

6.3. Sistemi continui

Supponiamo a questo punto di voler trattare un sistema *esteso*, magari per semplicità un corpo rigido, come ad esempio un disco o una patata. Dobbiamo necessariamente far riferimento ai suoi punti, che sono infiniti e ci daranno (lo sentiamo già) un sacco di problemi? No: possiamo cambiare leggermente il punto di vista che abbiamo adottato quando abbiamo parlato di posizionamento di un punto nella sezione ???. Basta che definiamo “posizionamento di un oggetto esteso” una funzione che associa all’oggetto che ci interessa un dominio di \mathbb{E}^3 , che sarà la regione di spazio che l’oggetto occupa. La novità qui sta nel fatto che ora, detto come allora p il posizionamento, avremo $p : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{E}^3)$ anziché $p : X \rightarrow \mathbb{E}^3$, ma per il resto non ci sono novità: se avremo a che fare con un punto, l’immagine di p sarà un singoletto $\{\mathbf{x}\}$ anziché un vettore \mathbf{x} ⁽¹⁵⁾ ⁽¹⁶⁾.

Il passaggio successivo consiste nel definire delle quantità fisiche sul posizionamento del corpo. E qui cominciano i problemi. Infatti, se avete notato, i campi di forze che abbiamo risultante nullo, l’asse centrale è definito e rispetto a un punto O di questo si deve avere

$$M_O = \mathbf{a} \times \sum_{s=1}^N F_s(O - P_s) = \mathbf{0}.$$

Questo significa che l’asse centrale è diretto come \mathbf{a} e tutti i suoi punti, presi come punti di riduzione del momento, danno momento risultante nullo. Ci chiediamo se sia possibile che questo momento sia nullo *qualunque* sia la direzione del campo di forze parallele (purché a risultante non nulla). Questo è possibile se esiste C tale che

$$\sum_{s=1}^N F_s(G - P_s) = \mathbf{0}$$

ossia, usando il solito fatto che $C - P_s = C - O + O - P_s$ (qui O è l’origine di un sistema di coordinate)

$$\left(\sum_{s=1}^N F_s \right) (C - O) = \sum_{s=1}^N F_s(P_s - O)$$

e quindi, siccome per ipotesi il risultante non è nullo, abbiamo

$$C - O = \frac{\sum_{s=1}^N F_s(P_s - O)}{\sum_{s=1}^N F_s}.$$

Il punto C si chiama *centro delle forze parallele*. È un punto importante, perché è sempre possibile pensare un sistema di forze parallele, applicato a un corpo rigido, equivalente al suo risultante (purché non nullo) applicato in questo punto, indipendentemente dalla direzione del campo. Ritroveremo fra poco questo concetto quando parleremo del baricentro, che è il centro delle forze peso.

⁽¹⁵⁾ Ovviamente si perturba di epsilon la definizione di legge oraria, perché, se $\mu(t, x)$ è un singoletto, allora ci serve un’applicazione, diciamo e , che “estrae” dal singoletto l’elemento, per cui la legge oraria di x sarà $t \mapsto e(\mu(t, x))$.

⁽¹⁶⁾ Dove sta scritto, in tutto questo ragionamento, che il corpo è *rigido*? Da nessuna parte! Infatti questa impostazione funziona benissimo anche per un corpo *deformabile*, come una trave o una bolla di sapone. Semplicemente, durante il moto del corpo, la regione che esso occupa avrà una forma diversa istante per istante, mentre se sarà rigido, esisterà un riferimento nel quale la forma sarà sempre la stessa.

introdotta possono essere viste come delle funzioni del punto, non nulle solo sui punti P_1, \dots, P_N . Avevamo già introdotto questo punto di vista quando abbiamo parlato del principio di azione e reazione, se ricordate. Immaginiamo allora di avere una funzione $P \mapsto \mathbf{F}(P)$ che associ ad ogni punto P la forza applicata in P . Se volessimo fare la risultante di questa forza, saremmo in grossi guai: è chiaro da un lato che il concetto che sostituisce la sommatoria sarà l'integrale, ma se la forza è ovunque diversa da zero la risultante sarebbe ovviamente infinita, perché i punti sono infiniti.

Appare quindi chiaro che ci serve un concetto nuovo. I matematici hanno a lungo rimuginato su questa cosa, e hanno prodotto il concetto di *misura*. Hanno infatti capito che, se la quantità fisica di interesse (la risultante) deve essere un integrale, allora la variabile indipendente giusta non è il punto ma il *dominio* di integrazione. In termini semplici, ma che comunque già conoscete (o conoscerete) dai corsi di Analisi, vengono individuate una funzione $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{E}^3) \rightarrow [0, +\infty]$ e una famiglia di sottoinsiemi, detti μ -*misurabili* (cioè relativamente alla misura che si ha in mente) con le proprietà che l'unione e l'intersezione numerabile di misurabili è misurabile, e tali che su di essi la misura deve essere additiva, ossia tale che la misura dell'unione disgiunta di due insiemi misurabili è pari alla somma delle misure degli insiemi ⁽¹⁷⁾. Esempi? Il volume, l'area, la lunghezza. Chiaramente questo concetto è una generalizzazione del concetto di integrale, e infatti due suoi casi particolari, molto importanti, sono l'integrale di Lebesgue e la misura di Hausdorff (che contiene la misura di Lebesgue come caso particolare) ⁽¹⁸⁾.

Ma torniamo a noi. Abbiamo allora un corpo continuo, rigido se volete, e una forza applicata in un suo punto P . Cosa dobbiamo fare? Rispetto a quello che avete fatto o farete in Analisi, qui forse c'è la novità che la quantità da "misurare" è la forza, dunque un vettore. Se prendiamo per famiglia di insiemi misurabili quelli misurabili secondo Lebesgue, allora (usiamo il simbolo \mathbf{R}_P per la misura "risultante")

$$\mathbf{R}_P(E) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } P \in E, \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (19).$$

Se invece il campo di forza da sommare è "diffuso", allora serve un concetto più specifico chiamato *densità*. La densità di forza è una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ che ad ogni punto P

⁽¹⁷⁾ In realtà deve essere *numerabilmente* additiva, termine tremendo per dire che la misura dell'unione numerabile di insiemi disgiunti è pari alla serie delle misure degli insiemi.

⁽¹⁸⁾ Al punto che si scrive spesso

$$\mu(E) = \int_E d\mu,$$

più di così...

⁽¹⁹⁾ Si tratta di una misura? Non ci vuole molto a verificarlo: nel vuoto non c'è niente, e quindi $\mathbf{R}_P(\emptyset) = \mathbf{0}$. Poi, se abbiamo un'unione disgiunta qualunque che non contiene P , nessuno dei sottoinsiemi conterrà P e quindi l'additività si riduce a $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ (o $\mathbf{0} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{0}$, per i pignoli), mentre se contiene P , esso deve stare esattamente in uno solo degli insiemi, per cui l'additività equivale a dire che $\mathbf{F} = \mathbf{F} + \mathbf{0}$, o con la serie di zeri se preferite.

associa un vettore $\mathbf{f}(P)$, tale che la risultante delle forze applicate a un insieme M sia

$$\mathbf{R}(M) = \int_M \mathbf{f} d\mathcal{L}^3.$$

Non sempre la densità esiste: per esempio la \mathbf{R}_P sopra introdotta non ce l'ha ⁽²⁰⁾. Poi può capitare che una distribuzione di forze (questo è il nome tecnico dato alla misura vettoriale) abbia una densità *superficiale* o *lineare*, per esempio distribuite su un piano (o una superficie) o su una linea.

Noi supporremo sempre che la densità esista, oppure che le forze siano concentrate in un numero finito di punti (cosicché per calcolare la risultante si possa farne la solita somma vettoriale) oppure tutte e due le cose assieme ⁽²¹⁾.

Non ci vuol molto a credere che tutti i teoremi sulle forze applicate (teorema di Mozzi, ecc.) continuino ad essere validi anche quando si è in presenza di una densità di forze, purché tutti i vari integrali siano finiti.

Se invece delle forze si debbono sommare i momenti, la situazione non cambia molto. Se \mathbf{x} indica il generico vettore $P - O$ (O è il punto rispetto al quale si calcolano i momenti), allora il momento risultante di una distribuzione di forze con densità \mathbf{f} applicate a una regione misurabile E sarà dato da

$$\mathbf{M}_O = \int_E \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathcal{L}^3.$$

Un altro concetto che conviene estendere al continuo è quello di massa. L'idea è la stessa, se non più facile: per misurare la massa di una regione misurabile $E \subseteq \mathbb{E}^3$, o si sommano le masse dei singoli punti isolati, che hanno una misura

$$(6.4) \quad \mu_P(E) = \begin{cases} m & \text{se } P \in E, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

oppure si fa l'integrale della *densità di massa* ρ , che è una funzione positiva:

$$\mu(E) = \int_E \rho d\mathcal{L}^3.$$

⁽²⁰⁾ La misura \mathbf{R}_P è un caso vettoriale della famosa *delta di Dirac*, che discuteremo—in nota—fra poco.

⁽²¹⁾ Molto più elegante ma meno intuitivo è supporre che il concetto *primitivo* sia quello di misura, non di “campo diffuso”. Infatti, la teoria della misura insegna che in “quasi tutti” i punti la densità $\mathbf{f}(x)$ è uguale al limite

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))}$$

dove $B(x, r)$ è la sfera piena di centro x e raggio r . Quindi, assegnata la misura μ , risulta definita la densità, almeno quando le cose filano liscio.

Esattamente come detto poco fa, non sempre esiste la densità, e il caso più importante di questi è il punto isolato ⁽²²⁾. Esistono poi densità superficiali e lineari, che corrispondono a integrali di superficie e di linea.

Se poi la densità, misurata nel riferimento solidale, non dipende dal punto P del corpo, esso si dirà *omogeneo*, altrimenti non omogeneo.

Di questo passo potremmo continuare parlando di corpi deformabili, e così via. Siccome però non vogliamo invadere la sfera della Meccanica dei Continui, ci limitiamo a considerare corpi continui *rigidi*. I corpi rigidi sono facili da definire in quanto i loro punti sono fissi in un opportuno sistema di riferimento, e così li abbiamo definiti. Alla definizione 3.10 aggiungiamo ora *che ad un corpo rigido continuo viene associata una densità, tale che per ogni sottocorpo misurabile E del corpo, la quantità*

$$(6.5) \quad \mu(E) = \int_E \rho d\mathcal{L}^n \quad (n = 1, 2, 3)$$

sia la massa del sottocorpo.

6.4. Baricentro di un sistema meccanico

⁽²²⁾ La (6.4) è l'esempio tipico di una misura detta *delta di Dirac* scalare. Ci vuole poco a convincersi che non può avere densità: se fosse diversa da zero su una regione non contenente P , allora, essendo la densità positiva, la massa sarebbe non nulla contro la definizione. Dunque la densità può essere diversa da zero solo in P , però allora l'integrale deve essere nullo, perché un punto è trascurabile secondo Lebesgue. Non c'è scampo, però molti Fisici sono convinti che la densità della delta di Dirac scalare sia una funzione nulla ovunque e che vale infinito in P (e questo ancora si potrebbe fare) ma tale che l'integrale di questa "funzione" sia 1 (e questo è contraddittorio). Non è però una baggianata: abbastanza di recente ci si è accorti che questa misura ha delle proprietà molto simili a quelle di una funzione, per esempio che si può definirne la derivata, ecc., e addirittura che si può estendere la nozione comune di "funzione" in modo da includere anche questi oggetti.

A dirla tutta fino in fondo (tanto siamo in nota) sarebbe più giusto definire *tutto* in termini di misure e ottenere le quantità puntiformi come delte di Dirac. Per esempio, avremmo potuto dare le leggi della Dinamica per i sottocorpi (questo è l'approccio che si segue in Meccanica dei Continui) e ottenere come caso particolare—o limite—quelle per i punti. Sarebbe stato però pesante e troppo complicato. Ci saremmo comunque accorti che esistono punti e punti: infatti, non tutti i corpi puntiformi hanno le stesse proprietà. Essi ereditano, per così dire, le proprietà dei corpi estesi che li generano. Questo è un fatto importante e poco conosciuto: vi è stato, secondo me, una confusione di ruoli nel passato. Quando si è usato il punto geometrico per modellizzare il punto materiale (naturalmente la parola "modello" non passava nemmeno per la testa a quel tempo), si è creduto che esso, in quanto privo di dimensioni, dovesse essere anche privo di struttura. Invece non è così, e lo spin dell'elettrone ne è la prova più lampante. Questo pregiudizio persiste ancor oggi: c'è chi pensa, per esempio, che l'elettrone *debba* avere una struttura interna per il fatto che ha lo spin. Invece, trattando i punti materiali come particolari misure, si vede che è possibile dar loro delle strutture: tanto, sempre di modelli matematici si tratta.

Definizione 6.5. Dato un sistema meccanico di N punti materiali di masse m_s ($s = 1, \dots, N$), definiamo baricentro del sistema il punto avente vettore posizione

$$(6.6) \quad G - O = \frac{\sum_{s=1}^N m_s (P_s - O)}{\sum_{s=1}^N m_s};$$

dato un corpo continuo occupante una regione E dello spazio \mathbb{E}^n ($n = 1, 2, 3$), definiamo baricentro del corpo il punto avente vettore posizione

$$(6.7) \quad G - O = \frac{\int_E \rho \mathbf{x} d\mathcal{L}^n}{\int_E \rho d\mathcal{L}^n} = \frac{1}{\mu(E)} \int_E \mathbf{x} d\mathcal{L}^n \quad (n = 1, 2, 3)$$

dove $\mu(E)$ è la massa totale di E .

Pertanto la posizione del baricentro ⁽²³⁾ dipende solo dalla densità del corpo e dalla sua “forma” (cioè E). Se il corpo è omogeneo, allora anche ρ si semplifica e risulta

$$G - O = \frac{1}{\mathcal{L}^n(E)} \int_E \mathbf{x} d\mathcal{L}^n \quad (n = 1, 2, 3)$$

che è un vettore che dipende solo dalla geometria del corpo. Osserviamo che non è necessario supporre il sistema rigido per definire il baricentro.

Il baricentro è importante per vari motivi. Il più importante di tutti è il teorema che porta il suo nome.

Teorema 6.6 (del baricentro). *In un qualunque sistema di punti materiali a masse costanti nel tempo si ha che la quantità di moto totale \mathbf{P} è data da*

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}(G)$$

dove $M = m_1 + \dots + m_N$ è la massa totale del sistema.

Dimostrazione. Ragioniamo prima su un sistema finito di N punti materiali di masse m_1, \dots, m_N poste nei punti P_1, \dots, P_N . Allora

$$\mathbf{P} = \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{v}(P_s).$$

Dall'espressione del baricentro (6.6) abbiamo, derivando rispetto al tempo, siccome le masse sono costanti,

$$\mathbf{v}(G) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{v}(P_s).$$

Moltiplicando ambo i membri per M si ha allora la tesi. ■

⁽²³⁾ Che alcuni chiamano *centro di massa*—perché è riferita a particolari forze parallele, le forze peso, v. nota 14.

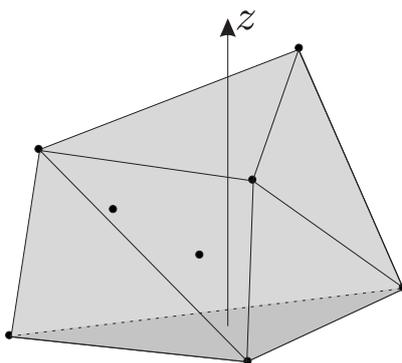


FIGURA 105. Combinazione convessa.

Nel caso di un sistema continuo, non c'è molto da dimostrare: si tratta di buon senso. Se *definiamo*, secondo quanto ci suggerisce il buon senso, la quantità di moto di un sistema continuo come

$$\mathbf{P} = \int_E \rho \mathbf{v} d\mathcal{L}^n \quad (n = 1, 2, 3)$$

allora il teorema del baricentro discende dalla (6.7) derivando sotto il segno di integrale e supponendo che ρ non dipenda dal tempo (corrisponde alla conservazione della massa ⁽²⁴⁾).

Vediamo ora alcune proprietà più geometriche del baricentro.

Proposizione 6.7. *Il baricentro di un sistema meccanico continuo o discreto appartiene sempre all'involuppo convesso del corpo.*

Dimostrazione. Ricordiamoci dapprima che l'involuppo convesso è l'intersezione di tutti i convessi che contengono il corpo. Dalla formula del baricentro per un sistema finito discreto (6.6) si vede che esso è la combinazione convessa ⁽²⁵⁾ delle posizioni dei punti. Sempre nel caso finito, l'involuppo convesso è evidentemente un poliedro (o poligono) convesso, dunque intersezione di un numero finito di semispazi (o semipiani) ⁽²⁶⁾. Supponiamo ora di prendere

⁽²⁴⁾ Qui stiamo barando: non è sempre vero, perché, per esempio, se il corpo si muove, anche se la massa si conserva, ρ può variare, se il corpo non è omogeneo. Quello che è equivalente alla conservazione della massa è che la misura " $\rho d\mathcal{L}^n$ " non dipenda dal tempo. Queste questioni, che attengono più alla Meccanica dei continui, le lasciamo perdere supponendo che il corpo sia sempre fermo (e, visto che abbiamo a che fare con corpi rigidi, c'è sempre un sistema di riferimento nel quale ciò accade).

