-1, \eta) = u_{03}(\eta), \quad u(\xi, 1) = u_{02}(\xi), \quad u(\xi, -1) = u_{04}(\xi),$$

con

$$u_{01}(1) = u_{02}(1), \quad u_{02}(-1) = u_{03}(1), \quad u_{03}(-1) = u_{04}(-1), \quad u_{04}(1) = u_{01}(-1).$$

Si vede facilmente che la soluzione della nostra equazione si può esprimere nella forma

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

con $f, g \in C^2$. Per le condizioni poste si ha allora

$$\begin{aligned} g(\eta) &= u_{01}(\eta) - f(1) = u_{03}(\eta) - f(-1) \\ f(\xi) &= u_{02}(\xi) - g(1) = u_{04}(\xi) - g(-1). \end{aligned}$$

Da queste condizioni si ottiene

$$\begin{aligned} u_{01}(\eta) - u_{03}(\eta) &= f(1) - f(-1) = \text{cost.} \\ u_{02}(\xi) - u_{04}(\xi) &= g(1) - g(-1) = \text{cost.} \end{aligned}$$

Pertanto la funzione u_0 non può essere data arbitrariamente. ⋆

1.6 Problemi ben posti

Le equazioni differenziali ammettono generalmente una molteplicità di soluzioni. Per determinare soluzioni particolari occorre porre delle condizioni addizionali. Si possono distinguere i seguenti tipi di problemi:

a) *Problemi di Cauchy*. In particolare si danno per le equazioni in cui interviene la variabile tempo, quando si impongono opportune condizioni iniziali su tutto lo spazio.

b) *Problemi ai valori al contorno*. Quando per determinare una soluzione in una determinata regione chiusa $\mathcal{B}$ si impongono condizioni sul bordo $\partial\mathcal{B}$.

c) *Problemi misti*. Si danno in particolare per equazioni in cui interviene la variabile tempo, quando per determinare una soluzione in una determinata regione chiusa $\mathcal{B}$ dello spazio si impongono condizioni iniziali su $\mathcal{B}$ e condizioni sul bordo $\partial\mathcal{B}$.

Nei diversi problemi che si danno si richiede normalmente che siano *ben posti* secondo criteri introdotti da *Hadamard*.

Definizione 1.13. Chiameremo *problema ben posto nel senso di Hadamard* un problema per cui sono soddisfatte le seguenti condizioni.

i) Esista una soluzione in una determinata classe di funzioni.

ii) La soluzione in detta classe sia unica.

iii) La soluzione dipenda in modo continuo, in un senso determinato, dai dati del problema (dati iniziali, dati al bordo, ecc.). ◇

1.7 Operatori differenziali formalmente aggiunti

Se applichiamo ad una funzione $u \in C^k$ un operatore differenziale lineare L di ordine k si ha

$$\mathsf{L}u = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha(x)\partial^\alpha u.$$

Definizione 1.14 (Operatore differenziale formalmente aggiunto). Dato un operatore differenziale L lineare di ordine k, con coefficienti $a_\alpha \in C^k$, diremo *operatore formalmente aggiunto* l'operatore L^* definito nel seguente modo

$$\mathsf{L}^*u = \sum_{|\alpha|\leqslant k} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\big(a_\alpha(x)u\big).$$

In particolare se L è a coefficienti costanti si ha

$$\mathsf{L}^*u = \sum_{|\alpha|\leqslant k} (-1)^{|\alpha|}a_\alpha\partial^\alpha u.$$

L'operatore differenziale è *formalmente autoaggiunto* se

$$\mathsf{L}^*u = \mathsf{L}u.$$ ◇

Si noti che per avere un operatore formalmente aggiunto con i coefficienti regolari bisogna richiedere più regolarità ai coefficienti di L, visto che essi vengono anche derivati un certo numero di volte. Se i coefficienti di L sono infinitamente derivabili, però, lo saranno anche quelli di L^*.

La dimostrazione della proposizione seguente è banale nel caso a coefficienti costanti, mentre nel caso generale è un po' più delicata.

Proposizione 1.15. *Si ha*

$$\big(\mathsf{L}^*\big)^* = \mathsf{L}.$$

Dimostrazione. Tramite la formula di integrazione per parti si può verificare che per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\int (\mathsf{L}u)\varphi\,dx = \int u(\mathsf{L}^*\varphi)\,dx$$

e quindi, applicando due volte la formula,

$$\int (\mathsf{L}u)\varphi \, dx = \int u(\mathsf{L}^*\varphi) \, dx = \int \big((\mathsf{L}^*)^* u\big)\varphi \, dx.$$

Ora basta sfruttare l'arbitrarietà di φ e la continuità delle funzioni $\mathsf{L}u$ e $(\mathsf{L}^*)^*u$. □

Ci soffermiamo in particolare sugli operatori del secondo ordine

$$\mathsf{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)u$$

dove, posto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, supporremo $u, a_{ij} \in C^2(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$ e $a_i \in C^1$.
Introduciamo per questo operatore anche una forma vettoriale. Con una semplice interpretazione dei simboli si ha

$$\mathsf{L}u = \mathsf{A}(x) : \operatorname{grad}\operatorname{grad} u + \boldsymbol{a}(x) \cdot \operatorname{grad} u + a_0(x)u,$$

con $\mathsf{A} = [a_{ij}] : \Omega \to \operatorname{Sym}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\quad \boldsymbol{a} = [a_i] : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\quad a_0 : \Omega \to \mathbb{R}$.
Poiché l'operatore aggiunto ha espressione

$$\mathsf{L}^*u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}(x)u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x)u) + a_0(x)u,$$

in forma vettoriale diventa

$$\mathsf{L}^*u = \mathsf{A}(x) : \operatorname{grad}\operatorname{grad} u + (2\operatorname{div}\mathsf{A}(x) - \boldsymbol{a}(x)) \cdot \operatorname{grad} u + (\operatorname{div}\operatorname{div}\mathsf{A}(x) - \operatorname{div}\boldsymbol{a}(x) + a_0(x))u.$$

In particolare un operatore differenziale del secondo ordine è formalmente autoaggiunto se e solo se

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{div}\mathsf{A}.$$

1.8 Esempi

$\mathsf{L} = \Delta$	$\mathsf{L}^* = \Delta$	*Operatore di Laplace*
$\mathsf{L} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)$	$\mathsf{L}^* = \left(-\dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)$	*Operatore del calore*
$\mathsf{L} = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta\right)$	$\mathsf{L}^* = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta\right)$.	*Operatore delle onde*

Si vede immediatamente che gli operatori di Laplace e delle onde sono formalmente autoaggiunti.

1.9 Formula di Green

Proposizione 1.16 (Formula di Green). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto sufficientemente regolare perché si possa applicare il teorema della divergenza. Siano $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Sia L un operatore differenziale lineare del secondo ordine formalmente autoaggiunto*

$$\mathsf{L}u = \mathsf{A}(x) : \operatorname{grad}\operatorname{grad} u + \boldsymbol{a}(x) \cdot \operatorname{grad} u + a_0(x)u, \quad \boldsymbol{a} = \operatorname{div}\mathsf{A},$$

con $\mathsf{A} : \Omega \to \operatorname{Sym}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{a} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $a_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Allora vale la formula

$$\int_\Omega \Big(v\mathsf{L}u - u\mathsf{L}v\Big)dx = \int_{\partial\Omega} \big(v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v\big) \cdot \mathsf{A}\boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

dove $\boldsymbol{n}$ è la normale esterna al bordo $\partial\Omega$.

Dimostrazione. Dalla formula di Gauss-Green, tenendo conto che A è simmetrica, segue

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\mathsf{A} \cdot \operatorname{grad}\operatorname{grad} u\, dx &= -\int_\Omega \operatorname{div}(v\mathsf{A}) \cdot \operatorname{grad} u\, dx + \int_{\partial\Omega} v \operatorname{grad} u \cdot \mathsf{A}\boldsymbol{n}\, d\sigma \\ &= -\int_\Omega (v \operatorname{div}\mathsf{A} + \mathsf{A} \operatorname{grad} v) \cdot \operatorname{grad} u\, dx + \int_{\partial\Omega} v \operatorname{grad} u \cdot \mathsf{A}\boldsymbol{n}\, d\sigma\end{aligned}$$

Quindi, tenendo presente l'espressione di L, si ha

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\mathsf{L}u\, dx = &-\int_\Omega (v \operatorname{div}\mathsf{A} \cdot \operatorname{grad} u + \mathsf{A} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u)\, dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} v \operatorname{grad} u \cdot \mathsf{A}\boldsymbol{n}\, d\sigma + \int_\Omega (v\boldsymbol{a} \cdot \operatorname{grad} u + va_0u)\, dx.\end{aligned}$$

Poiché $\mathsf{L}^* = \mathsf{L}$, si ha $\operatorname{div}\mathsf{A} = a$ e dunque

$$\int_\Omega v\mathsf{L}u\, dx = -\int_\Omega (\mathsf{A} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u + va_0u)\, dx + \int_{\partial\Omega} v \operatorname{grad} u \cdot \mathsf{A}\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

Allo stesso modo

$$\int_\Omega u\mathsf{L}v\, dx = -\int_\Omega (\mathsf{A} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + ua_0v)\, dx + \int_{\partial\Omega} u \operatorname{grad} v \cdot \mathsf{A}\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

Sottraendo le due equazioni si ottiene la tesi. □

In particolare, se L è il laplaciano si ha

$$\int_\Omega \big(v\Delta u - u\Delta v\big)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma. \tag{1.9}$$

Inoltre, scegliendo $v \equiv 1$,

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma. \tag{1.10}$$

1.10 Esercizi

Esercizio 3. Si verifichi che le seguenti funzioni sono soluzioni dell'equazione del calore omogenea unidimensionale $u_t - a^2 u_{xx} = 0$:

- $e^{-a^2\omega^2 t} \sin \omega x, \quad \omega \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}$

Esercizio 4. Si verifichi che le seguenti funzioni sono soluzioni dell'equazione del calore omogenea bidimensionale $u_t - a^2 \Delta u = 0$:

- $e^{-a^2(p^2+q^2)t} \sin px \sin qy, \quad p, q \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{1}{4\pi a^2 t} e^{-(x^2+y^2)/(4a^2 t)}$

Esercizio 5. Si verifichi che la seguente funzione è soluzione dell'equazione del calore omogenea multidimensionale $u_t - a^2 \Delta u = 0$:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a^2 t}\right)^n} e^{-|x|^2/(4a^2 t)}$$

Esercizio 6. Si verifichi che le seguenti funzioni sono soluzioni dell'equazione delle onde omogenea unidimensionale $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$:

- onda stazionaria: $\sin(\omega x)\cos(c\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$
- onda viaggiante sinusoidale: $\sin(\omega x - c\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$
- onda viaggiante generale: $f(\omega x - c\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}, f \in C^2(\mathbb{R})$
- si diano delle condizioni sufficienti su $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ affinché la funzione

  $$f(\omega x) g(c\omega t)$$

  sia soluzione dell'equazione delle onde omogenea unidimensionale per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7. Si verifichi che le seguenti funzioni sono soluzioni dell'equazione delle onde omogenea bidimensionale $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$:

- onda stazionaria: $\sin(\omega_1 x)\sin(\omega_2 y)\cos\left(c\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}\, t\right), \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$
- onda viaggiante: $f\left(\omega_1 x + \omega_2 y - c\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}\, t\right), \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}, f \in C^2(\mathbb{R})$

Esercizio 8. Si verifichi che le seguenti funzioni sono soluzioni dell'equazione delle onde omogenea multidimensionale $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$:

$$f(a \cdot x \pm c|a|t), \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^2(\mathbb{R}).$$

Capitolo 2

Argomenti propedeutici di Analisi

2.1 Alcuni spazi funzionali

Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.1 (Spazi C, C^k, C^∞). Indicheremo con

- $C(\Omega)$ lo spazio delle funzioni continue in Ω;

- $C^k(\Omega)$ lo spazio delle funzioni u in Ω che hanno derivate $\partial^\alpha u$ continue fino all'ordine k, cioè per $|\alpha| \leqslant k$;

- $C^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni in Ω indefinitamente derivabili con tutte le derivate continue.

Indicheremo con C, C^k, C^∞ gli stessi spazi in $\mathbb{R}^n$. ⋄

Definizione 2.2 (Supporto). Diremo *supporto di una funzione u* definita in Ω il complemento del più grande aperto in Ω su cui $u(x) = 0$ e lo indicheremo con $\operatorname{supt} u$. ⋄

Definizione 2.3 (Spazio C_0^∞). Indicheremo con $C_0^\infty(\Omega)$ lo spazio di tutte le funzioni di $C^\infty(\Omega)$ con supporto compatto in Ω. Per le funzioni in $\mathbb{R}^n$ useremo la notazione C_0^∞. ⋄

Esempio 2.4. Appartengono a C_0^∞ le funzioni $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ così definite per $\varepsilon > 0$

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - \varepsilon^2}\right) & \text{se } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$ ⋆

Definizione 2.5 (Spazio $\mathcal{S}$). Indicheremo con $\mathcal{S}$ la classe delle *funzioni di Schwartz*, cioè lo spazio di tutte le funzioni di C^∞ in $\mathbb{R}^n$ che insieme a tutte le derivate tendono a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza di x^{-1}:

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in C^\infty : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty \quad \text{per ogni multi-indice } \alpha, \beta \right\}.$$ ⋄

Esempio 2.6. Appartiene allo spazio $\mathcal{S}$ la funzione

$$\varphi(x) = e^{-|x|^2}.$$ ⋆

Definizione 2.7 (Spazi L^p). Se $1 \leqslant p < \infty$ e se la funzione u è misurabile nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, poniamo

$$\|u\|_p = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Diremo spazio $L^p(\Omega)$ lo spazio normato delle funzioni misurabili u per cui

$$\|u\|_p < \infty.$$

Per $\Omega = \mathbb{R}^n$ indicheremo tali spazi semplicemente L^p. In particolare considereremo lo spazio L^1 e lo spazio L^2 che è uno spazio di Hilbert. ◇

Definizione 2.8 (Spazio L^∞). Diremo spazio $L^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni u in Ω misurabili ed essenzialmente limitate, cioè tali che

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u| < \infty.$$

Per $\Omega = \mathbb{R}^n$ scriveremo semplicemente L^∞. ◇

Definizione 2.9 (Spazi L^p_{loc}). Diremo spazi $L^\infty_{loc}(\Omega)$ gli spazi delle funzioni u misurabili tali che per ogni compatto $K \subset \Omega$ si abbia

$$\int_K |u(x)|^p dx < \infty.$$ ◇

2.2 Elementi della teoria delle distribuzioni

Definizione 2.10 (Spazi di funzioni test). Considereremo tre classi di funzioni in $\mathbb{R}^n$:

- $\mathscr{E}$ lo spazio delle funzioni C^∞;
- $\mathcal{S}$ lo spazio delle funzioni C^∞ a decrescenza rapida;
- $\mathscr{D}$ lo spazio C^∞_0 delle funzioni di $\mathscr{E}$ a supporto compatto. ◇

In ognuno di questi spazi si dà una definizione di convergenza $\varphi_h \to \varphi$ delle successioni $\{\varphi_h\}$ a una funzione φ. Precisamente:

- in $\mathscr{E}$: convergenza uniforme di φ_h a φ con tutte le sue derivate *in ogni compatto*;
- in $\mathcal{S}$: per ogni multi-indice α, β, $|x^\alpha \partial^\beta (\varphi_h - \varphi)| \to 0$ uniformemente;
- in $\mathscr{D}$: esiste un compatto K per cui supt $\varphi_h \subset K$ e ivi φ_h converge uniformemente a φ insieme a tutte le sue derivate.

Esempio 2.11. Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0$, per $h \in \mathbb{N}$ si considerino le funzioni in $\mathscr{D}$

$$\varphi_h(x) := \omega_1(x - h\,x_0),$$

dove ω_1 è definita nell'Esempio 2.4. Si osserva che (φ_h) non converge in $\mathscr{D}$ mentre converge alla funzione nulla in $\mathscr{E}$. ⋆

Osservazione 2.12. Gli spazi $\mathscr{E}$ e $\mathscr{D}$ si possono considerare anche limitatamente ad un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e li indicheremo allora con $\mathscr{E}(\Omega)$ e $\mathscr{D}(\Omega)$. ⋆

Definizione 2.13 (Distribuzioni). Date le tre classi di funzioni test $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}$, $\mathscr{D}$, introduciamo le corrispondenti classi di *distribuzioni* come i loro spazi duali, cioè gli spazi dei loro funzionali lineari continui. Li indicheremo con

$$\mathscr{E}',\ \mathscr{S}',\ \mathscr{D}'.$$ ⋄

Ad esempio, $f \in \mathscr{D}'$ se e solo se $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ è lineare e $\langle f, \varphi_h\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ per ogni $\varphi_h \to \varphi$ in $\mathscr{D}$. (Notazione: dato un generico spazio vettoriale V e dato un elemento f del duale V', indicheremo con $\langle f, \varphi\rangle \in \mathbb{R}$ il valore di f in corrispondenza al generico elemento $\varphi \in V$).

Proposizione 2.14 (Inclusioni). *Tra gli spazi delle distribuzioni valgono le seguenti inclusioni:*

$$\mathscr{E}' \subset \mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'.$$

Dimostrazione. Basta tener presente che per gli spazi delle funzioni test valgono, anche in senso topologico, le inclusioni

$$\mathscr{D} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{E}.$$ □

Tanto più si allarga l'insieme delle funzioni test tanto più si restringe l'insieme dei corrispondenti funzionali lineari continui. Così evidentemente $\mathscr{D}'$ costituisce la classe di distribuzioni più ampia.

Osservazione 2.15. Chiameremo più propriamente distribuzioni gli elementi dello spazio $\mathscr{D}'$. Gli elementi dello spazio $\mathscr{S}'$ vengono detti *distribuzioni temperate* e godono di proprietà particolarmente interessanti che vedremo più avanti. Gli elementi dello spazio $\mathscr{E}'$, per quanto si vedrà, sono identificabili con le *distribuzioni a supporto compatto*.

Le distribuzioni, come si vedrà, costituiscono una notevole generalizzazione del concetto di funzione. Il nome "distribuzioni" è dovuto al fatto che esse permettono di dare una buona rappresentazione della distribuzione di grandezze fisiche nei corpi come la massa, la carica elettrica, le forze, la temperatura, etc. ⋆

Definizione 2.16 (Convergenza di distribuzioni). Data una successione $\{f_h\}$ in $\mathscr{D}'$, diremo che essa *converge (debolmente)* all'elemento $f \in \mathscr{D}'$ se

$$\langle f_h, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$

In modo analogo si introduce la convergenza in $\mathscr{S}'$ e in $\mathscr{E}'$. Sebbene la convergenza debole di solito si denoti col simbolo $f_h \rightharpoonup f$, noi non useremo questa notazione, essendo l'unico tipo di convergenza che useremo per le distribuzioni. ⋄

Definizione 2.17. Siano $f \in \mathscr{D}'$ ed A aperto in $\mathbb{R}^n$, diremo che f *si annulla* in A se

$$\langle f, \varphi\rangle = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathscr{D}(A).$$ ⋄

Definizione 2.18 (Supporto di una distribuzione). Data una distribuzione $f \in \mathscr{D}'$, il *supporto* di f, che indicheremo supt f, è il complementare del più grande aperto su cui f si annulla. ⋄

Proposizione 2.19. *$\mathscr{E}'$ è lo spazio degli elementi di $\mathscr{D}'$ a supporto compatto.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathscr{D}'$ con supporto compatto K; osserviamo preliminarmente che per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$, il valore $\langle f, \varphi \rangle$ è determinato solo dalla restrizione $\varphi|_K$. Infatti, se anche $\psi \in \mathscr{D}$ e $\varphi(x) - \psi(x) = 0$ per $x \in K$, si ha supt $(\varphi - \psi) \cap K = \varnothing$ e quindi $\langle f, \varphi - \psi \rangle = 0$.

Facciamo ora vedere che ogni elemento $f \in \mathscr{D}'$ a supporto compatto può essere esteso a tutto $\mathscr{E}$ come elemento di $\mathscr{E}'$. Sia $\zeta \in \mathscr{D}$ tale che $\zeta = 1$ su supt f e $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ su $\mathbb{R}^n$, e definiamo il funzionale

$$\tilde{f} : \mathscr{E} \to \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in \mathscr{E} : \ \langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \varphi\zeta \rangle.$$

Non è difficile vedere che $\tilde{f}$ è lineare e continuo, quindi $\tilde{f} \in \mathscr{E}$. Inoltre, per quanto osservato all'inizio della dimostrazione, $\tilde{f}$ coincide con f su $\mathscr{D}$ (e non dipende dalla funzione ζ scelta).

Mostriamo ora che ogni elemento di $\mathscr{E}'$ è una distribuzione a supporto compatto. Per assurdo, supponiamo che supt f non sia compatto, dunque si abbia

$$\forall j \in \mathbb{N} : \quad \text{supt}\, f \setminus B_j(0) \neq \varnothing.$$

Questo significa che per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste $\varphi_j \in \mathscr{E}$ tale che supt $\varphi_j \cap B_j(0) = \varnothing$ e $\langle f, \varphi_j \rangle \neq 0$. Poniamo ora

$$\psi_j := \frac{\varphi_j}{\langle f, \varphi_j \rangle},$$

in modo che $\langle f, \psi_j \rangle = 1$. Poiché supt ψ_j esce definitivamente da ogni compatto fissato, si ha $\psi_j \to 0$ in $\mathscr{E}$, mentre $\langle f, \psi_j \rangle \to 1$, dunque f non può essere una distribuzione. □

Definizione 2.20 (Distribuzioni regolari). Data una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ si può definire la distribuzione $T_u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ nel seguente modo:

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi.$$

La verifica della linearità è banale, quella della continuità si ha da

$$\left| \int_\Omega u(\xi)\, (\varphi_k(\xi) - \varphi(\xi))\ d\xi \right| \leqslant \|\varphi_k - \varphi\|_\infty \int_K |u(\xi)|\, d\xi,$$

dove K è tale che supt φ_k, supt $\varphi \subset K$ per ogni K.

Le distribuzioni corrispondenti a funzioni di $L^1_{loc}(\Omega)$ vengono dette *distribuzioni regolari*. ⋄

Quando non ci sarà pericolo di confusione, denoteremo con lo stesso simbolo u sia la funzione che la distribuzione regolare ad essa associata.

Come si vedrà, esistono distribuzioni non regolari dette anche *singolari*. Questo fatto comporta che le distribuzioni costituiscono una generalizzazioni del concetto di funzione.

Vediamo ora che il concetto di supporto distribuzionale è un'estensione del concetto classico di supporto di una funzione.

Proposizione 2.21. *Se $u \in L^1_{loc}$, si ha che il supporto di u (come funzione) e quello di T_u (come distribuzione) coincidono.*

Dimostrazione. È ovvio vedere che T_u si annulla fuori da $\operatorname{supt} u$, quindi si ha $\operatorname{supt} T_u \subseteq \operatorname{supt} u$.

Viceversa, se consideriamo un aperto A fuori dal supporto di T_u, ovvero un aperto su cui T_u si annulla, si ha

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(A): \quad 0 = \langle u, \varphi \rangle = \int_A u(x)\varphi(x)\,dx$$

e dunque, per i soliti teoremi sulle funzioni integrabili, $u = 0$ su A. Dunque $\operatorname{supt} u \subseteq \operatorname{supt} T_u$. □

La proposizione seguente mostra che le funzioni *a crescita lenta*, ovvero a crescita polinomiale, sono distribuzioni (regolari) temperate.

Proposizione 2.22. *Sia $u \in L^1_{loc}$. Se esistono $N \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tali che*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad |u(x)| \leqslant C(1 + |x|)^N,$$

allora $T_u \in \mathscr{S}'$.

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathscr{S}$ e poniamo

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^{N+n+1} |\varphi(x)| < \infty.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle = \int u\varphi\,dx &\leqslant \int_{B_1(0)} u\varphi\,dx + MC \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} \frac{(1 + |x|)^N}{|x|^{N+n+1}} dx \\ &= K + \sigma_{n-1} MC \int_1^\infty \frac{(1 + r)^N}{r^{N+2}}\,dr < \infty, \end{aligned}$$

dove σ_{n-1} è la misura della superficie della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$. Quindi il dominio di T_u è estendibile a tutto $\mathscr{S}$. La continuità si dimostra in modo simile, mentre la linearità è ovvia. □

Esempio 2.23. Diamo alcuni esempi di distribuzioni.

a) Tra le distribuzioni regolari su $\mathbb{R}$ segnaliamo quella corrispondente alla funzione di Heaviside

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\langle h, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

b) La *distribuzione δ di Dirac* viene definita come il funzionale per cui

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}: \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Che sia lineare è immediato, che sia continuo discende dal fatto che la convergenza in $\mathscr{D}$ comporta la convergenza puntuale. Si verifica facilmente che $\operatorname{supt} \delta = \{0\}$. Pertanto δ è una distribuzione a supporto compatto e quindi si ha anche $\delta \in \mathscr{E}'$.

Questa distribuzione non è regolare, infatti: supponiamo che esista $u \in L^1$ tale che

$$\forall \varphi \in \mathscr{D} : \quad \int u(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

In particolare l'integrale si annulla per ogni φ che abbia supporto in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, e dunque per i soliti teoremi sulle funzioni integrabili si ha $u = 0$ q.o. in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Questo vuol dire $u = 0$, il che è assurdo.

Riferendoci alle distribuzioni di massa la δ di Dirac ci dà la rappresentazione di una massa puntiforme nell'origine.

c) La *distribuzione di strato semplice* è un altro esempio di distribuzione singolare. Data una superficie limitata e regolare Γ ed una funzione $\mu \in L^1(\Gamma)$ introduciamo la distribuzione $\mu\delta_\Gamma$ così definita:

$$\langle \mu\delta_\Gamma, \varphi \rangle = \int_\Gamma \mu(x)\varphi(x)\, dS.$$

Nell'ambito delle distribuzioni di massa la $\mu\delta_\Gamma$ ci dà la rappresentazione di un corpo configurato come la superficie Γ con densità superficiale μ.

d) La *distribuzione di strato doppio*. Data nuovamente una superficie limitata e regolare Γ ed una funzione $\mu \in L^1(\Gamma)$ introduciamo la distribuzione $\frac{\partial}{\partial n}(\mu\delta_\Gamma)$ così definita:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial n}(\mu\delta_\Gamma), \varphi \right\rangle = -\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n}\, d\sigma(\xi).$$

Tale distribuzione rappresenta una densità di dipoli concentrata sulla superficie Γ. ⋆

Passiamo ora a definire alcune importanti operazioni sulle distribuzioni. Va subito sottolineata in particolare la possibilità di introdurre per le distribuzioni una definizione di derivazione che consente una importante generalizzazione del calcolo differenziale.

Definizione 2.24 (Moltiplicazione per una funzione $u \in C^\infty$). Data una distribuzione $f \in \mathscr{D}'$ e una funzione $u \in C^\infty$ si può definire la distribuzione uf nel seguente modo

$$\forall \varphi \in \mathscr{D} : \quad \langle uf, \varphi \rangle = \langle f, u\varphi \rangle. \qquad \diamond$$

Osserviamo che la definizione è ben posta in quanto $f\varphi \in \mathscr{D}$. Lasciamo per esercizio la verifica che effettivamente $fu \in \mathscr{D}'$.

Definizione 2.25 (Derivazione). Data una distribuzione $f \in \mathscr{D}'$ e dato un multiindice α definiamo $\partial^\alpha f$ nel seguente modo

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = \langle f, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi \rangle. \qquad \diamond$$

Per la verifica che la definizione è corretta ci limitiamo a osservare che, per come è stata definita la convergenza in $\mathscr{D}$, la continuità del funzionale f implica la continuità di $\partial^\alpha f$.

In modo analogo si definisce la derivazione in $\mathscr{S}'$ e quella in $\mathscr{E}'$.

