Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione straordinaria - Primo appello - 14/1/2000

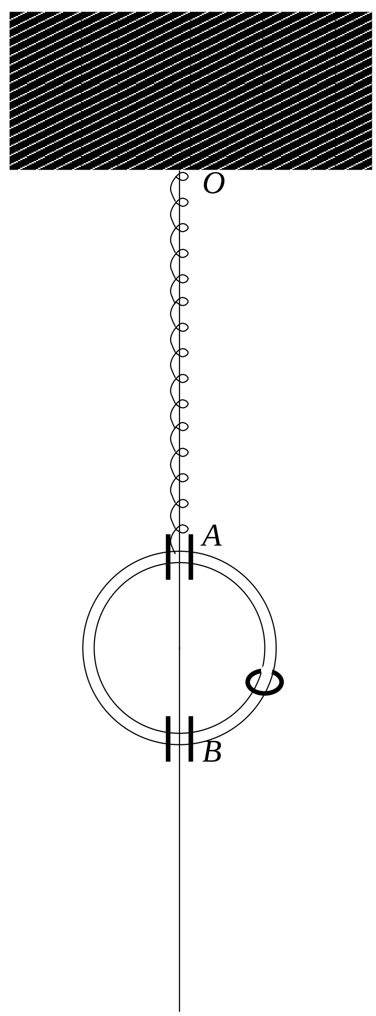
Si consideri una guida circolare di massa M e diametro $\overline{AB} = 2R$, su cui è vincolato a scorrere un anellino di dimensioni trascurabili e massa m. Tale guida si muove rigidamente in un piano lungo una guida verticale.

Tra il punto O e il punto A della guida circolare è applicata una forza elastica di costante $k > 0$. Si chiede di:

(a) trovare la lagrangiana del sistema;

(b) trovare le equazioni del moto e le posizioni di equilibrio;

(c) studiare le piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione straordinaria - Secondo appello - 28/1/2000

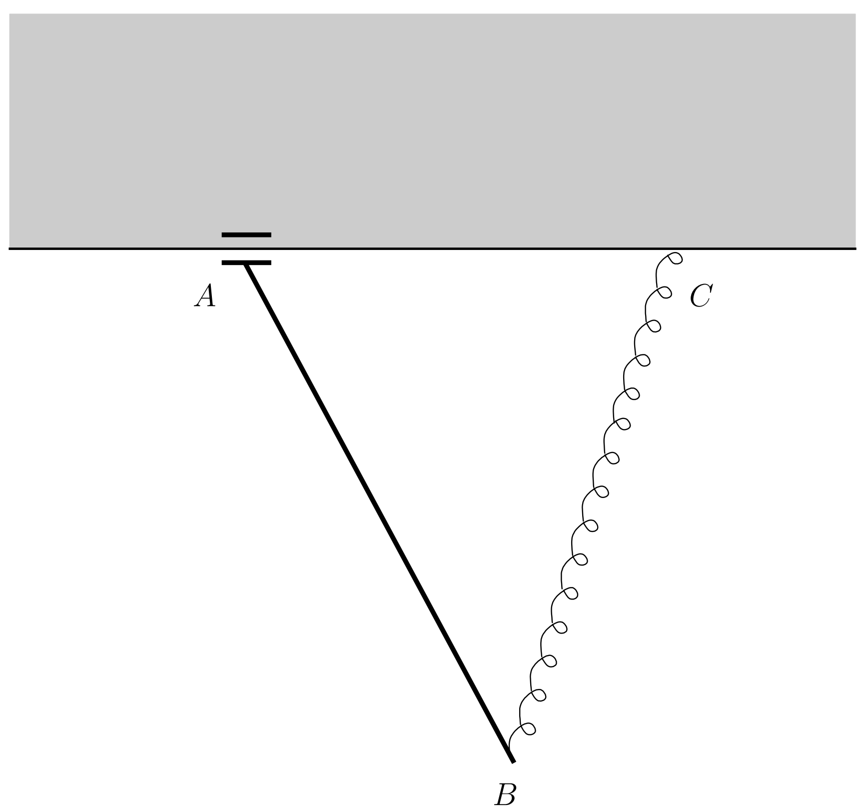
Si consideri un'asta di massa m e lunghezza $\overline{AB} = \ell$, vincolata ad una parete orizzontale in modo che possa scorrere ed oscillare in un piano verticale. Tra l'estremità libera B dell'asta e il punto fisso C sulla parete è applicata una forza elastica di costante $k > 0$.

Si chiede di:

(a) trovare la lagrangiana del sistema;

(b) trovare le equazioni del moto e le posizioni di equilibrio;

(c) trovare l'ampiezza delle pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione straordinaria - Terzo appello - 11/2/2000

In un piano verticale si consideri un disco omogeneo di raggio R e massa M che rotoli senza strisciare lungo una guida orizzontale. Tra il centro del disco e l'asse y è applicata una forza elastica di direzione orizzontale e costante elastica $k > 0$.