⁽²⁵⁾ Si dice *combinazione convessa* di N vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ il vettore $\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_N \mathbf{x}_N$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$. Nel nostro caso, $\lambda_s = m_s/M$.

⁽²⁶⁾ Fa eccezione a questa situazione il caso in cui tutti i punti siano allineati. Allora, però, essendo in questo caso $P_s - O = r_s \mathbf{a}$, si avrà

$$\mathbf{G} - O = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^N m_s r_s \mathbf{a} = r_G \mathbf{a}$$

e quindi, siccome evidentemente $r_{\min} \leq r_s \leq r_{\max}$ per ogni s , avremo

$$r_{\min} \leq r_G \leq r_{\max}$$

che esprime il fatto che il baricentro giace all'interno del segmento congiungente i punti estremi.

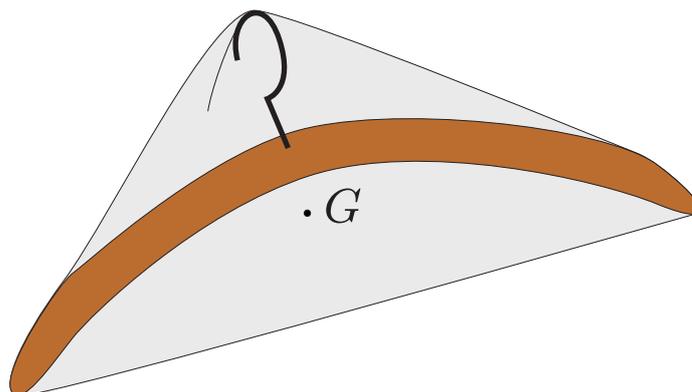


FIGURA 106. L'involuppo convesso e il baricentro.

uno di questi semispazi e di assegnare le coordinate in modo che sia il semispazio $\{z \geq 0\}$. Dalla (6.6) segue allora

$$(6.8) \quad z_G = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^N m_s z_s \geq 0$$

e dunque G sta nel semispazio, dunque nell'involuppo convesso.

Nel caso continuo si ragiona nello stesso modo con l'integrale al posto della sommatoria, ma bisogna tener conto del fatto che l'involuppo convesso è l'intersezione di tutti i semispazi chiusi che contengono il corpo, che è una proprietà generale degli insiemi convessi. ■

Diamo ora il concetto di *simmetria materiale* di un sistema meccanico.

Definizione 6.8. *Un sistema meccanico ha un piano (risp. un asse) di simmetria materiale se per ogni punto P del sistema, il suo simmetrico rispetto al piano (risp. all'asse) appartiene al sistema e ha la stessa massa o lo stesso valore della densità di massa.*

Esplicitamente, se P ha massa m , o densità $\rho(P)$, allora il suo simmetrico $\sigma(P)$, dove σ indica la simmetria, ha massa m o densità $\rho(\sigma(P)) = \rho(P)$, per ogni P del sistema.

La simmetria materiale è più della simmetria geometrica: la seconda richiede solo che $\sigma(P)$ appartenga al sistema, mentre la simmetria materiale anche che le masse o le densità siano uguali. Chiaramente, nel caso continuo, se c'è simmetria materiale rispetto a un piano (o a un asse), la densità è una funzione simmetrica rispetto a quel piano (o a quell'asse).

Per esempio, una sfera mezza piena d'acqua ha una simmetria rispetto ad un asse e ad ogni piano per quell'asse, ma non ha simmetria rispetto ad un piano perpendicolare all'asse passante per il centro (fig. 107).

Proposizione 6.9. *Se un sistema materiale ha un piano (risp. un asse) di simmetria materiale, il baricentro deve appartenere a quel piano (risp. asse).*

Dimostrazione. Se il sistema è finito, sia $z = 0$ il piano di simmetria. Allora, nella (6.8), per ogni $z_s \geq 0$ esiste $z_s \leq 0$ con la stessa massa. Ne segue che $z_G = 0$, ossia che il punto appartiene al piano di simmetria. Se il sistema ha un asse di simmetria, allora in

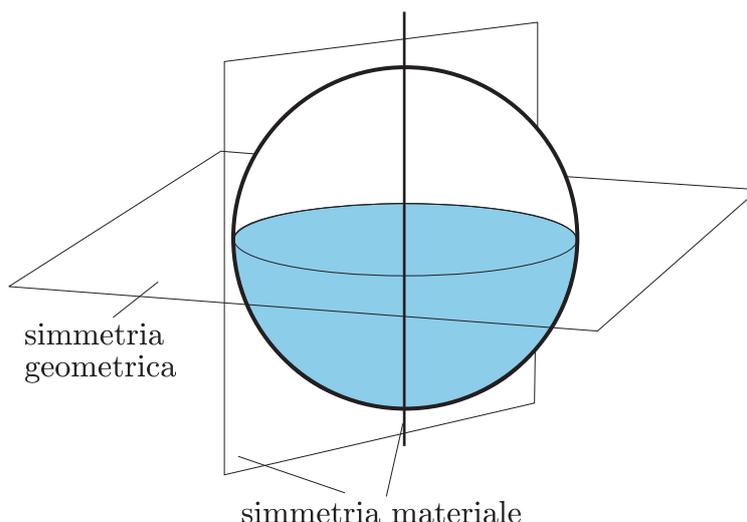


FIGURA 107. Assi e piani di simmetria materiale.

particolare ha due piani di simmetria distinti passanti per quell'asse, e quindi il baricentro sta sull'asse.

Se il sistema è continuo e $z = 0$ è il piano di simmetria, l'espressione della quota del baricentro è

$$z_G = \frac{1}{M} \int_E \rho(\mathbf{x}) z d\mathcal{L}^3.$$

Per ipotesi, però, posto $E^+ = E \cap \{z \geq 0\}$ e $E^- = E \cap \{z \leq 0\}$, abbiamo che

$$\int_E \rho(\mathbf{x}) z d\mathcal{L}^3 = \int_{E^+} \rho(\mathbf{x}) z + \int_{E^-} \rho(\mathbf{x}) z d\mathcal{L}^3 \quad (27)$$

e, posto $\sigma(x, y, z) = (x, y, -z)$, avremo $\sigma(E^+) = E^-$ per la simmetria geometrica. Siccome per ipotesi $\rho(\sigma(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x})$, abbiamo infine, cambiando variabili da x, y, z a $x, y, -z$,

$$z_G = \int_{E^+} \rho(\mathbf{x}) z d\mathcal{L}^3 + \int_{\sigma(E^+)} \rho(\mathbf{x}) z d\mathcal{L}^3 = \int_{E^+} \rho(\mathbf{x}) z d\mathcal{L}^3 - \int_{E^+} \rho(\mathbf{x}) z d\mathcal{L}^3 = 0.$$

Il resto del ragionamento è identico al caso finito. ■

Se un corpo è omogeneo, allora chiaramente simmetria materiale e simmetria geometrica coincidono. Inoltre, valgono ovviamente analoghi enunciati per corpi piani o rettilinei.

Proposizione 6.10. *Se un sistema è unione disgiunta di due sottosistemi, allora il baricentro del sistema è uguale al baricentro di due punti materiali posti nei baricentri dei sottosistemi e aventi massa pari alla massa totale dei sottosistemi.*

Dimostrazione. La facciamo per un sistema continuo: quella per il caso finito la fate per esercizio, da tanto che sarà facile.

(27) Il piano $\{z = 0\} = E^+ \cap E^-$ è trascurabile.

Siano E e F le regioni coperte dai due sottosistemi. Poniamo

$$\mathbf{x}_{G_1} = \frac{1}{\mu(E)} \int_E \rho \mathbf{x} d\mathcal{L}^n, \quad \mathbf{x}_{G_2} = \frac{1}{\mu(F)} \int_F \rho \mathbf{x} d\mathcal{L}^n.$$

Allora

$$\mu(E)\mathbf{x}_{G_1} + \mu(F)\mathbf{x}_{G_2} = \int_E \rho \mathbf{x} d\mathcal{L}^n + \int_F \rho \mathbf{x} d\mathcal{L}^n = \int_{E \cup F} \rho \mathbf{x} d\mathcal{L}^n = \int_B \rho \mathbf{x} d\mathcal{L}^n$$

dove $B = E \cup F$ è la regione occupata dall'intero corpo.

Dividendo per $\mu(B) = \mu(E) + \mu(F)$ troviamo allora

$$\frac{\mu(E)\mathbf{x}_{G_1} + \mu(F)\mathbf{x}_{G_2}}{\mu(B)} = \frac{1}{\mu(B)} \int_B \rho \mathbf{x} d\mathcal{L}^n = \mathbf{x}_G. \blacksquare$$

Questa proposizione è alla base di un trucco che si usa spesso per calcolare il baricentro di una regione omogenea con un buco: in questo caso si calcola il baricentro dell'intera regione, buco compreso, dopodiché si calcola il baricentro del baricentro trovato e di un punto posto nel baricentro del buco con massa pari alla massa del buco, ma cambiata di segno ⁽²⁸⁾.

Calcolare la posizione del baricentro di un sistema è quindi questione di integrali, perlomeno se il corpo è continuo (se è discreto, di sommatorie). Però vi è un risultato simpatico che aiuta parecchio a semplificare le cose.

Teorema 6.11 (di Guldino). *Se un solido ha simmetria assiale, allora il suo volume è pari al prodotto dell'area della sezione assiale dall'asse di simmetria per la lunghezza della circonferenza percorsa dal baricentro della sezione durante la sua rotazione attorno all'asse di simmetria. In formule*

$$\mathcal{L}^3(E) = 2\pi d_G \mathcal{L}^2(A).$$

Dimostrazione. Usiamo ovviamente coordinate cilindriche e scriviamo

$$\mathcal{L}^3(E) = \int_0^{2\pi} \int_A \rho d\mathcal{L}^2 d\vartheta.$$

A questo punto, siccome per definizione di baricentro (ρ è perpendicolare all'asse di simmetria)

$$\int_A \rho d\mathcal{L}^2 = d_G \mathcal{L}^2(A)$$

da cui la tesi. \blacksquare

Il teorema di Guldino serve non a calcolare i volumi, ma i baricentri! Per esempio, se vogliamo calcolare il baricentro di un semicerchio di raggio R , sappiamo già che esso si

⁽²⁸⁾ E ne approfittiamo anche per completare la definizione di baricentro di un sistema composto dall'unione disgiunta di corpi rigidi e punti materiali, ovviamente semplicemente come baricentro dei baricentri.

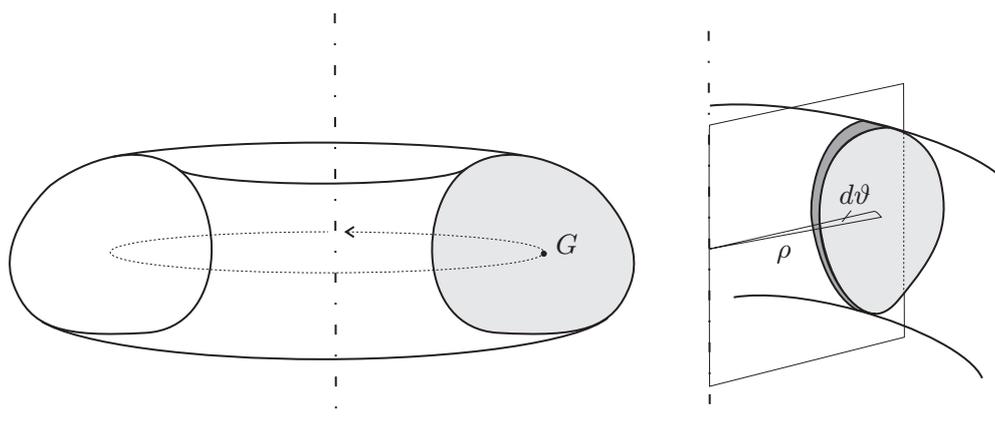


FIGURA 108. Teorema di Guldino.

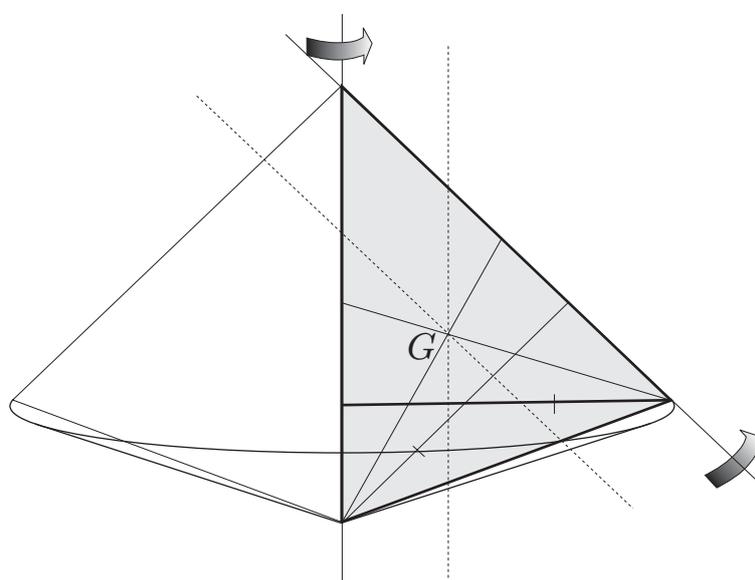


FIGURA 109. Il baricentro del triangolo.

trova sull'asse del semicerchio. Esso, ruotando, genera una sfera di raggio R . Allora la sua distanza dall'asse di rotazione, che è il diametro, è

$$d_G = \frac{4}{3}\pi R^3 \bigg/ \left(2\pi \cdot \pi \frac{R^2}{2}\right) = \frac{4R}{3\pi}.$$

E funziona anche con integrali di linea: se al posto del semicerchio c'è una semicirconferenza, si scalano semplicemente i volumi sulle aree e le aree sulle lunghezze: in questo caso il solido di rotazione è una superficie sferica di superficie $4\pi R^2$

$$d_G = 4\pi R^2 \bigg/ (2\pi \cdot \pi R) = \frac{2R}{\pi}.$$

Verifichiamo infine che funziona con un triangolo pieno: poniamolo con un lato sovrapposto all'asse di rotazione, e poniamo l'origine nel piede dell'altezza opposta a questo lato. Se indichiamo con b la base e h l'altezza, avremo che la rotazione genera due coni di ugual base, di volume complessivo

$$\frac{1}{3}bh^2$$

(perché le due altezze del cono si sommano ⁽²⁹⁾). Ora dunque

$$d_G = \frac{1}{3}bh^2 / (2\pi bh/2) = \frac{1}{3}h.$$

Pertanto il baricentro si trova sulla parallela alla base posta a $1/3$ dell'altezza. Ripetendo il ragionamento su un altro lato, troviamo che il punto cercato deve dividere tutte le congiungenti un vertice con un punto del lato opposto in proporzione 2:1, e quindi deve essere il punto d'incontro delle mediane, cioè il baricentro.

⁽²⁹⁾ Nel caso di un triangolo acutangolo. Verificate che non varia se esso è ottusangolo (il volume di un cono cambia segno ma anche la base stavolta si trova per differenza).

7. Meccanica del corpo rigido

Bene. Da ora in poi ci restringeremo *sempre* al caso dei corpi rigidi, discreti o continui.

7.1. Sufficienza delle equazioni cardinali

Il caso del corpo rigido, discreto o continuo, ha un particolare significato per la Meccanica in quanto per esso le equazioni cardinali della Dinamica

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{f}^{(e)} + \Phi^{(e)} \\ \frac{d\mathbf{k}_O}{dt} &= \mathbf{m}_O^{(e)} + \Psi_O^{(e)}\end{aligned}$$

non sono solo una *conseguenza* del principio di d'Alembert (e quindi necessarie) ma *implicano* anche il principio stesso, e quindi sono anche sufficienti.

Cominciamo con l'osservare che

Proposizione 7.1. *Il vincolo di rigidità è un vincolo liscio bilatero.*

Dimostrazione. Che sia bilatero è evidente: basta cambiare tutte le velocità nelle loro opposte e $\boldsymbol{\omega}$ in $-\boldsymbol{\omega}$. Che sia liscio discende dal fatto che le reazioni vincolari, che sono reazioni interne, devono avere a due a due potenza nulla *sui moti rigidi* per il principio di azione e reazione, e quindi la potenza totale delle reazioni vincolari al vincolo di rigidità è zero. ■

Teorema 7.2 (Sufficienza delle equazioni cardinali). *Per un corpo rigido libero o vincolato con vincoli lisci, le equazioni cardinali della dinamica implicano il principio di d'Alembert.*

Dimostrazione. Vediamo dapprima il caso del corpo rigido libero. Supponiamo di dare al corpo rigido una velocità virtuale di traslazione $\mathbf{w} = \mathbf{v}(O)$, uguale in tutti i punti del corpo. Allora, dalla prima equazione cardinale,

$$\langle \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{f}^{(e)}, \mathbf{w} \rangle + \langle \Phi^{(e)}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{f}_1^{(e)}, \mathbf{w} \rangle + \dots + \langle \mathbf{f}_N^{(e)}, \mathbf{w} \rangle + \langle \Phi_1^{(e)}, \mathbf{w} \rangle + \dots + \langle \Phi_N^{(e)}, \mathbf{w} \rangle$$

dove \mathbf{f}_s sono le sollecitazioni agenti sull' s -esimo punto.