Osservazione 2.26. Se u è una distribuzione regolare corrispondente a una funzione derivabile, è facile mostrare, attraverso l'integrazione per parti, che la definizione data sopra, in questo caso, dà un risultato coincidente con la derivazione ordinaria. ⋆

In base alle definizioni 2.24 e 2.25 si possono applicare alle distribuzioni gli operatori differenziali del tipo

$$\mathsf{L} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x)\partial^\alpha \quad \text{per } a_\alpha \in C^\infty,$$

nel seguente modo: data $f \in \mathscr{D}'$, poniamo

$$\langle \mathsf{L}f, \varphi \rangle := \langle f, \mathsf{L}^*\varphi \rangle$$

dove L^* è l'aggiunto formale di L, ovvero

$$\mathsf{L}^*\varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant k} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha\varphi).$$

Esempio 2.27 (Esempio di derivazione). Studiamo la derivata in $\mathbb{R}$, nel senso delle distribuzioni, della funzione di Heaviside. Si ha

$$\left\langle \frac{dh}{dx}, \varphi \right\rangle = -\left\langle h, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\frac{d\varphi}{dx}\,dx = -\int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx}\,dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Pertanto per la derivazione nel senso delle distribuzioni si ha:

$$\frac{dh}{dx} = \delta.$$

★

Definizione 2.28 (Traslazione). L'operazione di traslazione su una funzione $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ può essere così definita

$$\tau_x u(y) := u(x + y).$$

Se consideriamo una distribuzione regolare

$$\langle u, \varphi \rangle = \int u(y)\varphi(y)\,dy,$$

vale la relazione

$$\langle \tau_x u, \varphi \rangle = \int u(x + y)\varphi(y)\,dy = \int u(z)\varphi(z - x)\,dz = \langle u, \tau_{-x}\varphi \rangle.$$

Quindi per una distribuzione in generale la definizione di traslazione può essere data nel seguente modo:

$$\langle \tau_x f, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-x}\varphi \rangle.$$

◇

Definizione 2.29 (Riflessione). Per una funzione φ l'operazione di riflessione può essere definita nel seguente modo:

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

Tenendo presente quanto avviene per le distribuzioni regolari, per le distribuzioni in generale si può dare la seguente definizione di riflessione:

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle.$$

◇

2.3 Convoluzione

Definizione 2.30 (Convoluzione di funzioni). Date due funzioni $u, v \in L^1_{loc}$, se per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ converge assolutamente l'integrale

$$\int u(x-y)v(y)\,dy,$$

si definisce la *convoluzione* $u * v$ di u e v nel seguente modo

$$(u * v)(x) = \int u(x-y)v(y)\,dy. \qquad \diamond$$

Osservazione 2.31. Con un cambiamento di variabile $y \to x - y$ si dimostra che vale

$$(u * v) = \int u(x-y)v(y)\,dy = \int u(y)v(x-y)\,dy = (v * u)(x). \qquad \star$$

Per l'esistenza della convoluzione diamo, senza dimostrazione, il seguente teorema fondamentale.

Teorema 2.32 (Disuguaglianza di Young). *Se per* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ $u \in L^1$ *e* $v \in L^p$ *allora*

$$u * v \in L^p \quad e \quad \|u * v\|_p \leqslant \|u\|_1 \|v\|_p.$$

Enunciamo un importante teorema di approssimazione.

Teorema 2.33 (Approssimazione della identità). *Data la funzione* $\varphi \in L^1$ *con* $\int \varphi(x)\,dx = 1$, *per ogni* $\varepsilon > 0$ *si può definire la funzione*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Preso allora $u \in L^p$ *con* $1 \leqslant p < \infty$ *si ha*

$$\|u * \varphi_\varepsilon - u\|_p \to 0 \quad per\ \varepsilon \to 0.$$

Se $u \in L^\infty$ *e uniformemente continua su un insieme* V, *allora* $u * \varphi_\varepsilon \to u$ *uniformemente in* V *per* $\varepsilon \to 0$.

Questo teorema è alla base dei metodi di regolarizzazione che consistono sostanzialmente nel determinare le approssimazioni di u mediante le funzioni $u * \varphi_\varepsilon$, supponendo $\varphi \in C^\infty_0$. Le proprietà della convoluzione, che vedremo immediatamente, assicurano, in questo caso, la regolarità delle funzioni approssimanti.

Proposizione 2.34 (Derivazione della convoluzione). *Se* $u \in L^1_{loc}$ *e* $\varphi \in \mathscr{D}$, *allora* $u * \varphi \in C^\infty$ *e per ogni multiindice* α *si ha*

$$\partial^\alpha(u * \varphi) = u * \partial^\alpha\varphi.$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul fatto che per le proprietà di $\mathscr{D}$ l'integrale che dà la convoluzione

$$(u * \partial^\alpha\varphi)(x) = \int u(y)\partial^\alpha\varphi(x-y)\,dy$$

è assolutamente ed uniformemente convergente in $\mathbb{R}^n$ e quindi si può applicare il Teorema di derivazione sotto il segno di integrale. □

La proposizione appena vista è valida, con identica dimostrazione, anche nel casi in cui $u \in L^p$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $\varphi \in \mathscr{S}$, classe di Schwartz.

Proposizione 2.35. *Se u ha supporto in $V \subset \mathbb{R}^n$ e v ha supporto in $W \subset \mathbb{R}^n$ allora $u * v$ ha supporto nell'insieme $V + W := \{v + w : v \in V, w \in W\}$*

Dimostrazione. Da

$$(u * v)(x) = \int u(y)v(x - y)\, dy$$

si ha che se $y \notin V$ o $x - y \notin W$ il contributo all'integrale è nullo, pertanto gli elementi del supporto della convoluzione sono della forma $x = y + w$ dove $y \in V$ e $w \in W$. □

Definizione 2.36 (Prodotto tensoriale di funzioni). Se $u : \Omega_1 \to \mathbb{R}$, $v : \Omega_2 \to \mathbb{R}$, con $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$, il *prodotto tensoriale* di u e v, che indicheremo $u \otimes v$, è una funzione

$$u \otimes v : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R},$$

così definita:

$$(u \otimes v)(x, y) = u(x)v(y).$$ ◇

Proposizione 2.37. *Date due funzioni u e v in L^1, vale la relazione*

$$\begin{aligned}\Big\langle (u \otimes v)(x, y), \varphi(x, y) \Big\rangle &= \int u(x)v(y)\varphi(x, y)\, dxdy \\ &= \Big\langle u(x), \langle v(y), \varphi(x, y)\rangle \Big\rangle\end{aligned}$$

per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Osservazione 2.38. Data la convoluzione di due funzioni $u, v \in L^1_{loc}$

$$(u * v)(x) = \int u(x - y)v(y)\, dy$$

possiamo considerare per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$ l'integrale

$$\langle u * v, \varphi\rangle = \int u(x - y)v(y)\varphi(x)\, dydx.$$

Con la trasformazione di coordinate $x - y = z$ si ha

$$\langle u * v, \varphi\rangle = \int u(z)v(y)\varphi(y + z)\, dydz,$$

e quindi anche

$$\langle u * v, \varphi\rangle = \langle (u \otimes v)(x, y), \tilde{\varphi}\rangle,$$

dove con $\tilde{\varphi}$ si intende la funzione da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ che manda la coppia (x, y) in $\varphi(x + y)$. ⋆

L'ultima formula può essere utilizzata per introdurre la convoluzione tra distribuzioni. Si presentano però due difficoltà:

- bisogna introdurre una nozione di prodotto tensoriale per distribuzioni (e lo faremo nella Definizione 2.40);

- anche se φ è a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$, $\tilde{\varphi}$ non è più a supporto compatto in $\mathbb{R}^{2n}$. Infatti se il supporto di φ contiene il punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il supporto di $\tilde{\varphi}$ contiene l'insieme delle coppie $\{(x_0 - y, y) : \ y \in \mathbb{R}^n\}$ e quindi non è compatto.

Per risolvere la prima difficoltà, estendiamo la definizione di prodotto tensoriale al caso delle distribuzioni. Premettiamo un lemma di facile dimostrazione:

Lemma 2.39. *Sia $g \in \mathscr{D}'(\Omega_2)$ e $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Allora la funzione*

$$x \mapsto \langle g, \varphi(x, \cdot)\rangle$$

sta in $\mathscr{D}(\Omega_1)$.

Definizione 2.40 (Prodotto tensoriale di distribuzioni). Se sono dati due aperti $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ e due distribuzioni $f \in \mathscr{D}'(\Omega_1)$ e $g \in \mathscr{D}'(\Omega_2)$, definiamo il *prodotto tensoriale* di f e g nel seguente modo:

$$\langle f \otimes g, \varphi\rangle = \langle f, \langle g, \varphi(x, y)\rangle\rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right).$$

Si ha poi:

$$f \otimes g \in \mathscr{D}'\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right). \qquad \diamond$$

Per ovviare alla mancanza di compattezza del supporto di $\tilde{\varphi}$, ci limiteremo a considerare il caso ristretto, e che risulta più semplice, in cui una delle due distribuzioni sia a supporto compatto. In questo caso si può dare la seguente definizione.

Definizione 2.41 (Convoluzione di distribuzioni). Siano date due distribuzioni $f \in \mathscr{D}'$ e $g \in \mathscr{E}'$. Definiamo la *convoluzione distribuzionale* di f e g nel seguente modo:

$$\langle f * g, \varphi\rangle := \langle f \otimes g, \tilde{\varphi}\rangle,$$

dove al solito $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x + y)$. $\diamond$

Proposizione 2.42. *Se $f \in \mathscr{D}'$ e $g \in \mathscr{E}'$ valgono per la loro convoluzione $f * g$ le seguenti proprietà:*

i) $f * g = g * f$

ii) $\partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g = \partial^\alpha f * g$

iii) $\operatorname{supt}(f * g) \subset \operatorname{supt} f + \operatorname{supt} g$.

Possiamo ora mostrare che la δ di Dirac costituisce l'elemento neutro rispetto al prodotto di convoluzione.

Proposizione 2.43 (Prodotto di convoluzione con la δ di Dirac). *Se $f \in \mathscr{D}'$, allora vale*

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

Dimostrazione. Si ha $\delta \in \mathscr{E}'$ e quindi per la Definizione 2.41

$$\langle f * \delta, \varphi\rangle = \langle f \times \otimes \delta, \varphi(x + y)\rangle = \langle f, \langle \delta, \varphi(x + \cdot)\rangle\rangle = \langle f, \varphi\rangle$$

da cui la tesi. $\square$

Osservazione 2.44. Attenzione: la convoluzione tra distribuzioni non è in generale associativa. Ad esempio, consideriamo in $\mathbb{R}$ le distribuzioni regolari 1 e h e la distribuzione a supporto compatto δ' (derivata della delta di Dirac). Si ha

$$1 * \delta' = (1 * \delta)' = 1' = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 * \delta') * h = 0 * h = 0.$$

Invece,

$$\delta' * h = (\delta * h)' = h' = \delta \quad \Rightarrow \quad 1 * (\delta' * h) = 1 * \delta = 1.$$

Tuttavia, è possibile dimostrare che se almeno due delle tre distribuzioni hanno supporto compatto, allora la proprietà associativa vale. ⋆

2.4 Trasformata di Fourier

Definizione 2.45. Data la funzione $u \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ definiamo la sua *trasformata di Fourier*, che indicheremo con $\hat{u}$ o anche con $\mathscr{F}[u]$, la funzione da $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{C}$ definita da

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x)\, dx.$$

Chiaramente $\hat{u}(\xi)$ è ben definita per ogni ξ e vale la stima

$$\|\hat{u}\|_\infty \leqslant \|u\|_1. \qquad \diamond$$

Esempio 2.46. Sia $n = 1$ e sia $u_a := \chi_{(-a,a)}$ la funzione caratteristica dell'intervallo $(-a, a)$, per $a > 0$. Allora la sua trasformata di Fourier è

$$\hat{u}_a(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-2\pi i x \xi} dx = -\frac{1}{2\pi i \xi} \left(e^{-2\pi i a \xi} - e^{2\pi i a \xi} \right) = \frac{\sin(2\pi a \xi)}{\pi \xi}$$

che è ben definita anche per $\xi = 0$ e si ha $\hat{u}_a(0) = 2a$. Facciamo alcune osservazioni sulla funzione ottenuta:

- $\hat{u}_a$ è regolare, anche se la funzione di partenza è discontinua. Anzi, si può dimostrare che se u è a supporto compatto, come in questo caso, allora $\hat{u}$ è una funzione analitica (in realtà olomorfa, essendo a valori complessi).
- $\hat{u}_a \notin L^1$, però si ha che $\hat{u}_a \in L^2$ (in generale la trasformata di Fourier è ben definita da L^2 a L^2, grazie al Teorema di Plancherel).
- Per $a \to +\infty$ si ha $u_a \to 1$, mentre $\hat{u}_a$ non converge nel senso delle funzioni. Si può dimostrare che $\hat{u}_a \to \delta$ nel senso delle distribuzioni, da cui (almeno intuitivamente) $\hat{1} = \delta$.
- Per $a \to 0$ si ha $\frac{u_a}{2a} \to \delta$ nel senso delle distribuzioni, mentre $\frac{\hat{u}_a}{2a} \to 1$. Anche da qui si può intuire che $\hat{1} = \delta$. ⋆

Proposizione 2.47. *Se $u, v \in L^1$ allora $\widehat{(u * v)} = \hat{u}\hat{v}$.*

Dimostrazione. È una applicazione del teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}\widehat{(u * v)}(\xi) &= \int \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} u(x-y)v(y)\,dydx \\ &= \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} u(x-y) e^{-2\pi i y\cdot\xi} v(y)\,dxdy \\ &= \hat{u}(\xi)\int e^{-2\pi i y\cdot\xi} v(y)\,dy = \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi). \qquad \square\end{aligned}$$

Il modo più semplice per sviluppare le proprietà fondamentali della trasformata di Fourier è considerare la sua restrizione alla classe $\mathcal{S}$ di Schwartz, dato che $\mathcal{S} \subset L^1$ ed è ivi denso.

Introduciamo la seguente notazione: data una funzione u, denoteremo con $x^\alpha u$ la funzione

$$\Big\{x \;\mapsto\; x^\alpha u(x)\Big\}.$$

Proposizione 2.48. *Sia $u \in \mathcal{S}$. Allora si ha, per ogni multi-indice β:*

(i) $\partial^\beta \mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[(-2\pi i x)^\beta u(x)]$;

(ii) $\mathcal{F}[\partial^\beta u](\xi) = (2\pi i\xi)^\beta \mathcal{F}[u](\xi)$;

(iii) $\mathcal{F}[u] \in \mathcal{S}$.

Dimostrazione. (i) Siccome u decresce all'infinito più rapidamente di ogni potenza di $|x|^{-1}$, l'integrale della trasformata di Fourier è assolutamente uniformemente convergente, si può quindi derivare sotto il segno di integrale, si ottiene così la tesi.

(ii) Si ha

$$\mathcal{F}[\partial^\beta u](\xi) = \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\partial^\beta u(x)\,dx.$$

Si ottiene la tesi integrando per parti e tenendo presente che u e le sue derivate vanno rapidamente a zero all'infinito.

(iii) Basta mostrare che per tutti i multi-indici α, β le funzioni $\xi^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}[u](\xi)$ sono limitate. Per la (i) si ha

$$\xi^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}[u](\xi) = \xi^\alpha \mathcal{F}[(-2\pi i x)^\beta u(x)](\xi) = (2\pi i)^{-|\alpha|}(2\pi i\xi)^\alpha \mathcal{F}[(-2\pi i x)^\beta u(x)](\xi),$$

e quindi per la (ii) si ha anche

$$\xi^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}[u](\xi) = (2\pi i)^{-|\alpha|}\mathcal{F}\left[\partial^\alpha\left((-2\pi i x)^\beta u(x)\right)\right](\xi).$$

La funzione $v = \partial^\alpha\left((-2\pi i x)^\beta u\right)$ sta nello spazio L^1, quindi si ha

$$|\xi^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}[u](\xi)| = \left|(2\pi i)^{-|\alpha|}\mathcal{F}[v]\right| = (2\pi)^{-|\alpha|}\left|\int e^{2\pi i x\cdot\xi} v(x)\,dx\right| \leqslant (2\pi)^{-|\alpha|}\|v\|_1 < \infty$$

per ogni α, β, e quindi $\mathcal{F}[u] \in \mathcal{S}$. $\square$

Proposizione 2.49 (Trasformata di un riscalamento). *Sia $v \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ e $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Definiamo $u(x) = v(ax)$. Allora*

$$\hat{u}(\xi) = |a|^{-n}\hat{v}\Big(\frac{\xi}{a}\Big).$$

Dimostrazione. Si ha

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} v(ax)\, dx$$

e, posto $y = ax$ si ottiene

$$\hat{u}(\xi) = |a|^{-n} \int e^{-2\pi i y\cdot\frac{\xi}{a}} v(y)\, dy = |a|^{-n}\hat{v}\Big(\frac{\xi}{a}\Big).$$

□

In vista di alcune importanti applicazioni studiamo ora la trasformata di Fourier di una funzione particolare.

Proposizione 2.50. *Se*

$$u(x) = e^{-\pi b|x|^2}$$

con $b > 0$, *allora*

$$\hat{u}(\xi) = b^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{b}}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che la trasformata della funzione

$$v(x) = e^{-\pi|x|^2},$$

è la funzione stessa, ovvero che $\hat{v} = v$. Dalla definizione di v si ha subito che[(1)]

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = -2\pi x_k v; \tag{2.1}$$

moltiplicando tutto per l'unità immaginaria i, prendendo la trasformata di Fourier di ambo i membri e usando la Proposizione 2.48 (in particolare la (ii) per il primo membro e la (i) per il secondo membro), si ottiene

$$-2\pi\xi_k \mathscr{F}[v] = \frac{\partial}{\partial\xi_k}\mathscr{F}[v],$$

che è identica alla (2.1). Quindi per ogni $k = 1, \dots, n$ la funzione $\mathscr{F}[v]$ risolve la medesima equazione differenziale ordinaria di v. Essendo l'equazione differenziale lineare e omogenea del primo ordine, le due funzioni differiranno per una costante moltiplicativa, da cui

$$\mathscr{F}[v](\xi) = Ce^{-\pi|\xi|^2}.$$

Per vedere che $C = 1$ basta usare la definizione della trasformata di Fourier per $\xi = 0$, ovvero

$$C = \mathscr{F}[v](0) = \int v(x)\, dx = \int e^{-\pi|x|^2}\, dx = \prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x_k^2}\, dx = 1.^{(2)}$$

(1) Ho visto per la prima volta questa idea, semplice e concisa, sul libro di [Tartar]. Ringrazio Alessandro Giacomini per la preziosa segnalazione.

(2) Infatti

$$\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\, dx\Big)^2 = \iint e^{-\pi(x^2+y^2)}\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r\, drd\vartheta$$
$$= 2\pi\int_0^{\infty} re^{-\pi r^2}\, dr = \frac{2\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-\pi s}\, ds = -\,[e^{-\pi s}]_0^{+\infty} = 1.$$

Per ottenere il risultato nel caso generale basta tener presente che

$$u(x) = v(ax) \quad \text{per } a = \sqrt{b}$$

e applicare la Proposizione 2.49.[3] □

Proposizione 2.51. *Se $u, v \in \mathcal{S}$ allora*

$$\int u\hat{v}\,dx = \int \hat{u}v\,dx.$$

Dimostrazione. Per il teorema di Fubini,

$$\int u\hat{v}\,dx = \iint u(x)v(y)e^{-2\pi ix\cdot y}\,dydx = \int \hat{u}v\,dx.$$ □

Passiamo ora a definire la trasformata inversa.

Definizione 2.52 (Trasformata inversa di Fourier). Se $u \in L^1$ definiamo la *trasformata inversa (o antitrasformata) di Fourier*, che indicheremo con $\check{u}$, nel seguente modo

$$\check{u}(x) = \int e^{2\pi ix\cdot\xi}u(\xi)\,d\xi = \hat{u}(-x).$$ ◇

Teorema 2.53 (Inversione della trasformata di Fourier). *Se $u \in \mathcal{S}$, si ha $\check{\hat{u}} = u$.*

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$ consideriamo la funzione

$$\varphi(\xi) = e^{2\pi ix\cdot\xi - \pi\varepsilon^2|\xi|^2}.$$

Per la Proposizione 2.50 si ha

$$\hat{\varphi}(y) = \int e^{-2\pi i(y-x)\cdot\xi}e^{-\pi\varepsilon^2|\xi|^2}\,d\xi = \varepsilon^{-n}e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon^2}}$$

e quindi, posto $v(x) = e^{-\pi|x|^2}$ si ha anche

$$\hat{\varphi}(y) = \varepsilon^{-n}v\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = v_\varepsilon(x-y).$$

Per la Proposizione 2.51 si ha

$$\int e^{-\pi\varepsilon^2|\xi|^2}e^{2\pi ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)\,d\xi = \int \hat{u}\varphi = \int u\hat{\varphi} = \int u(y)v_\varepsilon(x-y)\,dy = (u * v_\varepsilon)(x).$$

[3] Una dimostrazione alternativa, in cui però si imbroglia un pochino trattando i come una costante reale, è la seguente: nell'integrale

$$\int e^{-2\pi ix\cdot\xi}e^{-\pi|x|^2}dx = \int e^{-\pi(2ix\cdot\xi+|x|^2)}dx$$

si completa il quadrato di binomio all'esponente, ottenendo

$$e^{-\pi|\xi|^2}\int e^{-\pi|x+i\xi|^2}dx.$$

Ora nell'integrale si pone $y = x + i\xi$, da cui $dy = dx$ e dunque l'integrale fa 1 per i motivi visti sopra, da cui la tesi.

Ma essendo $\int v(x)\,dx = 1$, per il Teorema 2.33 e per l'uniforme continuità di u si ha

$$u * v_\varepsilon \longrightarrow u$$

per $\varepsilon \to 0$ uniformemente.
D'altra parte, evidentemente per ogni x vale anche

$$\int e^{-\pi\varepsilon^2|\xi|^2} e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{u}(\xi)\,d\xi \to \int e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{u}(\xi)\,d\xi = \check{\hat{u}}(x),$$

e quindi in definitiva si ha

$$\check{\hat{u}} = u. \qquad \square$$

Corollario 2.54. *La trasformata di Fourier è un isomorfismo di $\mathcal{S}$ in sé.*

Dimostrazione. La linearità è evidente, la biiettività segue dall'esistenza della trasformazione inversa. $\square$

Passiamo ora a considerare la trasformata di Fourier per le distribuzioni. Essa infatti può essere estesa alle distribuzioni temperate, cioè a $\mathcal{S}'$, infatti la Proposizione 2.51 può anche essere riscritta come

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}: \quad \langle\hat{u},\varphi\rangle = \iint \hat{u}\varphi\,dx = \langle u,\hat{\varphi}\rangle.$$

Diamo allora la definizione seguente.

Definizione 2.55 (Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'$). Data $f \in \mathcal{S}'$, definiamo $\hat{f} \in \mathcal{S}'$ nel seguente modo:

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}: \quad \langle\hat{f},\varphi\rangle = \langle f,\hat{\varphi}\rangle.$$

Ricordando la Proposizione 2.48, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ e quindi la definizione data ha senso. $\diamond$

Per le trasformate delle distribuzioni temperate valgono le stesse proprietà delle trasformate in $\mathcal{S}$. In particolare, $\mathcal{F}$ è un isomorfismo da $\mathcal{S}'$ in sé.

Esempio 2.56. Si ha $\hat{\delta} = 1$. Infatti

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}: \quad \langle\hat{\delta},\varphi\rangle = \langle\delta,\hat{\varphi}\rangle = \left\langle\delta, \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)\,dx\right\rangle = \int \varphi(x)\,dx = \langle 1,\varphi\rangle. \qquad \star$$

2.5 Soluzioni generalizzate di equazioni differenziali lineari

Attraverso la nozione di distribuzione intendiamo sviluppare una generalizzazione del concetto di soluzione per le equazioni differenziali lineari.

Definizione 2.57 (Soluzioni in senso generalizzato). Sia L un operatore differenziale lineare di ordine k con coefficienti di classe C^∞,

$$\mathsf{L} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x) \partial^\alpha,$$

definito in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Diremo che $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ è *soluzione in senso generalizzato* dell'equazione $\mathsf{L}u = f$ se

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \ \langle \mathsf{L}u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

cioè se

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \ \langle u, \mathsf{L}^* \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle. \qquad \diamond$$

Le soluzioni generalizzate sono una effettiva generalizzazione, in quanto ogni soluzione classica è soluzione generalizzata. Nella definizione rientra ovviamente anche il caso in cui u sia una distribuzione regolare per cui esiste una corrispondente funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Ci limiteremo d'ora in poi al caso di operatori differenziali a coefficienti costanti L:

$$\mathsf{L} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Vogliamo dare la definizione di *soluzione fondamentale*.

Definizione 2.58 (Soluzione fondamentale). Dato un operatore differenziale L lineare a coefficienti costanti, diremo che la distribuzione $e \in \mathscr{D}'$ è *soluzione fondamentale* dell'operatore dato se è soluzione in senso generalizzato dell'equazione

$$\mathsf{L}e = \delta,$$

cioè se

$$\forall \varphi \in \mathscr{D} : \ \langle \mathsf{L}e, \varphi \rangle = \varphi(0). \qquad \diamond$$

Proposizione 2.59. *Le soluzioni fondamentali di* L*, se esistono, sono molteplici.*

Dimostrazione. Intanto cerchiamo una soluzione dell'equazione omogenea associata. Sia $\xi \in \mathbb{C}^n$ soluzione di $\mathsf{L}(\xi) = 0$. Allora per ogni $c \in \mathbb{C}$ la funzione $f(x) = c \exp(x \cdot \xi)$ soddisfa

$$\partial^\alpha f(x) = c\, \partial^\alpha \exp(x \cdot \xi) = c\, \xi^\alpha \exp(x \cdot \xi) = \xi^\alpha f(x)$$

e dunque $\mathsf{L}f(x) = f\mathsf{L}(\xi) = 0$.

Ora, se indichiamo con $e_0(x)$ una particolare soluzione fondamentale, si verifica immediatamente che ogni distribuzione

$$e(x) = e_0(x) + f(x)$$

è soluzione fondamentale per l'operatore dato. □

Per la determinazione delle soluzioni fondamentali ci si può anche avvalere della trasformata di Fourier.

Teorema 2.60. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una distribuzione temperata* $e \in \mathscr{S}'$ *sia soluzione fondamentale per un operatore differenziale* L *è che la sua trasformata* $\hat{e}$ *soddisfi l'equazione*

$$\mathsf{L}(2\pi i \xi) \hat{e}(\xi) = 1. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Infatti, sia $e \in \mathcal{S}'$ soluzione di

$$\mathsf{L}e = \delta.$$

Applicando la trasformata di Fourier al primo membro si ha

$$\mathscr{F}[\mathsf{L}e] = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha \mathscr{F}[\partial^\alpha e] = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha (2\pi i\xi)^\alpha \mathscr{F}[e] = \mathsf{L}(2\pi i\xi)\hat{e}(\xi),$$

e quindi per l'Esempio 2.56 segue la tesi.

