

Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 12 luglio 2019 a cura di Sara Mastaglio

1) Innanzitutto osserviamo che i parametri lagrangiani sono tali che

$$\vartheta := Q\widehat{O}x^+ \in [0; 2\pi) \quad \text{e} \quad \xi := \overline{EO} \in \left[-\frac{\ell}{2}; \frac{\ell}{2}\right].$$

Denotiamo con G il baricentro della lamina quadrata e calcoliamo le sue coordinate:

$$(G - O) = \left(\xi \cos \vartheta - \frac{\ell}{2} \sin \vartheta\right) \mathbf{e}_x - \left(\xi \sin \vartheta + \frac{\ell}{2} \cos \vartheta\right) \mathbf{e}_y;$$

inoltre

$$(E - O) = \xi \cos \vartheta \mathbf{e}_x - \xi \sin \vartheta \mathbf{e}_y.$$

1. Osservando che il baricentro dell'asta coincide con l'origine, il potenziale risulta

$$U = -mgy_G - \frac{k}{2}|E - O|^2 = mg\xi \sin \vartheta + \frac{\ell}{2}mgl \cos \vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + c.$$

Le posizioni di equilibrio sono quindi date dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi} = mg \sin \vartheta - k\xi = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = mg\xi \cos \vartheta - \frac{1}{2}mgl \sin \vartheta = 0 \end{cases}$$

che fornisce:

$$P_1(0; 0), \quad P_2(0; \pi), \quad P_3\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{4\lambda^2 - 1}; \arccos\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\right), \quad P_4\left(-\frac{\ell}{2}\sqrt{4\lambda^2 - 1}; 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\right);$$

affinché esista la ϑ di P_3 e P_4 deve valere la condizione $\lambda > \frac{1}{2}$; per quanto riguarda la ξ , che deve essere compresa tra $-\ell/2$ e $\ell/2$, abbiamo invece la condizione $0 < \lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi complessivamente

P_3 e P_4 sono posizioni di equilibrio se $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Per valutare la stabilità delle posizioni di equilibrio determiniamo l'hessiano:

$$\mathcal{H}(\xi, \vartheta) = \begin{bmatrix} -k & mg \cos \vartheta \\ mg \cos \vartheta & -mg\xi \sin \vartheta - \frac{1}{2}mgl \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

e lo calcoliamo nelle posizioni di equilibrio trovate.

L'hessiano calcolato in P_1 è

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & mg \\ mg & -\frac{1}{2}mg\ell \end{bmatrix};$$

la traccia è evidentemente negativa, il determinante invece risulta

$$\det \mathcal{H}(P_1) = \frac{1}{2}mgk\ell - m^2g^2,$$

quindi è positivo se $\lambda < \frac{1}{2}$ e in questo caso P_1 risulta una posizione di equilibrio stabile.

L'hessiano calcolato in P_2 è

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k & -mg \\ -mg & \frac{1}{2}mg\ell \end{bmatrix};$$

il determinante risulta

$$\det \mathcal{H}(P_2) = -\frac{1}{2}mgk\ell - m^2g^2,$$

quindi sempre negativo, e P_2 risulta una posizione di equilibrio instabile.

L'hessiano calcolato in P_3 , dopo qualche conto, è

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} -k & \frac{k\ell}{2} \\ \frac{k\ell}{2} & -\frac{1}{2}mg\ell\sqrt{4\lambda^2 - 1} - \frac{1}{4}k\ell^2 \end{bmatrix};$$

la traccia è evidentemente negativa, il determinante risulta

$$\det \mathcal{H}(P_3) = \frac{1}{2}mgk\ell\sqrt{4\lambda^2 - 1},$$

quindi sempre positivo, e P_3 risulta una posizione di equilibrio stabile.