Ponendo $\mathbf{w}'_s = \mathbf{w}$ per ogni s , possiamo anche scrivere

$$\begin{aligned}(7.1) \quad & \langle \mathbf{f}^{(e)}, \mathbf{w}'_s \rangle + \langle \Phi^{(e)}, \mathbf{w}'_s \rangle = \\ & \langle \mathbf{f}_1^{(e)}, \mathbf{w}'_s \rangle + \dots + \langle \mathbf{f}_N^{(e)}, \mathbf{w}'_s \rangle + \langle \Phi_1^{(e)}, \mathbf{w}'_s \rangle + \dots + \langle \Phi_N^{(e)}, \mathbf{w}'_s \rangle = \langle \dot{\mathbf{p}}_1, \mathbf{w}'_s \rangle + \dots + \langle \dot{\mathbf{p}}_N, \mathbf{w}'_s \rangle.\end{aligned}$$

Prendiamo adesso delle velocità da uno stato cinetico rotatorio con un punto fisso O . In questo caso le velocità virtuali dei punti P_s ($s = 1, \dots, N$) sono date, come abbiamo ripetuto varie volte, da

$$\mathbf{w}''_s = \boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)$$

e dove l' $\boldsymbol{\omega}$ non dipende dai punti (questo è essenziale). Applichiamo allora i covettori $\mathbf{m}_O^{(e)}$ e $\boldsymbol{\Psi}_O^{(e)}$ a $\boldsymbol{\omega}$ e troviamo

$$\langle \dot{\mathbf{k}}_O, \boldsymbol{\omega} \rangle = \langle \mathbf{m}_O^{(e)}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \langle \boldsymbol{\Psi}_O^{(e)}, \boldsymbol{\omega} \rangle = \langle \mathbf{m}_{O1}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \dots + \langle \mathbf{m}_{ON}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \langle \boldsymbol{\Psi}_{O1}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \dots + \langle \boldsymbol{\Psi}_{ON}, \boldsymbol{\omega} \rangle.$$

(Qui, eventualmente, alcuni degli \mathbf{m}_{Os} saranno nulli, se la forza \mathbf{f}_s relativa all' s -esimo punto sarà nulla). Adesso, siccome per definizione di momento (4.6), abbiamo

$$\langle \mathbf{m}_{Os}, \boldsymbol{\omega} \rangle = \langle \mathbf{f}_s, \boldsymbol{\omega} \wedge (P_s - O) \rangle = \langle \mathbf{f}_s, \mathbf{w}_s'' \rangle,$$

cosicché, ragionando in modo analogo sul momento della quantità di moto,

$$(7.2) \quad \langle \mathbf{f}_1^{(e)}, \mathbf{w}_s'' \rangle + \dots + \langle \mathbf{f}_N^{(e)}, \mathbf{w}_s'' \rangle + \langle \boldsymbol{\Phi}_1^{(e)}, \mathbf{w}_s'' \rangle + \dots + \langle \boldsymbol{\Phi}_N^{(e)}, \mathbf{w}_s'' \rangle = \langle \dot{\mathbf{p}}_1, \mathbf{w}_s'' \rangle + \dots + \langle \dot{\mathbf{p}}_N, \mathbf{w}_s'' \rangle.$$

Sommando membro a membro la (7.1) e la (7.2), troviamo

$$\langle \mathbf{f}_1^{(e)}, \mathbf{w}_s \rangle + \dots + \langle \mathbf{f}_N^{(e)}, \mathbf{w}_s \rangle + \langle \boldsymbol{\Phi}_1^{(e)}, \mathbf{w}_s \rangle + \dots + \langle \boldsymbol{\Phi}_N^{(e)}, \mathbf{w}_s \rangle = \langle \dot{\mathbf{p}}_1, \mathbf{w}_s \rangle + \dots + \langle \dot{\mathbf{p}}_N, \mathbf{w}_s \rangle$$

dove $\mathbf{w}_s = \mathbf{v}(O) + \boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)$, e dunque una generica velocità virtuale rigida. La precedente equazione si scrive quindi

$$P\{\mathbf{f}^{(e)} - \mathbf{p}\} + P\{\boldsymbol{\Phi}^{(e)}\} = 0$$

per ogni velocità virtuale, dove $P\{\mathbf{u}\}$ indica la potenza virtuale totale della sollecitazione \mathbf{u} . Siccome il vincolo di rigidità è liscio, la potenza totale delle reazioni vincolari riferite a questo vincolo è nulla, così come lo saranno le potenze di eventuali ulteriori forze interne e delle loro reazioni vincolari (che sono ad esse opposte). Dunque possiamo in realtà scrivere

$$P\{\mathbf{f}^{(e)} - \mathbf{p}\} + P\{\boldsymbol{\Phi}^{(e)}\} + P\{\mathbf{f}^{(i)}\} + P\{\boldsymbol{\Phi}^{(i)}\} = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{w}_s \text{ rigida.}$$

A questo punto basta applicare il principio delle velocità virtuali (Teorema ??) ai campi di forze $\mathbf{f}^{(e)} - \mathbf{p}$ ⁽¹⁾, $\boldsymbol{\Phi}^{(e)}$, $\mathbf{f}^{(i)}$, $\boldsymbol{\Phi}^{(i)}$ e dedurre che deve essere vero il principio di d'Alembert nella forma

$$\mathbf{f}_s^{(e)} - \dot{\mathbf{p}}_s + \boldsymbol{\Phi}_s^{(e)} + \mathbf{f}_s^{(i)} + \boldsymbol{\Phi}_s^{(i)} = \mathbf{0} \quad (s = 1, \dots, N)$$

che è la tesi.

Se infine il corpo rigido non è libero, le sue velocità virtuali saranno dei sottoinsiemi delle velocità virtuali rigide, per cui, essendo la potenza totale virtuale nulla per tutti le velocità virtuali rigide, lo sarà a maggior ragione per un sottoinsieme delle stesse. ■

7.2. Il momento della quantità di moto

Sappiamo già che per un sistema in generale, anche non rigido, la quantità di moto totale è pari al prodotto della massa per la velocità del baricentro. Una formula così semplice non vale per il momento della quantità di moto rispetto a un punto O . Però noi conosciamo la legge del movimento delle velocità (virtuali, ma anche reali) del corpo rigido

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}(O) + \boldsymbol{\omega} \times (P - O)$$

⁽¹⁾ Le sollecitazioni $\mathbf{f} - \mathbf{p}$ (oppure $\mathbf{F}_s - \dot{\mathbf{p}}_s$) sono dette *forze perdute*.

(conviene usare come punto di riduzione il punto O rispetto al quale si calcolano i momenti) e quindi troviamo

$$\mathbf{K}_O = \sum_{s=1}^n m_s (P_s - O) \times \mathbf{v}_s = \sum_{s=1}^n m_s (P_s - O) \times (\mathbf{v}(O) + \boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)).$$

Il primo termine è facile: siccome $\sum_s m_s (P_s - O)$ è pari alla massa totale per la velocità del baricentro, cioè la quantità di moto totale, abbiamo

$$\sum_{s=1}^n m_s (P_s - O) \times \mathbf{v}(O) = M(G - O) \times \mathbf{v}(O).$$

Questo termine è nullo se O è fisso, se è il baricentro, o se velocità di O è sempre parallela a $G - O$.

Il secondo termine è invece più brutto a causa del doppio prodotto vettoriale, e lo battezziamo subito così:

$$(7.3) \quad \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega} = \sum_{s=1}^n m_s (P_s - O) \times (\boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)).$$

Abbiamo usato questa notazione per un fatto fondamentale: l'espressione a secondo membro della (7.3) è lineare nella velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. C'è quindi una trasformazione lineare che associa a $\boldsymbol{\omega}$ il vettore \mathbf{K}_O , che dipende da O .

A dirla tutta, questa trasformazione dipende anche dal tempo, in quanto $P_s - O$ in generale dipende dal tempo. Se volessimo trovare la matrice, in una data base, di questa trasformazione, siamo destinati a incappare nelle coordinate di $P_s - O$. Ci domandiamo quindi se ci sia una base nella quale questa espressione sia particolarmente semplice da trattare.

Ma fermiamoci un attimo e definiamo un paio di quantità interessanti. Dati due vettori \mathbf{a}, \mathbf{b} ⁽²⁾, si definisce *diade* o *prodotto diadico* o *prodotto tensoriale* l'applicazione lineare

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} : \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a}.$$

La matrice di questa trasformazione in una base ortonormale è assai semplice, in quanto

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{a} = b_k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) = a_i b_k.$$

Dunque la matrice della diade di due vettori è fatta coi prodotti delle componenti dei due vettori, nel senso più naturale del mondo: $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{12} = a_1 b_2$, ecc.. Da qui segue che $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ è la trasposta di $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Se allora richiamiamo la seconda formula del doppio prodotto vettoriale (1.20)

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w} \quad (3)$$

⁽²⁾ Anche non applicati, va bene lo stesso.

e la usiamo nella formula (7.3), troviamo

$$\begin{aligned} (P_s - O) \times (\boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)) &= \|P_s - O\|^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot (P_s - O))(P_s - O) = \\ &= \|P_s - O\|^2 \boldsymbol{\omega} - (P_s - O) \otimes (P_s - O) \boldsymbol{\omega} = \\ &= [\|P_s - O\|^2 \mathbf{1} - (P_s - O) \otimes (P_s - O)] \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, sommando su s , troviamo che la trasformazione J_O è data da

$$J_O = \sum_{s=1}^N m_s [\|P_s - O\|^2 \mathbf{1} - (P_s - O) \otimes (P_s - O)],$$

oppure, nel caso continuo,

$$J_O = \int_E \rho(\|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{1} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) d\mathcal{L}^3.$$

Queste formule ci fanno capire che in generale \mathbf{K}_O non è parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$, perché J_O non è un multiplo dell'identità $\mathbf{1}$, a causa del termine diadico.

Teorema 7.3. *Per ogni punto O fisso nel riferimento solidale, la trasformazione lineare J_O è una trasformazione simmetrica e, tranne che nel caso di un sistema rigido di punti allineati con O , è definita positiva, ed anzi si ha in ogni caso*

$$\boldsymbol{\omega} \cdot J_O \boldsymbol{\omega} = 2K.$$

Dimostrazione. Siccome $(P_s - O) \otimes (P_s - O)$ è simmetrica, la prima affermazione è evidente. Calcoliamo allora

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot J_O \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{s=1}^N m_s (P_s - O) \times (\boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)) = \sum_{s=1}^N m_s \boldsymbol{\omega} \cdot (P_s - O) \times (\boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)) = \\ &= \sum_{s=1}^N m_s \boldsymbol{\omega} \times (P_s - O) \cdot \boldsymbol{\omega} \times (P_s - O) \end{aligned}$$

e, ricordando che O è fisso e che quindi $\mathbf{v}_s = \boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)$,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot J_O \boldsymbol{\omega} = \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_s = 2K.$$

Siccome l'energia cinetica K è positiva o nulla, si deduce intanto che J_O è semidefinita positiva. Supponiamo ora $\boldsymbol{\omega} \cdot J_O \boldsymbol{\omega} = 0$, ossia $K = 0$. Ma allora $\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$ per ogni s . Siccome i punti non sono allineati con O , per ogni direzione di $\boldsymbol{\omega}$ esistono almeno due punti P, Q tali che $P - O$ e $Q - O$ non siano né nulli né paralleli. Siccome $\boldsymbol{\omega} \times (P_s - O) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}$ deve

(³) Ci accorgiamo che possiamo renderla con le diadi così:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{u}.$$

essere parallelo sia a $P - O$ che a $Q - O$ e quindi deve essere nullo. Dunque $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ e J_O è definita positiva ⁽⁴⁾. Nel caso continuo la dimostrazione è perfettamente analoga. ■

La trasformazione J_O si chiama *trasformazione d'inerzia*.

7.3. Momenti e prodotti d'inerzia

Che dire di più? Se $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{K}_O sono calcolati rispetto al riferimento fisso, tutte queste quantità varieranno nel tempo. Ma se ci mettiamo nel riferimento *solidale*, in generale $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{K}_O saranno ancora variabili, ma i vari $P_s - O$ no, perché dipenderanno solo dalla “forma” del corpo. Vediamo allora un po' più da vicino la matrice J_O della trasformazione quando si considerino le coordinate dei vari punti nel riferimento fisso. Sfruttiamo la (1.7) e calcoliamoci, ad esempio, J_{11} (omettiamo l' O , tanto resta sempre lo stesso):

$$J_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot J_O \mathbf{e}_1 = \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{e}_1 \cdot [\|P_s - O\|^2 \mathbf{1} - (P_s - O) \otimes (P_s - O)] \mathbf{e}_1 = \sum_{s=1}^N m_s (\|P_s - O\|^2 - x_s x_s) \quad (5)$$

in quanto $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})_{11} = x_1 x_1$; ma allora

$$J_{11} = \sum_{s=1}^N m_s (y_s^2 + z_s^2).$$

Invece per J_{12} è più facile perché l'identità non contribuisce; avremo, in quanto stavolta $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})_{12} = x_1 x_2$,

$$J_{12} = - \sum_{s=1}^N m_s x_s y_s.$$

Non ci vuole molto a convincersi che vale la sostituzione circolare $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ e $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, per cui con facilità troviamo

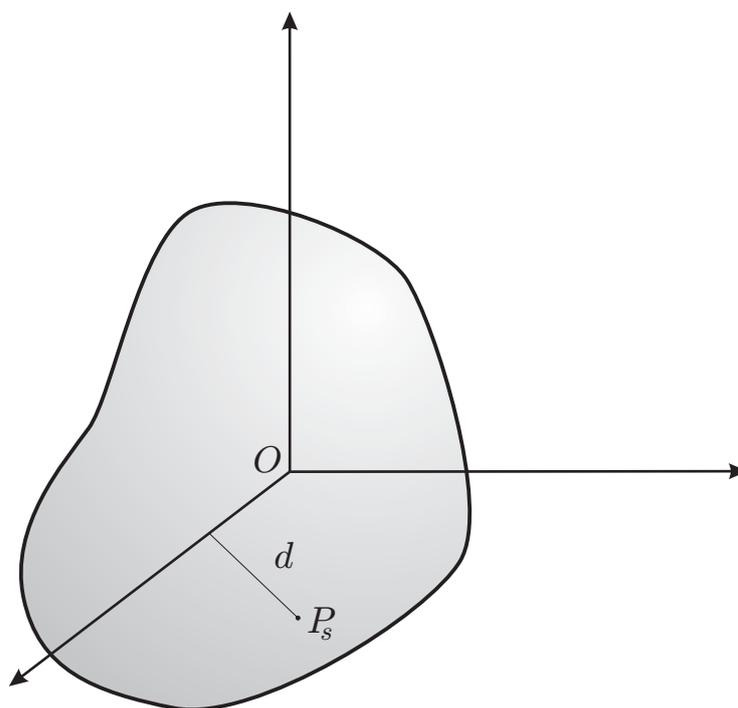
$$J_{22} = \sum_{s=1}^N m_s (x_s^2 + z_s^2), \quad J_{33} = \sum_{s=1}^N m_s (x_s^2 + y_s^2), \quad J_{23} = - \sum_{s=1}^N m_s y_s z_s, \quad J_{31} = - \sum_{s=1}^N m_s x_s z_s$$

e gli altri sono determinati dalla simmetria.

Fin qui non abbiamo osservato una cosa: abbiamo scelto *un* riferimento solidale centrato in O , ma ce ne sono tanti: qual è il ruolo giocato da questo elemento arbitrario? Ce ne accorgiamo dall'espressione, per esempio, di J_{11} , in quanto $y_s^2 + z_s^2$ rappresenta la distanza dell' s -esimo punto *dall'asse* x . Possiamo anche scrivere

⁽⁴⁾ Se i punti sono allineati con O e l'energia cinetica è nulla, la loro velocità resta nulla, ma chiaramente se $\boldsymbol{\omega}$ ha la direzione dell'asse dei punti, esso potrebbe essere non nullo. Ma che significa? Dei punti non possono “girare su se stessi”! Infatti qui $\boldsymbol{\omega}$ è privo di senso dal punto di vista cinematico, ma la trasformazione J_O , formalmente, ha ancora senso. Peggio ancora se vi è un solo punto fisso in O : qui addirittura J_O è la trasformazione nulla, ma a chi serve?

⁽⁵⁾ Usiamo la notazione (x_s, y_s, z_s) , un po' sprecona, ma che evidenzia meglio il risultato.

FIGURA 110. Calcolo del momento d'inerzia J_{11} .

$$(7.4) \quad J_r = \int_E \rho d^2 d\mathcal{L}^3.$$

Per questo motivo J_{11} viene detto *momento d'inerzia rispetto all'asse x* , e analogamente per gli altri due J_{22} e J_{33} .

I termini J_{12} , J_{13} e J_{23} sono detti invece *prodotti d'inerzia* o *momenti di deviazione*. Essi devono questo nome al fatto che sono responsabili del fatto che $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{K}_O non sono in generale paralleli.

Nel caso continuo, le formule si estendono senza difficoltà e forniscono

$$J_{11} = \int_E \rho(y^2 + z^2) d\mathcal{L}^3, \quad J_{12} = - \int_E \rho xy d\mathcal{L}^3, \quad \text{ecc.}$$

Integrali tripli! Non è il massimo della gioia. C'è però un'interessante notizia: siccome \mathbf{J}_O è simmetrica, essa è *diagonalizzabile*, per un noto teorema di Algebra. Questo significa che *esiste almeno un riferimento solidale, centrato in O , tale che rispetto a questo riferimento i prodotti d'inerzia siano nulli*. Gli assi di questo riferimento si chiamano *assi principali d'inerzia* ⁽⁶⁾.