Viceversa, se $g = \hat{e}$ è soluzione dell'equazione (2.2), per la relazione precedente e per l'Esempio 2.56 si ha

$$\mathscr{F}[\mathsf{L}e - \delta] = 0.$$

Ma allora per l'iniettività della trasformata di Fourier si ha anche $\mathsf{L}e = \delta$. □

Le soluzioni fondamentali dell'operatore L consentono di costruire le soluzioni dell'equazione differenziale lineare non omogenea

$$\mathsf{L}u = f.$$

Teorema 2.61 (Teorema fondamentale della soluzione fondamentale). *Se $e \in \mathscr{D}'$ è soluzione fondamentale per l'operatore L e $f \in \mathscr{D}'$ è tale che esiste la convoluzione $e * f$ in $\mathscr{D}'$, allora esiste la soluzione dell'equazione $\mathsf{L}u = f$ ed è data da*

$$u = e * f.$$

Dimostrazione. Sostituendo l'espressione di u nel primo membro dell'equazione si ha

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha \partial^\alpha (e * f),$$

e quindi per le proprietà della derivazione di una convoluzione si ottiene

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha \partial^\alpha (e * f) = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha \partial^\alpha e \right) * f = \mathsf{L}e * f = \delta * f = f.$$

□

Teorema 2.62 (Unicità). *Sia e una soluzione fondamentale per l'operatore L e sia $f \in \mathscr{D}'$. Allora l'equazione differenziale $\mathsf{L}u = f$ ammette al più una soluzione nella classe delle distribuzioni in $\mathscr{D}'$ per cui esiste la convoluzione con e.*

Dimostrazione. Siano u_1, u_2 due soluzioni di $\mathsf{L}u = f$ che ammettono convoluzione con e. Allora

$$u_1 - u_2 = (u_1 - u_2) * \delta = (u_1 - u_2) * \mathsf{L}e = \mathsf{L}(u_1 - u_2) * e = (f - f) * e = 0.$$

Si noti che il passaggio $u * \mathsf{L}e = \mathsf{L}u * e$ è possibile solo se $u * e$ esiste. □

In vista della determinazione di soluzioni fondamentali per alcuni importanti operatori differenziali conviene studiare il caso dell'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti in una variabile.

Proposizione 2.63. *Dato l'operatore differenziale di ordine k lineare a coefficienti costanti nella variabile t*

$$\mathsf{L}u = \sum_{j=0}^{k} a_j \frac{d^j u}{dt^j}, \quad a_k \neq 0,$$

una soluzione fondamentale è data da

$$e(t) = h(t)z(t),$$

dove $h(t)$ è la funzione di Heaviside e $z(t)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathsf{L}z = 0 \\ \dfrac{d^j z}{dt^j}(0) = 0 \quad \textit{per } j = 0, 1, 2, \ldots, k-2 \\ \dfrac{d^{(k-1)} z}{dt^{(k-1)}}(0) = \dfrac{1}{a_k}. \end{cases}$$

Dimostrazione. Tenendo presente che la derivata nel senso delle distribuzioni di h è δ, si ha:

$$\langle e', \varphi \rangle = -\langle e, \varphi' \rangle = -\langle hz, \varphi' \rangle = -\langle h, z\varphi' \rangle = -\langle h, (z\varphi)' - z'\varphi \rangle = \langle \delta, z\varphi \rangle + \langle h, z'\varphi \rangle.$$

Tenendo allora presente che per le condizioni iniziali date sopra si ha $z(0) = 0$, segue

$$\langle e', \varphi \rangle = \langle h, z'\varphi \rangle.$$

Procedendo con le derivate successive, sempre tenendo presenti le condizioni iniziali su z e sulle sue derivate, si trova

$$\begin{aligned} &\frac{d^j}{dt^j} e(t) = h(t) \frac{d^j}{dt^j} z(t), \quad \text{per } j = 1, 2, \ldots, k-1 \\ &\frac{d^k}{dt^k} e(t) = h(t) \frac{d^k}{dt^k} z(t) + \frac{1}{a_k} \delta \end{aligned}$$

per cui in definitiva si ha effettivamente:

$$\mathsf{L}e(t) = h(t)\mathsf{L}z(t) + \delta = \delta.$$

□

Osservazione 2.64 (Casi particolari). In particolare gli operatori

$$\frac{d}{dt} + a \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2$$

ammettono rispettivamente le seguenti soluzioni fondamentali:

$$e(t) = h(t)e^{-at} \qquad \text{e} \qquad e(t) = h(t)\frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

★

2.6 Esercizi

Alcuni esercizi provengono dal bel libro [Friedlander-Joshi].

Esercizio 9. Per $n = 1$ si definisce il *valore principale* di $1/x$ in questo modo:

$$\forall \varphi \in \mathscr{D} : \quad \langle PV(1/x), \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right).$$

Si dimostri che $PV(1/x)$ è una distribuzione.

[Suggerimento: si faccia un'integrazione per parti.]

Esercizio 10. Si mostri che la distribuzione dell'esercizio precedente si può anche definire come

$$\forall \varphi \in \mathscr{D} : \quad \langle PV(1/x), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x)\, dx.$$

Esercizio 11. Si dimostri la seguente caratterizzazione alternativa delle distribuzioni:
$f \in \mathscr{D}'$ se e solo se f è lineare su $\mathscr{D}$ e per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ esistono $C \geqslant 0, N \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}', \ \operatorname{supt} \varphi \subseteq K : \quad |\langle f, \varphi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant N} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Se si può prendere lo stesso $N \in \mathbb{N}$ per ogni compatto K, il più piccolo tra questi N viene chiamato *ordine* della distribuzione.

Suggerimento: per la parte "$\Rightarrow$" si proceda per assurdo costruendo la successione

$$\psi_N = \varphi_N / \Big(N \sum_{|\alpha| \leqslant N} \|\partial^\alpha \varphi_N\|_\infty \Big),$$

dove φ_N è tale che $\langle f, \varphi_N \rangle \geqslant N \sum_{|\alpha| \leqslant N} \|\partial^\alpha \varphi_N\|_\infty$.

Esercizio 12. Con riferimento all'esercizio precedente, si dimostri che δ ha ordine 0. Che ordine ha $PV(1/x)$?

Esercizio 13. Sia $\rho \in \mathscr{D}$ tale che

$$\rho \geqslant 0, \quad \operatorname{supt} \rho \subseteq \{|x| \leqslant 1\}, \quad \int \rho(x)\, dx = 1$$

e sia $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$. Si dimostri che $T_{\rho_\varepsilon} \to \delta$ nel senso delle distribuzioni.

Capitolo 3

L'operatore di Laplace

In questo capitolo studieremo alcune proprietà dell'operatore di Laplace. Denoteremo con $B_r(x)$ la palla aperta di centro x e raggio r, e con $S_r(x)$ il suo bordo. Utilizzeremo spesso una formula che viene dal cambio di variabili nell'integrazione: ponendo $y = r\omega$ e tenendo conto che la misura di superficie $d\sigma$ è $(n-1)$-dimensionale, si dimostra che

$$\int_{S_r(0)} f(y)\, d\sigma(y) = r^{n-1} \int_{S_1(0)} f(r\omega)\, d\sigma(\omega)$$

e dunque anche che

$$\int_{B_r(0)} f(x)\, dx = \int_0^R \int_{S_r(0)} f(x)\, d\sigma(x) dr = \int_0^R r^{n-1} \int_{S_1(0)} f(r\omega)\, d\sigma(\omega) dr.$$

3.1 Soluzione fondamentale

Vogliamo trovare, nel senso delle distribuzioni, una soluzione e dell'equazione $\Delta e = \delta$.

Teorema 3.1. *Una soluzione fondamentale per l'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^n$ è data da*

$$e(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x| & \text{se } n = 1 \\ \dfrac{1}{2\pi} \log |x| & \text{se } n = 2 \\ -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} |x|^{-(n-2)} & \text{se } n \geqslant 3 \end{cases}$$

dove $\sigma_{n-1} = 2\pi^{\frac{n}{2}} / \Gamma(\frac{n}{2})$ è la misura della superficie della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ (Γ è la funzione gamma di Eulero*). In tutti i casi $e \in L^1_{loc}$, e dunque è una distribuzione regolare.*

Dimostrazione. Verifichiamo anzitutto che $e \in L^1_{loc}$ per $n \geqslant 3$. Sia K un compatto e sia $R > 0$ tale che $K \subset B_R(\mathbf{0})$. Posto $|x| = r$ ed $e(x) = -Cr^{2-n}$, si ha

$$\int_K |e(x)|\, dx \leqslant C \int_{S_1(\mathbf{0})} \int_0^R r^{2-n} r^{n-1} dr\, dS = C \int_0^R r\, dr \int_{S_1(\mathbf{0})} dS = \frac{C}{2} R^2 \sigma_{n-1} < +\infty.$$

In modo analogo si fa la verifica per $n = 2$; per $n = 1$ è ovvio, essendo $e(x)$ continua.

Per il resto fissiamoci sul caso in $\mathbb{R}^3$. Consideriamo la funzione $v(x) = 1/|x|$. Per $x \neq \mathbf{0}$ questa funzione è regolare e si ha [(1)]

$$\Delta\Big(\frac{1}{|x|}\Big) = 0.$$

Consideriamo poi un test $\varphi \in \mathscr{D}$ e prendiamo $R > 0$ in modo che $\operatorname{supt}\varphi \subset B_R(\mathbf{0})$. Dato $\varepsilon > 0$, applichiamo la formula di Green alla corona sferica $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon < |x| < R\}$ con le funzioni

$$u(x) = \varphi(x), \qquad v(x) = \frac{1}{|x|}.$$

Tenendo presente che $\Delta v = 0$ in Ω_ε e che φ e le sue derivate sono nulle su $S_R(\mathbf{0})$, ponendo $|x| = r$ si ha

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\Delta\varphi\, dx = -\int_{S_\varepsilon(\mathbf{0})} \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\, dS + \int_{S_\varepsilon(\mathbf{0})} \varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) dS,$$

e quindi anche

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\Delta\varphi\, dx = -\int_{S_\varepsilon(\mathbf{0})} \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\, dS - \int_{S_\varepsilon(\mathbf{0})} \varphi\frac{1}{\varepsilon^2}\, dS.$$

Con il cambio di variabili $x = \varepsilon\omega$, dove ω è un punto della sfera $S_1(\mathbf{0})$, si ha

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\Delta\varphi\, dx = -\int_{S_1(\mathbf{0})} \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi(\varepsilon\omega)}{\partial\varepsilon}\varepsilon^2\, dS - \int_{S_1(\mathbf{0})} \varphi(\varepsilon\omega)\frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^2\, dS. \tag{3.1}$$

Essendo $\varphi \in \mathscr{D}$, le sue derivate sono limitate, quindi dalla (3.1) per $\varepsilon \to 0$ si ottiene

$$\int \frac{1}{|x|}\Delta\varphi\, dx = -4\pi\varphi(\mathbf{0}) = -4\pi\langle\delta, \varphi\rangle.$$

Ma per definizione di laplaciano di una distribuzione vale

$$\left\langle \Delta\frac{1}{|x|}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{1}{|x|}, \Delta\varphi \right\rangle = \int \frac{1}{|x|}\Delta\varphi\, dx = -4\pi\langle\delta, \varphi\rangle,$$

quindi una soluzione fondamentale $e(x)$ è data da

$$e(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}.$$

[(1)] La verifica di questo fatto per $n = 3$ può essere fatta con un conto esplicito. Nel caso $n \geqslant 3$ si ha

$$\Delta\left(|x|^{2-n}\right) = 0.$$

Infatti: calcoliamo l'integrale su $B_R(\mathbf{0})$

$$\int_{B_R(\mathbf{0})} \Delta\left(|x|^{2-n}\right) dx = \int_0^R \int_{S_r(0)} \Delta\left(r^{2-n}\right)\, d\sigma(\xi)dr = \omega_{n-1}\int_0^R r^{n-1}\Delta\left(r^{2-n}\right)\, dr.$$

Per la formula di Green (con $v \equiv 1$), il primo membro si può anche scrivere come

$$\int_{B_R(\mathbf{0})} \Delta\left(|x|^{2-n}\right) dx = \int_{S_R(\mathbf{0})} \frac{\partial}{\partial n} r^{2-n} d\sigma(\xi) = \omega_{n-1}(2-n).$$

Uguagliando si ottiene $\int_0^R r^{n-1}\Delta\left(r^{2-n}\right)\, dr = 2 - n$ da cui, derivando rispetto a R, viene la tesi.

Il caso $n = 2$ si dimostra in modo simile, partendo stavolta dalla funzione $v(x) = \log|x|$, che è armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Stessa cosa per il caso $n > 3$, partendo dalla funzione $v(x) = |x|^{2-n}$. Infine il caso $n = 1$ si può verificare facilmente ricordando l'Esempio 2.27, in cui si mostra che la δ è la derivata della funzione di Heaviside. □

Osservazione 3.2. Se invece che al punto $\mathbf{0}$ ci si vuol riferire al generico punto $\xi \in \mathbb{R}^n$ la soluzione di

$$\Delta e = \delta_\xi$$

è data da $e(x - \xi)$. In particolare, per $n = 3$

$$e(x - \xi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - \xi|}. \qquad \star$$

3.2 Rappresentazione integrale delle funzioni e potenziali

Introduciamo le definizioni dei potenziali.

Definizione 3.3 (Potenziali). Una distribuzione $V \in \mathscr{D}'$ si dice *potenziale di* $f \in \mathscr{D}'$ se

$$\Delta V = f.$$

Se $f \in \mathscr{E}'$, dalle proprietà della soluzione fondamentale si ha che

$$V = e * f,$$

dove e è una soluzione fondamentale in $\mathbb{R}^n$ dell'operatore di Laplace.

In particolare, il potenziale si dice:

- potenziale *di volume* $V_\Omega[\rho]$, se $f = \rho\chi_\Omega$ con Ω limitato e $\rho \in L^1_{loc}$;[(2)]
- potenziale *di strato semplice* $V_\Gamma[\mu]$, se f è una distribuzione di strato semplice, ovvero $f = \mu\delta_\Gamma$ con Γ superficie limitata e $\mu \in L^1(\Gamma)$;
- potenziale *di strato doppio* $V'_\Gamma[\mu]$, se f è una distribuzione di strato doppio, ovvero $f = -\frac{\partial}{\partial n}(\mu\delta_\Gamma)$ con Γ superficie limitata e $\mu \in L^1(\Gamma)$. ◇

Proposizione 3.4. *I potenziali di volume, di strato semplice e di strato doppio possono esprimersi nelle forme integrali*

$$V_\Omega[\rho](x) = [e * \chi_\Omega\rho](x) = \int_\Omega \rho(\xi)e(x - \xi)\, d\xi,$$
$$V_\Gamma[\mu](x) = \int_\Gamma \mu(\xi)e(x - \xi)\, d\sigma(\xi),$$
$$V'_\Gamma[\mu](x) = \int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial e}{\partial n}(x - \xi)\, d\sigma(\xi).$$

[(2)] Indichiamo con χ_Ω la funzione caratteristica di Ω.

Dimostrazione. La prima formula è ovvia.

Essendo Γ limitata le due distribuzioni di strato semplice e di strato doppio sono a supporto compatto e quindi come si è visto nella Definizione 2.41 per $V_\Gamma[\mu]$ si avrà

$$\langle V_\Gamma[\mu], \varphi\rangle = \langle e * \mu\delta_\Gamma, \varphi\rangle = \langle \mu\delta_\Gamma(\xi) \otimes e(y), \varphi(\xi + y)\rangle\,.$$

Ma allora essendo anche $e \in L^1_{loc}$ si ha

$$\begin{aligned}\langle V_\Gamma[\mu], \varphi\rangle &= \langle \mu\delta_\Gamma, \langle e(y), \varphi(\xi + y)\rangle\rangle \\ &= \left\langle \mu\delta_\Gamma, \int e(y)\varphi(\xi + y)\, dy \right\rangle \\ &= \int_\Gamma \mu(\xi) \int e(y)\varphi(\xi + y)\, dy d\sigma(\xi).\end{aligned}$$

Allora facendo la posizione $\xi + y = x$ e applicando il teorema di Fubini si ottiene

$$\langle V_\Gamma[\mu], \varphi\rangle = \int_\Gamma \mu(\xi) \int e(\xi - x)\varphi(x)\, dx d\sigma(\xi) = \int \varphi(x) \int_\Gamma \mu(\xi) e(x - \xi) d\sigma(\xi) dx,$$

da cui segue

$$V_\Gamma[\mu](x) = \int_\Gamma \mu(\xi) e(x - \xi)\, d\sigma(\xi).$$

Per il potenziale di doppio strato si procede in modo analogo. □

L'introduzione della soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace ci permette di introdurre una notevole formula di rappresentazione delle funzioni di classe C^2.

Teorema 3.5 (Formula dei potenziali). *Consideriamo un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato con frontiera $\partial\Omega$ regolare. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Per ogni punto $x \in \Omega$ vale la formula*

$$u(x) = V_\Omega\left[\Delta u\right](x) - V_{\partial\Omega}\left[\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}\right](x) + V'_{\partial\Omega}\left[\left.u\right|_{\partial\Omega}\right](x).$$

Dimostrazione. Applichiamo la formula di Green con $v(\xi) = e(\xi - x) = e_x(\xi)$ in $\Omega_\varepsilon = \Omega\backslash\overline{B}_\varepsilon(x)$ con ε abbastanza piccolo:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} \left[e_x(\xi)\Delta u - u(\xi)\Delta e_x(\xi)\right] d\xi = &\int_{\partial\Omega} \left[e_x(\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi) - u(\xi)\frac{\partial e_x}{\partial n}(\xi)\right] d\sigma(\xi) \\ &- \int_{S_\varepsilon(x)} \left[e_x(\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi) - u(\xi)\frac{\partial e_x}{\partial n}(\xi)\right] d\sigma(\xi),\end{aligned}$$

dove il secondo integrale di bordo presenta un segno negativo perché è scritto per la normale *esterna* alla sfera.

Tenendo presente che $\Delta e_x = 0$ in Ω_ε, il primo membro tende a $V_\Omega[\Delta u]$ per $\varepsilon \to 0$. Quindi il teorema è dimostrato se facciamo vedere che

$$-\int_{S_\varepsilon(x)} \left[e_x(\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi) - u(\xi)\frac{\partial e_x}{\partial n}(\xi)\right] d\sigma(\xi) \to u(x) \quad \text{per } \varepsilon \to 0.$$

Per semplicità, ci mettiamo nel caso $n \geqslant 3$ (il caso $n = 1$ è semplice, e il caso $n = 2$ può essere affrontato in modo analogo). Con il cambiamento di variabili $\xi - x = \varepsilon\omega$ trasformiamo l'integrale su $S_\varepsilon(x)$ in un integrale sulla sfera unitaria $S_1(\mathbf{0})$:

$$\begin{aligned} -\int_{S_\varepsilon(x)} \left[e_x(\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi) - u(\xi)\frac{\partial e_x}{\partial n}(\xi) \right] d\sigma(\xi) \\ = \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} \left[\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(\xi) + u(\xi)\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}} \right] d\sigma(\xi) \\ = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{S_1(\mathbf{0})} \left[\frac{\varepsilon}{(n-2)}\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(x+\varepsilon\omega) + u(x+\varepsilon\omega) \right] d\sigma(\omega). \end{aligned}$$

Se ora mandiamo $\varepsilon \to 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} &\int_{S_1(\mathbf{0})} \varepsilon\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(x+\varepsilon\omega)\, d\sigma(\omega) \to 0 \\ &\int_{S_1(\mathbf{0})} u(x+\varepsilon\omega)\, d\sigma(\omega) \to \sigma_{n-1}u(x). \end{aligned}$$

□

La formula data sopra è notevole in quanto permette di determinare la funzione u a partire dalla conoscenza di Δu in Ω e di u e $\partial u/\partial n$ sul bordo $\partial\Omega$.

Osservazione 3.6. Con i risultati della Proposizione 3.4, la formula introdotta nel Teorema 3.5 per $\mathbb{R}^3$ può esprimersi nel modo seguente:

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\left[\int_\Omega \frac{\Delta u(\xi)}{|\xi - x|}\, d\xi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\frac{1}{|\xi - x|}\, d\sigma(\xi) + \int_{\partial\Omega} u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\xi - x|}\, d\sigma(\xi) \right]. \qquad \star$$

Proposizione 3.7. *Nelle ipotesi del Teorema 3.5 con $n = 3$, per $x \notin \Omega$ si ha*

$$\int_\Omega \Delta u(\xi) e(x-\xi)\, d\xi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\xi) e(x-\xi)\, d\sigma(\xi) + \int_{\partial\Omega} u(\xi)\frac{\partial e}{\partial n}(x-\xi)\, d\sigma(\xi) = 0.$$

Dimostrazione. Basta applicare la formula di Green ad Ω. In questo caso non occorre isolare il punto x perché è esterno ad Ω. □

3.3 Funzioni armoniche

Definizione 3.8 (Funzioni armoniche). Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Diremo che la funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è armonica in Ω se $u \in C^2(\Omega)$ e se $\Delta u(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$. ◇

Proposizione 3.9. *Dalla Formula dei potenziali 3.5 se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ è armonica allora vale*

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\xi) e(x-\xi)\, d\sigma(\xi) + \int_{\partial\Omega} u(\xi)\frac{\partial e}{\partial n}(x-\xi)\, d\sigma(\xi).$$

In particolare, nel caso $n = 3$ si ha

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\frac{1}{|\xi - x|}\, d\sigma(\xi) - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\xi - x|}\right) d\sigma(\xi).$$

Dalla espressione data sopra si deduce l'importante proprietà che le funzioni armoniche sono funzioni analitiche.

Teorema 3.10. *Sia Ω aperto in $\mathbb{R}^n$, se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è armonica e $u \in C^1(\overline{\Omega})$, allora u è analitica in Ω.*

Dimostrazione. La funzione $e(x - \xi)$ è analitica per $\xi \neq x$, quindi la tesi segue dalla formula dei potenziali per le funzioni armoniche data sopra, in quanto gli integrali a secondo membro sono estesi al bordo $\partial\Omega$. □

La Proposizione 3.9 ci consente di introdurre una proprietà fondamentale delle funzioni armoniche. D'ora in poi supporremo per comodità $n = 3$, anche se i risultati valgono per ogni n.

Teorema 3.11 (Teorema del valor medio). *Sia $x \in \mathbb{R}^3$, $R > 0$, u armonica in $B_R(x)$ e continua su $\overline{B_R(x)}$. Allora si ha*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R(x)} u(\xi)\, d\sigma(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(\mathbf{0})} u(x + R\omega)\, d\sigma(\omega).$$

Dimostrazione. La seconda espressione si ottiene dalla prima con il cambiamento di variabili $\xi = x + R\omega$ con $\omega \in S_1(\mathbf{0})$.

Per ottenere la prima espressione applichiamo la Proposizione 3.9 alla sfera $S_r(x)$, con $r < R$. Tenendo presente che su detta sfera

$$\frac{1}{|\xi - x|} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\xi - x|}\right) = -\frac{1}{r^2}$$

si ottiene

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r} \int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\, d\sigma(\xi) + \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x)} u(\xi)\, d\sigma(\xi),$$

ma il primo termine è nullo: basta applicare il Teorema della Divergenza a $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$ su $B_r(x)$. Infine si passa al limite per $r \to R$ e si ha la tesi. □

Corollario 3.12. *Il teorema del valor medio si può dare anche nella seguente forma*

$$u(x) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{B_R(x)} u(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \int_{B_1(\mathbf{0})} u(x + R\eta)\, d\eta.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\int_{B_R(x)} u(\xi)\, d\xi = \int_0^R \int_{S_r(x)} u(\xi)\, d\sigma(\xi) dr.$$

Per il teorema del valor medio, l'integrale interno risulta $4\pi r^2 u(x)$, dunque l'integrale doppio viene $4\pi u(x) R^3/3$. □

Vale anche il teorema inverso.

Teorema 3.13 (Teorema inverso del valor medio). *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^3$ e $u \in C^2(\Omega)$. Se per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\rho > 0$ tale che $\overline{B_\rho(x)} \subset \Omega$ si ha*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{S_\rho(x)} u(\xi)\, d\sigma(\xi),$$

allora u è armonica in Ω.

Dimostrazione. Dal Teorema della Divergenza si ha

$$\int_{B_\rho(x)} \Delta u(\xi)\, d\xi = \int_{S_\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\, d\sigma(\xi) = \int_{S_\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial r}(\xi(r))\bigg|_{r=\rho} d\sigma(\xi),$$

dove r è la coordinata radiale di un sistema centrato in x. Con la posizione $\xi = x + \rho\omega$ si ha

$$\int_{B_\rho(x)} \Delta u(\xi)\, d\xi = \int_{S_1(\mathbf{0})} \frac{\partial u}{\partial r}(x + r\omega)\bigg|_{r=\rho} \rho^2 d\sigma(\omega) =$$
$$= \rho^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[\int_{S_1(\mathbf{0})} u(x + r\omega)\, d\sigma(\omega)\right]_{r=\rho} = \rho^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[4\pi u(x)\right]_{r=\rho} = 0.$$

Per l'arbitrarietà di $B_\rho(x)$, dato che Δu è continua, ne viene che $\Delta u = 0$. □

Osservazione 3.14. Il teorema inverso può essere dimostrato anche se è verificata la formulazione del teorema del valor medio data nel Corollario 3.12. ★

Il concetto di funzione armonica può essere generalizzato secondo la seguente definizione.

Definizione 3.15. Una distribuzione $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ è armonica in senso generalizzato in Ω se verifica l'equazione di Laplace in senso debole, ossia se

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega): \quad \langle u, \Delta\varphi \rangle = 0. \qquad \diamond$$

Questa generalizzazione comunque non comporta una effettiva estensione per il seguente teorema.

Teorema 3.16 (Lemma di H. Weyl). *Una distribuzione armonica in senso generalizzato in Ω è una distribuzione regolare associata a una funzione armonica in senso classico.*

Idea della dimostrazione: Si prende un'approssimazione dell'identità φ_ε e si pone $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$, e dunque $u_\varepsilon \in C^\infty$ e $\Delta u_\varepsilon = 0$. Poi si scrive il teorema della media per u_ε e si cerca di passare al limite.

Dimostrazione. Vediamo per semplicità il caso $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia

$$\Omega_\varepsilon = \left\{x : \overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega\right\}.$$

Prendiamo

$$\varphi \in \mathscr{D}\big(B_1(\mathbf{0})\big) \quad \text{con} \quad \int \varphi(x)\, dx = 1,$$

e poniamo

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-3}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

La funzione

$$u_\varepsilon(x) = \big(u * \varphi_\varepsilon\big)(x) = \int u(x - \xi)\varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi$$

è ben definita e si ha $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Per la definizione di convoluzione $\forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega_\varepsilon)$ si ha

$$\langle \Delta u_\varepsilon, \psi \rangle = \langle u * \varphi_\varepsilon, \Delta\psi \rangle = \big\langle u(x), \big\langle \varphi_\varepsilon(y), \Delta\psi(x + y)\big\rangle\big\rangle.$$

Essendo φ_ε una funzione si ha anche

$$\big\langle \Delta u_\varepsilon, \psi \big\rangle = \left\langle u, \Delta \int \varphi_\varepsilon(y)\psi(x + y)\, dy \right\rangle.$$

Facciamo la posizione

$$\xi_\varepsilon(x) = \int \eta(y)\varphi_\varepsilon(y)\psi(x+y)\,dy$$

Questa funzione è di classe C^∞ perché lo è ψ, e ha supporto compatto in Ω in quanto φ_ε ha supporto in $B_\varepsilon(y)$. Quindi $\xi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\Omega)$ e si ha

$$\langle \Delta u_\varepsilon, \psi \rangle = \langle u, \Delta \xi_\varepsilon \rangle = 0$$

per le ipotesi fatte su u. Ora u_ε è regolare e armonica in senso classico per cui per il teorema della media si ha

$$(u * \varphi_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_{B_r(x)} (u * \varphi_\varepsilon)(y)\,dy \tag{3.2}$$

per $x \in \Omega_\varepsilon$ ed r abbastanza piccolo. Ma per il teorema di approssimazione per convoluzione 2.33 $u * \varphi_\varepsilon \to u$ uniformemente su ogni compatto in Ω. Allora per la (3.2) u soddisfa la proprietà del valor medio e quindi per l'inverso del teorema del valor medio u è armonica in senso classico. □

3.4 Principio del massimo

Una conseguenza importante del teorema del valor medio è il cosiddetto principio del massimo.