L'hessiano calcolato in P_4 , dopo qualche conto, è

$$\mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} -k & \frac{k\ell}{2} \\ \frac{k\ell}{2} & \frac{1}{2}mg\ell\sqrt{4\lambda^2 - 1} - \frac{1}{4}k\ell^2 \end{bmatrix};$$

il determinante risulta

$$\det \mathcal{H}(P_4) = -\frac{1}{2}mgk\ell\sqrt{4\lambda^2 - 1},$$

quindi sempre negativo, e P_4 risulta una posizione di equilibrio instabile.

3. Abbiamo una posizione di confine quando $B \equiv Q$, cioè quando $\xi = \frac{\ell}{2}$, e quindi cerchiamo una

posizione del tipo $\bar{P}_1 \left(\frac{\ell}{2}; \bar{\vartheta} \right)$ con $w_\xi \leq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$.

Dalla disuguaglianza

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|_{\bar{P}_1} w_\xi + \left. \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right|_{\bar{P}_1} w_\vartheta \leq 0$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} mg \sin \bar{\vartheta} - \frac{k\ell}{2} \geq 0 \\ \frac{1}{2}mgl \cos \bar{\vartheta} - \frac{1}{2}mgl \sin \bar{\vartheta} = 0; \end{cases}$$

dalla seconda equazione troviamo $\bar{\vartheta}_1 = \frac{\pi}{4}$, che verifica la prima disequazione se $\lambda \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, e $\bar{\vartheta}_2 = \frac{5}{4}\pi$ che non verifica la prima disequazione per nessun valore di λ .

Abbiamo quindi trovato la posizione di equilibrio di confine $\bar{P}_1 \left(\frac{\ell}{2}; \frac{\pi}{4} \right)$ se $\lambda \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Abbiamo un'altra posizione di confine quando $A \equiv P$, cioè quando $\xi = -\frac{\ell}{2}$, e quindi cerchiamo una posizione del tipo $\bar{P}_2 \left(-\frac{\ell}{2}; \bar{\vartheta} \right)$ con $w_\xi \geq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$.

Dalla disuguaglianza

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|_{\bar{P}_2} w_\xi + \left. \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right|_{\bar{P}_2} w_\vartheta \leq 0$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} mg \sin \bar{\vartheta} + \frac{k\ell}{2} \leq 0 \\ -\frac{1}{2}mgl \cos \bar{\vartheta} - \frac{1}{2}mgl \sin \bar{\vartheta} = 0; \end{cases}$$

dalla seconda equazione troviamo $\bar{\vartheta}_3 = \frac{3}{4}\pi$, che non verifica la prima disequazione per nessun valore di λ , e $\bar{\vartheta}_4 = \frac{7}{4}\pi$ che verifica la prima disequazione se $\lambda \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Abbiamo quindi trovato la posizione di equilibrio di confine $\bar{P}_2 \left(-\frac{\ell}{2}; \frac{7}{4}\pi \right)$ se $\lambda \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Calcoliamo l'energia cinetica:

$$K = K_{PQ} + K_{quad},$$

data dalla somma dell'energia cinetica dell'asta e di quella del quadrato. L'asta ha come punto fisso l'origine e quindi, essendo $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta} \mathbf{e}_z$, la sua energia cinetica è

$$K_{PQ} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{m\ell^2}{6} \dot{\vartheta}^2.$$

Per l'energia cinetica della lamina quadrata usiamo invece la formula completa

$$K_{quad} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_G \boldsymbol{\omega}.$$

Calcoliamo la velocità del baricentro

$$\mathbf{v}_G = \left(\dot{\xi} \cos \vartheta - \xi \dot{\vartheta} \sin \vartheta - \frac{\ell}{2} \dot{\vartheta} \cos \vartheta \right) \mathbf{e}_x + \left(-\dot{\xi} \sin \vartheta - \xi \dot{\vartheta} \cos \vartheta + \frac{\ell}{2} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \right) \mathbf{e}_y$$

e quindi il suo modulo al quadrato sarà

$$v_G^2 = \dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{\ell^2}{4} \dot{\vartheta}^2 - \ell \dot{\xi} \dot{\vartheta}.$$