⁽⁶⁾ Già, perché i vari J_{11} , ecc. dipendono dal riferimento scelto, cosa che la simbologia non lascia intravedere: quella completa sarebbe una cosa terrificante del tipo $J_{11}^{Ox'y'z'}$.

Trovare questi assi è ben altra cosa, almeno nel caso generale: si dovrebbe calcolare la matrice (che, con molta fantasia, si chiama matrice d'inerzia) rispetto a un riferimento, trovarne gli autovalori (dunque risolvere un'equazione di terzo grado) e i corrispondenti autovettori. Per fortuna, per corpi un po' "belli", ci sono alcuni risultati geometrici che ci aiutano. Quindi *gli assi principali d'inerzia sono gli assi degli autovettori della matrice d'inerzia.*

Proposizione 7.4. *Se un corpo rigido con punto fisso ha un piano di simmetria materiale, allora l'asse perpendicolare al piano passante per il punto fisso è asse principale d'inerzia; se un corpo rigido con punto fisso ha un asse di simmetria materiale per il punto fisso, allora esso è asse principale d'inerzia.*

Dimostrazione. Ragioniamo come nella prop. 6.9, con le stesse notazioni, e sia $z = 0$ il piano di simmetria. Allora (facciamo prima il caso continuo)

$$-J_{23} = \int_E \rho y z d\mathcal{L}^3 = \int_{E^+} \rho y z d\mathcal{L}^3 + \int_{E^-} \rho y z d\mathcal{L}^3$$

e ora, cambiando z in $-z$ nel secondo integrale, abbiamo

$$-J_{23} = \int_{E^+} \rho(x, y, z) y z d\mathcal{L}^3 - \int_{\sigma(E^-)} \rho(x, y, -z) y z d\mathcal{L}^3 = 0$$

in quanto per la simmetria materiale $\rho(x, y, z) = \rho(x, y, -z)$ e $\sigma(E^-) = E^+$. Analogamente si vede che $J_{13} = 0$. Allora, preso $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$, essendo la matrice d'inerzia

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{12} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix}$$

si trova

$$\mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega} = J_{33} \omega \mathbf{e}_3,$$

che è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$. Quindi l'asse z , perpendicolare al piano $z = 0$, è principale d'inerzia. Nel caso discreto il ragionamento è analogo, osservando che per ogni z_s c'è il corrispondente $-z_s$ con la stessa densità.

Se il corpo ha un asse di simmetria materiale, si ragiona in modo un po' più delicato (sempre nel caso continuo, che è quello più difficile). Sia l'asse z l'asse di simmetria materiale. Passiamo a coordinate cilindriche e scriviamo (usiamo δ invece di ρ per la densità per non andare in conflitto)

$$J_{23} = \int_E \delta(x, y, z) y z d\mathcal{L}^3 = \int_0^{2\pi} \int_{E \cap \Pi_\vartheta} \tilde{\delta}(\rho, \vartheta, z) \rho z \sin \vartheta d\rho dz d\vartheta$$

dove Π_ϑ è il semipiano coordinato $\vartheta = \text{cost}$. La figura ?? dovrebbe chiarire tutto. Chiaramente, in virtù della simmetria geometrica, su ciascuno di questi semipiani la figura lascia una figura piana che è simmetrica rispetto all'asse $z = 0$ di quella lasciata sul semipiano simmetrico (dove ϑ è aumentato di π). Siccome c'è anche simmetria materiale, per ogni

punto di $E \cap \Pi_\vartheta$ c'è un punto con le stesse coordinate ρ, z e ϑ aumentato di π e stesso valore della densità. Essendo $\sin(\vartheta + \pi) = -\sin \vartheta$,

$$\int_{E \cap \Pi_\vartheta} \tilde{\delta}(\rho, \vartheta, z) \rho z \sin \vartheta \, d\rho \, dz = - \int_{E \cap \Pi_{\vartheta+\pi}} \tilde{\delta}(\rho, \vartheta, z) \rho z \sin \vartheta \, d\rho \, dz$$

cosicché nell'integrale complessivo possiamo scrivere

$$J_{23} = \int_0^{2\pi} \int_{E \cap \Pi_\vartheta} = \int_0^\pi \int_{E \cap \Pi_\vartheta} + \int_\pi^{2\pi} \int_{E \cap \Pi_\vartheta}$$

ed eseguendo il cambio di variabili $\vartheta \rightarrow \vartheta + \pi$ nel secondo integrale troviamo

$$J_{23} = \int_0^\pi \int_{E \cap \Pi_\vartheta} + \int_0^\pi \int_{E \cap \Pi_{\vartheta+\pi}} = \int_0^\pi \int_{E \cap \Pi_\vartheta} - \int_0^\pi \int_{E \cap \Pi_\vartheta} = 0.$$

Ragionando in maniera analoga su x (stavolta esce un $\cos \vartheta$ ma non cambia nulla), si vede che $J_{13} = 0$, e dunque l'asse z è asse principale.

Infine, nel caso discreto è molto più semplice, in quanto, per ogni punto (x_s, y_s, z_s) c'è un punto con la stessa massa posto in $(-x_s, -y_s, z_s)$. Ne segue che

$$m_s x_s z_s + m_s (-x_s) z_s = 0$$

e quindi nella sommatoria in s che dà J_{13} tutti gli addendi si elidono a due a due. Analogamente si vede che $J_{23} = 0$. ■

In particolare, una figura *piana* ha sempre come asse principale l'asse passante per il punto fisso, ed anzi vale un ulteriore risultato.

Proposizione 7.5. *In ogni figura piana, fissato un riferimento solidale ortogonale per il punto fisso con un asse perpendicolare al piano, allora il momento d'inerzia relativo a detto asse è uguale alla somma dei momenti d'inerzia rispetto agli altri due assi.*

Dimostrazione. Con il riferimento scelto, il piano della figura è $z = 0$. Allora

$$J_{33} = \int_E \rho(x^2 + y^2) \, d\mathcal{L}^2 = \int_E \rho x^2 \, d\mathcal{L}^2 + \int_E \rho y^2 \, d\mathcal{L}^2 = J_{22} + J_{11}$$

in quanto $z = 0$ sul piano. Il caso discreto è altrettanto banale. ■

La seguente proposizione permette, infine, di calcolare il momento d'inerzia e i prodotti d'inerzia rispetto ad un asse parallelo ad un asse passante per il baricentro.

Teorema 7.6 (degli assi paralleli ⁽⁷⁾). *Se J_G indica il momento d'inerzia relativo ad un asse passante per il baricentro di un corpo rigido e r denota un asse parallelo a detto asse posto a distanza d da esso, allora*

$$J_r = J_G + Md^2.$$

⁽⁷⁾ Detto anche di STEINER o HUYGENS.

Se $J_{x_G y_G}$ indica il prodotto d'inerzia relativo a due assi ortogonali passanti per il baricentro, allora, detti x', y' due assi rispettivamente paralleli ai due assi baricentrici e distanti rispettivamente a, b da essi, si ha

$$J_{x'y'} = J_{x_G y_G} + Mab.$$

Dimostrazione. Prendiamo per r' l'asse $\{x' = x_G + a, y' = y_G + b\}$ con $d^2 = a^2 + b^2$. In ogni riferimento avente questo asse come asse verticale z' si ha evidentemente $x'_G = 0, y'_G = 0$. Allora, per definizione di momento d'inerzia,

$$\begin{aligned} J_{r'} &= \int_E \rho(x'^2 + y'^2) \mathcal{L}^3 = \int_E \rho[(x_G + a)^2 + (y_G + b)^2] \mathcal{L}^3 = \\ &= \int_E \rho(x_G^2 + y_G^2) \mathcal{L}^3 + 2ab \int_E \rho(x_G + y_G) \mathcal{L}^3 + M(a^2 + b^2) = \\ &= J_G + 2ab \int_E \rho(x_G + y_G) \mathcal{L}^3 + M(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Siccome però, per definizione di baricentro,

$$\int_E \rho(x_G + y_G) \mathcal{L}^3 = M(x'_G + y'_G) = 0$$

la prima formula è dimostrata.

Se ora indichiamo con x' e y' i due assi passanti per G e paralleli agli assi x, y rispettivamente, cosicché per i loro punti si abbia come prima $x' = x_G + a, y' = y_G + b$, avremo stavolta

$$\begin{aligned} J_{x'y'} &= \int_E \rho(x'y') \mathcal{L}^3 = \int_E \rho[(x_G + a)(y_G + b)] \mathcal{L}^3 = \\ &= \int_E \rho(x_G y_G) \mathcal{L}^3 + a \int_E \rho x_G \mathcal{L}^3 + b \int_E \rho y_G \mathcal{L}^3 + Mab = \\ &= J_{x_G y_G} + a \int_E \rho x_G \mathcal{L}^3 + b \int_E \rho y_G \mathcal{L}^3 + Mab \end{aligned}$$

e la formula discende direttamente come sopra. Nel caso discreto il ragionamento si ripete esattamente. ■

La formula degli assi paralleli è strettamente legata al baricentro, ma permette evidentemente di essere applicata fra due assi paralleli qualunque r', r'' : infatti, da

$$J_{r'} = J_G + Md'^2, \quad J_{r''} = J_G + Md''^2$$

sottraendo membro a membro troviamo

$$J_{r'} - J_{r''} = M(d'^2 - d''^2).$$

Per concludere questa carrellata sulle proprietà dei momenti d'inerzia, dimostriamo che i tre momenti d'inerzia rispetto a un sistema di assi non possono essere scelti in maniera arbitraria.

Proposizione 7.7. *In ogni corpo rigido e per ogni riferimento solidale, ogni momento d'inerzia è minore o uguale alla somma degli altri due e maggiore o uguale alla loro differenza, e l'uguaglianza vale solo nelle figure contenute in un piano.*

Dimostrazione. Fissiamo un riferimento e calcoliamo ad esempio

$$(7.5) \quad J_{11} + J_{22} - J_{33} = \int_E \rho(y^2 + z^2 + x^2 + z^2) d\mathcal{L}^3 - \int_E \rho(x^2 + y^2) d\mathcal{L}^3 = 2 \int_E \rho z^2 d\mathcal{L}^3 \geq 0$$

per cui $J_{33} \leq J_{11} + J_{22}$. Eseguendo la sostituzione circolare $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ troviamo $J_{11} \leq J_{22} + J_{33}$, ossia $J_{33} \geq J_{11} - J_{22}$. Dalla (7.5) segue anche che se $J_{11} + J_{22} = J_{33}$, allora deve aversi $z = 0$ su tutto E , ossia la figura è tutta contenuta in un piano. Analogamente si procede nel caso discreto. ■

Detto in altre parole, i momenti d'inerzia devono essere i lati di un triangolo ⁽⁸⁾.

Supponiamo quindi di aver calcolato la matrice d'inerzia riferita a un riferimento dato (se poi è principale, tanto meglio, avremo calcolato meno integrali). Supponiamo di voler calcolare il momento d'inerzia (o il prodotto d'inerzia) rispetto a un *nuovo* riferimento, sempre ortogonale e centrato in O . Questo serve in particolare per i momenti d'inerzia.

Proposizione 7.8. *Sia J_O la matrice d'inerzia di un corpo rigido rispetto a un riferimento avente origine O . Allora il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse r passante per l'origine del riferimento è dato da*

$$J_r = \mathbf{e}_r \cdot J_O \mathbf{e}_r.$$

Dimostrazione. Vediamo il caso discreto: quello continuo è perfettamente analogo. Supponiamo di avere una retta r di versore \mathbf{e}_r e siano α, β, γ i coseni direttori $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_k$ ($k = 1, 2, 3$). Allora, preso un punto P_s di coordinate (x, y, z) , la sua proiezione sulla retta r vale, con riferimento alla figura 111 ⁽⁹⁾

$$\overline{P\overline{H}} = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Pertanto, siccome $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$,

$$\begin{aligned} d^2 &= (x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = \\ &= \alpha^2(x^2 + y^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy. \end{aligned}$$

⁽⁸⁾ Che, per fortuna, almeno a quanto ne sappia, nessuno ha voluto chiamare “triangolo d'inerzia”.

⁽⁹⁾ Se provate fastidio ad usare le figure nelle dimostrazioni di Algebra lineare, pensate che

$$\mathbf{e}_r = (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k$$

(è la formula (1.5) del capitolo 1) e quindi

$$\overline{O\overline{H}} = (P_s - O) \cdot \mathbf{e}_r = (P_s - O) \cdot (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k = ((P_s - O) \cdot \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_k) = \alpha_k x_k.$$

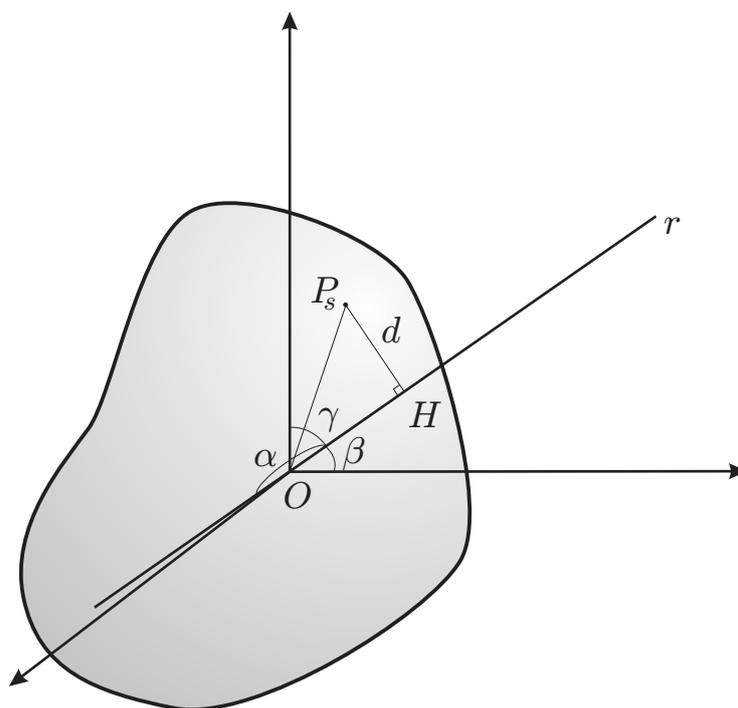


FIGURA 111. Momento d'inerzia rispetto ad un asse generico.

Moltiplicando per la massa di P_s e sommando rispetto ai punti troviamo

$$\begin{aligned}
 J_r &= \alpha^2 J_{11} + \beta^2 J_{22} + \gamma^2 J_{33} - 2\beta\gamma J_{23} - 2\gamma\alpha J_{13} - 2\alpha\beta J_{12} = \\
 &= [\alpha \quad \beta \quad \gamma] \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & J_{22} & J_{23} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{J}_O \mathbf{e}_r. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Analogamente, se $\mathbf{e}_{x'}$, $\mathbf{e}_{y'}$ sono i versori di due assi del nuovo riferimento, avremo

$$J_{x'y'} = \mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{J}_O \mathbf{e}_{y'}.$$

In questo modo, combinando questa proprietà con quella degli assi paralleli, è possibile calcolare tutti i momenti d'inerzia e prodotti d'inerzia una volta noti in un riferimento.

Osserviamo a questo punto che se su ogni retta r individuiamo il punto $Q(x, y, z)$ tale che $1/\|Q - O\| = \sqrt{J_r}$, abbiamo intanto

$$\alpha = \frac{x}{\|Q - O\|}, \quad \beta = \frac{y}{\|Q - O\|}, \quad \gamma = \frac{z}{\|Q - O\|}$$

per definizione di coseni direttori. Dalla formula

$$J_r = \alpha^2 J_{11} + \beta^2 J_{22} + \gamma^2 J_{33} - 2\beta\gamma J_{23} - 2\gamma\alpha J_{13} - 2\alpha\beta J_{12}$$

troviamo che l'insieme dei punti Q così individuati verifica la relazione

$$J_{11}x^2 + J_{22}y^2 + J_{33}z^2 - 2J_{23}yz - 2J_{13}xz - 2J_{12}xy = 1$$

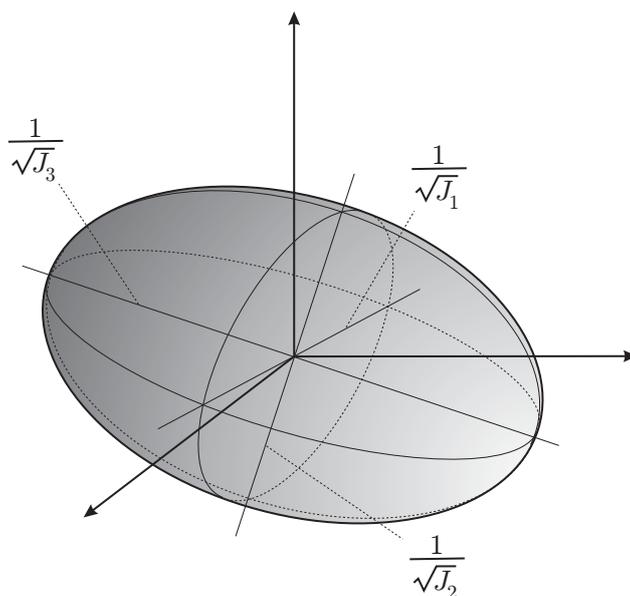


FIGURA 112. L'ellissoide d'inerzia.

che è l'equazione di una quadrica ⁽¹⁰⁾. Siccome il carattere della quadrica è determinato dagli autovalori della matrice associata alla forma quadratica, e siccome evidentemente questa è la matrice di J_O , gli autovalori saranno strettamente positivi ⁽¹¹⁾, e dunque questa quadrica è un ellissoide detto *ellissoide d'inerzia*. Se lo si riferisce ai suoi assi, esso assume la forma

$$J_1x^2 + J_2y^2 + J_3z^2 = 1$$

dove osserviamo che i coefficienti devono proprio essere i momenti d'inerzia relativi agli assi principali, in quanto la matrice è diagonale. Quindi trovare gli assi dell'ellissoide d'inerzia equivale a trovare gli assi principali d'inerzia.