Teorema 3.17 (Principio del massimo). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è armonica e se*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = M < +\infty$$

allora si ha la seguente alternativa:

- *o $u(x) < M$ per ogni $x \in \Omega$*
- *o $u \equiv M$ costante.*

Dimostrazione. Facciamo il caso $n = 3$. Poiché $\{M\}$ è chiuso e u è continua l'insieme

$$u^{-1}(\{M\})$$

è chiuso. Vogliamo mostrare che è anche aperto. Per assurdo, supponiamo che esista $x \in u^{-1}(\{M\})$ tale che per ogni sfera $B_r(x) \subset \Omega$ esista $\xi \in B_r(x)$ tale che $u(\xi) < M$. Poiché u è continua, esisterà un intorno $U \subset B_r(x)$ di ξ in cui $u(\xi) < M$ e quindi per il teorema del valor medio si avrebbe

$$\begin{aligned} M = u(x) &= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_{B_r(x)} u(y)\,dy \\ &= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \left(\int_U u(y)\,dy + \int_{B_r(x)\setminus U} u(y)\,dy \right) < \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Big(|U| + |B_r(x)\setminus U| \Big) = M \end{aligned}$$

che è assurdo. Dunque deve esserci una opportuna sfera di centro x in cui $u(\xi) = M$. Ne segue che $u^{-1}(\{M\})$ è anche aperto. Allora, dato che Ω è connesso, $u^{-1}(\{M\})$ deve essere o il vuoto o tutto Ω. □

Osservazione 3.18. La condizione che Ω sia connesso è essenziale. Infatti la funzione

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -1 \\ 1 & \text{per } x > 1, \end{cases}$$

è armonica in $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$ e $\sup u = 1$, ma né $u \equiv 1$ né $u(x) < 1$ nel suo dominio. ★

Corollario 3.19 (Principio del massimo in forma forte). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ armonica in Ω. Allora u assume il massimo e il minimo sul bordo $\partial\Omega$.*

Dimostrazione. Si ha che $\overline{\Omega}$ è compatto e quindi, per il teorema di Weierstrass, u ha massimo in $\overline{\Omega}$. Sia $\overline{\Omega'}$ la componente connessa di $\overline{\Omega}$ che contiene il punto di massimo; se il punto di massimo fosse interno, allora per il principio del massimo u sarebbe costante su Ω' e quindi, per la continuità di u, su $\overline{\Omega'}$. Quindi il massimo è raggiunto anche su $\partial\Omega'$. In modo analogo si ragiona per il minimo. □

Teorema 3.20 (di Hopf). *Sia dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con bordo $\partial\Omega$ di classe C^2 e sia data $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ con $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e armonica in Ω, non costante. Se $x \in \partial\Omega$ è punto di massimo per u allora*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_x > 0.$$

3.5 Problemi di Dirichlet e di Neumann

Possiamo ora affrontare lo studio dei problemi ai valori al bordo per l'equazione di Poisson. Introduciamo i problemi principali.

Definizione 3.21 (Problemi di Dirichlet). Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$, definiamo:

(DI) *Problema di Dirichlet interno*: date le funzioni

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{continue},$$

trovare la soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{per } x \in \Omega \\ u(x) = u_0(x) & \text{per } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

(DE) *Problema di Dirichlet esterno*: posto $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, $n \geqslant 3$, e date le funzioni

$$f : \Omega_e \to \mathbb{R}, \qquad u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{continue},$$

trovare la soluzione $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega}_e)$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{per } x \in \Omega_e \\ u(x) = u_0(x) & \text{per } x \in \partial\Omega \\ u(x) \to 0 & \text{per } |x| \to \infty. \end{cases}$$

◇

Definizione 3.22 (Problemi di Neumann). Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, con bordo $\partial\Omega$ regolare; definiamo:

(NI) *Problema di Neumann interno*: date le funzioni

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad u_1 : \partial\Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{continue},$$

trovare la soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{per } x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = u_1(x) & \text{per } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

(NE) *Problema di Neumann esterno*: posto $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ e date le funzioni

$$f : \Omega_e \to \mathbb{R}, \quad u_1 : \partial\Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{continue},$$

trovare la funzione $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{per } x \in \Omega_e \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = u_1(x) & \text{per } x \in \partial\Omega \\ u(x) \to 0 & \text{per } |x| \to \infty. \end{cases}$$

◇

Dalla formula (1.10) segue subito che i dati del problema di Neumann interno devono verificare la seguente *condizione di compatibilità*:

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} u_1(x)\, d\sigma(x).$$

Osservazione 3.23. In $\mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 3$ si può dimostrare (vedi [Folland, Proposition 2.74]) che per la soluzione dell'equazione differenziale $\Delta u = f$ su un dominio esterno vale

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |u(x)| \leqslant \frac{k}{|x|^{n-2}} \quad \text{per } |x| > R, \text{ per qualche } k, R > 0.$$

In particolare per $n = 3$ nei problemi (DE) e (NE) si può sostituire la condizione di annullamento all'infinito con la condizione equivalente

$$|u(x)| \leqslant \frac{k}{|x|} \quad \text{per } |x| > R.$$

Nel caso $n = 2$ bisogna invece richiedere che

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{|u(x)|}{|\log x|} = 0.$$

★

Mediante il Principio del massimo in forma forte è possibile dimostrare un teorema di unicità per il problema di Dirichlet.

Teorema 3.24 (di unicità per DI). *Il problema di Dirichlet interno ammette al più una soluzione.*

Dimostrazione. Supponiamo che ci siano due soluzioni u_1 e u_2. Consideriamo la differenza

$$u = u_1 - u_2.$$

Essa soddisfa l'equazione omogenea in Ω, e quindi è armonica in Ω, con condizioni omogenee al bordo

$$u(x) = 0 \quad \text{per } x \in \partial\Omega.$$

Essendo Ω limitato, per il Principio del massimo in forma forte u ha il massimo e il minimo su $\partial\Omega$, che quindi sono nulli. Ne segue che u è identicamente nulla in $\overline{\Omega}$ e quindi la tesi. □

Per il problema di Dirichlet esterno la dimostrazione del teorema di unicità è più complessa in quanto $\overline{\Omega}_e$ non è compatta.

Teorema 3.25 (di unicità per DE). *Il problema di Dirichlet esterno ammette al più una soluzione.*

Dimostrazione. Consideriamo la sfera $B_R(\mathbf{0})$ con raggio R da definire ma comunque sufficientemente grande perché sia

$$\Omega \subset B_R(\mathbf{0}).$$

Supponiamo che in Ω_e ci siano due soluzioni u_1 e u_2. Consideriamo la differenza

$$u = u_1 - u_2.$$

Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia $R > 0$ tale che $u(x) < \varepsilon$ per $|x| = R$ (questo grazie al fatto che $u(x) \to 0$). Nella regione $\Omega_R = B_R(\mathbf{0}) \cap \Omega_e$ si avrà

$$\Delta u = 0 \quad \text{per } x \in \Omega_R, \qquad u(x) = 0 \quad \text{per } x \in \partial\Omega.$$

Ora, per il Principio del massimo in forma forte, $|u(x)|$ avrà il suo massimo in $S_R(\mathbf{0}) \cup \partial\Omega$, dunque in Ω_R si avrà $|u(x)| < \varepsilon$. Preso un qualunque $x \in \Omega_e$, per R abbastanza grande si ha $x \in \Omega_R$ per cui in detto punto $|u(x)| < \varepsilon$. Ma ε è arbitraria e in quindi deve essere $u(x) = 0$, cioè $u_1(x) = u_2(x)$ per ogni $x \in \Omega_e$. □

Per i problemi di Neumann valgono risultati diversi. Ricordiamo che per Ω limitato e regolare e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ vale la formula

$$\int_\Omega u\Delta u \, dx = -\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma \tag{3.3}$$

che può essere dimostrata facilmente usando la Formula di Gauss-Green.

Teorema 3.26 (sulle soluzioni di NI). *Se Ω è connesso, due soluzioni dello stesso problema di Neumann interno differiscono per una costante.*

Dimostrazione. Siano u_1 e u_2 due soluzioni. La loro differenza $u = u_1 - u_2$ è allora soluzione del problema omogeneo con condizioni al bordo di Neumann omogenee. Dalla (3.3) si ha allora

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx = 0$$

da cui discende $\operatorname{grad} u = 0$ e $u(x) = c$ costante. □

Teorema 3.27 (di unicità per NE). *Se Ω_e è connesso, il problema di Neumann esterno ammette al più una soluzione.*

Dimostrazione. Siano u_1 e u_2 due soluzioni e poniamo $u = u_1 - u_2$. Poiché u è armonica e $u(x) \to 0$ all'infinito, grazie anche all'Osservazione 3.23 si può dimostrare che

$$|\partial_r u(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{n-1}} \quad \text{per } |x| \to \infty \qquad \text{se } n \geqslant 3$$
$$|\partial_r u(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^2} \quad \text{per } |x| \to \infty \qquad \text{se } n = 2$$

(vedi [Folland, Proposition 2.75]), quindi usando ancora la (3.3) si ha $\operatorname{grad} u = 0$ in Ω_e, ma qui per la condizione all'infinito del problema esterno si arriva a $u(x) = 0$ in Ω_e e quindi alla tesi. □

Definizione 3.28. Sia Ω un aperto limitato con bordo regolare diviso in due parti disgiunte: $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$. Siano poi

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad u_0 : \Gamma_0 \to \mathbb{R}, \quad u_1 : \Gamma_1 \to \mathbb{R},$$

tre funzioni continue. Il *problema con condizioni miste* Dirichlet-Neumann interno per l'equazione di Poisson consiste nel trovare $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{per } x \in \Omega, \\ u(x) = u_0(x) & \text{per } x \in \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = u_1(x) & \text{per } x \in \Gamma_1. \end{cases}$$

◇

Per questo problema vale il seguente teorema di unicità.

Teorema 3.29. *Se Ω è connesso e $\Gamma_0 \neq \emptyset$, allora esiste al più una soluzione per il problema con condizioni miste.*

Dimostrazione. Siano u_1 e u_2 due soluzioni dello stesso problema. Posto $u = u_1 - u_2$ per la formula (3.3) si ha

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx = 0$$

e quindi $u(x) = c$ in Ω. Ma essendo $\Gamma_0 \neq \emptyset$ deve essere $c = 0$. □

Attraverso l'applicazione del principio del massimo si possono ottenere anche risultati sulla dipendenza continua delle soluzioni dai dati al bordo.

Teorema 3.30. *Se u e v sono soluzioni per il problema di Dirichlet interno con dati al bordo rispettivamente u_0 e v_0, allora vale la relazione*

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u - v| = \max_{x\in\partial\Omega} |u_0 - v_0|,$$

che equivale a dire che l'applicazione $u_0 \longrightarrow u$ è continua nella norma $\|\cdot\|_\infty$.

Dimostrazione. Ponendo $w = u - v$ si ha che w è soluzione del problema

$$\Delta w(x) = 0 \quad \text{per } x \in \Omega$$

$$w(x) = u_0(x) - v_0(x) \quad \text{per } x \in \partial\Omega,$$

per cui la tesi discende dal Principio del massimo in forma forte. □

Il teorema vale anche per il problema esterno, ma per la dimostrazione bisogna procedere come per il teorema di unicità, introducendo la regione Ω_R e tenendo conto della condizione all'infinito.

Risultati analoghi si danno per i problemi di Neumann, supponendo però che le soluzioni siano normalizzate per togliere l'indeterminazione delle costante additiva. Non vedremo questa parte.

Esempio 3.31 (Problema di Cauchy per l'equazione di Laplace). In $\mathbb{R}^2$, consideriamo l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Cerchiamo una soluzione continua con derivate continue fino al secondo ordine nella striscia

$$\Omega = \Big\{(x, y) : \ x \in \mathbb{R}, \ -a < y < a\Big\},$$

che soddisfi sull'asse $y = 0$ le seguenti condizioni

$$u(x, 0) = 0, \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \varphi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \cos nx.$$

Si vede facilmente che la soluzione cercata è la funzione

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \cos nx \sinh ny.$$

Dal Teorema 1.9 si vede anche che la soluzione è unica. Non si ha invece la dipendenza continua dai dati. Infatti la successione $\{\varphi_n\}$ per $n \longrightarrow +\infty$ tende uniformemente a zero, in quanto

$$\|\varphi_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|e^{-\sqrt{n}} \cos nx\right| = e^{-\sqrt{n}}.$$

Invece, la successione delle soluzioni $\{u_n\}$ è divergente: la norma del sup di u_n è

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{(x,y)\in\Omega} \left| \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \cos nx \sinh ny \right| = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n} \sinh na,$$

che per $n \to +\infty$ tende a $+\infty$. ⋆

Possiamo ora mostrare che per affrontare il problema di Dirichlet, grazie alla linearità, ci si può avvalere di risultati di sovrapposizione di effetti. Teoremi analoghi valgono anche per il problema di Neumann.

Proposizione 3.32. *Siano $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Siano v e w, con $v, w : \Omega \to \mathbb{R}$ le soluzioni dei seguenti problemi di Dirichlet*

$$\Delta v(x) = f(x) \quad per\ x \in \Omega; \qquad v(x) = 0 \quad per\ x \in \partial\Omega$$

$$\Delta w(x) = 0 \quad per\ x \in \Omega; \qquad w(x) = u_0(x) \quad per\ x \in \partial\Omega$$

allora $u = v + w$ è soluzione del problema

$$\Delta u(x) = f(x) \quad per\ x \in \Omega; \qquad u(x) = u_0(x) \quad per\ x \in \partial\Omega.$$

Le proposizioni seguenti mostrano che il problema di Laplace ($f = 0$) e il problema di Dirichlet omogeneo ($u_0 = 0$) sono riconducibili l'uno all'altro, almeno in certi casi. Le dimostrazioni sono lasciate per esercizio.

Proposizione 3.33. *Supponiamo che $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ammetta una estensione $\tilde{u}_0$ su Ω di classe C^2 e che v soddisfi il problema*

$$\Delta v(x) = -\Delta \tilde{u}_0(x) \quad per\ x \in \Omega; \qquad v(x) = 0 \quad per\ x \in \partial\Omega,$$

allora $u = \tilde{u}_0 + v$ risolve il problema

$$\Delta u(x) = 0 \quad per\ x \in \Omega; \qquad u(x) = u_0(x) \quad per\ x \in \partial\Omega.$$

Proposizione 3.34. *Sia w una soluzione del problema*

$$\Delta w(x) = 0 \quad per\ x \in \Omega \qquad w = -e * (f\chi_\Omega) \quad per\ x \in \partial\Omega,$$

allora $u = w + e * (f\chi_\Omega)$ è soluzione del problema

$$\Delta u(x) = f(x) \quad per\ x \in \Omega; \qquad u(x) = 0 \quad per\ x \in \partial\Omega.$$

3.6 La funzione di Green per il problema di Dirichlet

Definizione 3.35. Sia dato un aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e supponiamo che per ogni $x \in \Omega$ esista la soluzione $g_x(\xi)$ del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_\xi g_x(\xi) = 0 & \text{per } \xi \in \Omega, \\ g_x(\xi) = -e(\xi - x) & \text{per } \xi \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Definiamo la *funzione di Green*

$$\mathcal{G}(x,\xi) = g_x(\xi) + e(\xi - x)$$

e notiamo che $\mathcal{G}(x,\cdot) \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si verifica che $\mathcal{G}(x,\xi)$ soddisfa, nel senso delle distribuzioni, l'equazione

$$\Delta_\xi \mathcal{G}(x,\cdot) = \delta_x$$

e la condizione al contorno

$$\mathcal{G}(x,\cdot) = 0 \quad \text{su } \partial\Omega. \qquad \diamond$$

Per il Teorema di unicità 3.24, se la funzione di Green esiste, è unica. Nel caso $n = 3$ la funzione di Green è data da

$$\mathcal{G}(x,\xi) = g_x(\xi) - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\xi - x|}.$$

Proposizione 3.36. *La funzione di Green è simmetrica, cioè*

$$\mathcal{G}(x,y) = \mathcal{G}(y,x).$$

Dimostrazione. L'idea è applicare la formula di Green alle funzioni $\mathcal{G}(x,\cdot)$ e $\mathcal{G}(y,\cdot)$. Bisogna però fare attenzione alle singolarità.

Fissati $x \neq y \in \Omega$ e scelto $\varepsilon > 0$ in modo che $\overline{B}_\varepsilon(x), \overline{B}_\varepsilon(y) \subset \Omega$ e $\overline{B}_\varepsilon(y) \cap \overline{B}_\varepsilon(y) = \varnothing$, consideriamo il dominio

$$\Omega_\varepsilon(x,y) = \Omega \backslash \left(\overline{B}_\varepsilon(x) \cup \overline{B}_\varepsilon(y)\right)$$

e applichiamo a tale dominio la formula di Green con le funzioni $\mathcal{G}(x,\cdot)$ e $\mathcal{G}(y,\cdot)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\varepsilon(x,y)} \left[\mathcal{G}(x,\xi)\Delta\mathcal{G}(y,\xi) - \mathcal{G}(y,\xi)\Delta\mathcal{G}(x,\xi)\right] d\xi \\
&= \int_{\partial\Omega} \left[\mathcal{G}(x,\xi)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n}(y,\xi) - \mathcal{G}(y,\xi)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n}(x,\xi)\right] d\sigma(\xi) \\
&- \int_{S_\varepsilon(x)} \left[\mathcal{G}(x,\xi)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n}(y,\xi) - \mathcal{G}(y,\xi)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n}(x,\xi)\right] d\sigma(\xi) \\
&- \int_{S_\varepsilon(y)} \left[\mathcal{G}(x,\xi)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n}(y,\xi) - \mathcal{G}(y,\xi)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n}(x,\xi)\right] d\sigma(\xi),
\end{aligned}$$

dove il segno negativo sulle sfere è dovuto al fatto che consideriamo la normale esterna a ogni sfera.

L'integrale su $\Omega_\varepsilon(x,y)$ è nullo in quanto sia $\mathcal{G}(x,\xi)$ che $\mathcal{G}(y,\xi)$ sono armoniche su Ω_ε. L'integrale su $\partial\Omega$ è nullo in quanto ivi per la Definizione 3.35 le $\mathcal{G}$ sono nulle. L'integrale su $S_\varepsilon(x)$, supponendo $n = 3$, si sviluppa come segue

$$\begin{aligned}
&\int_{S_\varepsilon(x)} \left[\mathcal{G}(x,\xi)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n}(y,\xi) - \mathcal{G}(y,\xi)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n}(x,\xi)\right] d\sigma(\xi) \\
&\quad = \int_{S_1(\mathbf{0})} \left[g(x,x+\varepsilon\omega)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n}(y,x+\varepsilon\omega) - \mathcal{G}(y,x+\varepsilon\omega)\frac{\partial g}{\partial n}(x,x+\varepsilon\omega)\right]\varepsilon^2\, d\sigma(\omega) \\
&\quad -\frac{1}{4\pi}\int_{S_1(\mathbf{0})} \left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n}(y,x+\varepsilon\omega) + \mathcal{G}(y,x+\varepsilon\omega)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\right)_{\rho=\varepsilon}\right]\varepsilon^2\, d\sigma(\omega) \\
&= \varepsilon^2 \int_{S_1(\mathbf{0})} \Phi(x,y,\varepsilon,\omega)d\sigma(\omega) - \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{S_1(\mathbf{0})} \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n}(y,x+\varepsilon\omega)d\sigma(\omega) + \frac{1}{4\pi}\int_{S_1(\mathbf{0})} \mathcal{G}(y,x+\varepsilon\omega)d\sigma(\omega).
\end{aligned}$$

Tenendo presente che

$$\Phi(x, y, \varepsilon, \omega), \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n}(y, x + \varepsilon\omega), \quad \mathcal{G}(y, x + \varepsilon\omega)$$

per ε abbastanza piccolo sono funzioni regolari, dall'espressione data sopra si ha che per $\varepsilon \to 0$ il primo e il secondo termine vanno a zero e il terzo tende a $\mathcal{G}(y, x)$.

In modo analogo si può trattare l'integrale su $S_\varepsilon(y)$. In definitiva, per $\varepsilon \to 0$, tenendo conto che $\mathcal{G}(y, \xi)$ nell'integrale su $S_\varepsilon(x)$ ha segno diverso rispetto a $\mathcal{G}(x, \xi)$ nell'integrale su $S_\varepsilon(y)$ si ottiene

$$\mathcal{G}(y, x) - \mathcal{G}(x, y) = 0$$

cioè la proprietà di simmetria cercata. □

Attraverso la funzione di Green relativa a un dominio Ω siamo in grado di dare una espressione della soluzione del problema di Dirichlet su tale dominio.

Teorema 3.37. *Se esiste la funzione di Green per il dominio Ω, allora la soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{per } x \in \Omega, \\ u(x) = u_0(x) & \text{per } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

esiste ed è data dall'espressione

$$u(x) = \int_\Omega f(\xi)\mathcal{G}(x, \xi)\, d\xi + \int_{\partial\Omega} u_0(\xi)\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n}(x, \xi)\, d\sigma(\xi). \tag{3.4}$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema nel caso speciale in cui u_0 sia di classe C^1 e si estenda a una funzione $\tilde{u}_0$ su tutto Ω di classe C^2.

Cominciamo verificando che u definita dalla (3.4) soddisfa le condizioni al contorno. La formula dei potenziali per $\tilde{u}_0$ ci dà

$$\tilde{u}_0(x) = \int_\Omega \Delta\tilde{u}_0(\xi)e(x - \xi)\, d\xi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial n}(\xi)e(x - \xi)\, d\sigma(\xi) + \int_{\partial\Omega} u_0(\xi)\frac{\partial e}{\partial n}(x - \xi)\, d\sigma(\xi)$$

e la formula di Green per $\tilde{u}_0$ e g_x, ricordando che $\Delta g_x = 0$, dà

$$0 = \int_\Omega \Delta\tilde{u}_0(\xi)g_x(\xi)\, d\xi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial n}(\xi)g_x(\xi)\, d\sigma(\xi) + \int_{\partial\Omega} u_0(\xi)\frac{\partial g_x}{\partial n}(\xi)\, d\sigma(\xi).$$

Sommando le due formule e ricordando che $\mathcal{G}$ si annulla sulla frontiera, si ottiene

$$\tilde{u}_0(x) = \int_\Omega \Delta\tilde{u}_0(\xi)\mathcal{G}(x, \xi)\, d\xi + \int_{\partial\Omega} u_0(\xi)\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n}(x, \xi)\, d\sigma(\xi).$$

In particolare, se $x \in \partial\Omega$, grazie alla simmetria di $\mathcal{G}$ si ha $\mathcal{G}(x, \xi) = 0$ per ogni $\xi \in \Omega$, e dunque

$$u_0(x) = \int_{\partial\Omega} u_0(\xi)\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n}(x, \xi)\, d\sigma(\xi).$$

Per lo stesso motivo, la formula (3.4) per $x \in \partial\Omega$ dà

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u_0(\xi)\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n}(x, \xi)\, d\sigma(\xi).$$

Quindi si ha $u(x) = u_0(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

Ora calcoliamo $\Delta u(x)$ per $x \in \Omega$ usando le distribuzioni. Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned}\langle \Delta u, \varphi\rangle = \langle u, \Delta\varphi\rangle &= \int_\Omega \left(\int_\Omega f(\xi)\mathscr{G}(x,\xi)\,d\xi + \int_{\partial\Omega} u_0(\xi)\frac{\partial \mathscr{G}}{\partial n}(x,\xi)\,d\sigma(\xi)\right)\Delta\varphi(x)\,dx \\ &= \int_\Omega f(\xi)\left(\int_\Omega \Delta\varphi(x)\mathscr{G}(x,\xi)\,dx\right)d\xi + \int_{\partial\Omega} u_0(\xi)\left(\int_\Omega \Delta\varphi(x)\frac{\partial\mathscr{G}}{\partial n}(x,\xi)\,dx\right)d\sigma(\xi).\end{aligned}$$

Per definizione di $\Delta\mathscr{G}$ si ha

$$\int_\Omega \Delta\varphi(x)\mathscr{G}(x,\xi)\,dx = \langle \Delta_\xi \mathscr{G}, \varphi\rangle = \varphi(\xi)$$

e dunque il primo addendo diventa

$$\int_\Omega f(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \langle f, \varphi\rangle.$$

Nel secondo addendo la derivata normale, visto che è fatta nella variabile ξ, si può portare fuori dall'integrale interno, e dunque

$$\int_{\partial\Omega} u_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\left(\int_\Omega \Delta\varphi(x)\mathscr{G}(x,\xi)\,dx\right)d\sigma(\xi).$$

Come prima, per $\xi \in \partial\Omega$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\int_\Omega \Delta\varphi(x)\mathscr{G}(x,\xi)\,dx\right) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\langle \Delta_\xi \mathscr{G}, \varphi\rangle\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial n}(\xi) = 0$$

essendo φ a supporto compatto. Quindi abbiamo trovato che

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega): \quad \langle \Delta u, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$$

e per la continuità di f si ha $\Delta u(x) = f(x)$ per ogni $x \in \Omega$. □

3.7 Problema di Dirichlet nella sfera. Formula di Poisson

Determiniamo la soluzione del problema di Dirichlet nella sfera in $\mathbb{R}^3$ di centro $\mathbf{0}$ e raggio R, $B_R(\mathbf{0})$, mediante la costruzione della funzione di Green.

Definizione 3.38 (Inversione sferica). Data la sfera $S_R(\mathbf{0})$ e dato il punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, si definisce *inversione sferica* di x rispetto a $S_R(\mathbf{0})$ il punto x^* sul raggio vettore di x tale che $|x^*| : R = R : |x|$. Quindi si ha

$$x^* := \frac{R^2}{|x|^2}x, \quad |x^*| = \frac{R^2}{|x|}.$$ ◇

L'inversione sferica manda punti interni alla sfera in punti esterni, e viceversa. Inoltre gode della seguente proprietà: per $\xi \in S_R(\mathbf{0})$ si ha che i triangoli $O\xi x$ e $Ox^*\xi$ sono simili (vedi Figura 3.1), per cui vale la relazione

$$\frac{R}{|x^*|} = \frac{|x-\xi|}{|x^*-\xi|}. \tag{3.5}$$

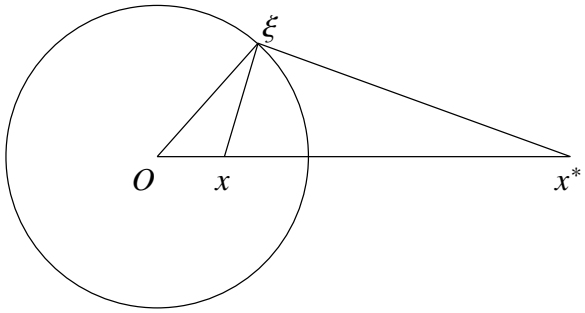

Figura 3.1: I triangoli $O\xi x$ e $Ox^*\xi$ sono simili.

Proposizione 3.39. *La funzione di Green per $B_R(\mathbf{0})$ è data da*

$$\mathcal{G}(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left[\frac{|x^*|}{R|x^*-\xi|} - \frac{1}{|x-\xi|}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|^{-1} - |x-\xi|^{-1}\right] & x \neq \mathbf{0} \\ \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{|\xi|}\right] & x = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Dimostrazione. Fissato $x \in B_R(\mathbf{0})$, la funzione

$$\xi \mapsto \frac{1}{|x^* - \xi|}$$

è armonica in $B_R(\mathbf{0})$ rispetto a ξ in quanto x^* è esterno alla sfera, dunque dalla (3.6) si ha $\Delta_\xi \mathcal{G}(x,\xi) = \delta_x(\xi)$. Inoltre dalla (3.5) discende che per $\xi \in S_R(\mathbf{0})$ si ha

$$\frac{1}{|x-\xi|} = \frac{|x^*|}{R|x^*-\xi|}, \tag{3.7}$$

e quindi

$$\mathcal{G}(x,\xi) = 0$$

per ogni $\xi \in S_R(\mathbf{0})$. □

Osservazione 3.40. Per verificare che $\mathcal{G}(x,\xi) = 0$ per $|\xi| = R$ si può anche vedere che

$$|x-\xi|^2 = |x|^2 + |\xi|^2 - 2x\cdot\xi = |x|^2 + R^2 - 2x\cdot\xi,$$
$$\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|^2 = \frac{R^2}{|x|^2}|x|^2 + \frac{|x|^2}{R^2}|\xi|^2 - 2x\cdot\xi = |x|^2 + R^2 - 2x\cdot\xi.$$

Da questo conto risulta anche che

$$\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right| = \left|\frac{R}{|\xi|}\xi - \frac{|\xi|}{R}x\right|,$$

quindi la quantità è simmetrica rispetto allo scambio tra x e ξ.