Inoltre, ricordando che nel caso piano ci basta $J_G^{33} = \frac{m\ell^2}{6}$ nel caso della lamina quadrata e tenendo conto che la velocità angolare coincide con quella calcolata precedentemente, possiamo scrivere l'energia cinetica:

$$K_{quad} = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m \xi^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{5}{24} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} m \ell \dot{\xi} \dot{\vartheta}.$$

L'energia cinetica totale risulta quindi

$$K = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{9}{24} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m \xi^2 \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} m \ell \dot{\xi} \dot{\vartheta}$$

e la lagrangiana, data da $K + U$, è

$$\mathcal{L} = mg\xi \sin \vartheta + \frac{\ell}{2} mgl \cos \vartheta - \frac{k}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{9}{24} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m \xi^2 \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} m \ell \dot{\xi} \dot{\vartheta}.$$

2) Indichiamo con G_1, G_2, G_3 i baricentri rispettivamente delle aste AB, BC, BD . Tenendo conto che le aste sono omogenee e quindi il loro baricentro coincide con il punto medio, otteniamo:

$$x_{G_1} = \sqrt{2}\ell \sin \alpha + \ell, \quad x_{G_2} \equiv x_{G_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell \sin \alpha;$$

l'ascissa del baricentro complessivo è quindi

$$x_G = \frac{2m(\sqrt{2}\ell \sin \alpha + \ell) + m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \ell \sin \alpha + m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \ell \sin \alpha}{4m} = \frac{5}{4} \ell$$

da cui otteniamo $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

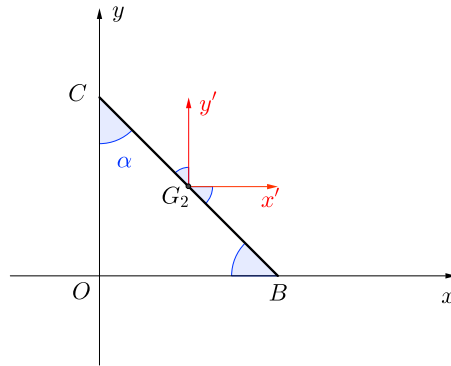
Procediamo ora con il calcolo della matrice d'inerzia. Osserviamo che i piani xy e xz sono di simmetria materiale e quindi $J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0$. Calcoliamo i momenti d'inerzia 11 e 22 ricordando di spostarli nel sistema di riferimento centrato in O con Huygens-Steiner.

- Asta AB :

$$* J_O^{11} = 0$$

$$* J_O^{22} = \frac{2}{3}m\ell^2 + 2m(2\ell)^2 = \frac{14}{3}m\ell^2.$$

- Asta BC : come indicato in figura dobbiamo spostarci dal sistema di riferimento centrato in G_2 a quello centrato in O



$$* J_{G_2}^{11} = J_{G_2}^{22} = \frac{m(\sqrt{2}\ell)^2}{12} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} = \frac{m\ell^2}{12}$$

$$* J_O^{11} = J_O^{22} = \frac{m\ell^2}{12} + m \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{m\ell^2}{3}.$$

- Asta BD : si procede in modo analogo all'asta BC e quindi

$$* J_O^{11} = J_O^{22} = \frac{m\ell^2}{3}.$$

I momenti d'inerzia della figura completa sono quindi:

$$J_O^{11} = 0 + \frac{m\ell^2}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}m\ell^2, \quad J_O^{22} = \frac{14}{3}m\ell^2 + \frac{m\ell^2}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3}m\ell^2,$$

$$J_O^{33} = J_O^{11} + J_O^{22} = \frac{2}{3}m\ell^2 + \frac{16}{3}m\ell^2 = 6m\ell^2,$$

e la matrice d'inerzia risulta

$$J_O = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6m\ell^2 \end{bmatrix}.$$