Calcolare i momenti d'inerzia è formalmente una questione di integrali, anzi, di integrali tripli. Però in molti casi è possibile ridurre la complessità scegliendo bene come “affettare”

⁽¹⁰⁾ Se non sapete cos'è una quadrica, vi basti sapere che è una superficie definita implicitamente da un'equazione del tipo $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ dove f è un polinomio di secondo grado. Se questa è riferita all'origine, f è un polinomio omogeneo della forma $f(x_1, x_2, x_3) = a_{ik}x_ix_k$ (i, k sommati) e $[a_{ik}]$ è una matrice simmetrica, cioè una forma quadratica. L'ellissoide corrisponde al caso di autovalori della matrice tutti strettamente positivi, e, se la matrice è diagonale, ha equazione

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

nel quale gli a_i , come potete immaginare, sono i semiassi dell'ellissoide (e delle ellissi che si determinano intersecandola con i piani coordinati).

⁽¹¹⁾ Tranne che nel caso degenere di un autovalore nullo, corrispondente a punti tutti allineati, nel quale la quadrica diviene un cilindro, e due autovalori nulli, corrispondente al caso di un solo punto, nel quale si spezza in due piani, entrambi di scarso interesse.

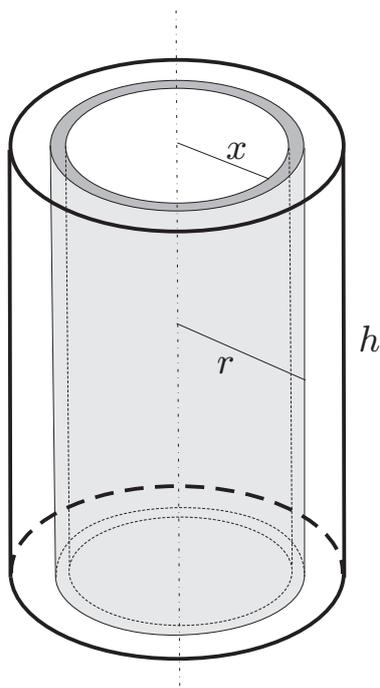


FIGURA 113. Calcolo del momento d'inerzia di un cilindro rispetto al suo asse.

il corpo rigido e osservando che la formula 7.4 si può ovviamente anche scrivere

$$J_r = \int_E d^2 dm$$

che è un modo per dire che, se si conoscono i momenti d'inerzia “elementari” $d^2 dm$ si possono sommare o integrare (perché la massa entra linearmente nell'espressione del momento d'inerzia). L'elemento di elezione in questo caso è l'“anello” di punti posti tutti a distanza r dall'asse rispetto al quale si calcola il momento. In questo caso il d^2 della formula (7.4) esce dall'integrale e risulta

$$(7.6) \quad J_r = d^2 \int_E \rho d\mathcal{L}^3 = Md^2 \text{ }^{(12)}.$$

Conviene allora ragionare come fanno i fisici e, se possibile, affettare un corpo rigido mediante elementi di anello di raggio x e spessore dx avente come asse quello rispetto al quale si calcola il momento. Un esempio semplicissimo è il cilindro omogeneo pieno di raggio r e altezza h . In questo caso l'anello ha momento d'inerzia $x^2 dm$, dove x è la distanza dall'asse e dm è l'“elemento di massa”, che è ovviamente pari alla densità ρ per

⁽¹²⁾ Attenzione a non confondere questo risultato con quello del cilindro *pieno*, che è $MR^2/2$, dove M è la massa del cilindro (ovviamente diversa dall' M della formula (7.6)!).

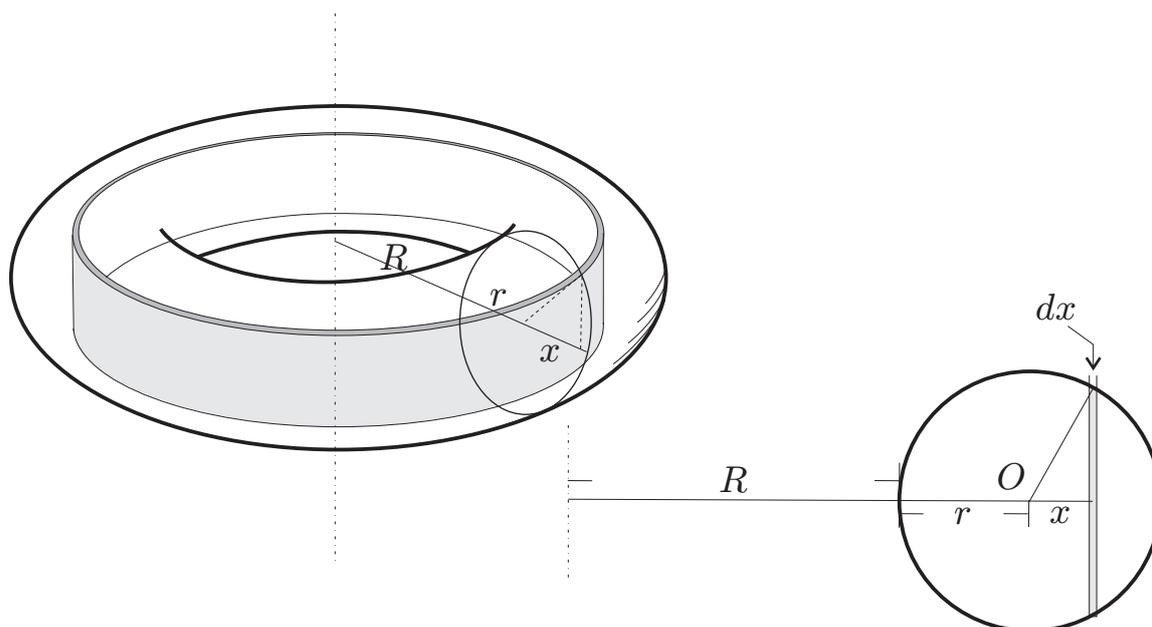


FIGURA 114. Calcolo del momento d'inerzia di un toro rispetto all'asse di simmetria assiale.

il volume $2\pi x h dx$ ⁽¹³⁾. Allora il momento d'inerzia risulta essere

$$J_r = \int_0^r x^2 \cdot \rho \pi x h dx = \int_E 2\pi h \int_0^r x^3 dx = 2\pi \rho h \frac{r^4}{4} = M \frac{r^2}{2}$$

in quanto la massa del cilindro è ovviamente $\rho \pi r^2 h$.

Il metodo dei cilindri risulta essere comodo anche per calcolare momenti d'inerzia meno banali, come quello di un toro omogeneo. La figura 114 mostra come si può fare. Usiamo come elemento base l'anello cilindrico tratteggiato nella figura, che ha raggio $R + r + x$, altezza $2\sqrt{r^2 - x^2}$ e spessore dx . Il suo momento d'inerzia "elementare" è dunque dato dalla (7.6), cioè

$$dJ_r = \rho 2\pi (R + r + x) 2\sqrt{r^2 - x^2} (R + r + x)^2 dx$$

e quindi

$$J_r = \int_{-r}^r 4\pi \rho \sqrt{r^2 - x^2} (R + r + x)^3 dx.$$

⁽¹³⁾ In quanto il volume di un anello finito di raggio x è $V = \pi h x^2$, per cui

$$dV = 2\pi h x dx.$$

Per calcolare questo integrale conviene porre $x = r \cos \vartheta$, per cui (attenzione agli estremi dell'integrale)

$$(7.7) \quad J_r = -4\pi\rho r^2 \int_{\pi}^0 (R + r(1 + \cos \vartheta))^3 \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = 4\pi\rho r^2 \int_0^{\pi} (R + r + r \cos \vartheta)^3 (1 - \cos^2 \vartheta) \, d\vartheta.$$

Lasciamo volentieri ad un computer l'onere e l'onore di un simile integrale ⁽¹⁴⁾, che ci dà

$$J_r = \frac{\pi^2}{8} r^2 (R + r)(4R^2 + 8Rr + 7R^2).$$

⁽¹⁴⁾ In ogni caso da qui escono solo integrali della forma

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos^n x \, dx$$

che si possono tutti calcolare. Infatti se n è dispari, la funzione $x \mapsto \cos^{2k+1} x$ è dispari rispetto a $\pi/2$ e quindi

$$I_{2k+1} = \int_0^{\pi} \cos^{2k+1} x \, dx = 0.$$

(In ogni caso risulta

$$\int \cos^{2k+1} x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^k \cos x \, dx = \int (1 - u^2)^k \, du$$

che si riconduce a polinomi.)

Invece, per quelli pari,

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \int_0^{\pi} \cos^{2k} x \, dx = \int_0^{\pi} \cos^{2k-1} x \cos x \, dx = -\cos^{2k-1} x \sin x \Big|_0^{\pi} - (2k-1) \int_0^{\pi} \cos^{2k-2} x \sin^2 x \, dx = \\ &= -(2k-1) \int_0^{\pi} \cos^{2k-2} (1 - \cos^2 x) \, dx = -(2k-1) I_{2k-2} + (2k-1) I_{2k} \end{aligned}$$

cosicché raccogliendo troviamo

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2(k-1)} I_{2k-2}$$

che dà una formula ricorsiva per calcolarli tutti, in quanto

$$I_2 = \int \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Da questa formula e dal fatto che $I_2 = \pi/2$ segue per induzione che

$$I_{2k} = \pi \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2}$$

che vale anche per $k = 0$. Nella (7.7) escono allora solo i seguenti integrali (ponendo $R+r = a$ per brevità):

$$\begin{aligned} J_r &= 4\pi\rho r^2 \int_0^{\pi} (a^3 + (3ar^2 - a^3) \cos^2 \vartheta - 3ar^2 \cos^4 \vartheta) \, d\vartheta = 4\pi\rho r^2 (a^3 I_0 + (3ar^2 - 1) I_2 - 3ar^2 I_4) = \\ &= 4\pi^2 \rho r^2 \left(a^3 + \frac{3ar^2 - 1}{2} - \frac{3}{8} 3ar^2 \right) = 4\pi\rho r^2 \frac{\pi a}{2} \left(a^2 + \frac{3}{4} r^2 \right). \end{aligned}$$

La massa è invece data da

$$M = 2\pi^2 r^2 (R + r) = 4\pi\rho r^2 \frac{\pi a}{2},$$

che fornisce la (7.8).

Ora manca la massa del toro! Be', non ci vuole molto: basta usare il teorema di Guldino;

$$M = 2\pi(R+r)\pi r^2 = 2\pi^2 r^2(R+r).$$

Pertanto

$$(7.8) \quad J_r = M \frac{4R^2 + 8Rr + 7R^2}{4} = M((R+r)^2 + \frac{3}{4}r^2).$$

Un po' più complicato è il momento d'inerzia del toro rispetto a un asse perpendicolare all'asse di simmetria assiale, che è principale d'inerzia in quanto ogni piano passante per l'asse di simmetria assiale è di simmetria materiale. Qui non possiamo affettare con dei cilindri (o meglio, non conviene), ma conviene farlo con dei piani perpendicolari all'asse di simmetria assiale, a distanza variabile da esso. Innanzitutto il calcolo che abbiamo fatto per un cilindro solido funziona allo stesso modo anche per un cerchio (un cilindro di "altezza nulla"). Per il teorema degli assi perpendicolari e per la simmetria del cilindro, il momento d'inerzia del disco rispetto ad un suo diametro è la metà, ossia $Mr^2/4 = \rho\pi r^4/4$. Per trovare il momento d'inerzia di un anello basta allora considerare il buco con la massa negativa, e quindi il momento d'inerzia dell'anello rispetto al suo diametro è pari a $\rho\pi(R^4 - r^4)/4 = M(R^2 + r^2)/4$, usando evidentemente l'espressione dell'area dell'anello.

Per calcolare il momento d'inerzia dell'elemento posto a distanza x dall'asse diametrale, bisogna calcolarlo rispetto all'asse diametrale, cosa che abbiamo appena fatto, e spostarlo di x col teorema degli assi paralleli. Tutta la difficoltà è calcolare i raggi. Dalla figura 115 si vede che il minore è $R+r-\sqrt{r^2-x^2}$, mentre il maggiore è $R+r+\sqrt{r^2-x^2}$. Allora il momento d'inerzia rispetto all'asse diametrale è

$$dI_a = \frac{1}{4}((R+r+\sqrt{r^2-x^2})^2 + (R+r-\sqrt{r^2-x^2})^2) dm = \frac{1}{4}(2(R+r)^2 + 2(r^2-x^2)) dm.$$

Usando il teorema degli assi paralleli, il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse "giusto" è

$$dI = \frac{1}{4}(2(R+r)^2 + 2(r^2-x^2)) dm + x^2 dm = \\ \frac{1}{2}((R+r)^2 + r^2 - x^2 + 2x^2) dm$$

Siccome la massa dell'anello è $\rho\pi((R+r+\sqrt{r^2-x^2})^2 - (R+r-\sqrt{r^2-x^2})^2) dx = 4\pi\rho(R+r)\sqrt{r^2-x^2} dx$, troviamo in definitiva

$$dI = 2\pi\rho(R+r)((R+r)^2 + r^2 + x^2)\sqrt{r^2-x^2} dx.$$

Integrando fra $-r$ e r troviamo ⁽¹⁵⁾

$$I = \frac{\pi^2}{4}(R+r)r^2(4R^2 + 8Rr + 9r^2) = \frac{M}{8}(4(R+r)^2 + 5r^2).$$

⁽¹⁵⁾ Usando ovviamente la massa trovata in precedenza. L'integrale in questo caso diviene (ponendo come prima $a = R+r$)

$$I = 2\pi\rho ar^2 \int_0^\pi (a^2 + r^2 + r^2 \cos^2 \vartheta)(1 - \cos^2 \vartheta) d\vartheta = 2\pi\rho ar^2((a^2 + r^2)I_0 + a^2 I_2 - r^2 I_4) = 2\pi^2 \rho ar^2(\frac{a^2}{2} + \frac{5}{8}r^2).$$

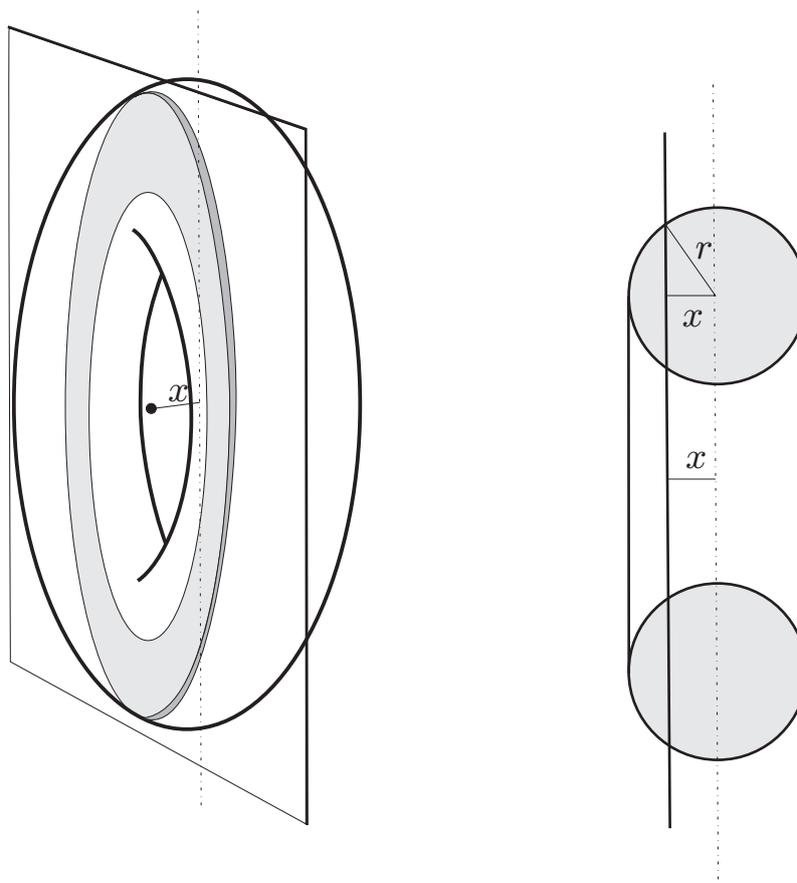


FIGURA 115. Calcolo del momento d'inerzia di un toro rispetto ad un asse diametrale.