Questo può servire a dimostrare che la funzione

$$e\left(\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right)$$

è armonica sia rispetto a x che rispetto a ξ per ogni $x \neq \xi$. Nel caso di una sfera in $\mathbb{R}^n$ con n qualsiasi quindi si ha

$$\mathcal{G}(x,\xi) = \begin{cases} e(x-\xi) - e\left(\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right) & x \neq \mathbf{0} \\ e(\xi) - e(R) & x = \mathbf{0}. \end{cases} \qquad \star$$

Possiamo ora dare la soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nella sfera $B_R(\mathbf{0})$.

Proposizione 3.41 (Formula di Poisson). *La soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nella sfera $B_R(\mathbf{0})$ in $\mathbb{R}^3$ è data da*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R} \int_{S_R(\mathbf{0})} u_0(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^3}\, d\sigma(\xi). \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Applicando al nostro caso la (3.4) si ha

$$u(x) = \int_{S_R(\mathbf{0})} u_0(\xi) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n}(x,\xi)\, d\sigma(\xi). \tag{3.9}$$

Osserviamo che per $\xi \in S_R(\mathbf{0})$ si ha $\boldsymbol{n} = \xi/R$, dunque

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|a-\xi|}\right) = \frac{\xi}{R} \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{1}{|a-\xi|}\right) = \frac{\xi}{R} \cdot \frac{(a-\xi)}{|a-\xi|^3}.$$

In base alla (3.6) si ha

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{|x^*|}{R}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x^*-\xi|}\right) - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x-\xi|}\right)\right] = \frac{\xi}{4\pi R} \cdot \left[\frac{|x^*|}{R}\frac{(x^*-\xi)}{|x^*-\xi|^3} - \frac{(x-\xi)}{|x-\xi|^3}\right].$$

Poiché per $|\xi| = R$ si ha $|x||x^* - \xi|/R = |x - \xi|$, si può continuare

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi R|x-\xi|^3}\left[\frac{|x|^2}{R^2}\xi \cdot \left(\frac{R^2}{|x|^2}x - \xi\right) - \xi \cdot (x-\xi)\right] = \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R|x-\xi|^3}$$

e la dimostrazione è conclusa. □

Definizione 3.42. Il nucleo nell'integrale della formula di Poisson viene detto *nucleo di Poisson*:

$$H(x,\xi) = \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R|x-\xi|^3}. \qquad \diamond$$

Esercizio. Dimostrare che la funzione di Green per l'operatore $\frac{d^2}{dx^2}$ sull'intervallo $(0,1)$ è la funzione

$$\mathcal{G}(x,y) = \begin{cases} x(y-1) & x < y \\ y(x-1) & x > y. \end{cases}$$

Grazie alla formula di Poisson si può introdurre per le funzioni armoniche una importante disuguaglianza.

Proposizione 3.43 (Disuguaglianza di Harnack). *Se u è una funzione armonica positiva in $B_R(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^3$, allora vale la seguente disuguaglianza:*

$$\frac{R(R-|x|)}{(R+|x|)^2}u(\mathbf{0}) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R(R+|x|)}{(R-|x|)^2}u(\mathbf{0}).$$

Dimostrazione. Utilizzando la disuguaglianza $|x-\xi| \geqslant |\xi| - |x|$, dalla formula di Poisson si ha

$$u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{4\pi R}\int_{S_R(\mathbf{0})} \frac{u(\xi)}{|x-\xi|^3}d\sigma(\xi) \leqslant \frac{R^2-|x|^2}{4\pi R}\int_{S_R(\mathbf{0})} \frac{u(\xi)}{\big(|\xi|-|x|\big)^3}d\sigma(\xi)$$
$$= \frac{\big(R^2-|x|^2\big)R}{\big(R-|x|\big)^3}\frac{1}{4\pi R^2}\int_{S_R(\mathbf{0})} u(\xi)\,d\sigma(\xi) = \frac{R(R+|x|)}{(R-|x|)^2}u(\mathbf{0}),$$

che dà la seconda disuguaglianza. La prima disuguaglianza si ottiene nello stesso modo utilizzando la disuguaglianza triangolare. □

La disuguaglianza di Harnack può essere utilizzata per dimostrare il seguente teorema.

Teorema 3.44 (di Liouville). *Una funzione armonica e limitata in tutto lo spazio è necessariamente costante.*

Dimostrazione. Sia u funzione armonica in $\mathbb{R}^3$ limitata e sia c il limite inferiore, per cui $u(x) \geqslant c$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$. Consideriamo allora la disuguaglianza di Harnack per $v = u - c$. La disuguaglianza vale per R arbitrariamente grande. Evidentemente dalla disuguaglianza per $R \to \infty$ si ha

$$v(\mathbf{0}) \leqslant v(x) \leqslant v(\mathbf{0}),$$

cioè $v(x)$ deve essere costante e quindi anche $u(x)$. □

Diamo ora alcuni interessanti risultati sulle funzioni armoniche.

Teorema 3.45. *Se la successione $\{u_k\}$ di funzioni armoniche in Ω converge debolmente a $u \in C(\Omega)$, cioè se*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega): \quad \int u_k(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \to \int u(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi,$$

allora u è armonica in Ω.

Dimostrazione. Infatti dalla relazione

$$\langle \Delta u_k, \varphi\rangle = \int u_k(\xi)\,\Delta\varphi(\xi)\,d\xi = 0,$$

essendo $\Delta\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, per $k \to \infty$ si ottiene

$$\int u(\xi)\Delta\varphi(\xi)\,d\xi = 0.$$

Si ha quindi che u è armonica in senso generalizzato e pertanto, per il teorema di Weyl, è anche armonica. □

Teorema 3.46. *Data una successione $\{u_k\}$ di funzioni armoniche in Ω, aperto e limitato in $\mathbb{R}^3$, e continue in $\overline{\Omega}$, se tale successione in $\partial\Omega$ converge, allora in Ω converge uniformemente ad una funzione u armonica e continua in $\overline{\Omega}$.*

Dimostrazione. Se $\{u_k\}$ converge in $\partial\Omega$, essendo $\partial\Omega$ compatto vi converge anche uniformemente. Per il principio del massimo si ha allora

$$\max_{x\in\Omega} |u_m(x) - u_{m+p}(x)| \leqslant \max_{x\in\partial\Omega} |u_m(x) - u_{m+p}(x)|,$$

e quindi $\{u_k\}$ converge uniformemente in $\overline{\Omega}$ ad una funzione continua u. Ma la convergenza uniforme implica la convergenza debole e quindi per il teorema precedente u è armonica. □

Capitolo 4

L'operatore del calore

In questo capitolo studieremo l'operatore parabolico

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$$

dove $a \in \mathbb{R}$.

4.1 Soluzione fondamentale

Teorema 4.1. *La soluzione fondamentale dell'operatore del calore per $x \in \mathbb{R}^n$ è data da*

$$e(x,t) = \frac{h(t)}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right].$$

Dimostrazione. Dobbiamo trovare la soluzione nel senso delle distribuzioni di

$$\frac{\partial e(x,t)}{\partial t} - a^2\Delta e(x,t) = \delta(x)\otimes\delta(t) = \delta_{0\in\mathbb{R}^{n+1}}. \tag{4.1}$$

Operiamo la trasformata di Fourier $\mathscr{F}_x$ rispetto alle variabili spaziali sull'equazione (4.1). Si ha

$$\mathscr{F}_x\left[\frac{\partial e}{\partial t}\right] - a^2\mathscr{F}_x\left[\Delta e\right] = \mathscr{F}_x\left[\delta(x)\otimes\delta(t)\right]$$

Per i singoli termini si ha

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}_x\left[\delta(x)\otimes\delta(t)\right] = \mathscr{F}_x\left[\delta(x)\right]\delta(t) = \delta(t)\\
&\mathscr{F}_x\left[\frac{\partial e}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}_x\left[e\right]\\
&\mathscr{F}_x\left[\Delta e\right] = -4\pi^2|\xi|^2\mathscr{F}_x\left[e\right]
\end{aligned}$$

per cui si arriva alla seguente equazione in $\mathscr{F}_x\left[e\right]$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}_x\left[e\right] + 4\pi^2 a^2|\xi|^2\mathscr{F}_x\left[e\right] = \delta(t)$$

Come si è visto in (2.64) questa equazione ammette la soluzione

$$\mathscr{F}_x\big[e\big] = h(t)\exp\big[-4\pi^2a^2|\xi|^2t\big].$$

Allora per quanto visto nella Proposizione 2.50 e ricordando che per l'antitrasformata si ha

$$\mathscr{F}_x^{-1}\big[f(x)\big] = \mathscr{F}_x\big[f(-x)\big],$$

dall'espressione della trasformata di $e(x,t)$ data sopra si ottiene

$$e(x,t) = \mathscr{F}_\xi^{-1}\Big[h(t)\exp\big(-4\pi^2a^2|\xi|^2t\big)\Big] = \frac{h(t)}{(4\pi a^2t)^{n/2}}\exp\left[-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right]. \qquad \square$$

Proposizione 4.2. *La soluzione fondamentale dell'operatore del calore gode delle seguenti proprietà:*

i) *per $t \neq 0$ è una funzione e*

$$\forall t > 0:\ e(x,t) > 0, \qquad \forall t < 0:\ e(x,t) = 0;$$

ii) $\forall t > 0: \quad \displaystyle\int e(x,t)dx = 1;$

iii) *per $t \neq 0$ si ha $e(\cdot,t) \in \mathscr{S}$;*

iv) $\lim\limits_{t\to 0^+} e(x,t) = \delta(x)$ *nel senso delle distribuzioni in x.*

Dimostrazione. La *i)* è evidente. La *ii)* è stata vista nella Proposizione 2.50. Per la *iii)* basta tener presente l'Esempio 2.6. Dimostriamo la *iv)*. Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, tenendo presente la *ii)* si ha

$$\left|\int e(x,t)\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| = \left|\int e(x,t)\big[\varphi(x) - \varphi(0)\big]dx\right|$$

e vogliamo mostrare che tale quantità tende a 0 per $t \to 0^+$. Non basta usare il fatto che φ è limitata, serve qualcosa di più: siccome φ è anche lipschitziana (avendo derivata limitata), esiste $K_\varphi > 0$ tale che

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant K_\varphi|x|$$

per cui si deduce che

$$\left|\int e(x,t)\big[\varphi(x) - \varphi(0)\big]dx\right| \leqslant \frac{K_\varphi}{(4\pi a^2t)^{n/2}}\int \exp\left[-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right]|x|dx = \frac{K_\varphi\sigma_{n-1}}{(4\pi a^2t)^{n/2}}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2t}\right]r^n dr.$$

Con la sostituzione $r = 2|a|\sqrt{t}y$ si ha

$$\left|\int e(x,t)\big[\varphi(x) - \varphi(0)\big]dx\right| \leqslant K'_\varphi\sqrt{t}\int_0^\infty e^{-y^2}y^n du = C_\varphi\sqrt{t}.$$

Con questa disuguaglianza si ha che $e(x,t) \to \delta(x)$ per $t \to 0^+$. $\square$

4.2 Problema ai valori iniziali per l'equazione del calore

Definizione 4.3 (Problema ai valori iniziali classico). Date le funzioni $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ e $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entrambe continue il problema ai valori iniziali classico per l'equazione del calore consiste nel trovare $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ con $u(\cdot, t) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $u(x, \cdot) \in C^1(]0, \infty[)$ tale che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{per } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$ ◇

Attraverso la soluzione fondamentale introdotta sopra si possono determinare, come vedremo, soluzioni del problema ai valori iniziali in senso più generale. Consideriamo l'equazione del calore non omogenea

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x,t) = f(x,t). \tag{4.2}$$

Come si è visto in generale nel Teorema 2.61, se esiste la convoluzione a secondo membro, la funzione

$$u(x,t) = e(x,y) * f(x,t)$$

è soluzione della nostra equazione, intendendo che la convoluzione in questo caso deve essere fatta sia rispetto ad x che rispetto a t. Per impostare adeguatamente la questione conviene fissare per f opportune condizioni.

Definizione 4.4. Indicheremo con $\mathscr{M}$ la classe delle funzioni $f(x,t)$ misurabili tali che

$$\begin{gathered} f(x,t) = 0 \quad \text{per } t < 0, \\ \forall T > 0 \; \exists K_T > 0 : \quad |f(x,t)| < K_T \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{gathered}$$ ◇

Proposizione 4.5. *Se $f \in \mathscr{M}$ allora esiste per l'equazione del calore non omogenea (4.2) la soluzione $V(x,t) = e(x,t) * f(x,t)$ data da*

$$V(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi,\tau)}{\big(4\pi a^2 (t-\tau)\big)^{n/2}} \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\xi \, d\tau.$$

Inoltre si ha

$$\big|V(x,t)\big| \leqslant t \sup_{\substack{0 \leqslant \tau \leqslant t \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} \big|f(\xi,\tau)\big| \leqslant t K_T \qquad \text{per } 0 < t \leqslant T$$

e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$$V(x,t) \to 0 \quad \text{per } t \to 0^+.$$

Dimostrazione. È facile vedere che la convoluzione esiste, quindi la soluzione dell'equazione è data da

$$V(x,t) = \big(e * f\big)(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi,\tau) h(t-\tau)}{\big(4\pi a^2 (t-\tau)\big)^{n/2}} \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\xi \, d\tau.$$

Tenendo conto che $h(t-\tau) = 0$ per $\tau > t$ e che per le ipotesi fatte $f(\xi,\tau) = 0$ per $\tau < 0$, si ha

$$V(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi,\tau)}{\big(4\pi a^2 (t-\tau)\big)^{n/2}} \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\xi \, d\tau.$$

Per $t > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha allora

$$\left|V(x,t)\right| \leqslant \sup_{\substack{0\leqslant\tau\leqslant t\\ \xi\in\mathbb{R}^n}} \left|f(\xi,\tau)\right| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(4\pi a^2(t-\tau)\right)^{n/2}} \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau.$$

Ma ricordando che l'integrale in $d\xi$ su $\mathbb{R}^n$ vale 1, alla fine si ottiene

$$\left|V(x,t)\right| \leqslant t \sup_{\substack{0\leqslant\tau\leqslant t\\ \xi\in\mathbb{R}^n}} \left|f(\xi,\tau)\right|$$

e per effetto di questa disuguaglianza si ha $V(x,t) \to 0$ per $t \to 0^+$. □

Il potenziale $V(x,t)$ dato sopra determina la soluzione dell'equazione del calore non omogenea con condizioni iniziali omogenee. Dobbiamo ora affrontare il caso dell'equazione omogenea con condizioni del tipo $u(x,0) = u_0(x)$. Per affrontare questo problema partiamo dalla seguente proposizione, che riconduce le condizioni iniziali a un secondo membro singolare.

Proposizione 4.6. *Sia $u_0(x)$ misurabile e limitata in $\mathbb{R}^n$ e consideriamo il potenziale*

$$V_0(x,t) = \frac{h(t)}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int u_0(\xi) \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right] d\xi.$$

Allora V_0 soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - a^2 \Delta u(x,t) = u_0(x) \otimes \delta(t). \tag{4.3}$$

Inoltre si ha

$$\left|V_0(x,t)\right| \leqslant \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|u_0(\xi)\right| \quad \textit{per } t \geqslant 0,$$
$$\lim_{t\to 0^+} V_0(x,t) = u_0(x).$$

Dimostrazione. La soluzione nel senso delle distribuzioni dell'equazione (4.3) è data da

$$u(x,t) = e(x,t) \underset{(x,t)}{*} \left[u_0(x) \otimes \delta(t)\right] = e(x,t) \underset{x}{*} u_0(x)$$

e si verifica facilmente che $V_0(x,t)$ è proprio dato da

$$V_0(x,t) = e(x,t) \underset{x}{*} u_0(x).$$

Per $t > 0$ vale poi la relazione

$$\left|V_0(x,t)\right| \leqslant \left[\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|u_0(\xi)\right|\right] \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right] d\xi = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|u_0(\xi)\right|.$$

Ricordando infine la proprietà *iv)* della Proposizione 4.2, si ha

$$\lim_{t\to 0^+} e(x,t) \underset{x}{*} u_0(x) = \delta(x) \underset{x}{*} u_0(x) = u_0(x).$$

□

Avendo introdotto nella Proposizione 4.5 il potenziale $V(x,t)$ e nella 4.6 il potenziale $V_0(x,t)$, possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 4.7. *Se $f \in \mathscr{M}$ e u_0 è limitata in $\mathbb{R}^n$, allora la soluzione di*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x,t) = f(x,t) + u_0(x) \otimes \delta(t)$$

esiste ed è unica in $\mathscr{M}$ ed è data da

$$u(x,t) = V(x,t) + V_0(x,t).$$

La soluzione dipende da f e da u_0 con continuità, nel senso che, per $0 \leqslant t \leqslant T$, posto

$$\sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant T \\ x \in \mathbb{R}^n}} \left| f(x,t) - \tilde{f}(x,t) \right| \leqslant \varepsilon \quad e \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| u_0(x) - \tilde{u}_0(x) \right| \leqslant \varepsilon_0,$$

allora, sempre per $0 \leqslant t \leqslant T$, si ha

$$\left| u(x,t) - \tilde{u}(x,t) \right| \leqslant T\varepsilon + \varepsilon_0.$$

Dimostrazione. È una semplice applicazione delle Proposizioni 4.5 e 4.6. □

4.3 Problema misto per l'equazione del calore

Definizione 4.8. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ un dominio limitato Ω con bordo $\partial\Omega$ generalmente regolare. Indicato con T un tempo positivo fissato, introduciamo gli insiemi

$$Q_T = \Omega \times (0,T), \qquad \Omega_0 = \Omega \times \{0\}, \qquad \Omega_T = \Omega \times \{T\}, \qquad B_T = \partial\Omega \times (0,T).$$

Date le funzioni

$$f \in C(\overline{Q_T}), \qquad u_0 \in C(\overline{\Omega}), \qquad v \in C(\overline{B_T}),$$

con la relazione di compatibilità

$$v(x,0) = u_0(x) \quad \text{per } x \in \partial\Omega,$$

il problema misto per l'equazione del calore consiste nel trovare la soluzione

$$u \in C(\overline{Q_T}), \quad u(\cdot,t) \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad u(x,\cdot) \in C^1(]0,\infty[)$$

del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{per } (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{per } x \in \overline{\Omega} \\ u(x,t) = v(x,t) & \text{per } (x,t) \in \overline{B_T}. \end{cases} \tag{4.4}$$

◇

Per maggior chiarezza si veda la Figura 4.1 per il caso in cui Ω è in $\mathbb{R}^2$.

Proposizione 4.9 (Principio del massimo). *Se $f(x,t) \leqslant 0$ per $(x,t) \in \overline{Q_T}$, la soluzione $u(x,t)$ in $\overline{Q_T}$, o è tale che $u(x,t) \leqslant 0$, o assume il massimo in $\overline{\Omega_0} \cup \overline{B_T}$.*

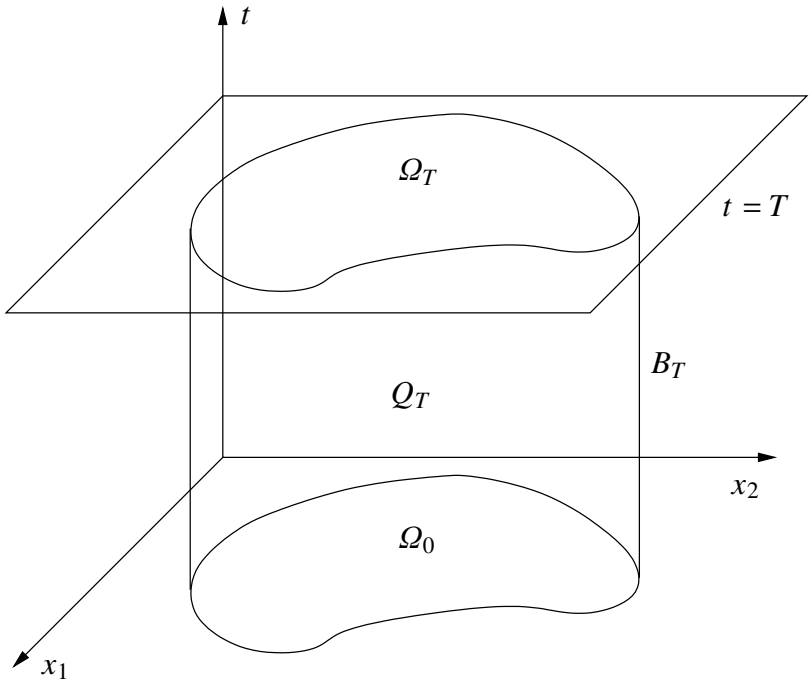

Figura 4.1: Il dominio del problema misto per l'equazione del calore.

Dimostrazione. Posto

$$m = \max_{\overline{Q_T}} \big[u(x,t)\big], \qquad \mu = \max\big[0, \max_{\overline{\Omega}_0 \cup \overline{B_T}} [u(x,t)]\big],$$

dovremo far vedere che $m \leqslant \mu$.

Supponiamo che sia $\mu < m$. Indichiamo con (x_0, t_0) il punto di massimo che sarà o in Q_T o in Ω_T. Costruiamo la funzione

$$w(x,t) = u(x,t) + \frac{m-\mu}{2T}(t_0 - t). \tag{4.5}$$

Per $0 \leqslant t \leqslant T$ si ha $t_0 - t \leqslant t_0 \leqslant T$ e quindi vale per $(x,t) \in \overline{\Omega}_0 \cup B_T$

$$w(x,t) \leqslant \mu + \frac{m-\mu}{2} = \frac{m+\mu}{2} < m.$$

D'altra parte, $w(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = m$. Ciò vuol dire che w raggiunge il suo massimo o su Ω_T o su Q_T. Indichiamo con $(\bar{x}, \bar{t})$ il punto di massimo di w. Perché si abbia un massimo in tale punto si deve avere

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w(\bar{x},\bar{t})}{\partial t} = 0, && \frac{\partial w(\bar{x},\bar{t})}{\partial x_k} = 0, && \Delta w(\bar{x},\bar{t}) \leqslant 0, && \text{se } (\bar{x},\bar{t}) \in Q_T,\\
&\frac{\partial w(\bar{x},\bar{t})}{\partial t} \geqslant 0, && \frac{\partial w(\bar{x},\bar{t})}{\partial x_k} = 0, && \Delta w(\bar{x},\bar{t}) \leqslant 0, && \text{se } (\bar{x},\bar{t}) \in \Omega_T,
\end{aligned}$$

e quindi in ogni caso

$$\left[\frac{\partial w(\bar{x},\bar{t})}{\partial t} - a^2 \Delta w(\bar{x},\bar{t}) - f(\bar{x},\bar{t})\right] \geqslant 0. \tag{4.6}$$

D'altra parte, dalla (4.5) per $(x,t) \in Q_T \cup \Omega_T$ si ha

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2\Delta w - f = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u - f + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{m-\mu}{2T}(t_0 - t)\right] = -\frac{m-\mu}{2T} < 0. \tag{4.7}$$

Da questa contraddizione si deduce $(\bar{x},\bar{t}) \notin Q_T \cup \Omega_T$. Con ciò resta dimostrato il principio del massimo. □

In modo analogo si ha il seguente risultato.

Proposizione 4.10 (Principio del minimo). *Se $f(x,t) \geqslant 0$ per $(x,t) \in Q_T$ la soluzione $u(x,t)$ in $\overline{Q_T}$, o è tale che $u(x,t) \geqslant 0$, o assume il minimo in $\overline{\Omega_0} \cup \overline{B_T}$.*

Mediante i princìpi stabiliti sopra si dimostrano i teoremi di unicità e di stabilità per le soluzioni classiche del problema misto.

Teorema 4.11 (di unicità). *La soluzione del problema misto (4.4) è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo che esistano due soluzioni $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ e consideriamo

$$\tilde{u}(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Per la linearità, $\tilde{u}(x,t)$ soddisfa il problema omogeneo, cioè con $f(x,t) = 0$, e con condizioni iniziali e al bordo omogenee, cioè con $u_0(x) = 0$ e $v(x,t) = 0$. Dovendo essere

$$\tilde{u}(x,t) = 0 \quad \text{per } (x,t) \in \overline{\Omega_0} \cup \overline{B_T},$$

per i principi del massimo e del minimo si ha

$$\tilde{u}(x,t) = 0 \quad \text{per } (x,t) \in \overline{Q_T}.$$ □

Possiamo ora mostrare anche un teorema di stabilità.

Teorema 4.12 (di stabilità). *Supponiamo $f \in C(\overline{Q_T})$, $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ e $v \in C(\overline{B_T})$. Poniamo*

$$\|f\| = \max_{(x,t)\in\overline{Q_T}} |f(x,t)|, \quad \|u_0\| = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u_0(x)|, \quad \|v\| = \max_{(x,t)\in\overline{B_T}} |v(x,t)|.$$

La soluzione del problema misto (4.4) è stabile, nel senso che se si considerano le soluzioni u e $\tilde{u}$, corrispondenti rispettivamente a f, u_0, v e a $\tilde{f}, \tilde{u}_0, \tilde{v}$ si ha

$$\|u - \tilde{u}\| \leqslant \max\Big(\|u_0 - \tilde{u}_0\|, \|v - \tilde{v}\|\Big) + T\|f - \tilde{f}\|.$$

Dimostrazione. Posto $M = \|f\|$ costruiamo la funzione

$$w(x,t) = u(x,t) - Mt.$$

Essa è soluzione del problema misto dell'equazione

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - a^2\Delta w(x,t) = f(x,t) - M$$

con le stesse condizioni iniziali e condizioni al bordo

$$w(x,t) = v(x,t) - Mt \quad \text{per } (x,t) \in \overline{B}_T.$$

In questa situazione, tenendo presente che

$$f(x,t) - M \leqslant 0 \quad \text{e che} \quad v(x,t) - Mt \leqslant \|v\|,$$

per il principio del massimo si ha

$$w(x,t) \leqslant \max\Big(\|u_0\|, \|v\|\Big).$$

Per la funzione u si ha quindi

$$u(x,t) \leqslant MT + \max\Big(\|u_0\|, \|v\|\Big). \tag{4.8}$$

Analogamente introducendo la funzione

$$w_1(x,t) = u(x,t) + Mt,$$

si ottiene

$$u(x,t) \geqslant -MT - \max\Big(|u_0|, |v|\Big). \tag{4.9}$$

Infine, dalla (4.8) e dalla (4.9) si ha

$$\|u\| \leqslant \max\Big(\|u_0\|, \|v\|\Big) + T\|f\|,$$

da cui, considerando le due soluzioni u e $\tilde{u}$, si ottiene immediatamente la relazione di stabilità cercata. □

Capitolo 5

L'operatore delle onde

In questo capitolo studieremo l'operatore iperbolico

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta$$

dove $c \in \mathbb{R}$.

5.1 Soluzione fondamentale per l'operatore delle onde

Lemma 5.1. *La trasformata di Fourier $\mathscr{F}_x$, rispetto alle coordinate spaziali, della soluzione fondamentale dell'operatore delle onde è data da*

$$\mathscr{F}_x\big[e(x,t)\big] = h(t)\frac{\sin(2\pi c|\xi|t)}{2\pi c|\xi|}. \tag{5.1}$$

Dimostrazione. La soluzione fondamentale per l'operatore delle onde è la funzione $e(x,t)$ tale che

$$\frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2} - c^2\Delta e(x,t) = \delta(x)\otimes\delta(t).$$

Applicando la trasformata di Fourier $\mathscr{F}_x$ si ottiene

$$\mathscr{F}_x\left[\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}\right] - c^2\mathscr{F}_x\big[\Delta e\big] = \mathscr{F}_x\big[\delta\big].$$

Per i singoli termini si ha

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}_x\big[\delta(x)\otimes\delta(t)\big] = \mathscr{F}_x\big[\delta(x)\big]\delta(t) = \delta(t),\\
&\mathscr{F}_x\left[\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}_x\big[e\big],\\
&\mathscr{F}_x\big[\Delta e\big] = -4\pi^2|\xi|^2\mathscr{F}_x\big[e\big],
\end{aligned}$$

per cui si arriva all'equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}_x\big[e\big] + 4\pi^2c^2|\xi|^2\mathscr{F}_x\big[e\big] = \delta(t).$$

Come si è visto in 2.64, la soluzione di questa equazione è data dalla (5.1). □

D'ora in poi supporremo $x \in \mathbb{R}^3$.

Lemma 5.2. *Denotiamo con $\delta_{S_R(\mathbf{0})}$ la distribuzione di strato semplice in $\mathscr{E}'$*

$$\left\langle \delta_{S_R(\mathbf{0})}, \varphi \right\rangle = \int_{S_R(\mathbf{0})} \varphi(x)\, dS.$$

Allora la trasformata di Fourier di tale distribuzione è data dalla funzione

$$\mathscr{F}_x\left[\delta_{S_R(\mathbf{0})}\right] = \frac{2R}{|x|} \sin\left(2\pi R|x|\right).$$

Dimostrazione. Per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ si ha

$$\begin{aligned}\left\langle \mathscr{F}_x\left[\delta_{S_R(\mathbf{0})}\right], \varphi \right\rangle &= \left\langle \delta_{S_R(\mathbf{0})}, \mathscr{F}_x[\varphi] \right\rangle = \left\langle \delta_{S_R(\mathbf{0})}, \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} \varphi(x)\, dx \right\rangle \\ &= \int_{S_R(\mathbf{0})} \left[\int e^{-2\pi i x\cdot\xi} \varphi(x)\, dx\right] dS(\xi) = \int \varphi(x) \left[\int_{S_R(\mathbf{0})} e^{-2\pi i x\cdot\xi} dS(\xi)\right] dx.\end{aligned}$$

Fissiamo su $S_R(\mathbf{0})$ un sistema di coordinate sferiche ψ, ϑ con asse polare nella direzione di x. Si ha

$$\begin{aligned}\int_{S_R(\mathbf{0})} e^{-2\pi i x\cdot\xi} dS(\xi) &= R^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} e^{-2\pi i R|x|\cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta \\ &= R\left[-\frac{e^{-2\pi i R|x|\cos\vartheta}}{i|x|}\right]_0^{\pi} = \frac{2R}{|x|}\sin(2\pi R|x|),\end{aligned}$$

quindi si ottiene

$$\left\langle \mathscr{F}_x\left[\delta_{S_R(\mathbf{0})}\right], \varphi \right\rangle = \int \frac{2R}{|x|} \sin\left(2\pi R|x|\right)\varphi(x)\, dx.$$

□

Teorema 5.3. *La soluzione fondamentale dell'operatore delle onde in $\mathbb{R}^3$ è la distribuzione data da*

$$e(x,t) = \frac{h(t)}{4\pi c^2 t}\delta_{S_{ct}(0)}. \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Dal lemma precedente si ha

$$\mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\frac{\sin\left(2\pi R|\xi|\right)}{|\xi|}\right] = \frac{1}{2R}\delta_{S_R(\mathbf{0})},$$

per cui, ponendo $R = ct$ e moltiplicando per $h(t)/2\pi c$ si ha

$$\mathscr{F}_\xi^{-1}\left[h(t)\frac{\sin(2\pi c|\xi|t)}{2\pi c|\xi|}\right] = \frac{h(t)}{4\pi c^2 t}\delta_{S_{ct}(0)}.$$

La tesi si ottiene quindi dal Lemma 5.1. □

A differenza di quanto visto per l'operatore di Laplace e del calore, stavolta la soluzione fondamentale è una vera distribuzione e non una distribuzione regolare.

Passiamo ora a studiare le proprietà della soluzione fondamentale.

Proposizione 5.4. *La soluzione fondamentale dell'operatore delle onde*

$$e(x,t) = \frac{h(t)}{4\pi c^2 t}\delta_{S_{ct}(0)}$$

per $t > 0$ è di classe C^∞ rispetto a t, ed inoltre gode delle seguenti proprietà di limite nel senso delle distribuzioni su $\mathbb{R}^3$ rispetto a x:

i) $e(x,t) \to 0$ *per* $t \to 0^+$;

ii) $\frac{\partial e(x,t)}{\partial t} \to \delta(x)$ *per* $t \to 0^+$;

iii) $\frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2} \to 0$ *per* $t \to 0^+$.

Dimostrazione. *i*) Calcoliamo

$$\begin{aligned}\langle e(x,t), \varphi(x)\rangle &= \frac{h(t)}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(0)} \varphi(x)\, dS(x) \\ &= \frac{h(t)}{4\pi c^2 t} c^2 t^2 \int_{S_1(0)} \varphi(ct\omega)\, dS(\omega) = \frac{h(t)}{4\pi} t \int_{S_1(0)} \varphi(ct\omega)\, dS(\omega).\end{aligned}$$

Tenendo presente che per $t \to 0^+$

$$\int_{S_1(0)} \varphi(ct\omega) dS(\omega) \to 4\pi\varphi(0),$$

si ha

$$\langle e(\cdot,t), \varphi\rangle_x \to 0.$$

ii) Per valutare le derivate rispetto a t di $e(x,t)$, teniamo presente che

$$\left\langle \frac{\partial^k e(\cdot,t)}{\partial t^k}, \varphi \right\rangle_x = \frac{d^k}{dt^k}\langle e(\cdot,t), \varphi\rangle_x .$$

Si ha allora per $t \to 0^+$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial e(\cdot,t)}{\partial t}, \varphi \right\rangle_x &= \frac{d}{dt}\left[\frac{t}{4\pi}\int_{S_1(0)} \varphi(ct\omega)\, dS(\omega)\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} \varphi(ct\omega)\, dS(\omega) + \frac{t}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[\int_{S_1(0)} \varphi(ct\omega)\, dS(\omega)\right] \to \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle_x,\end{aligned}$$

visto che la quantità

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{S_1(0)} \varphi(ct\omega)\, dS(\omega)\right]$$

è limitata in t.

iii) Per la derivata seconda si ha

$$\left\langle \frac{\partial^2 e(\cdot,t)}{\partial t^2}, \varphi \right\rangle_x = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left[\int_{S_1(0)} \varphi(ct\omega)\, dS(\omega)\right] + \frac{t}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}\left[\int_{S_1(0)} \varphi(ct\omega)\, dS(\omega)\right]. \tag{5.3}$$

Ora si ha

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{S_1(0)} \varphi(ct\omega)\, dS(\omega)\right] = c\int_{S_1(0)} \operatorname{grad}\varphi(ct\omega)\cdot\omega\, dS(\omega) \to c\operatorname{grad}\varphi(0)\cdot\int_{S_1(0)} \omega\, dS(\omega) = 0$$

per $t \to 0^+$, poiché l'integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico si annulla. Quindi il primo termine del secondo membro della (5.3) tende a zero per $t \to 0^+$. Ovviamente anche il secondo termine tende a zero, per cui alla fine si ha

$$\left\langle \frac{\partial^2 e(\cdot,t)}{\partial t^2}, \varphi \right\rangle_x \to 0.$$

□

5.2 Formula dei potenziali ritardati di Kirchhoff

Attraverso la soluzione fondamentale dell'operatore delle onde data nel Teorema 5.3 si possono determinare le soluzioni per il problema di Cauchy per l'equazione delle onde non omogenea. Per affrontare questo problema opereremo in modo analogo a quanto fatto per l'equazione del calore. Diamo prima di tutto l'impostazione del problema.

Definizione 5.5 (Problema di Cauchy per l'equazione delle onde). Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^4)$ con $f(x,t) = 0$ per $t < 0$. Sia poi $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Si vuole trovare la soluzione

$$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$$

del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2\Delta u(x,t) = f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x). \end{cases} \tag{5.4}$$

◇

Si noti che il problema avrebbe senso per f, u_0, u_1 anche solo continue, ma le tecniche qui impiegate richiedono una regolarità maggiore dei dati.

Siccome $e(\cdot,t)$ data in (5.2) è una distribuzione di strato semplice su una superficie chiusa e limitata, allora il suo supporto è compatto e dunque esiste la sua convoluzione con una funzione f continua. Tale convoluzione si esprime mediante la formula sulle distribuzioni di strato semplice vista nella Proposizione 3.4. Possiamo quindi affrontare la determinazione della soluzione dell'equazione delle onde non omogenea.

Proposizione 5.6. *La funzione*

$$V(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\int_{B_{ct}(x)} \frac{f\left(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{c}\right)}{|x-\xi|}\, d\xi \tag{5.5}$$

è di classe $C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$ ed è soluzione dell'equazione delle onde nel problema (5.4). Inoltre si ha

$$V(x,0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Dimostrazione. La regolarità di V è subito dedotta dalla regolarità di f. Per mostrare che $V(x,t)$ è soluzione dell'equazione delle onde basta far vedere che

$$V(x,t) = e(x,t) \underset{(x,t)}{*} f(x,t),$$

dove la convoluzione è fatta sia rispetto ad x che rispetto a t. Tenendo presente l'espressione di $e(x,t)$ si ha

$$e(x,t) \underset{(x,t)}{*} f(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(\tau)}{4\pi c^2 \tau} \delta_{S_{c\tau}(0)} \underset{x}{*} f(x, t-\tau)\, d\tau.$$

Per le condizioni poste su $f(x,t)$ e per la definizione di $h(t)$ si ha

$$e(x,t) \underset{(x,t)}{*} f(x,t) = \int_{0}^{t} \frac{1}{4\pi c^2 \tau} \delta_{S_{c\tau}(0)} \underset{x}{*} f(x, t-\tau)\, d\tau.$$

Allora per la Proposizione 3.4 si ha

$$e(x,t) \underset{(x,t)}{*} f(x,t) = \int_{0}^{t} \frac{1}{4\pi c^2 \tau} \left[\int_{S_{c\tau}(0)} f(x-\xi, t-\tau)\, dS(\xi) \right] d\tau.$$

Con una traslazione $x - \xi = \eta$ si ottiene

$$e(x,t) \underset{(x,t)}{*} f(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{0}^{t} \int_{S_{c\tau}(x)} \frac{f(\eta, t-\tau)}{\tau} dS(\eta)\, d\tau \tag{5.6}$$

e con la posizione $r = c\tau$ si arriva a

$$e(x,t) \underset{(x,t)}{*} f(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{0}^{ct} \int_{S_r(x)} \frac{f\left(\eta, t - \frac{r}{c}\right)}{r} dS(\eta) dr = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{B_{ct}(x)} \frac{f\left(\eta, t - \frac{|x-\eta|}{c}\right)}{|x-\eta|} d\eta.$$

Abbiamo ottenuto così la prima parte della tesi.

Dalla (5.5) si ha poi

$$\begin{aligned} \left|V(x,t)\right| &\leqslant \frac{1}{4\pi c^2} \max_{B_{ct}(x)\times[0,t]} |f(\eta,\tau)| \int_{B_{ct}(x)} \frac{d\eta}{|x-\eta|} \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \max_{B_{ct}(x)\times[0,t]} |f(\eta,\tau)| \frac{c^2 t^2}{2} 4\pi = \frac{t^2}{2} \max_{B_{ct}(x)\times[0,t]} |f(\eta,\tau)|, \end{aligned}$$

da cui per $t \to 0$ si ottiene $V(x,t) \to 0$.

Con procedimento analogo, si può mostrare che per $t \to 0$ si ha anche

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \to 0.$$

Basta tener presente che

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = e(x,t) \underset{(x,t)}{*} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}.$$

□

La funzione $V(x,t)$ data dalla (5.5) viene detta potenziale ritardato con densità $f(x,t)$, in quanto il valore del potenziale all'istante t viene ottenuto integrando i valori della densità f negli istanti $t - |x-\xi|/c$. Questo potenziale e la sua derivata rispetto a t tendono a 0 per $t \to 0$, pertanto con questo potenziale non si possono soddisfare le condizioni iniziali assegnate nel problema di Cauchy. Per risolvere il problema introdurremo due ulteriori potenziali.

Proposizione 5.7. *Il potenziale*

$$V_1(x,t) = \frac{h(t)}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} u_1(\eta)\, dS(\eta) \tag{5.7}$$

è di classe $C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$ *e verifica l'equazione*

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \Delta V_1(x,t) = 0$$

per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$. *Inoltre per* $t \to 0^+$ *si ha*

$$V_1(x,t) \to 0, \qquad \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} \to u_1(x).$$

Dimostrazione. Mostriamo che V_1 è soluzione, nel senso delle distribuzioni, dell'equazione

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta V_1 = u_1(x) \otimes \delta(t),$$

ovvero che

$$V_1(x,t) = e(x,t) \underset{(x,t)}{*} \Big(u_1(x) \otimes \delta(t) \Big) = e(x,t) \underset{x}{*} u_1(x).$$

Per l'espressione (5.2) di $e(x,t)$ si ha

$$V_1(x,t) = \frac{h(t)}{4\pi c^2 t} \delta_{S_{ct}(0)} \underset{x}{*} u_1(x),$$

e quindi per Proposizione 3.4 si ottiene

$$V_1(x,t) = \frac{h(t)}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(0)} u_1(x-\xi)\, dS(\xi).$$

Infine con la sostituzione $x - \xi = \eta$ si arriva all'espressione

$$V_1(x,t) = \frac{h(t)}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} u_1(\eta)\, dS(\eta),$$

che è proprio l'espressione di V_1 data nell'enunciato.

Inoltre, per $t \to 0^+$, tenendo presente le proprietà *i*) e *ii*) date nella Proposizione 5.4, si ha

$$V_1(x,t) = e(x,t) \underset{x}{*} u_1(x) \to 0,$$
$$\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} \underset{x}{*} u_1(x) \to \delta(x) \underset{x}{*} u_1(x) = u_1(x). \qquad \square$$

Proposizione 5.8. *Il potenziale*

$$V_0(x,t) = \frac{h(t)}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{S_{ct}(x)} u_0(\eta)\, dS(\eta) \right] \tag{5.8}$$

è di classe $C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$ *e verifica l'equazione*

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \Delta V_0(x,t) = 0$$

per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$.

Inoltre per $t \to 0^+$ *si ha*

$$V_0(x,t) \to u_0(x), \qquad \frac{\partial V_0(x,t)}{\partial t} \to 0.$$

Dimostrazione. Mostriamo che V_1 è soluzione, nel senso delle distribuzioni, dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta u(x,t) = u_0(x) \otimes \delta'(t).$$

Scrivendo la convoluzione con la soluzione fondamentale, per le proprietà della δ si ha

$$\begin{aligned} V_0(x,t) = e(x,t) \underset{(x,t)}{*} \Big(u_0(x) \otimes \delta'(t)\Big) &= \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} \underset{(x,t)}{*} \Big(u_0(x) \otimes \delta(t)\Big) \\ &= \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} \underset{x}{*} u_0(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big[e(x,t) \underset{x}{*} u_0(x)\Big]. \end{aligned}$$

Ma dall'espressione di $e(x,t)$, per la Proposizione 3.4, con sviluppi analoghi a quelli di $V_1(x,t)$ si ha

$$e(x,t) \underset{x}{*} u_0(x) = \frac{h(t)}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} u_0(\eta)\, dS(\eta).$$

In definitiva per $t > 0$ si ha l'espressione

$$V_0(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t} \int_{S_{ct}(x)} u_0(\eta)\, dS(\eta)\right].$$

Per dimostrare le proprietà di V_0 basta tener presente che

$$V_0(x,t) = \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} \underset{x}{*} u_0(x).$$

Da questa si ha anche

$$\frac{\partial V_0(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2} \underset{x}{*} u_0(x).$$

Ricordando allora le proprietà *ii*) e *iii*) della Proposizione 5.4, per $t \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned} V_0(x,t) = \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} \underset{x}{*} u_0(x) \to \delta(x) \underset{x}{*} u_0(x) = u_0(x), \\ \frac{\partial V_0(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2} \underset{x}{*} u_0(x) \to 0. \end{aligned}$$

□

Possiamo riunire i risultati delle Proposizioni 5.6, 5.7 e 5.8 nel seguente teorema riassuntivo.

Teorema 5.9 (Formula dei potenziali ritardati di Kirchhoff). *La soluzione del problema di Cauchy (5.4) con dati $f \in C^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ è la funzione $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= V(x,t) + V_1(x,t) + V_0(x,t) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{B_{ct}(x)} \frac{f\big(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{c}\big)}{|x-\xi|} d\xi \\ &+ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} u_1(\xi) dS(\xi) \\ &+ \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t} \int_{S_{ct}(x)} u_0(\xi) dS(\xi)\right]. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Possiamo precisare che nel punto x si ha $u(x,t) = 0$ fino all'istante in cui la sfera $B_{ct}(x)$ raggiunge l'insieme

$$Q_t = \operatorname{supt} f(\cdot,t) \cup \operatorname{supt} u_0 \cup \operatorname{supt} u_1.$$

In particolare se l'equazione è omogenea, cioè $f(x,t) = 0$, e se $u_0(x)$ e $u_1(x)$ hanno supporto limitato in $\mathbb{R}^3$ si ha che $u(x,t)$ è nullo fino a quando $S_{ct}(x)$ tocca l'unione Q di detti supporti, e ritorna ad essere zero quando la sfera comprende Q. Come si vedrà, in due dimensioni si ha un comportamento diverso.

5.3 Teoremi di unicità e di stabilità

Mediante la formula dei potenziali ritardati si arriva facilmente al teorema di stabilità, che in particolare implica l'unicità della soluzione.

Teorema 5.10 (di stabilità). *Supponiamo $f(x,t)$, $u_0(x)$ e $u_1(x)$ limitate e fissiamo per le soluzioni l'intervallo $[0,T]$. Allora la soluzione dell'equazione delle onde è stabile, nel senso che se si considerano le soluzioni $u(x,t)$ e $\tilde{u}(x,t)$, corrispondenti rispettivamente a $f(x,t)$, $u_1(x)$, $u_0(x)$ e a $\tilde{f}(x,t)$, $\tilde{u}_1(x)$, $\tilde{u}_0(x)$, si ha*

$$|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| \leqslant \frac{T^2}{2}\|f - \tilde{f}\|_\infty + T\|u_1 - \tilde{u}_1\|_\infty + cT\|\operatorname{grad} u_0 - \operatorname{grad} \tilde{u}_0\|_\infty + \|u_0 - \tilde{u}_0\|_\infty.$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che

$$\sup|V(x,t)| \leqslant \sup|f(x,t)| \frac{1}{4\pi c^2} \int_{B_{cT}(x)} \frac{d\xi}{|\xi - x|} = \frac{T^2}{2} \sup|f(x,t)|,$$
$$\sup|V_1(x,t)| \leqslant \sup|u_1(x)| \frac{1}{4\pi c^2} \left[\frac{1}{t} \int_{S_{ct}(x)} dS(\xi)\right]_{t=T} = T \sup|u_1(x)|.$$

Ora consideriamo V_0: intanto, ponendo $\eta = x + cty$ e calcolando la derivata rispetto al tempo, si può scrivere, per $t > 0$,

$$V_0(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{S_{ct}(x)} u_0(\eta)\, dS(\eta)\right] = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[t \int_{S_1(0)} u_0(x + cty)\, dS(y)\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{S_1(0)} u_0(x + cty)\, dS(y) + ct \int_{S_1(0)} \operatorname{grad} u_0(x + cty) \cdot y\, dS(y)\right]$$

da cui

$$\sup|V_0(x,t)| \leqslant \sup|u_0(x)| + cT \sup|\operatorname{grad} u_0(x)|.$$

Tenendo presente che

$$u(x,t) - \tilde{u}(x,t) = V(x,t) - \tilde{V}(x,t) + V_0(x,t) - \tilde{V}_0(x,t) + V_1(x,t) - \tilde{V}_1(x,t)$$

si ha la tesi. □

5.4 Il caso bidimensionale

Nel caso bidimensionale ci sono alcune differenze qualitative della soluzione dell'equazione delle onde rispetto al caso 3D e 1D. Per cominciare, per calcolare la soluzione fondamentale dell'operatore delle onde, se si opera con la trasformata di Fourier si giunge a dove calcolare l'integrale di una funzione ellittica. Per cui conviene procedere in altro modo, considerando le funzioni del piano come particolari funzioni definite in tutto lo spazio che non dipendono dalla terza coordinata, e deducendo la soluzione da quanto già sappiamo (*metodo della discesa di Hadamard*). Si noti che tale operazione fa perdere la compattezza, perché un dominio compatto in $\mathbb{R}^2$ diventa un cilindro infinito in $\mathbb{R}^3$.

Partiamo quindi dal problema di Cauchy (5.4) in $\mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$. Se ridefiniamo le funzioni nel modo detto sopra, poiché gli operatore di Laplace 3D e 2D sono identici nel caso in cui la funzione non dipenda dalla terza coordinata, otteniamo un problema di Cauchy per l'equazione delle onde 3D con dati indipendenti da x_3. Le funzioni in gioco, dipendendo solo dalle due coordinate x_1, x_2, risultano definite in insiemi che sono cilindri paralleli all'asse x_3.

La soluzione è quindi espressa dalla formula di Kirchhoff (5.9), dove riscriviamo il primo termine mediante la (5.6):

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{4\pi c^2}\int_0^t \int_{S_{c\tau}(x)} \frac{f(\eta, t-\tau)}{\tau} dS(\eta)\, d\tau \\ &+ \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(x)} u_1(\eta) dS(\eta) + \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int_{S_{ct}(x)} u_0(\eta) dS(\eta)\right]. \end{aligned}$$

Gli integrali sulle sfere $S_r(x_1,x_2,0)$ di raggio r, con centro nei punti del piano (x_1,x_2), si possono esprimere con integrali nel piano sui dischi corrispondenti $D_r(x_1,x_2)$, nel seguente modo: la funzione che manda il disco sulla semisfera superiore è data da

$$(\xi_1,\xi_2) \mapsto (\xi_1,\xi_2,z(\xi_1,\xi_2)) \quad \text{dove} \quad z(\xi_1,\xi_2) = \sqrt{r^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}$$

e dunque lo jacobiano risulta

$$\sqrt{1+|\operatorname{grad} z|^2} = \sqrt{1+\frac{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2}{r^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-|\xi-x|^2}}.$$

Tenendo conto del fatto che per la semisfera inferiore si può fare lo stesso ragionamento, si ottiene

$$\int_{S_r(x)} \varphi(\xi)\, dS(\xi) = 2r\int_{D_r(x)} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{r^2-|\xi-x|^2}} d\xi.$$

Quindi partendo dalla formula data sopra per il caso tridimensionale e decomponendo l'integrale su $B_{ct}(x)$ come un integrale di integrali su sfere, si arriva, per il caso bidimensionale, alla nuova formula

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2\pi c}\Bigg[&\int_0^t \int_{D_{c\tau}(x)} \frac{f(\xi,t-\tau)}{\sqrt{c^2\tau^2-|\xi-x|^2}}\, d\xi d\tau \\ &+ \int_{D_{ct}(x)} \frac{u_1(\xi)}{\sqrt{c^2t^2-|\xi-x|^2}}\, d\xi + \frac{\partial}{\partial t}\int_{D_{ct}(x)} \frac{u_0(\xi)}{\sqrt{c^2t^2-|\xi-x|^2}}\, d\xi\Bigg], \end{aligned} \tag{5.10}$$

che è anche detta *formula di Poisson*. Per il fatto che in questo caso gli integrali non sono sulle circonferenze, ma sui dischi, anche quando le condizioni iniziali hanno supporto compatto, il loro effetto sulla funzione u permane nel tempo senza più azzerarsi.

Dall'ultima formula (facendo il cambio di variabile $\tau \mapsto t-\tau$) si può anche verificare che l'espressione della soluzione fondamentale per il caso bidimensionale è

$$e_2(x,t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\chi_{D_{ct}(0)}(x)}{\sqrt{c^2t^2-|x|^2}} = \frac{1}{2\pi c}\frac{h(ct-|x|)}{\sqrt{c^2t^2-|x|^2}}.$$

5.5 Caso unidimensionale

Consideriamo il caso omogeneo

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Come si verifica facilmente, la soluzione di questa equazione è data da

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct). \tag{5.11}$$

Perché queste siano soluzioni in senso classico f e g devono essere di classe C^2, ma queste sono soluzioni in senso generalizzato anche quando f e g sono solo continue.

Studiamo i due termini separatamente. Consideriamo prima f. Se poniamo

$$x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2$$

si ha ovviamente

$$f(x_1 - ct_1) = f(x_2 - ct_2)$$

e quindi i valori di f in x_1 e in x_2 sono uguali in tempi diversi t_1 e t_2 con

$$x_1 - x_2 = c(t_1 - t_2).$$

Abbiamo un fenomeno ondoso, con onda f progressiva, con velocità c.

Considerando la funzione g si ha invece $x_1 - x_2 = -c(t_1 - t_2)$. Si ha quindi un fenomeno ondoso ma con onda g regressiva, sempre con velocità c.

Se ora poniamo le condizioni iniziali

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x),$$

possiamo determinare la soluzione corrispondente mediante una formula, detta *formula di D'Alembert.* Si tratta di determinare nell'espressione (5.11) della soluzione le due funzioni f e g tramite le condizioni iniziali. Per $t = 0$ si ha

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) + g(x) = u_0(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= -cf'(x) + cg'(x) = u_1(x). \end{aligned}$$

Derivando la prima e dividendo la seconda per c si ottiene il sistema lineare in f' e in g'

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = u_0'(x) \\ -f'(x) + g'(x) = \frac{u_1(x)}{c}. \end{cases}$$

Da questo sistema si ottiene immediatamente

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[u_0'(x) - \frac{u_1(x)}{c}\right], \qquad g'(x) = \frac{1}{2}\left[u_0'(x) + \frac{u_1(x)}{c}\right].$$

Integrando si ha allora

$$f(s) = \frac{1}{2}u_0(s) - \frac{1}{2c}\int_0^s u_1(\xi)d\xi + A$$

$$g(s) = \frac{1}{2}u_0(s) + \frac{1}{2c}\int_0^s u_1(\xi)d\xi + B.$$

Per la soluzione $u(x,t)$ si arriva alla espressione

$$u(x,t) = \frac{1}{2}u_0(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} u_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2}u_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} u_1(\xi)d\xi + A + B.$$

Ma questa per $t = 0$ dà

$$u(x,0) = u_0(x) + A + B$$

e quindi tenendo conto delle condizioni iniziali si ha

$$A + B = 0.$$

Alla fine per la soluzione si ottiene la formula di D'Alembert[(1)]

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)d\xi.$$

Infine, si può verificare che l'espressione della soluzione fondamentale nel caso unidimensionale è data da

$$e_1(x,t) = \frac{1}{2c}\chi_{(-ct,ct)}(x) = \frac{1}{2c}h(ct - |x|)$$

e si ha $e_1(x,0) = 0$ e $\frac{\partial e_1}{\partial t}(x,0) = 0$ nel senso delle distribuzioni. Quindi nel caso non omogeneo è sufficiente aggiungere il termine

$$\frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau.$$

[(1)] Anche questa formula poteva essere ottenuta col metodo della discesa.