Adesso siamo in grado di fare quel che vogliamo col nostro toro. Rispetto ad un riferimento principale (ce ne sono infiniti per via della simmetria assiale) la matrice d'inerzia è

$$J = \begin{bmatrix} M((R+r)^2 + \frac{3}{4}r^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{8}(4(R+r)^2 + 5r^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{8}(4(R+r)^2 + 5r^2) \end{bmatrix}.$$

Supponiamo di voler calcolare il momento d'inerzia del toro rispetto all'asse trasverso indicato in figura 116. Allora tutto quello che dobbiamo fare è trovar le componenti del versore dell'asse nel riferimento principale. Se immaginiamo di inserirlo nel piano xz , avremo

$$\mathbf{e} = \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \mathbf{e}_3$$

cosicché

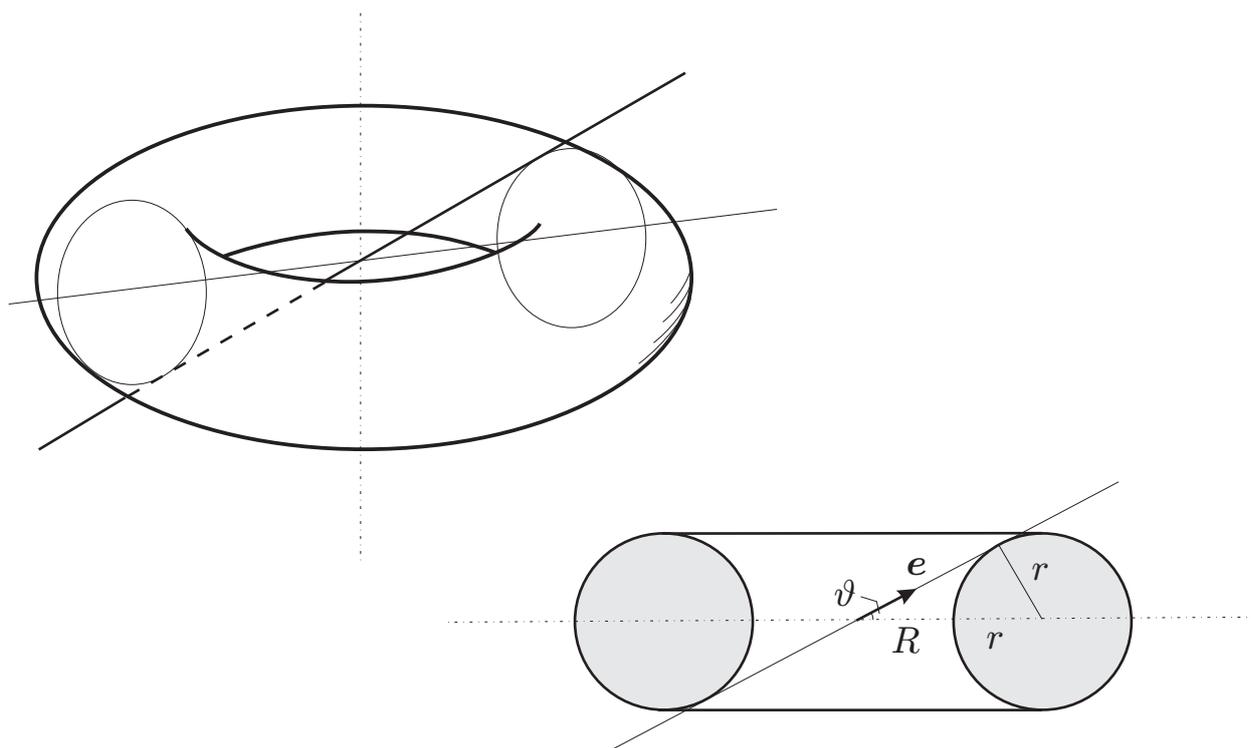


FIGURA 116. Calcolo del momento d'inerzia di un toro rispetto ad un asse trasverso.

$$\begin{aligned}
 J_r &= \mathbf{e} \cdot J_O \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \left[M \left((R+r)^2 + \frac{3}{4}r^2 \right) \cos^2 \vartheta \quad 0 \quad M \left(\frac{(R+r)^2}{2} + \frac{5}{8}r^2 \right) \sin^2 \vartheta \right]^T = \\
 &= M \left((R+r)^2 + \frac{3}{4}r^2 \right) \cos^2 \vartheta + M \left(\frac{(R+r)^2}{2} + \frac{5}{8}r^2 \right) \sin^2 \vartheta.
 \end{aligned}$$

Dalla figura 116 vediamo però subito che

$$\sin^2 \vartheta = \frac{r^2}{(R+r)^2}, \quad \cos^2 \vartheta = 1 - \sin^2 \vartheta = \frac{R(R+2r)}{(R+r)^2}$$

per cui sostituendo risulta

$$J_r = M \frac{5r^4 + 6r^3 + 2r^2(R+r)(3 - 2(R+r)) + 8(R+r)^4}{8(R+r)^2}. \quad (16)$$

⁽¹⁶⁾ Risultato fondamentale per la Scienza Moderna, da sapere a memoria all'esame. Scherzi a parte, non abbiamo ceduto (troppo) alla Tentazione: abbiamo mostrato come, a partire da semplici elementi e combinandoli in vario modo, si riesca in questo ambito a calcolare anche momenti d'inerzia di figure relativamente complesse.

Non abbiamo dedicato nemmeno un conticino ai punti discreti. Tanto sono facili, si dirà: però nascondono delle cose interessanti. Prendiamo $N + 1$ punti equidistanti di massa m_i ciascuno su un segmento lungo L , posti nelle posizioni di ascissa $0, L/N, 2L/N, \dots, L(N - 1)/N$ e L . Qual è il loro momento d'inerzia rispetto ad un asse perpendicolare al segmento passante per un estremo? Calcoliamo:

$$I_N = \sum_{k=0}^N m_k k^2 \frac{L^2}{N^2}.$$

Adesso supponiamo che le masse siano tutte uguali a m e riscriviamo

$$I_N = \frac{L^2}{N^2} \sum_{k=1}^N m k^2.$$

C'è una formula carina che dà la somma dei quadrati dei primi N numeri, essa è

$$\sum_{k=0}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+3)}{6}$$

Quindi, siccome i punti sono $N + 1$ la massa totale è $M = m(N + 1)$,

$$I_N = m \frac{L^2}{N^2} \frac{N(N+1)(2N+3)}{6} = ML^2 \frac{N(2N+3)}{6N^2}.$$

Se a questo punto aumentiamo il numero di punti (mantenendo la massa M finita) a dismisura, troviamo che il momento d'inerzia tende a

$$I_\infty = \lim_{N \rightarrow +\infty} ML^2 \frac{N(2N+3)}{6N^2} = \frac{ML^2}{3}$$

che è lo stesso risultato del sistema continuo ⁽¹⁷⁾! Sebbene questo risultato sia molto ragionevole, non è affatto evidente che la *meccanica* dei sistemi continui si possa dedurre da quella dei sistemi discreti: chi studierà la Meccanica dei Continui, avrà modo di vedere che sì, il principio di d'Alembert sopravviverà, ma la potenza delle sollecitazioni dovrà cambiare, per venire incontro ai nuovi modi di trasmettere le interazioni che i corpi continui ammettono.

⁽¹⁷⁾ Infatti

$$I = \int_0^L \rho x^2 dx = \rho \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}.$$

7.4. Dinamica del corpo rigido

Adesso abbiamo a disposizione tutti gli elementi contenuti nelle equazioni cardinali e possiamo, in linea teorica, risolvere i problemi dinamici riguardanti il corpo rigido. Non possiamo però permetterci di esagerare coi vincoli, in quanto anche solo il caso di un corpo rigido convesso generico che rotola senza strisciare su un piano è già un problema formidabile. Accontentiamoci allora di vincolare dei punti, e, per carità, con dei vincoli lisci.

Vediamo dapprima il caso del corpo rigido con *due* punti fissi, che quindi può solo ruotare attorno all'asse passante per i due punti. Se supponiamo il vincolo liscio, il momento delle reazioni vincolari non spenderà potenza sulla velocità angolare del corpo, che ovviamente ha la direzione dell'asse, e quindi sarà perpendicolare all'asse del corpo stesso. Se proiettiamo quindi la seconda equazione cardinale sull'asse del corpo, che ha versore \mathbf{e}_r , troviamo

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_O \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_r$$

e, siccome \mathbf{e}_r è costante, posto $K_r = \mathbf{K}_O \cdot \mathbf{e}_r$, $M_r = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_r$,

$$\frac{d}{dt} K_r = M_r.$$

Quanto vale K_r ? Facile: siccome $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante data da \mathbf{e}_r , abbiamo

$$K_r = J_O \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_r = J_O (\dot{\vartheta} \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_r = \dot{\vartheta} J_r$$

dove $J_r = \mathbf{e}_r \cdot J_O \mathbf{e}_r$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione e ϑ è un angolo in un qualunque piano perpendicolare all'asse di rotazione avente per origine il centro di rotazione. Quindi, siccome il corpo è rigido e J_r non varia, l'equazione del moto diventa

$$J_r \ddot{\vartheta} = M_r$$

dove M_r dipende in generale da $\vartheta, \dot{\vartheta}$ e dal tempo, e fornisce l'equazione differenziale del moto del corpo.

Un esempio di questo è il *pendolo fisico*: è il caso in cui le forze siano costanti (se l'asse di rotazione viene posto orizzontale, si può prendere la forza peso, come faremo noi fra un attimo), cosicché si possono pensare applicate nel baricentro. Siccome il baricentro G del corpo percorre una circonferenza di centro O e raggio d come in figura 117 e dunque la componente della sua velocità lungo l'asse di rotazione è nulla, per la prima equazione cardinale, alla componente lungo l'asse della forza si oppone l'analoga componente della reazione vincolare Φ , definita sull'asse. Pertanto è sufficiente considerare forze perpendicolari all'asse, per esempio le forze peso se l'asse è orizzontale.

Le forze peso hanno risultante $Mg\mathbf{e}_3$ applicata nel baricentro, cosicché il suo momento assiale diventa (v. fig. 117)

$$M_r = -Mgd \sin \vartheta$$

e dunque l'equazione differenziale diventa

$$J_r \ddot{\vartheta} + Mgd \sin \vartheta = 0$$

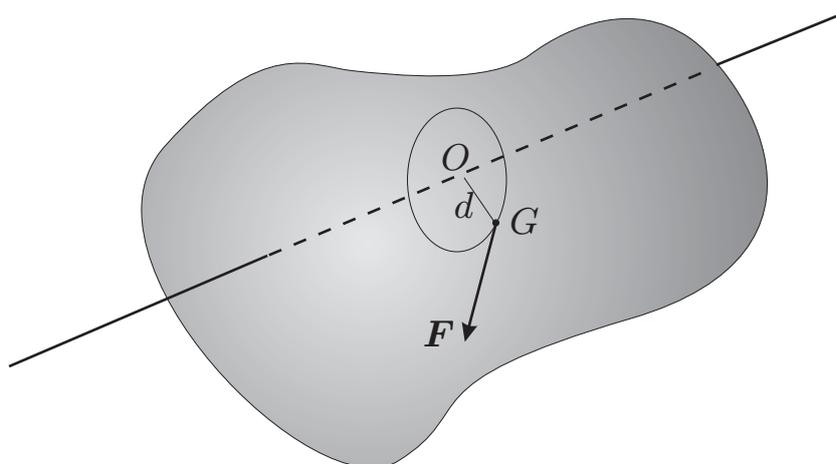


FIGURA 117. Il pendolo fisico.

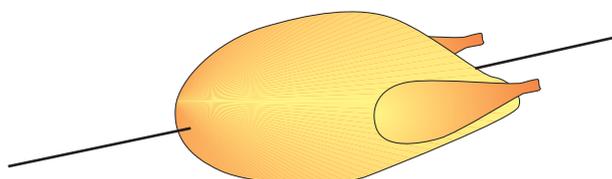


FIGURA 118. Corpo rigido con asse fisso (può scorrere ma è meglio che non lo faccia troppo).

Questa equazione differenziale è formalmente identica a quella del pendolo semplice

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0$$

e si tratta esattamente allo stesso modo. Si può trovare anzi una “lunghezza equivalente” del pendolo fisico, che è la lunghezza di un pendolo semplice con la stessa equazione differenziale del pendolo fisico. Chiaramente si deve avere

$$\frac{Mgd}{J_r} = \frac{g}{l}$$

da cui

$$l = \frac{J_r}{Md}.$$

Di difficoltà appena superiore è il corpo rigido con asse fisso, che non è altro che un corpo rigido che può ruotare attorno ad un asse ma anche scorrere lungo di esso.

La prima equazione cardinale, proiettata lungo l'asse, fornisce

$$\frac{d}{dt} M \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{e} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e} + \Phi \cdot \mathbf{e}.$$

Siccome il vincolo è liscio e ovviamente $\mathbf{w} = w\mathbf{e}$ è una velocità virtuale, si deve avere $\Phi \cdot \mathbf{e} = 0$. Quindi la proiezione dell'equazione cardinale diventa semplicemente, posto

ovviamente $a_r = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ e $F_r = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}$ (e massa costante, anche se il pollo perde liquidi),

$$Ma_r = F_r$$

che è formalmente equivalente all'equazione per un punto su una retta. L'integrazione di questa fornisce il moto del baricentro. Se consideriamo che $\Psi_O = \mathbf{0}$ (O è un punto qualunque dell'asse), allora la seconda equazione cardinale fornisce lo stesso risultato che per il corpo rigido con due punti fissi. Pertanto il moto si compone di un moto traslatorio lungo l'asse e di un moto rotatorio attorno ad esso.

Se vogliamo considerare l'equivalente del pendolo fisico, ci saranno poche novità: se $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e} \neq 0$, siccome la forza è costante per ipotesi, avremo che il baricentro si muoverà di moto uniformemente accelerato, mentre la rotazione attorno all'asse sarà analoga a quella del pendolo fisico.

Prima di passare alla parte più difficile, il corpo rigido con un punto fisso, vediamo rapidamente il corpo rigido *libero*. Siccome non è soggetto a vincoli esterni, le equazioni cardinali si scrivono

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{v}_G) = \mathbf{F}, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O.$$

Se conosciamo la forza \mathbf{F} , possiamo usare la prima equazione per conoscere la traiettoria del baricentro. Potrà essere molto difficile, ma non abbiamo scelta: se non riusciamo nemmeno in questo, difficilmente potremo andare avanti. Una volta nota la traiettoria del baricentro, possiamo metterci in un sistema (in genere non inerziale) nel quale il baricentro sia fisso. Chiaramente, ora la seconda equazione cambierà, perché dovremo aggiungere ai momenti delle forze date i momenti delle forze di trascinamento, ma questo non cambia la natura dell'equazione, e soprattutto il fatto che, se per O si prende il baricentro, questo risulta fisso. Quindi possiamo tranquillamente studiare il corpo rigido con un punto fisso.

Per questo dobbiamo mettere in campo tutte le strategie che abbiamo visto finora. Innanzitutto, dalla seconda equazione cardinale della dinamica, se indichiamo con O il punto fisso, il momento delle reazioni vincolari si annulla e ci resta

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O.$$

Ora poniamoci in un riferimento solidale (non dimentichiamoci che \mathbf{K}_O non è in generale fisso in questo riferimento) principale, cosicché, indicati come al solito J_1, J_2, J_3 i momenti d'inerzia rispetto agli assi principali, abbiamo

$$\mathbf{K}_O = J_1\omega_1\mathbf{j}_1 + J_2\omega_2\mathbf{j}_2 + J_3\omega_3\mathbf{j}_3,$$

avendo indicato con \mathbf{j}_k i versori del riferimento solidale. Il bello di questo riferimento è che i J_k sono costanti. Dunque

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = J_1\dot{\omega}_1\mathbf{j}_1 + J_1\omega_1\frac{d\mathbf{j}_1}{dt} + J_2\dot{\omega}_2\mathbf{j}_2 + J_2\omega_2\frac{d\mathbf{j}_2}{dt} + J_3\dot{\omega}_3\mathbf{j}_3 + J_3\omega_3\frac{d\mathbf{j}_3}{dt}.$$

Dal Teorema di Poisson ?? troviamo

$$\frac{d\mathbf{j}_k}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}_k$$

per cui, in notazione compatta,

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{J}_O\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_O\boldsymbol{\omega}.$$

Scrivendo ora in componenti l'equazione cardinale troviamo

$$(7.9) \quad \begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 &= M_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 &= M_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 &= M_3 \end{aligned}$$

che costituisce il celebre sistema di equazioni di EULERO per il corpo rigido.

Bello, vero? Però c'è qualcosa che non convince: è un sistema del *primo* ordine! Possibile? Finora abbiamo sempre trovato sistemi o equazioni del secondo; come mai?

In effetti il vettore $\boldsymbol{\omega}$ *non* è il vettore che individua la posizione del corpo rigido, ma questo servizio lo fa il *riferimento*, il quale è individuato, per esempio, dai mitici angoli (guarda caso) di Eulero. In Cinematica abbiamo anche dato le relazioni che legano le componenti del vettore $\boldsymbol{\omega}$, espresse nel riferimento solidale, agli angoli di Eulero (NON E' VERO DEVO ANCORA FARLO). Eccole:

$$(7.10) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\vartheta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \omega_2 &= -\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta. \quad (18) \end{aligned}$$

Adesso che abbiamo capito la complessità di questo sistema, vediamo di analizzarne alcune soluzioni particolari.

7.5. Moti particolari del corpo rigido col punto fisso

La prima semplificazione che possiamo effettuare per analizzare particolari moti del corpo rigido con un punto fisso è quella di azzerare i momenti. In questo caso si parla di *moto*

(18) Combinando queste equazioni con le precedenti risulta un sistema così terrificante che non l'ho mai visto scritto su nessun libro. Eccolo per voi:

$$\begin{aligned} J_1(\ddot{\vartheta} \cos \psi - \ddot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi - \dot{\vartheta}\dot{\psi} \sin \psi - \dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \psi) + \\ + (J_3 - J_2)(\dot{\vartheta}\dot{\psi} \sin \psi + \dot{\vartheta}\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \vartheta \cos \psi + \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \psi) = M_1 \\ J_2(\ddot{\vartheta} \sin \psi + \ddot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi + \dot{\vartheta}\dot{\psi} \cos \psi - \dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \psi + \dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \psi) + \\ + (J_1 - J_3)(\dot{\vartheta}\dot{\psi} \cos \psi + \dot{\vartheta}\dot{\psi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \vartheta \cos \psi - \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \psi) = M_2 \\ J_3(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi} \cos \vartheta - \dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta) + (J_2 - J_1)(\dot{\vartheta}^2 \cos \psi \sin \psi + \dot{\vartheta}\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos 2\psi - \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \sin \psi \cos \psi) = M_3. \end{aligned}$$

per inerzia. In questo caso il sistema 7.9) diviene

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 &= 0 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned}$$

da cui si vede subito che sono soluzioni quelle date da $\omega_2 = \omega_3 = 0$ e ω_1 costante (e le altre due che si ottengono per rotazione degli indici). Queste sono le *rotazioni permanenti* attorno agli assi principali d'inerzia.

Però, essendo $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$, abbiamo un'informazione in più: \mathbf{K}_O è costante nel riferimento fisso. Ciò ci permette di dire in modo semplice qualcosa nel caso in cui il corpo abbia due momenti d'inerzia uguali (il cosiddetto *corpo a struttura giroscopica*). In questo caso, scriviamo \mathbf{K}_O

$$\mathbf{K}_O = J_1 \omega_1 \mathbf{j}_1 + J(\omega_2 \mathbf{j}_2 + \omega_3 \mathbf{j}_3)$$

dove $J_2 = J_3 = J$. Aggiungendo e togliendo $J\omega_1 \mathbf{j}_1$ abbiamo

$$\mathbf{K}_O = (J_1 - J)\omega_1 \mathbf{j}_1 + J\boldsymbol{\omega}$$

per cui

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{J}\mathbf{K}_O + \frac{J - J_1}{J}\omega_1 \mathbf{j}_1.$$

Osserviamo infine che dalla prima delle equazioni di Eulero segue $\dot{\omega}_1 = 0$, ossia $\omega_1 = \text{cost.}$. Questa formula mostra una cosa simpatica: il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ si compone di due contributi: uno, \mathbf{K}_O/J , che è costante nel riferimento fisso (e quindi mobile in quello solidale) e l'altro, il rimanente, che è costante nel riferimento solidale (ricordiamo che ω_1 è la componente di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto al riferimento solidale), e quindi mobile nel riferimento fisso. Si tratta della cosiddetta *precessione regolare*, della quale abbiamo accennato quando abbiamo parlato dello stato cinetico rigido.

Questo non è comunque il moto più generale per inerzia del corpo rigido con punto fisso. Per determinarlo, dobbiamo considerare un'altra importante informazione: la conservazione dell'energia, che si esprime nell'equazione

$$\mathbf{K}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = 2K = \text{cost.},$$

che si affianca alla conservazione del momento della quantità di moto \mathbf{K}_O . La difficoltà è che il vettore \mathbf{K}_O è costante nel riferimento fisso, mentre in quello solidale, che è quello nel quale riusciamo ad esprimerlo meglio, non lo è! Riscriviamo allora l'espressione dell'energia (la quale, essendo uno scalare, è costante in entrambi i riferimenti) usando un riferimento principale

$$(7.11) \quad J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = 2K;$$

cosa ci ricorda? Non assomiglia parecchio all'equazione dell'ellissoide d'inerzia? Sì, solo che là c'erano x, y, z e poi il tutto era uguale ad uno: in ogni caso, questo luogo (nello spazio $\omega_1, \omega_2, \omega_3$) è un ellissoide di assi proporzionali agli assi dell'ellissoide d'inerzia, e concentrico ad esso: però le direzioni dei suoi assi, che sono le direzioni degli assi principali, sono le stesse. Il fatto poi che ci siano gli ω_k dice proprio che la velocità angolare del corpo rigido

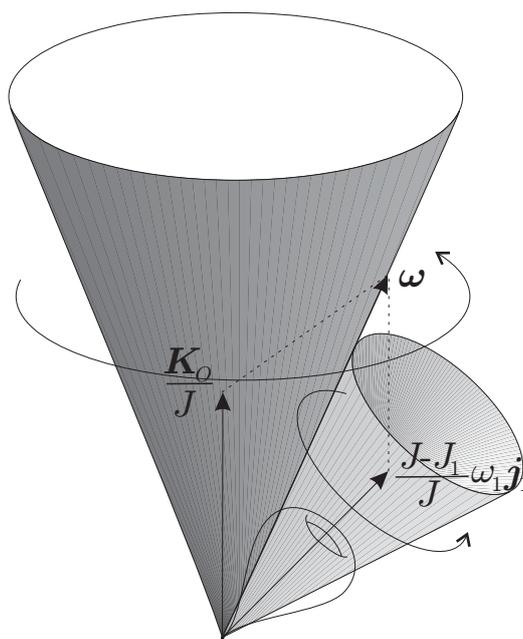


FIGURA 119. Precessione regolare.

non può essere arbitraria, in virtù della conservazione dell'energia: il vettore $\boldsymbol{\omega}$ deve avere la punta della freccia sull'ellissoide (7.11). L'osservazione astuta, dovuta a POINSON, è che il piano tangente all'ellissoide è perpendicolare alla normale all'ellissoide (per questo non ci voleva Poinsot), ossia perpendicolare al gradiente (rispetto agli ω_k) della funzione

$$K(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2$$

che è

$$\text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} K = J_1\omega_1\mathbf{e}_1 + J_2\omega_2\mathbf{e}_2 + J_3\omega_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{J}_O\boldsymbol{\omega} = \mathbf{K}_O$$

che è costante! Quindi ribaltiamo il punto di vista ⁽¹⁹⁾ e diciamo: il piano tangente è fisso e l'ellissoide si può muovere in modo da mantenerlo tale; ma questo dice che l'ellissoide si può muovere rotolando senza strisciare su uno dei suoi piani tangenti (determinato dalle condizioni iniziali). Siccome questo vincolo è sufficiente per determinare una curva sull'ellissoide, essa sarà il moto cercato (e difatti non abbiamo altre quantità che si conservano), e gli assi dell'ellissoide saranno gli assi principali d'inerzia del solido. Questo è il celebre *moto alla Poinsot*.

Già, sembra bello, però si potrebbe obiettare: abbiamo ricondotto il moto per inerzia di un corpo rigido *qualunque* al moto *vincolato* di un particolare corpo rigido (l'ellissoide d'inerzia): è vincolato perché deve rotolare senza strisciare. È vero che non ci sono forze, ma non sembra comunque semplice determinare il moto. In effetti, invece, si può facilmente

⁽¹⁹⁾ Specialità del matematico e del fisico.

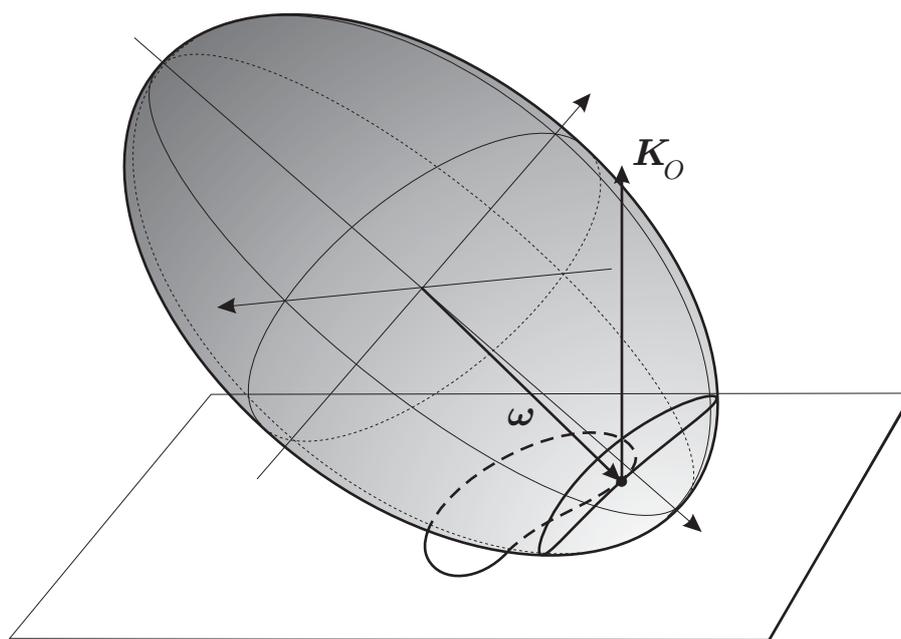


FIGURA 120. Descrizione del moto per inerzia secondo Poincot.

dire qualcosa ancora di più: siccome \mathbf{K}_O è costante, nel riferimento principale scelto si avrà

$$\|\mathbf{K}_O\|^2 = J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2 = \text{cost.}$$

e quindi tra le componenti $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ di $\boldsymbol{\omega}$ sussisteranno le relazioni

$$\begin{aligned} J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 &= 2K \\ J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2 &= \|\mathbf{K}_O\|^2 \end{aligned}$$

che sono sufficienti per determinare una curva sull'ellissoide, vista come intersezione fra esso e una sfera.

Noi non ci addentreremo nell'analisi di queste curve, che in certi casi assomigliano molto al bordo delle patatine fritte ⁽²⁰⁾, ma ci limitiamo ad osservare che le rotazioni permanenti corrispondono ai casi in cui l'ellissoide poggia sul punto di intersezione con gli assi principali ⁽²¹⁾, mentre le precessioni regolari si hanno quando due momenti d'inerzia sono uguali, e dunque l'ellissoide è rotondo (tipo palla da rugby), e quando l'intersezione con la sfera dà una circonferenza. Va detto, per concludere, che queste sono le traiettorie del vettore

⁽²⁰⁾ *Polodia* ed *erpolodia* sono i tristi nomi meritati da queste curve, rispettivamente quella sull'ellissoide e la sua traccia sul piano.

⁽²¹⁾ Dalla figura 121 si vede, non facilmente, che le traiettorie vicine alle rotazioni corrispondenti agli assi maggiore e minore dell'ellissoide "tendono" al punto di equilibrio se si parte molto vicino ad esso, mentre le curve corrispondenti all'asse intermedio sono totalmente diverse. Infatti, si può dimostrare che le rotazioni permanenti attorno agli assi maggiore e minore sono stabili (nel senso della traiettoria percorsa dal vettore $\boldsymbol{\omega}$), mentre l'altra è instabile.

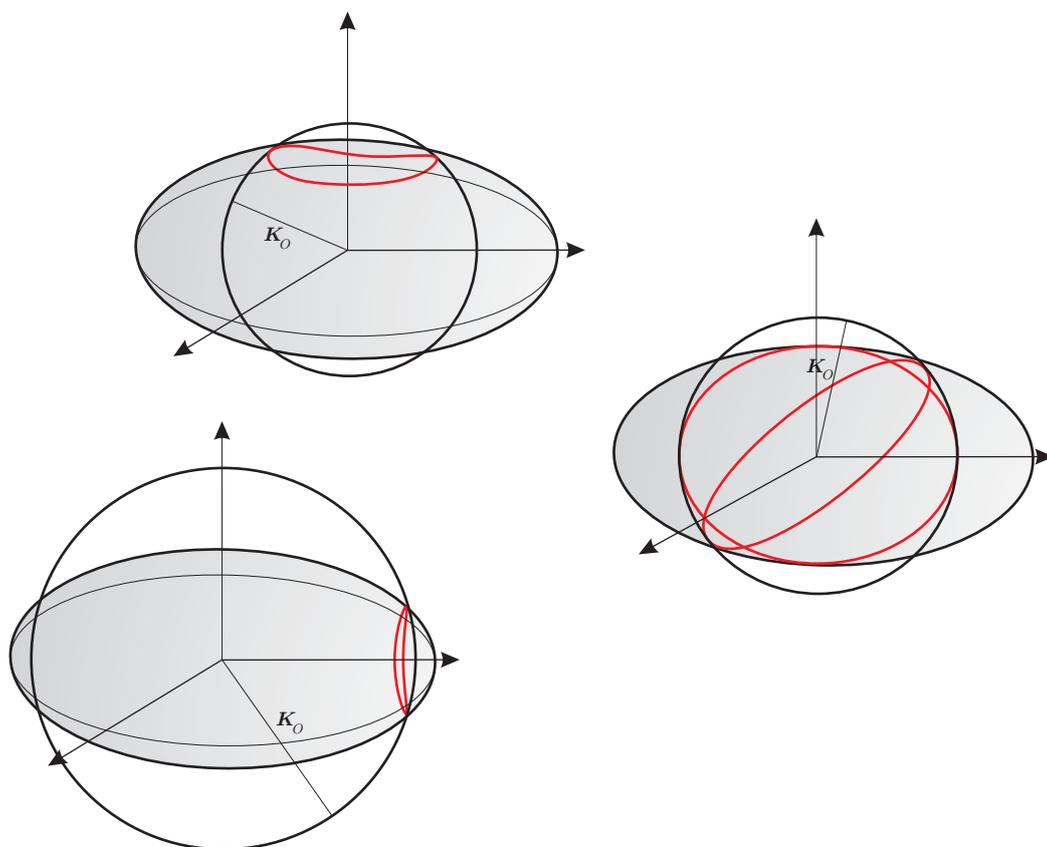


FIGURA 121. Le traiettorie del vettore velocità angolare sull'ellissoide d'inerzia.

ω , per cui non è ancora chiaro come si possano ricavare gli angoli di Eulero: in ogni caso, la posizione degli assi dell'ellissoide dà la posizione degli assi del riferimento solidale.

Fin qui tutto quanto si può dire se non ci sono forze impresse. È già bello complicato. Se si aggiungono forze, si cade facilmente nel baratro: c'è un solo caso significativo, a parte alcuni molto particolari, che permette di fare un'analisi ragionevolmente approfondita, ed è quello del corpo a struttura giroscopica soggetto ad una forza costante (come il peso), la cosiddetta *trottola di Lagrange*. Concluderemo il Corso deliziandoci con questo problemino.

Innanzitutto, se il punto fisso è il baricentro, il momento delle forze sarà nullo e quindi ricadiamo nel caso del moto per inerzia. Supponiamo allora che sia l la distanza fra il punto fisso O e il baricentro G , il quale, a causa della struttura giroscopica, si troverà sull'asse \mathbf{j}_3 del riferimento solidale.

A causa della struttura giroscopica, la terza equazione di Eulero dice che

$$J_3\omega_3 = \text{cost.}$$

in quanto

$$\mathbf{M}_O = (G - O) \times (-mg\mathbf{e}_3) = -mgl\mathbf{j}_3 \times \mathbf{e}_3$$

e quindi

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{j}_3 = 0.$$

Pertanto, usando la terza delle (7.10), troviamo

$$J_3\omega_3 = J_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) = \text{cost.} = p_\psi \quad (22).$$

La seconda equazione cardinale dice invece che

$$(7.12) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O = (G - O) \times (-mge_3) = -mgl\mathbf{j}_3 \times \mathbf{e}_3$$

e dunque

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{K}_O \cdot \mathbf{e}_3) = \frac{d}{dt} \mathbf{K}_O \cdot \mathbf{e}_3 = -mgl\mathbf{j}_3 \times \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$

per cui $\mathbf{K}_O \cdot \mathbf{e}_3 = \text{cost.}$ Come si scrive $\mathbf{K}_O \cdot \mathbf{e}_3$? Noi abbiamo una bella espressione di \mathbf{K}_O solo nel riferimento solidale. Be', dobbiamo usare la nostra supermatrice di rotazione (1.30): essa dà, per ogni vettore nel riferimento fisso, le sue componenti in quello solidale; noi però abbiamo bisogno del contrario, e per questo ci serve la matrice inversa, cioè la trasposta. Poi dobbiamo invertire \mathbf{e}_3 , e quindi prenderne la terza colonna: in definitiva ci serve la terza riga della matrice (1.30):

$$\mathbf{e}_3 = \sin \vartheta \sin \psi \mathbf{j}_1 + \sin \vartheta \cos \psi \mathbf{j}_2 + \cos \vartheta \mathbf{j}_3.$$

Allora (indicando con J il comune valore di J_1 e J_2)

$$\mathbf{K}_O = J\omega_1\mathbf{j}_1 + J\omega_2\mathbf{j}_2 + J_3\omega_3\mathbf{j}_3$$

cosicché

$$\mathbf{K}_O \cdot \mathbf{e}_3 = J(\omega_1 \sin \vartheta \sin \psi + \omega_2 \sin \vartheta \cos \psi) + J_3\omega_3 \cos \vartheta = p_\vartheta.$$

C'è infine un'ultima quantità conservata: l'energia totale. Siccome il potenziale delle forze peso è evidentemente $-mgl \cos \vartheta$, troviamo, sempre con l'aiuto delle formule (7.10),

$$J(\omega_1^2 + \omega_2^2) + J_3\omega_3^2 + 2mgl \cos \vartheta = 2E.$$

Nel riferimento solidale, le tre leggi si scrivono allora

$$\begin{cases} J_3\omega_3 = p_\psi \\ J(\omega_1 \sin \vartheta \sin \psi + \omega_2 \sin \vartheta \cos \psi) = p_\vartheta - p_\psi \cos \vartheta \\ J(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 2E - \frac{p_\psi^2}{J_3} - 2mgl \cos \vartheta. \end{cases}$$