Capitolo 6

Metodi funzionali

Per affrontare i teoremi di esistenza, e in generale lo studio delle soluzioni di problemi relativi ad operatori ellittici, e in particolare all'operatore di Laplace, sono stati introdotti metodi molto efficaci nell'ambito dell'analisi funzionale.

6.1 Introduzione

Dato l'aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e date le funzioni $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(\overline{\Omega})$ poniamo

$$D(u,v) = \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx. \tag{6.1}$$

È facile verificare che l'espressione

$$\|u\|_{H^1} = \left[D(u,u) + \int_\Omega |u|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

definisce una norma in $C^1(\overline{\Omega})$.

Definizione 6.1. Indicheremo con $H^1(\Omega)$ lo spazio ottenuto per completamento di $C^1(\Omega)$ rispetto alla norma $\| \cdot \|_{H^1}$. ◇

Osservazione 6.2. Essendo la norma $\|u\|_{H^1}$ definita tramite integrali, bisogna considerare come elementi di $H^1(\Omega)$ le classi di equivalenza delle funzioni definite quasi ovunque. ⋆

Proposizione 6.3. *Lo spazio $H^1(\Omega)$ risulta essere uno spazio di Hilbert con prodotto scalare dato da*

$$(u,v)_{H^1} = \int_\Omega \left[\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + uv \right] dx.$$

Dobbiamo ora dar senso alla restrizione al bordo di una funzione anche se non è definita ovunque. Per affrontare questa questione ci occorre il seguente risultato che diamo senza dimostrazione.

Proposizione 6.4. *Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto regolare con bordo $\partial\Omega$ di classe C^1, allora esiste in Ω un campo vettoriale $\tilde{n} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe $C^1(\overline{\Omega})$ tale che*

$$\tilde{n}(x) = n(x) \quad \textit{per } x \in \partial\Omega,$$

dove n è il vettore unitario normale a $\partial\Omega$.

Teorema 6.5. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio regolare con $\partial\Omega$ di classe C^1. Allora esiste una costante $K > 0$ tale che*

$$\forall u \in C^1(\overline{\Omega}) : \quad \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant K\|u\|_{H^1}.$$

Dimostrazione. Indicando con n il versore normale a $\partial\Omega$, per il teorema della divergenza si ha

$$\int_{\partial\Omega} |u|^2 d\sigma = \int_{\partial\Omega} \left(|u|^2 n\right) \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\left(|u|^2 \tilde{n}\right) dx = \int_{\Omega} \left[|u|^2 \operatorname{div} \tilde{n} + \operatorname{grad}\left(|u|^2\right) \cdot \tilde{n}\right] dx.$$

Ricordando che $\operatorname{grad}\left(|u|^2\right) = 2u \operatorname{grad} u$, si ha

$$\int_{\partial\Omega} |u|^2 d\sigma \leqslant \sup_{x\in\Omega} |\operatorname{div} \tilde{n}(x)| \int_{\Omega} |u|^2 dx + \max_j \sup_{x\in\Omega} |\tilde{n}_j| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|2u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx.$$

Ma utilizzando per l'ultimo integrale la relazione

$$\left|2u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqslant |u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2$$

e ponendo

$$M = \max\left\{ \sup_{x\in\Omega} |\operatorname{div} \tilde{u}(x)|, \max_j \sup_{x\in\Omega} |\tilde{n}_j| \right\},$$

si ha

$$\int_{\partial\Omega} |u|^2 d\sigma \leqslant M(n+1) \int_{\Omega} |u|^2 dx + M \int_{\Omega} \left|\operatorname{grad} u\right|^2 dx \leqslant M(n+1)\|u\|^2_{H^1},$$

da cui segue la tesi con $K^2 = M(n+1)$. □

Definizione 6.6 (Operatore di traccia). Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio regolare con bordo di classe C^1 diremo *operatore di traccia* l'applicazione

$$\mathcal{T} : C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\partial\Omega),$$

definita da

$$\mathcal{T}u = u\big|_{\partial\Omega},$$

cioè dalla restrizione di u su $\partial\Omega$. Chiaramente l'operatore di traccia è un operatore lineare e continuo rispetto alla topologia uniforme. ◇

Mediante il Teorema 6.5 si può stabilire una estensione dell'operatore di traccia ad $H^1(\Omega)$.

Teorema 6.7. *Esiste un'unica estensione continua dell'operatore di traccia $\mathcal{T}$ allo spazio $H^1(\Omega)$ con*

$$\mathcal{T} : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega).$$

Dimostrazione. Sia $\{u_k\}$ una successione in $C^1(\Omega)$ che converga a u in $H^1(\Omega)$. Per il Teorema 6.5 per ogni k, h si ha

$$\|\mathcal{T}(u_k - u_h)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant K\|u_k - u_h\|_{H^1(\Omega)},$$

quindi $\{\mathcal{T}u_k\}$ è di Cauchy. Poiché $C^1(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ e $L^2(\partial\Omega)$ è completo, la successione $\{\mathcal{T}u_k\}$ convergerà a una funzione $w \in L^2(\partial\Omega)$. Si pone $w = \mathcal{T}u$.

Supponiamo ora che ci siano due estensioni $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$. Per ogni $u \in C^1(\Omega)$ si ha $(\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2)u = 0$, allora essendo C^1 denso in H^1 ed essendo le estensioni continue si ha $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. □

Per trattare il caso in cui le funzioni hanno traccia nulla al bordo conviene introdurre il seguente spazio.

Definizione 6.8. Definiamo lo spazio $H_0^1(\Omega)$ come il completamento di $\mathscr{D}(\Omega)$ nella norma in H^1. Indicheremo poi con $H^{-1}(\Omega)$ il suo duale topologico. ⋄

Proposizione 6.9. *Per gli spazi $H_0^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$ si possono stabilire le seguenti inclusioni:*

$$\mathscr{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$
$$\mathscr{D}'(\Omega) \supset H^{-1}(\Omega) \supset L^2(\Omega).$$

Usando le tracce, si può caratterizzare H_0^1 nel modo seguente:

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in H^1(\Omega),\ \mathcal{T}u = 0.$$

La necessità si dimostra facilmente: se $u \in H_0^1(\Omega)$ u è limite di funzioni a supporto compatto in Ω e quindi nulle al bordo nel senso normale; ne segue per continuità $\mathcal{T}u = 0$. La sufficienza è invece più delicata e non la mostriamo.

6.2 Riformulazione del problema di Dirichlet

Siamo in grado ora di riformulare il problema di Dirichlet, iniziando dal caso in cui i dati al bordo sono omogenei, cioè se $u(x) = 0$ per $x \in \partial\Omega$.

Definizione 6.10. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato con $\partial\Omega$ di classe C^1 e sia $f \in H^{-1}(\Omega)$. Diremo che $u \in H_0^1(\Omega)$ è soluzione debole del problema di Dirichlet interno per l'equazione di Poisson, con condizioni al bordo omogenee, se

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): \quad D(u, v) = -\langle f, v\rangle.$$ ⋄

Osservazione 6.11. La condizione $u \in H_0^1(\Omega)$ sostituisce la condizione classica di annullamento al bordo. ⋆

Osservazione 6.12. Se si considera solo $v \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha una formulazione equivalente, dato che $\mathscr{D}(\Omega)$ è denso in $H_0^1(\Omega)$. Però se si vogliono avere soluzioni per $f \in H^{-1}(\Omega)$ conviene porre il problema nella forma data. ⋆

Teorema 6.13. *Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è soluzione classica del problema di Dirichlet interno, con*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{per } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{per } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua, allora è anche soluzione debole del problema di Dirichlet con condizioni omogenee, nel senso della Definizione 6.10.

Dimostrazione. Per ogni $v \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega f v \, dx = \int_\Omega v \Delta u \, dx = -\int_\Omega \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u \, dx = -D(u, v).$$

Tenendo presente che il primo integrale è $\langle f, v \rangle$, la tesi segue dal fatto che $\mathscr{D}(\Omega)$ è denso in $H^1_0(\Omega)$. □

Teorema 6.14. *Sia u soluzione debole del problema di Dirichlet con $f \in H^{-1}(\Omega)$ e con condizioni al bordo omogenee, allora u è soluzione della equazione $\Delta u = f$ nel senso delle distribuzioni.*

Dimostrazione. Sia $v \in \mathscr{D}(\Omega)$, si ha

$$D(u, v) = \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = -\int_\Omega u \Delta v \, dx = -\langle u, \Delta v \rangle.$$

Ma allora $\langle u, \Delta v \rangle = \langle f, v \rangle$, cioè la tesi. □

Possiamo ora far vedere che per Ω limitato la quantità $\|u\|_D := \sqrt{D(u, u)}$ è una norma equivalente a $\|u\|_{H^1}$. Premettiamo la disuguaglianza di Poincaré.

Lemma 6.15 (Disuguaglianza di Poincaré). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato. Allora vale la disuguaglianza*

$$\forall u \in H^1_0(\Omega) : \quad \int_\Omega u^2(x) \, dx \leqslant K^2 \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx,$$

con K costante dipendente solo da Ω.

Dimostrazione. Vediamo il caso più regolare in cui si ha u di classe C^1 a supporto compatto in Ω. Fissiamo un sistema di riferimento in $\mathbb{R}^n$ in modo tale che si abbia $0 < x_n < a$ per $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \Omega$. Partiamo dalla relazione

$$u(\xi) = \int_0^{\xi_n} \frac{\partial u(\xi', t)}{\partial \xi_n} dt,$$

dove si è posto $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1})$. Applicando a questa relazione la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz[(1)] si ha

$$|u(\xi)|^2 = \left(\int_0^{\xi_n} \frac{\partial u(\xi', t)}{\partial \xi_n} dt \right)^2 \leqslant a \int_0^a \left| \frac{\partial u(\xi', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n.$$

[(1)] Poiché la quantità

$$(u, v) = \int_\Omega uv \, dx$$

è un prodotto scalare in $L^2(\Omega)$, la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz $|(u, v)| \leqslant \|u\|\|v\|$ implica (elevando tutto al quadrato)

$$\left(\int_\Omega uv \, dx \right)^2 \leqslant \left(\int_\Omega u^2 \, dx \right) \left(\int_\Omega v^2 \, dx \right)$$

e nel caso $v \equiv 1$ si ottiene

$$\left(\int_\Omega u \, dx \right)^2 \leqslant |\Omega| \int_\Omega u^2 \, dx$$

(che poteva essere ottenuto direttamente anche dalla disuguaglianza di Jensen).

Integrando questa disuguaglianza e ponendo $\Omega_{n-1} = \Omega \cap \mathbb{R}^{n-1}$ si ha

$$\int_\Omega \left|u(\xi)\right|^2 d\xi = \int_0^a \int_{\Omega_{n-1}} |u(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant a \int_0^a \int_0^a \int_{\Omega_{n-1}} \left|\frac{\partial u(\xi', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi \, d\xi_n \leqslant a^2 \int_\Omega \left|\operatorname{grad} u\right|^2 d\xi,$$

per cui la disuguaglianza dell'enunciato vale con $K = a$. Per il caso generale $u \in H^1_0(\Omega)$ si può procedere per densità. □

Corollario 6.16. *Dato un dominio Ω limitato si possono determinare due costanti K_1 e K_2 tali che si abbia*

$$K_1^2 \|u\|^2_{H^1} \leqslant D(u,u) \leqslant K_2^2 \|u\|^2_{H^1}$$

per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$.

Dimostrazione. Essendo $\|u\|^2_{H^1} = \|u\|^2_{L^2} + D(u,u)$ si ha subito $K_2 = 1$, inoltre dalla disuguaglianza di Poincaré si ha

$$\|u\|^2_{H^1} \leqslant (1 + K^2) D(u,u)$$

per cui si ha $K_1^2 = (1 + K^2)^{-1}$. □

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema di esistenza e unicità per la soluzioni debole.

Teorema 6.17. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato (con $\partial\Omega$ di classe C^1) e sia $f \in H^{-1}(\Omega)$, allora esiste ed è unica la soluzione $u \in H^1_0(\Omega)$ del problema*

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) : \quad D(u,v) = -\langle f, v\rangle.$$

Dimostrazione. Il funzionale $v \mapsto \mathcal{L}v = -\langle f, v\rangle$ è un funzionale lineare continuo in H^1_0. Per l'equivalenza tra le norme stabilita sopra $\mathcal{L}v$ è anche un funzionale continuo nella norma $D(\cdot,\cdot)$. Allora per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste un unico elemento $u \in H^1_0(\Omega)$ tale che $\mathcal{L}v = D(u,v)$ e questa è la soluzione cercata. □

Il caso con condizioni al bordo non omogenee si riconduce al caso precedente con la seguente definizione.

Definizione 6.18. Sia dato Ω con le stesse condizioni date sopra e sia $\tilde{u}_0 \in H^1(\Omega)$. Diremo soluzione debole del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson con condizioni al bordo non omogenee la funzione $u \in H^1(\Omega)$ tale che $u - \tilde{u}_0 \in H^1_0(\Omega)$ e

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) : \quad D(u,v) = -\langle f, v\rangle. \qquad \diamond$$

Si noti che se la condizione al bordo che si vuol porre è $u(x) = u_0(x)$ per $x \in \partial\Omega$, la funzione $\tilde{u}_0 \in H^1(\Omega)$ dovrà essere tale che $\mathcal{T}\tilde{u}_0 = u_0$.

Teorema 6.19. *Esiste ed è unica la soluzione del problema definito sopra.*

Dimostrazione. Consideriamo il problema $z \in H^1_0(\Omega)$ e

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) : \quad D(z,v) = -\langle f, v\rangle - D(\tilde{u}_0, v).$$

Il Teorema 6.17 garantisce l'esistenza e l'unicità di una soluzione z a questo problema. Poniamo infine $u = z + \tilde{u}_0$. □

6.3 Inverso dell'operatore di Laplace

Possiamo ora introdurre un sottospazio di $H_0^1(\Omega)$ associato all'operatore differenziale

$$-\Delta u \quad \text{con } u(x) = 0 \text{ per } x \in \partial\Omega.$$

Definizione 6.20. Consideriamo il sottospazio di $H_0^1(\Omega)$ dato dal dominio di $-\Delta$

$$D(-\Delta) = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \ \Delta u \in L^2(\Omega)\right\},$$

munito di norma e di prodotto scalare dati da

$$\|u\|_\Delta = [D(u,u)]^{\frac{1}{2}}, \quad \big(u,v\big)_\Delta = D(u,v). \qquad \diamond$$

Proposizione 6.21. *L'operatore $-\Delta : D(-\Delta) \to L^2(\Omega)$ verifica la relazione*

$$\forall u, v \in D(-\Delta) : \ \big(-\Delta u, v\big)_{L^2} = \big(u, -\Delta v\big)_{L^2} = D(u,v).$$

Dimostrazione. Basta verificare che essendo le condizioni al bordo omogenee vale

$$-\int_\Omega \Delta u v \, dx = \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = -\int_\Omega u \Delta v \, dx. \qquad \square$$

Osservazione 6.22. Ricordiamo che valgono le seguenti inclusioni:

$$D(-\Delta) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega), \qquad L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

In particolare, dato $f \in L^2(\Omega)$, per il Teorema 6.17 esiste la soluzione $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad D(u,v) = -\langle f, v\rangle. \qquad \star$$

Definizione 6.23. Sia X uno spazio di Hilbert e $\mathcal{L} : X \to X$ un operatore lineare. L'operatore si dice *limitato* o *continuo* se

$$\|\mathcal{L}\| := \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{L}x\| < +\infty$$

e il numero $\|\mathcal{L}\|$ è la *norma* dell'operatore limitato.

L'operatore è *autoaggiunto* se

$$\forall x, y \in X : \ \big(\mathcal{L}x, y\big) = \big(x, \mathcal{L}y\big).$$

L'operatore è *compatto* se per ogni successione limitata $\{x_j\}$ la successione $\{\mathcal{L}x_j\}$ ha una sottosuccessione convergente. $\diamond$

Teorema 6.24. *L'operatore $-\Delta : D(-\Delta) \to L^2(\Omega)$ è invertibile con inverso continuo $-\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$. Inoltre vale*

$$\forall u, v \in L^2(\Omega) : \ \big(-\Delta^{-1}u, v\big)_{L^2} = \big(u, -\Delta^{-1}v\big)_{L^2}.$$

Dimostrazione. Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ poniamo $-\Delta^{-1} f = u$ dove $u \in H_0^1(\Omega)$ è la soluzione del problema $-\Delta u = f$ nel senso della Definizione 6.10. Allora usando le disuguaglianze di Schwartz e di Poincaré e indicando con $\|\cdot\|$ la norma in $L^2(\Omega)$ si ha

$$\|u\|_\Delta^2 = \big(-\Delta u, u\big)_{L^2} = (f, u) \leqslant \|u\|\|f\| \leqslant K\|u\|_\Delta\|f\|$$

per cui

$$\|u\|_\Delta \leqslant K\|f\|,$$

che si può scrivere anche

$$\|-\Delta^{-1} f\|_\Delta \leqslant K\|f\|,$$

con cui si esprime che $-\Delta^{-1}$ è continuo.

Inoltre, siano $f, g \in L^2(\Omega)$; tenendo conto che $-\Delta^{-1} f, -\Delta^{-1} g \in D(-\Delta)$, per la Proposizione 6.21 si ha

$$\big(f, -\Delta^{-1} g\big)_{L^2} = \big(-\Delta(-\Delta^{-1} f), -\Delta^{-1} g\big)_{L^2} = \big(-\Delta^{-1} f, g\big)_{L^2}. \qquad \square$$

Osservazione 6.25. Con il teorema precedente si stabilisce anche una proprietà di dipendenza continua della soluzione debole dell'equazione di Poisson dal dato f, almeno nel caso in cui $f \in L^2(\Omega)$. ⋆

Per studiare il problema agli autovalori enunciamo senza dimostrazione il seguente importante teorema.

Teorema 6.26 (di Rellich). *L'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ è compatta, cioè l'operatore di immersione*

$$\mathcal{I} : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

trasforma limitati in precompatti.

Definizione 6.27. Componendo l'operatore $-\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ con l'immersione $\mathcal{I} : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, definiamo l'operatore

$$\mathcal{I} \circ (-\Delta^{-1})$$

e lo denotiamo ancora con $-\Delta^{-1}$, per cui si ha

$$-\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega). \qquad \diamond$$

Proposizione 6.28. *L'operatore $-\Delta^{-1}$ è compatto e autoaggiunto*

Dimostrazione. è sufficiente combinare il Teorema 6.26 col Teorema 6.24. $\square$

6.4 Elementi di teoria spettrale per operatori compatti

Consideriamo un operatore $\mathcal{L}$ lineare, compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert X

$$\mathcal{L} : X \to X.$$

Richiamiamo alcune nozioni.

Definizione 6.29. Denotiamo con $\mathscr{R}(\mathcal{L})$ l'immagine di $\mathcal{L}$ e con $\mathscr{N}(\mathcal{L})$ il nucleo di $\mathcal{L}$.
Se $\mathscr{R}(\mathcal{L}) = X$ diremo che $\mathcal{L}$ è *suriettivo*, se $\mathscr{N}(\mathcal{L}) = \{0\}$ diremo che $\mathcal{L}$ è *iniettivo*. ⋄

Definizione 6.30 (Risolvente e spettro). Il *risolvente* di $\mathcal{L}$, che indicheremo con $\rho(\mathcal{L})$, è l'insieme

$$\rho(\mathcal{L}) = \{r \in \mathbb{R} : \ \mathcal{L} - rI \text{ è biiettivo in } X\}.$$

Se $r \in \rho(\mathcal{L})$ si dice che r è *regolare*. ⋄

Lo *spettro (continuo)* $\sigma(\mathcal{L})$ di $\mathcal{L}$ è il complementare di $\rho(\mathcal{L})$:

$$\sigma(\mathcal{L}) = \mathbb{R} \setminus \rho(\mathcal{L}).$$

Fanno parte dello spettro gli autovalori, così definiti: μ è *autovalore* di $\mathcal{L}$ se

$$\mathscr{N}\big(\mathcal{L} - \mu I\big) \neq \{0\},$$

cioè se $\mathcal{L} - \mu I$ non è iniettivo. Gli elementi non nulli di $\mathscr{N}\big(\mathcal{L} - \mu I\big)$ si dicono *autovettori* corrispondenti a μ, mentre il sottospazio $\mathscr{N}\big(\mathcal{L} - \mu I\big)$ è il cosiddetto *autospazio*.
L'insieme degli autovalori costituisce lo *spettro discreto* $\sigma_d(\mathcal{L})$, e si ha

$$\sigma_d(\mathcal{L}) \subset \sigma(\mathcal{L}).$$

In generale lo spettro discreto non esaurisce lo spettro. Ci possono essere infatti valori di μ per cui $\mathscr{N}\big(\mathcal{L} - \mu I\big) = \{0\}$ ma $\mathscr{R}\big(\mathcal{L} - \mu I\big) \neq X$. Tali valori appartengono allo spettro ma non sono autovalori. Una proprietà importante degli operatori compatti è proprio che per essi gli autovalori esauriscono lo spettro. Quindi in questo senso gli operatori lineari compatti "assomigliano" molto agli operatori lineari in spazi di dimensione finita.

Osservazione 6.31 (Proprietà degli autovalori). Se μ è un autovalore di $\mathcal{L}$ e x un autovettore corrispondente, si ha

$$\mu = \frac{\big(\mathcal{L}x, x\big)}{\big(x, x\big)}.$$

Inoltre, se μ_1 e μ_2 sono due autovalori distinti, i corrispondenti autovettori x_1 e x_2 sono ortogonali fra loro; dati infatti

$$\mathcal{L}x_1 = \mu_1 x_1, \qquad \mathcal{L}x_2 = \mu_2 x_2,$$

moltiplicando la prima per x_2 e la seconda per x_1 e tenendo conto che $\mathcal{L}$ è autoaggiunto si ha

$$\big(\mathcal{L}x_1, x_2\big) = \mu_1\big(x_1, x_2\big), \qquad \big(x_1, \mathcal{L}x_2\big) = \big(\mathcal{L}x_1, x_2\big) = \mu_2\big(x_1, x_2\big),$$

da cui per sottrazione si ottiene

$$\big(\mu_1 - \mu_2\big)\big(x_1, x_2\big) = 0,$$

ovvero $\big(x_1, x_2\big) = 0$. ⋆

Lemma 6.32. *Si ha*

$$\|\mathcal{L}\| = \sup_{\|x\|=1} \big|\big(\mathcal{L}x, x\big)\big|.$$

Dimostrazione. Poniamo $m = \sup_{\|x\|=1} \big|(\mathcal{L}x, x)\big|$.

Dato che per $\|x\| = 1$ si ha $\big|(\mathcal{L}x, x)\big| \leqslant \|\mathcal{L}\|$, e quindi $m \leqslant \|\mathcal{L}\|$, resta da provare la disuguaglianza inversa.

Per $x, y \in X$ si ha

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}(x+y), (x+y)\big) &= \big(\mathcal{L}x, x\big) + \big(\mathcal{L}y, y\big) + 2\big(\mathcal{L}x, y\big)\\ \big(\mathcal{L}(x-y), (x-y)\big) &= \big(\mathcal{L}x, x\big) + \big(\mathcal{L}y, y\big) - 2\big(\mathcal{L}x, y\big).\end{aligned}$$

Sottraendo la seconda dalla prima si ottiene

$$4\big(\mathcal{L}x, y\big) = \big(\mathcal{L}(x+y), (x+y)\big) - \big(\mathcal{L}(x-y), (x-y)\big).$$

Tenendo presente che per ogni $z \in X$ vale

$$\big|(\mathcal{L}z, z)\big| = \|z\|^2 \left|\left(\mathcal{L}\frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|}\right)\right| \leqslant m\|z\|^2,$$

si ha

$$4\big(\mathcal{L}x, y\big) \leqslant m\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) = 2m\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$$

e quindi

$$2\big(\mathcal{L}x, y\big) \leqslant m\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Ponendo ora $y = \rho\mathcal{L}x$ con $\rho \in \mathbb{R}$ arbitrario si ha

$$m\rho^2\|\mathcal{L}x\|^2 - 2\rho\|\mathcal{L}x\|^2 + m\|x\|^2 \geqslant 0.$$

Perché questa sia verificata dovrà essere

$$\|\mathcal{L}x\|^4 - m^2\|\mathcal{L}x\|^2\|x\|^2 \leqslant 0$$

da cui si ottiene

$$\frac{\|\mathcal{L}x\|^2}{\|x\|^2} \leqslant m \qquad \text{e quindi} \qquad \|\mathcal{L}\| \leqslant m.$$

□

Possiamo ora enunciare il seguente teorema.

Teorema 6.33. *Dato nello spazio di Hilbert X l'operatore compatto e autoaggiunto $\mathcal{L}$, posto*

$$m = \sup_{\|x\|=1} \big|(\mathcal{L}x, x)\big|,$$

esiste un elemento $y \in X$ con $\|y\| = 1$, tale che

$$\big|(\mathcal{L}y, y)\big| = m,$$

e y è autovettore di $\mathcal{L}$ corrispondente all'autovalore $\mu = \big(\mathcal{L}y, y\big)$.

Dimostrazione. Per la definizione di estremo superiore esisterà una successione $\{x_k\}$ con $\|x_k\| = 1$, tale che

$$m = \lim_{k\to\infty} \big|(\mathcal{L}x_k, x_k)\big|.$$

La successione $\big\{(\mathcal{L}x_k, x_k)\big\}$ è limitata, esiste quindi una sottosuccessione convergente. Possiamo supporre che $\{x_k\}$ sia scelta sin dall'inizio in modo che $\big\{(\mathcal{L}x_k, x_k)\big\}$ sia convergente. Poniamo

$$\mu = \lim_{k\to\infty} (\mathcal{L}x_k, x_k).$$

Ovviamente si ha $|\mu| = m$. Mostriamo che

$$\lim_{k\to\infty} \big[\mathcal{L}x_k - \mu x_k\big] = 0. \tag{6.2}$$

Infatti

$$\|\mathcal{L}x_k - \mu x_k\|^2 = \|\mathcal{L}x_k\|^2 - 2\mu(\mathcal{L}x_k, x_k) + \mu^2 \leqslant \|\mathcal{L}\|^2 - 2\mu(\mathcal{L}x_k, x_k) + \mu^2 \to \|\mathcal{L}\|^2 - \mu^2.$$

Ma per il lemma $\mu^2 = \|\mathcal{L}\|^2$ e quindi vale la (6.2).

Poiché l'operatore $\mathcal{L}$ è compatto e $\{x_k\}$ è limitata (visto che ogni elemento ha norma 1), esiste una sottosuccessione $\{x_{k_i}\}$ tale che $\big\{\mathcal{L}x_{k_i}\big\}$ è convergente. Allora per la (6.2) esiste anche il limite di $\{x_{k_i}\}$ che indicheremo con y. Ma sempre per la (6.2) y è autovettore di $\mathcal{L}$ corrispondente all'autovalore μ e

$$\mu = (\mathcal{L}y, y). \qquad \square$$

Dal teorema dimostrato si evince che ogni operatore compatto, autoaggiunto, non nullo ha almeno un autovalore non nullo. In base a questo risultato si può costruire un algoritmo per determinare autovalori ed autovettori di un operatore compatto ed autoaggiunto.

Osservazione 6.34 (Procedimento di calcolo). Indichiamo con φ_1 il vettore y determinato nel teorema precedente e con μ_1 il corrispondente autovalore. Introduciamo il seguente procedimento per induzione.

Supponiamo di aver determinato k autovettori

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k,$$

e i corrispondenti autovalori

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k,$$

l'autovettore φ_{k+1} viene cercato come il vettore che massimizza il funzionale

$$\big|(\mathcal{L}x, x)\big|$$

sotto le condizioni

$$\|x\| = 1, \qquad (\varphi_i, x) = 0 \quad \text{per } i = 1, 2, \ldots k.$$

L'esistenza di un tale vettore è conseguenza del teorema precedente. Infatti se indichiamo con X_k il sottospazio di X per cui $(\varphi_i, x) = 0$ per $i = 1, 2, \ldots k$, si vede facilmente che X_k è sottospazio invariante, cioè

$$x \in X_k \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}x \in X_k,$$

poiché

$$(\mathcal{L}x, \varphi_i) = (x, \mathcal{L}\varphi_i) = \mu_i(x, \varphi_i) = 0.$$

L'operatore $\mathcal{L}$ su X_k è compatto e autoaggiunto, quindi per il Teorema 6.33 esiste φ_{k+1} con $\|\varphi_{k+1}\| = 1$ per cui

$$\big|(\mathcal{L}\varphi_{k+1}, \varphi_{k+1})\big| = \sup_{x \in X_k, \|x\|=1} \big|(\mathcal{L}x, x)\big|, \qquad \mu_{k+1} = (\mathcal{L}\varphi_{k+1}, \varphi_{k+1}).$$

Inoltre essendo $X_k \subset X_{k-1}$ si ha $|\mu_{k+1}| \leqslant |\mu_k|$. ⋆

In base al procedimento istituito sopra si dimostra il seguente teorema.

Teorema 6.35. *Per un operatore $\mathcal{L}$ compatto ed autoaggiunto in uno spazio di Hilbert X si ha una successione di autovettori ortonormali $\{\varphi_k\}$, corrispondenti alla successione $\{\mu_k\}$ di autovalori, tale che ogni $x \in X$ è rappresentabile nella forma*

$$x = \sum_k (x, \varphi_k)\varphi_k + y,$$

dove y è tale che

$$\forall k: \quad (y, \varphi_k) = 0 \quad e \quad \mathcal{L}y = 0.$$

Se la successione $\{\mu_k\}$ è infinita si ha

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0.$$

Dimostrazione. Si costruisce la successione di autovettori mediante il procedimento dato sopra. Si danno allora due casi.

1^o *caso.* Il procedimento termina per n finito. Ciò avviene quando l'operatore $\mathcal{L}$ su X_n è nullo, cioè $\mathcal{L}y = 0 \quad \forall y \in X_n$. Dato allora un qualunque $x \in X$ poniamo

$$y = x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k.$$

Chiaramente $y \in X_n$ e quindi $\mathcal{L}y = 0$.

2^o *caso.* Il procedimento continua indefinitamente, allora si hanno le successioni $\{\varphi_k\}$ e $\{\mu_k\}$ infinite. Facciamo vedere che

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0.$$

Supponiamo per assurdo che

$$\lim_{k\to\infty} |\mu_k| > 0,$$

ricordando che la successione dei valori assoluti degli autovalori è decrescente, quindi ammette limite. In questo caso la successione

$$\left\{\frac{1}{\mu_k}\varphi_k\right\}$$

sarebbe limitata, e la successione degli elementi

$$\varphi_k = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\mu_k}\varphi_k\right)$$

dovrebbe avere una sottosuccessione convergente, ma ciò è impossibile perché $\{\varphi_k\}$ è una successione ortonormale.

Dato $x \in X$ poniamo

$$y_n = x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k. \tag{6.3}$$

Facilmente si verifica che $(y_n, \varphi_h) = 0$ per $h = 1, 2, \ldots, n$ e quindi si ha $y_n \in X_n$. Consideriamo ora l'operatore $\mathcal{L}$ nel sottospazio X_n, si ha

$$\|\mathcal{L}y_n\| \leqslant |\mu_{n+1}|\|y_n\|.$$

D'altra parte vale la relazione

$$\|x\|^2 = \|y_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)^2,$$

da cui si deduce $\|y_n\|^2 \leqslant \|x\|^2$, e quindi vale anche $\|\mathcal{L}y_n\| \leqslant |\mu_{n+1}|\|x\|$ e

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}y_n = 0.$$

Infine applicando l'operatore $\mathcal{L}$ alla (6.3) si ottiene

$$\mathcal{L}y_n = \mathcal{L}x - \sum_{k=1}^{n} \mu_k (x, \varphi_k)\varphi_k,$$

e quindi al limite per $n \to \infty$ si ha

$$\mathcal{L}x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (x, \varphi_k)\varphi_k.$$

Posto allora

$$y = x - \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k)\varphi_k,$$

si può verificare facilmente che vale $\mathcal{L}y = 0$ e $(y, \varphi_k) = 0$ per ogni k. □

6.5 Autovalori dell'operatore di Laplace

Consideriamo per un dominio Ω, limitato e con bordo regolare, il problema agli autovalori per l'operatore di Laplace, con condizioni di Dirichlet omogenee.

Definizione 6.36 (Problema agli autovalori, forma classica). Si vogliono determinare le funzioni $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, con $u \neq 0$, e gli scalari $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) & \text{per } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{per } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Gli scalari λ vengono detti *autovalori* e le corrispondenti funzioni u *autofunzioni*. ◇

Il problema agli autovalori può essere riformulato in forma debole.

Definizione 6.37 (Problema agli autovalori, forma debole). Si vogliono trovare le funzioni $u \in H_0^1(\Omega)$, con $u \neq 0$, e gli scalari $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): \quad D(u,v) = \lambda(u,v). \qquad \diamond$$

Osservazione 6.38. Se esistono autovalori, essi sono positivi. Segue dalla formulazione debole se si pone $u = v$. ⋆

Osservazione 6.39. Dato un autovalore λ e una corrispondente autofunzione $u(x)$, è autofunzione anche la funzione $cu(x)$ con c scalare arbitrario. In generale le autofunzioni corrispondenti ad un autovalore λ costituiscono un sottospazio vettoriale dello spazio ambiente. ⋆

Lo studio del problema agli autovalori per l'operatore di Laplace può essere ricondotto a quello del problema agli autovalori per l'operatore compatto $-\Delta^{-1}$ in $L^2(\Omega)$. In effetti posto il problema agli autovalori per l'operatore $-\Delta$

$$-\Delta u = \lambda u,$$

per l'operatore $-\Delta^{-1}$ il problema diventa

$$-\Delta^{-1} u = \frac{1}{\lambda} u,$$

e se ci si pone in $L^2(\Omega)$ si ha

$$-\Delta^{-1} u = \mu u, \quad \mu = \frac{1}{\lambda}.$$

Possiamo allora applicare a questo caso i risultati del paragrafo precedente.

Definizione 6.40. Per il Teorema 6.35 ogni elemento $u \in L^2(\Omega)$ può essere espresso mediante la successione di autofunzioni ortonormali $\{\varphi_k\}$ corrispondente alla successione degli autovalori $\{\mu_k\}$ nel modo seguente

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k)\varphi_k + y,$$

Ma y in questo caso è nulla in quanto, sempre per il teorema citato, si ha $-\Delta^{-1} y = 0$ e valgono le condizioni di Dirichlet, quindi $y = 0$ per l'unicità della soluzione. Quindi u è sviluppabile in serie

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k)\varphi_k.$$

Questo sviluppo in serie di autofunzioni viene detto *sviluppo in serie di Fourier della* u. $\diamond$

In corrispondenza alla successione degli autovalori $\{\mu_k\}$ di $-\Delta^{-1}$ si ha la successione degli autovalori λ_k di $-\Delta$ con

$$\lambda_k = \frac{1}{\mu_k}$$

e le autofunzioni φ_k non cambiano. Attraverso gli sviluppi in serie di Fourier si può dare una espressione della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson molto utile nelle applicazioni.

6.6 Metodo di Fourier per il problema di Dirichlet

Consideriamo il problema di Dirichlet con condizioni omogenee

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Per trovare la soluzione di questo problema possiamo usare le autofunzioni φ_k e gli autovalori λ_k di $-\Delta$ introdotte nella sezione precedente. Ricordiamo che si ha

$$-\Delta u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k)\lambda_k \varphi_k,$$

dove le parentesi rappresentano il prodotto scalare in L^2. Se sviluppiamo in serie di Fourier il dato f, otteniamo

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k$$

e dunque u è soluzione del problema se

$$-\sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k)\lambda_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k.$$

Poiché le autofunzioni sono linearmente indipendenti, otteniamo il sistema (di dimensione infinita)

$$(u, \varphi_k) = -\frac{1}{\lambda_k}(f, \varphi_k), \qquad k \geqslant 1$$

che, una volta risolto, fornisce le componenti di Fourier della soluzione.

Nel caso in cui il problema abbia un dato al bordo non omogeneo u_0, si procede in modo analogo, supponendo che u_0 sia estendibile a $\tilde{u}_0$ su tutto Ω e sviluppando in serie la funzione $u - \tilde{u}_0$.

6.7 Metodo di Fourier per il problema misto del calore

Consideriamo il problema misto studiato nel Capitolo 4, Sezione 4.3, omogeneo, e quindi con $f(x,t) = 0$, e con condizioni al bordo omogenee, cioè con $v(x,t) = 0$. Applichiamo a questo problema il metodo di separazione delle variabili, supponiamo cioè che la soluzione $u(x,t)$ si possa porre nella forma

$$u(x,t) = \vartheta(t)\varphi(x).$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x,t) = 0$$

si ha

$$\frac{\vartheta'(t)}{\vartheta(t)} = a^2 \frac{\Delta\varphi(x)}{\varphi(x)}. \tag{6.4}$$

I due membri di questa equazione risulteranno evidentemente costanti. Indichiamo con $-a^2\lambda$ tale costante. Dal secondo membro si ha allora l'equazione

$$\Delta\varphi(x) = -\lambda\varphi(x).$$

Questa equazione con le condizioni al bordo omogenee ci porta al problema agli autovalori per l'operatore di Laplace. Indichiamo con $\{\lambda_k\}$ la successione degli autovalori e ricordiamo che risulta

$$\lambda_k > 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty.$$

In corrispondenza di questi si determina una successione di autosoluzioni $\{\varphi_k\}$ in $L^2(G)$ fra loro ortonormali.

Dal primo membro della (6.4) in corrispondenza ad ogni autovalore λ_k si ottiene l'equazione

$$\vartheta'(t) + a^2\lambda_k\vartheta(t) = 0.$$

Indichiamo con $\vartheta_k(t)$ la soluzione corrispondente. Posto $\vartheta_k(0) = c_k$, si ha

$$\vartheta_k(t) = c_k e^{-a^2\lambda_k t}.$$

In conclusione, in corrispondenza ad ogni autovalore λ_k per la funzione u si avranno le soluzioni

$$u_k(x,t) = c_k e^{-a^2\lambda_k t}\varphi_k(x).$$

Queste soluzioni per $t = 0$ ci danno

$$u_k(x,0) = c_k\varphi_k(x).$$

Per ottenere la soluzione del nostro problema dovremo soddisfare le condizioni iniziali. A questo fine sviluppiamo la funzione $u_0(x)$ in serie di Fourier nelle autosoluzioni $\varphi_k(x)$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(u_0, \varphi_k\big)\varphi_k(x).$$

Se si considera la serie delle funzioni u_k

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-a^2\lambda_k t}\varphi_k(x),$$

perché siano soddisfatte le condizioni iniziali basterà porre

$$c_k = \big(u_0, \varphi_k\big).$$

Per affrontare l'equazione non omogenea

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2\Delta u(x,t) = f(x,t), \tag{6.5}$$

con le condizioni

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{per } x \in \overline{G}, \qquad u(x,t) = 0 \quad \text{per } (x,t) \in \overline{B}_T,$$

procediamo nel seguente modo.

Data la successione $\{\varphi_k\}$ delle autosoluzioni dell'operatore di Laplace, diamo lo sviluppo delle soluzione $u(x,t)$ nella forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k(t)\varphi_k(x),$$

con

$$\vartheta_k(t) = \Big(u(x,t), \varphi_k(x)\Big),$$

prodotto scalare in $L^2(G)$ di $u(x,t)$ e di $\varphi_k(x)$. Per le condizioni iniziali si dovrà avere

$$\vartheta_k(0) = \Big(u_0, \varphi_k\Big) = c_k. \tag{6.6}$$

Se ora moltiplichiamo l'equazione (6.5) per φ_k e integriamo su G si ha

$$\frac{d}{dt}\int_G u(x,t)\varphi_k(x)dx - a^2\int_G \Delta u(x,t)\varphi_k(x)dx = \int_G f(x,t)\varphi_k(x)dx.$$

Ma tenendo conto che le condizioni al bordo sono omogenee, da questa si ha anche

$$\frac{d}{dt}\int_G u(x,t)\varphi_k(x)dx - a^2\int_G u(x,t)\Delta\varphi_k(x)dx = \int_G f(x,t)\varphi_k(x)dx.$$

Posto allora

$$f_k(t) = \Big(f, \varphi_k\Big),$$

e tenendo presente che, essendo φ_k autosoluzione corrispondente a λ_k, si ha $\Delta\varphi_k = -\lambda_k\varphi_k$ dalla relazione precedente si ottiene

$$\frac{d}{dt}\vartheta_k(t) + a^2\lambda_k\vartheta_k(t) = f_k(t).$$

Questa è un'equazione differenziale lineare non omogenea. Tenendo presente la (6.6), la soluzione è data da

$$\vartheta_k(t) = c_k e^{-a^2\lambda_k t} + \int_0^t e^{-a^2\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau.$$

Si può pertanto dare la nostra soluzione nella forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[c_k e^{-a^2\lambda_k t} + \int_0^t e^{-a^2\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau\right]\varphi_k(x).$$

Per affrontare il problema con condizioni al bordo non omogenee si fa la posizione

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t),$$

definendo quindi $v(x,t)$ non solo sul bordo B_T ma anche in Q_T, e cercando quindi $w(x,t)$ come soluzione di

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - a^2\Delta w(x,t) = f_v(x,t)$$

con

$$f_v(x,t) = f(x,t) - \left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - a^2\Delta v(x,t)\right].$$

6.8 Esempi di calcolo degli autovalori per l'operatore di Laplace

Vedremo in questa sezione alcuni esempi di calcolo esplicito di autovalori e autofunzioni in alcune geometrie particolari.

6.8.1 Il caso unidimensionale

Sia $\Omega =]0, a[$ un intervallo limitato; nel caso unidimensionale il problema agli autovalori per l'operatore di Laplace diventa semplicemente

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2v}{dx^2} = \lambda v, & v \neq 0 \\ v(0) = v(a) = 0 \end{cases}$$

dove ricordiamo che deve essere $\lambda > 0$.

Risolvendo l'equazione del moto armonico si ottiene $v(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}\,x+\alpha)$ e imponendo le condizioni al contorno:

$$A\sin\alpha = A\sin(\sqrt{\lambda}\,a + \alpha) = 0,$$

da cui $\alpha = 0$ e $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{a}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$. Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \qquad k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 1$$

e le rispettive autofunzioni

$$\varphi_k(x) = A_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right).$$

Abbiamo verificato che in questo caso lo spettro è effettivamente discreto, e abbiamo un'infinità numerabile di autovalori dipendente da un parametro. Il più piccolo autovalore è $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{a^2}$.

6.8.2 Il caso del rettangolo

Passiamo ora al dominio bidimensionale $\Omega =]0, a[\times]0, b[$. Il problema agli autovalori si scrive

$$\begin{cases} -\dfrac{dv}{dx^2} - \dfrac{dv}{dy^2} = \lambda v \\ v(0, y) = v(a, y) = v(x, 0) = v(x, b) = 0. \end{cases}$$

Mediante la separazione delle variabili cerchiamo una soluzione del tipo $v(x, y) = X(x)Y(y)$, $X \neq 0$, $Y \neq 0$. Sostituendo nell'equazione abbiamo

$$-X''Y - Y''X = \lambda XY \quad \Rightarrow \quad -\frac{X''}{X} - \frac{Y''}{Y} = \lambda.$$

Poiché il primo addendo è solo funzione di x e il secondo solo funzione di y, si deve avere

$$-\frac{X''}{X} = \mu, \quad -\frac{Y''}{Y} = \nu, \qquad \mu + \nu = \lambda,$$

mentre le condizioni al contorno diventano

$$X(0) = X(a) = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0.$$

Quindi otteniamo due problemi analoghi al caso unidimensionale, e dunque

$$\mu = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad X(x) = A \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right), \qquad \nu = \left(\frac{h\pi}{b}\right)^2, \quad Y(y) = B \sin\left(\frac{h\pi}{b}y\right),$$

con $k, h \in \mathbb{N}$, $k, h \geqslant 1$.

Gli autovalori sono dati da $\lambda = \mu + \nu$, ovvero

$$\lambda_{k,h} = \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2}\right)\pi^2$$

e le autofunzioni da

$$\varphi_{k,h}(x, y) = A_{k,h} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{h\pi}{b}y\right).$$

Anche qui osserviamo che lo spettro è discreto; il più piccolo autovalore è dato da

$$\lambda_{1,1} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\pi^2.$$

Notiamo che in questo caso può succedere che esistano autovalori con molteplicità più grande di 1.

Il quadrato

In particolare, nel caso del quadrato $a = b$, gli autovalori diventano

$$\lambda_{k,h} = \frac{k^2 + h^2}{a^2}\pi^2.$$

In questo caso gli autovalori con $k = h$ hanno molteplicità 1, mentre quelli con $k \neq h$ hanno almeno molteplicità 2, visto che

$$\lambda_{k,h} = \lambda_{h,k}$$

ma le corrispondenti autofunzioni

$$\varphi_{h,k}(x, y) = A \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{h\pi}{a}y\right), \quad \varphi_{k,h}(x, y) = A \sin\left(\frac{h\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right)$$

sono indipendenti. Se la molteplicità è esattamente 2, si dice che le oscillazioni corrispondenti a queste autofunzioni sono *semplicemente degeneri*.

Può anche capitare che $k_1^2 + h_1^2 = k_2^2 + h_2^2$ per h, k diversi: ad esempio $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$, oppure $25^2 = 15^2 + 20^2 = 7^2 + 24^2$.[(2)] In questo caso si ha

$$\lambda_{k_1,h_1} = \lambda_{h_1,k_1} = \lambda_{h_2,k_2} = \lambda_{k_2,h_2}$$

e quindi la molteplicità è almeno 4. Se la molteplicità è esattamente 4, si parla di autofunzioni *doppiamente degeneri*. Il discorso può essere portato avanti: infatti, alcuni numeri si scrivono come somma di quadrati in tre o più modi distinti (un esempio minimale: $325 = 324 + 1 = 289 + 36 = 225 + 100$), e quindi le molteplicità possono aumentare indefinitamente.

[(2)] Questo fatto è legato al numero di fattori primi distinti della forma $4m + 1$ e della forma $4m + 3$. L'esempio più piccolo è $50 = 49 + 1 = 25 + 25$, dove però la molteplicità si riduce a tre per la presenza di due addendi uguali.

6.8.3 Il caso del parallelepipedo

Se consideriamo il dominio tridimensionale $\Omega =]0, a[\times]0, b[\times]0, c[$, possiamo ragionare in modo analogo separando le variabili, e otterremo un'infinità numerabile di autovalori indicizzata da tre parametri:

$$\lambda_{k,h,\ell} = \Big(\frac{k^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} + \frac{\ell^2}{c^2}\Big)\pi^2$$

con autofunzioni

$$\varphi_{k,h,\ell}(x, y, z) = A_{k,h,\ell} \sin\Big(\frac{k\pi}{a}x\Big) \sin\Big(\frac{h\pi}{b}y\Big) \sin\Big(\frac{\ell\pi}{c}z\Big).$$

Naturalmente il discorso è estendibile al caso di un dominio n-dimensionale che sia il prodotto di intervalli.

6.8.4 Il caso del cerchio

Un caso più sofisticato è quello del cerchio $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$. Per poter separare le variabili, bisogna passare alle coordinate polari (r, ϑ), ricordando che si ha

$$\Delta v(r, \vartheta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial v}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}.$$

Le condizioni al contorno diventano semplicemente $v(R, \vartheta) = 0$, ma bisogna tener presente anche che che v deve essere una funzione limitata e che $v(r, \vartheta) = v(r, \vartheta + 2\pi)$.

Come sopra, applichiamo la separazione delle variabili cercando una soluzione del tipo $v(r, \vartheta) = \rho(r)Q(\vartheta)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(rQ(\vartheta)\dfrac{\partial \rho(r)}{\partial r}\Big) - \dfrac{\rho(r)}{r^2}\dfrac{\partial^2 Q(\vartheta)}{\partial \vartheta^2} = \lambda\rho(r)Q(\vartheta) \\ \rho(R) = 0, \quad Q(\vartheta + 2\pi) = Q(\vartheta). \end{cases}$$

Dividendo l'equazione per $\rho(r)Q(\vartheta)$ e moltiplicando per r^2 otteniamo

$$-\frac{Q''(\vartheta)}{Q(\vartheta)} = \lambda r^2 + r\frac{\rho'(r)}{\rho(r)} + r^2\frac{\rho''(r)}{\rho(r)},$$

che ha il primo membro dipendente solo da ϑ e il secondo solo da r.

Quindi avremo

$$-\frac{Q''(\vartheta)}{Q(\vartheta)} = \nu, \qquad Q(\vartheta + 2\pi) = Q(\vartheta),$$

e per avere la periodicità deve essere $\nu \geqslant 0$ e quindi

$$Q(\vartheta) = A\sin(\sqrt{\nu}\vartheta + \alpha).$$

Ma ricordiamo che $Q(\vartheta + 2\pi) = Q(\vartheta)$, quindi $\sqrt{\nu} \in \mathbb{N}$, cioè $\nu = n^2$ con $n \in \mathbb{N}$.

Ora riprendiamo l'equazione in r:

$$\lambda r^2 + r\frac{\rho'(r)}{\rho(r)} + r^2\frac{\rho''(r)}{\rho(r)} = n^2.$$

Riordinando i termini e facendo le sostituzioni $x = \sqrt{\lambda}r$, $y(x) = r\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$, si ottiene l'equazione

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y(x) = 0,$$

che è nota come *equazione di Bessel* (in realtà si tratta di una famiglia di equazioni dipendenti dal parametro n^2 per $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$). è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare a coefficienti non costanti, e si può mostrare che per ogni n l'unica soluzione limitata (a meno di una costante moltiplicativa) è data dalla serie

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}.$$

Tali funzioni vengono chiamate *funzioni di Bessel*.[(3)]

In particolare le funzioni di Bessel si annullano infinite volte, come si puì vedere in Figura 6.1: chiamiamo $\xi_{i,n}$ l'i-esimo zero dell'n-esima funzione di Bessel sulla parte positiva dell'asse x. Poiché per il nostro problema agli autovalori dobbiamo ancora imporre $\rho(R)$=0, avremo

$$0 = \rho(R) = y(\sqrt{\lambda}R) = J_n(\sqrt{\lambda}R),$$

e quindi gli autovalori sono dati da

$$\lambda_{i,n} = \frac{\xi_{i,n}^2}{R^2}$$

e le autofunzioni sono

$$\varphi_{i,n}(r, \vartheta) = A\sin(n\vartheta + \alpha)J_n(\sqrt{\lambda_{i,n}}r).$$

Anche qui abbiamo infiniti autovalori indicizzati da due indici interi positivi. Il più piccolo autovalore si ha per il primo zero della funzione J_0, $\xi_{1,0} \simeq 2.40483$:

$$\lambda_{1,0} = \frac{\xi_{1,0}^2}{R^2} \simeq 5.7832\frac{1}{R^2}.$$

6.9 Esercizi

Esercizio 14. Come cambiano autovalori e autofunzioni del laplaciano con condizioni di Dirichlet nel caso unidimensionale per un intervallo del tipo $]a, b[$?

[(3)] Si può mostrare facilmente che il raggio di convergenza della serie è infinito, infatti: separiamo il termine indipendente da k, riscrivendo la serie come

$$J_n(x) = (\frac{x}{2})^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(n+k)!}x^{2k}.$$

Dalla stima $(k!)^2 = \prod_{j=1}^{k} j(k-j+1) \geqslant k^k$ si trova che

$$\frac{1}{2^{2k}k!(n+k)!} < \frac{1}{(k!)^2} \leqslant \frac{1}{k^k}$$

e quindi l'inverso del raggio di convergenza della serie è dato da

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^{2k}k!(n+k)!}} \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4k} = 0.$$

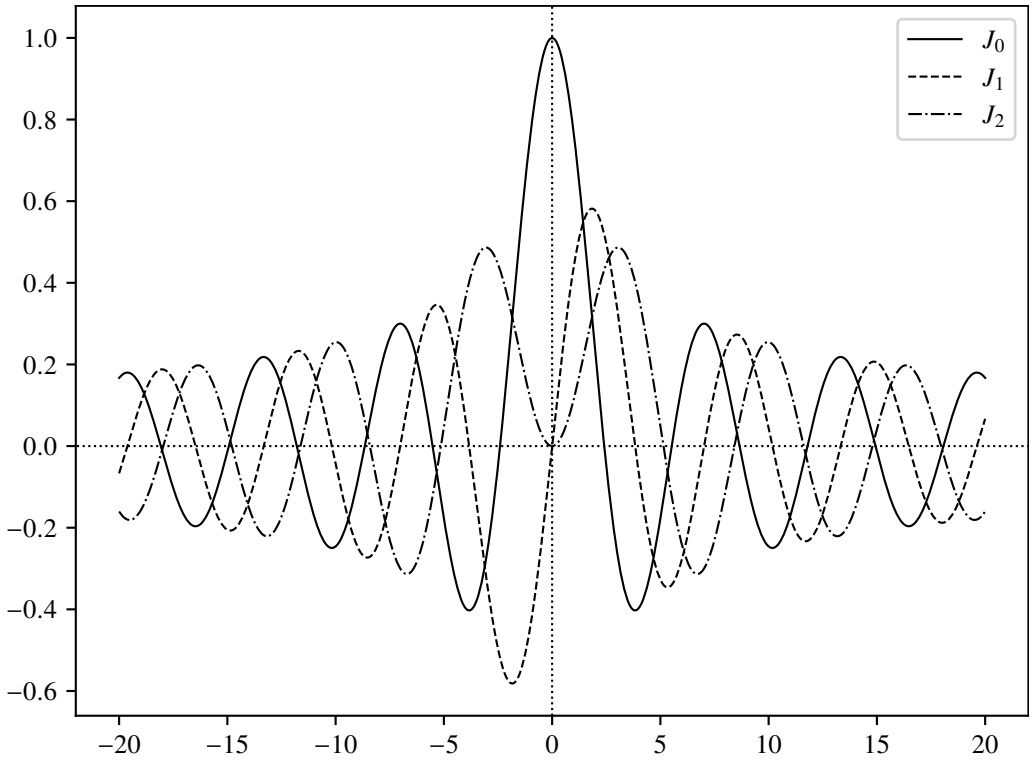

Figura 6.1: I grafici delle prime tre funzioni di Bessel

Esercizio 15. Si trovino autovalori e autofunzioni del laplaciano con condizioni di Dirichlet nel caso unidimensionale per un'unione disgiunta di intervalli del tipo $]a, b[\cup]c, d[$.

Esercizio 16. Si chiama *problema agli autovalori per l'operatore di Laplace con condizioni di Neumann* il problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \qquad v \neq 0.$$

Che cosa si può dire sul segno degli autovalori in questo caso?

Esercizio 17. Si trovino autovalori e autofunzioni dell'operatore di Laplace con condizioni di Neumann nel caso $n = 1$ sull'intervallo $]0, a[$.

Esercizio 18. Si chiama *problema agli autovalori per l'operatore di Laplace con condizioni di Robin* il problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} + a(x)v = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \qquad v \neq 0$$

dove $a : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione regolare. Che cosa si può dire sul segno degli autovalori in questo caso?

Bibliografia

[Bitsadze] A.V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, Mir Publishers, 1980.

[Folland] G. Folland, *Introduction to partial differential equations*, Second edition, Princeton University Press, 1995.

[Friedlander-Joshi] F. G. Friedlander, M. Joshi, *Introduction to the Theory of Distributions*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 1999.

[Strauss] W. A. Strauss, *Partial differential equations. An introduction*, John Wiley & Sons, 1992.

[Tartar] L. Tartar, *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Lecture notes of the U.M.I., 2007.