Ricorriamo ora ad un piccolo trucco: poniamo

$$\gamma_1 = \sin \vartheta \sin \psi, \quad \gamma_2 = \sin \vartheta \cos \psi, \quad \gamma_3 = \cos \vartheta$$

(22) La notazione p_ψ, p_ϑ , ecc. proviene dalla Meccanica Analitica e ne scopriremo la ragione nell'omonimo corso.

e osserviamo che $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$. Dividendo per J le ultime due equazioni appena scritte, esse divengono

$$\begin{cases} \omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2 = \frac{p_\vartheta}{J} - \frac{p_\psi}{J} \cos \vartheta \\ (\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{2E}{J} - \frac{p_\psi^2}{JJ_3} - \frac{2mgl}{J} \cos \vartheta. \end{cases}$$

Osserviamo ora che, moltiplicando per $\cos \psi$ e $\sin \psi$ la prima e la seconda delle (7.10) ⁽²³⁾ discende

$$\dot{\vartheta} = \cos \psi \omega_1 - \sin \psi \omega_2$$

cosicché

$$\frac{d}{dt}(\cos \vartheta) = -\sin \vartheta \dot{\vartheta} = \sin \vartheta \sin \psi \omega_2 - \sin \vartheta \cos \psi \omega_1 = \gamma_1 \omega_2 - \gamma_2 \omega_1.$$

Bene: usiamo a questo punto l'identità ⁽²⁴⁾

$$(\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2)^2 + (\omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1)^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) = (\omega_1^2 + \omega_2^2)(1 - \gamma_3^2)$$

e troviamo, posto $x = \cos \vartheta = \gamma_3$ e ramazzando tutti i risultati trovati finora ⁽²⁵⁾,

$$(7.13) \quad \left(\frac{p_\vartheta}{J} - \frac{p_\psi}{J} x \right)^2 + \dot{x}^2 = \left(\frac{2E}{J} - \frac{p_\psi^2}{JJ_3} - \frac{2mgl}{J} x \right) (1 - x^2).$$

Nel riferimento fisso, usando le (7.10), troviamo

$$\begin{cases} J_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) = p_\psi \\ (J \sin^2 \vartheta + J_3 \cos^2 \vartheta) \dot{\varphi} + J_3 \cos \vartheta \dot{\psi} = p_\vartheta \\ J(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + J_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 + 2mgl \cos \vartheta = 2E. \end{cases}$$

È possibile ottenere la (7.13) anche da qui, osservando che la seconda equazione si può scrivere

$$J \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} + J_3 \cos \vartheta (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) = p_\vartheta,$$

e che, usando la prima, si può ottenere

$$J \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} + p_\psi \cos \vartheta = p_\vartheta.$$

Ricavando $\dot{\varphi}$ da questa espressione troviamo

$$(7.14) \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{J} \frac{p_\vartheta - p_\psi \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}$$

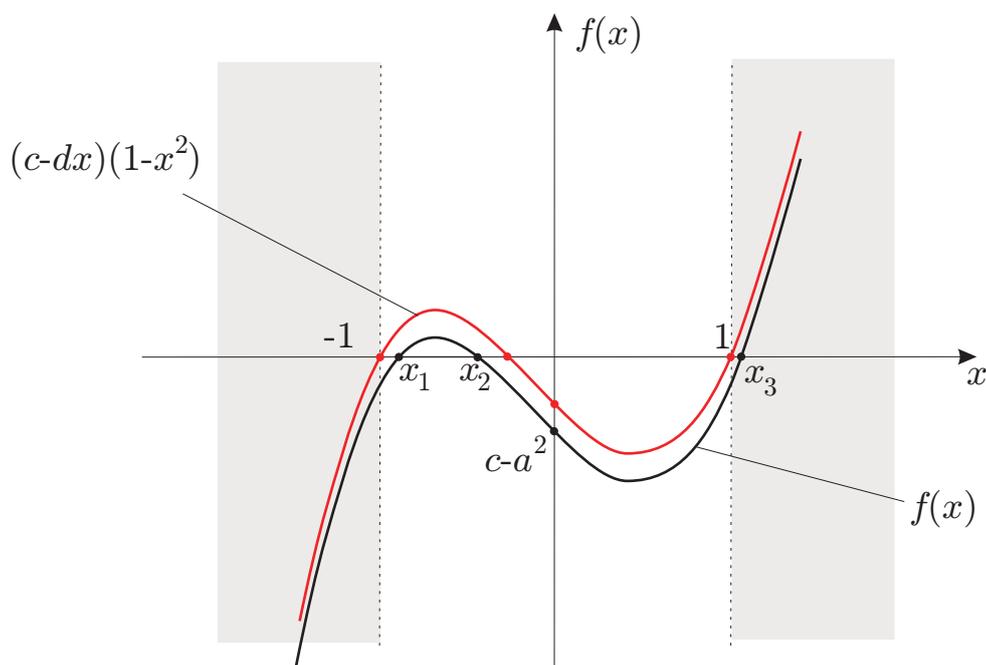
e sostituendola nell'espressione dell'energia, usando anche la prima equazione, giungiamo alla (7.13) ⁽²⁶⁾.

⁽²³⁾ La formula è vera anche se $\cos \psi$ o $\sin \psi$ sono nulli, perché non possono essere *entrambi* nulli.

⁽²⁴⁾ Nota come *identità di Lagrange*: a quei tempi si facevano tutto da soli...

⁽²⁵⁾ Supponiamo per ora $J_3 \neq 0$. Torneremo alla fine a questo caso estremamente degenero. Invece sicuramente $J > 0$, in quanto altrimenti il corpo si ridurrebbe al solo punto fisso O .

⁽²⁶⁾ C'è la grana che così facendo abbiamo dovuto dividere per $\sin^2 \vartheta$ e quindi abbiamo limitato l'analisi ai moti che non passano per i poli.

FIGURA 122. Il caso $a \neq \pm b$.

Adesso mettiamoci a semplificare tutte queste costanti. Poniamo

$$\frac{p_\vartheta}{J} = a, \quad \frac{p_\psi}{J} = b, \quad \frac{2E}{J} - \frac{p_\psi^2}{JJ_3} = c, \quad \frac{2mgl}{J} = d$$

e troviamo

$$(7.15) \quad \dot{x}^2 = (c - dx)(1 - x^2) - (a - bx)^2 := f(x).$$

Esaminiamo allora il polinomio di terzo grado a secondo membro di questa equazione, tenendo presente che deve essere $-1 \leq x \leq 1$. Vediamo subito che il termine $(c - dx)(1 - x^2)$ si annulla per $x = \pm 1$ e per $x = d/c$, dopodiché, se $a \neq \pm b$, risulta un po' "abbassato" dal termine negativo $-(a - bx)^2$. Inoltre, il coefficiente d del termine di terzo grado è strettamente positivo, per cui la curva tende a $-\infty$ per $x \rightarrow -\infty$ e a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. Vediamo anche quanto vale in ± 1 . Abbiamo

$$f(\pm 1) = -(a \mp b)^2$$

che è strettamente negativo se $a \neq \pm b$. Limitiamoci per ora a questo caso. Per avere un moto reale, devono esistere degli $x \in] -1, 1[$ tali che $f(x) \geq 0$. Dalla relazione appena trovata, vediamo che o sono due distinte x_1, x_2 , oppure sono due coincidenti. In nessun caso (sempre che $a \neq \pm b$) esse potranno arrivare a ± 1 .

Vediamo il sottocaso in cui le radici siano distinte. Siccome nessuna di esse è radice multipla, l'analisi di Weierstrass dice che il moto in ϑ è periodico tra $\arccos x_1$ e $\arccos x_2$. Ma cosa faranno φ e ψ ? $\dot{\varphi}$ è dato dalla (7.14):

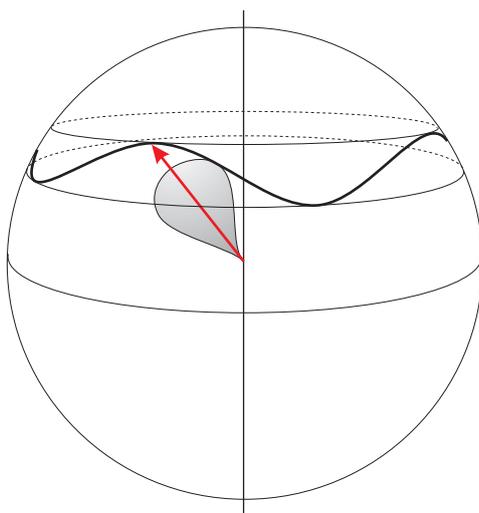


FIGURA 123. Nutazioni.

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{J} \frac{p_{\vartheta} - p_{\psi} \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}.$$

Pertanto $\dot{\varphi} = 0$ se $x = a/b$, che per ipotesi non è mai pari a 1. Questo valore può o meno cadere nell'intervallo $[x_1, x_2]$: se non vi cade, allora φ è una funzione monotona, e la trottola, oscillando in ϑ fra i due paralleli limite, precede, sia pure con velocità costanti, in φ , eseguendo delle *nutazioni* (v. fig. 123). Se invece cade al suo interno, allora vi è un istante in cui $\dot{\varphi} = 0$ e il moto si inverte⁽²⁷⁾. In questo caso l'asse della trottola forma dei cappi (fig 124). Infine, vi è la possibilità che a/b sia uguale a x_1 o a x_2 , nel qual (sottosotto)caso si annullano per $\cos \vartheta = a/b$ sia $\dot{\vartheta}$ che $\dot{\varphi}$. Supponiamo che $\vartheta_1 < \vartheta_2$ (ossia ϑ_1 corrisponde al parallelo più vicino al polo nord della trottola) e partiamo con condizioni iniziali $\vartheta(0) = \vartheta_k$ ($k = 1$ oppure 2), $\varphi(0) = \varphi_0$, $\psi(0) = \psi_0$, $\dot{\vartheta}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) \neq 0$ ⁽²⁸⁾, e calcoliamoci le costanti. Dalla conservazione dell'energia (??) risulta subito

$$J_3 \dot{\psi}(0) + mgl \cos \vartheta_k = 2E$$

oppure, che è lo stesso,

$$2E - \frac{p_{\psi}^2}{J_3} = mgl \cos \vartheta_k.$$

⁽²⁷⁾ Potrebbe avvenire che φ si arresti e poi continui nello stesso senso? No, perché

$$\ddot{\varphi}(a/b) = -\frac{b^3}{a^2 - b^2} \dot{x}(a/b)$$

che non si annulla ($b \neq 0$ perché altrimenti $\dot{\varphi} \neq 0$), in quanto \dot{x} si annulla solo in x_1 e x_2 .

⁽²⁸⁾ Se $\dot{\psi}(0) = 0$ si avrebbe $p_{\vartheta} = p_{\psi} = 0$, cioè $a = b$, cosa che abbiamo escluso.

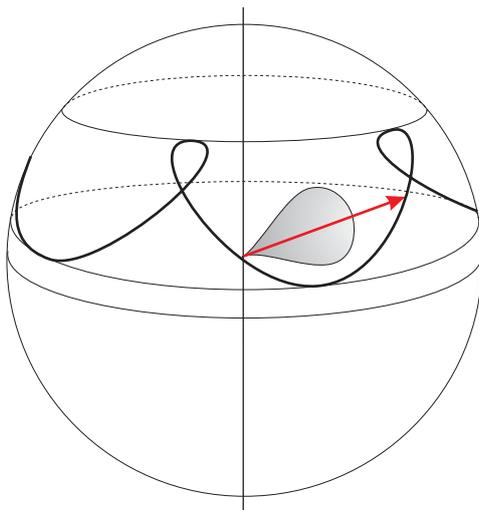


FIGURA 124. Nutazioni “con ritorno”.

Un altro modo di scrivere la (7.13) è il seguente:

$$(7.16) \quad J^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 + (p_\vartheta - p_\psi \cos \vartheta)^2 + 2Jmgl \cos \vartheta \operatorname{sen}^2 \vartheta = \left(2E - \frac{p_\psi^2}{J_3} \right) J \operatorname{sen}^2 \vartheta.$$

Sostituendo la prima espressione nell'espressione (7.16) abbiamo allora

$$J^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 + (p_\vartheta - p_\psi \cos \vartheta)^2 + 2Jmgl \cos \vartheta \operatorname{sen}^2 \vartheta = Jmgl \cos \vartheta_k \operatorname{sen}^2 \vartheta$$

che si semplifica, grazie alla (7.14), in

$$\cos \vartheta_k - \cos \vartheta = \frac{J}{mgl} \left(J \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{J} \dot{\varphi}^2 \right).$$

Dal fatto che il secondo membro di questa espressione è positivo e dal fatto che il coseno è strettamente decrescente fra 0 e π deduciamo

$$\cos \vartheta_k - \cos \vartheta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta \leq \vartheta_k$$

e quindi innanzitutto ϑ_k non può essere uguale a ϑ_2 . Quindi possiamo partire solo dal parallelo più alto ϑ_1 . Per stabilire la direzione nella quale parte l'asse della trottola dobbiamo calcolare $\dot{\vartheta}/\dot{\varphi}$, che, con qualche passaggio, risulta essere pari a

$$\frac{\dot{\vartheta}}{\dot{\varphi}} = \pm \frac{\sqrt{\frac{2Jmgl}{p_\psi} (p_\psi \cos \vartheta - p_\vartheta) - \frac{(p_\vartheta - p_\psi \cos \vartheta)^2}{J \operatorname{sen}^2 \vartheta}}}{\frac{(p_\vartheta - p_\psi \cos \vartheta)}{J \operatorname{sen}^2 \vartheta}}.$$

Calcolando il limite per $\vartheta \rightarrow a/b = p_\vartheta/p_\psi$, risulta facilmente

$$\lim_{\vartheta \rightarrow p_\vartheta/p_\psi} \frac{\dot{\vartheta}}{\dot{\varphi}} = \pm \infty,$$

che mostra che l'asse della trottola descrive delle cuspidi in corrispondenza di $\vartheta = \vartheta_1$.

Cosa fa ψ ? Deriviamo due interessanti formule. Innanzitutto

$$(7.17) \quad p_\psi + p_\vartheta = (1 + \cos \vartheta)[J_3 \dot{\psi} + (J_3 + J(1 - \cos \vartheta))\dot{\varphi}];$$

(basta sostituire ed effettuare un semplice raccoglimento). Analogamente

$$(7.18) \quad p_\psi - p_\vartheta = (1 - \cos \vartheta)[J_3 \dot{\psi} + (J_3 - J(1 + \cos \vartheta))\dot{\varphi}].$$

Moltiplicandole abbiamo, dopo qualche passaggio,

$$\frac{p_\psi^2 - p_\vartheta^2}{\sin^2 \vartheta} = J_3^2 \dot{\psi}^2 + 2J_3(J_3 - J) \cos \vartheta \dot{\psi} \dot{\varphi} + ((J_3 - J)^2 \cos^2 \vartheta - J^2) \dot{\varphi}^2.$$

Dalla prima legge di conservazione abbiamo

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{J_3} - \dot{\varphi} \cos \vartheta$$

e dall'espressione (7.14) si trae

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{J_3} - \frac{x(a - bx)}{1 - x^2} = b \frac{J}{J_3} - \frac{x(a - bx)}{1 - x^2} := g(x).$$

È possibile dire qualcosa sul segno dell'espressione a secondo membro? Se deriviamo rispetto ad x gli eventuali punti di massimo o minimo verificano l'equazione

$$ax^2 - 2bx + a = 0$$

per cui delle eventuali due soluzioni, una senz'altro cade nell'intervallo $] - 1, 1[$ e l'altra fuori (il loro prodotto è 1). Le soluzioni esistono se $b^2 \geq a^2$, ossia se $p_\psi^2 \geq p_\vartheta^2$. In questo caso, sostituendo la minore x^* delle due, dopo alcuni calcoli risulta

$$g(x^*) = \frac{b}{2J_3}(2J - J_3) + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}$$

che è sempre positivo in quanto $J_3 \leq 2J$ per la proposizione sul "triangolo d'inerzia" (7.7). Siccome si vede senza difficoltà che x^* è un minimo, si ha in questo caso $\dot{\psi} > 0$.

Nel sottocaso in cui le radici sono coincidenti e pari a \bar{x} , il moto si riduce ad una precessione regolare: ϑ_1 coincide con ϑ_2 e $\dot{\varphi}$ è costante pari a

$$\bar{\varphi}_1 = J_3 \frac{a - b\bar{x}}{1 - \bar{x}^2} \quad (29).$$

Veniamo al caso in cui $a = \pm b$. Stavolta avremo

$$f(x) = (c - dx)(1 - x^2) - a^2(1 - x)^2 = (1 - x)((c - dx)(1 + x) - a^2(1 - x)).$$

Siccome una soluzione è pari a $x = 1$, l'analisi non è possibile a questo livello e va condotta ripartendo dalle leggi di conservazione. Osserviamo che $a = \pm b$ significa $p_\vartheta^2 = p_\psi^2$.

(29) Questo si verifica, analogamente al pendolo sferico, quando sussiste una ben precisa relazione fra p_ϑ, p_ψ ed E . Per trovarla, occorre derivare la relazione $f'(x) = 0$, che risulta di secondo grado in x , trovare le radici x_1, x_2 e imporre che $f(x_1) = 0$ o $f(x_2) = 0$, a seconda che la radice compresa fra -1 e 1 sia x_1 o x_2 . Lasciamo questo compito a qualche computer.