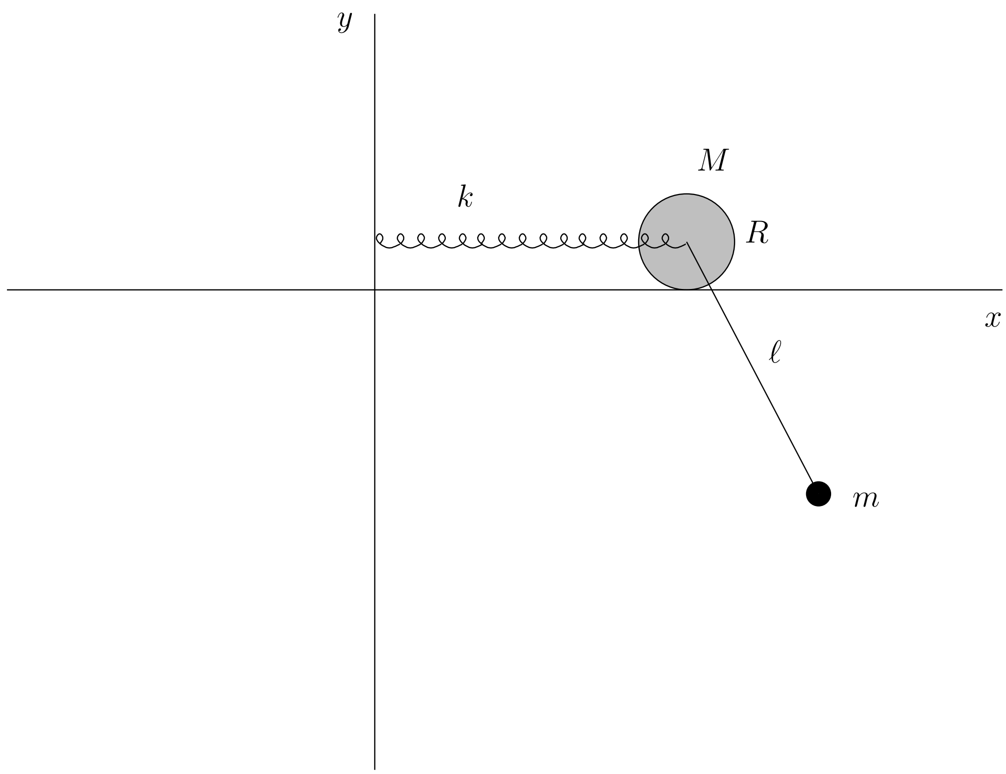
Un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile è incernierata per un'estremità al centro del disco; all'estremità libera dell'asta è attaccato un corpo di massa m e dimensioni trascurabili. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Si chiede:

(a) le posizioni di equilibrio del sistema e lo studio della loro stabilità;

(b) la lagrangiana del sistema;

(c) le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



Meccanica Razionale - Esercizio

Seconda prova - 27/4/2000

Versione A

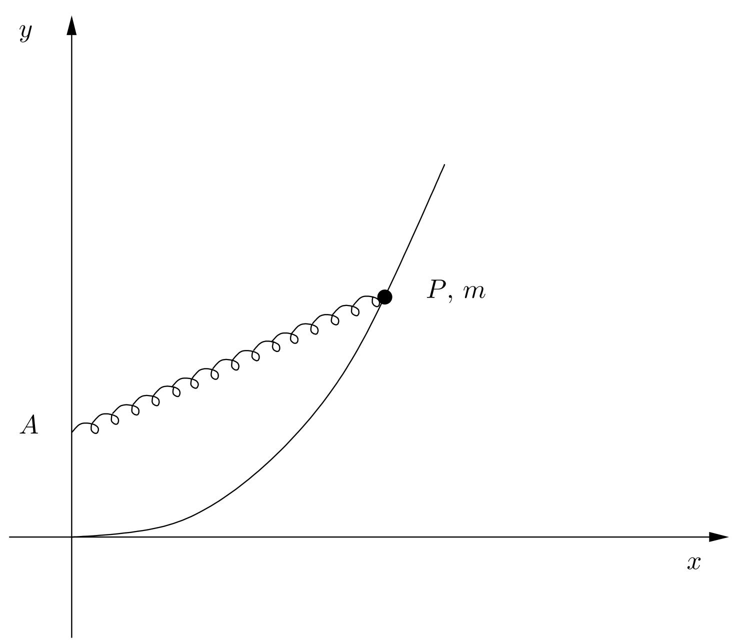
Si consideri un sistema di riferimento cartesiano Oxy in un piano verticale, con l'asse y orientato verso l'alto. Nel semipiano delle ascisse positive, una guida liscia segue il profilo della parabola di equazione $y = ax^2$, $a > 0$. Un punto materiale P di massa m può scorrere sulla guida ed è sottoposto, oltre alla forza peso, ad una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto $A = \left(0, \frac{1}{a}\right)$. Si chiede di determinare:

(1) le posizioni di equilibrio di P;

(2) la reazione vincolare nelle posizioni di equilibrio;

(3) l'equazione differenziale del moto di P;

(4) le posizioni di equilibrio relativo di P, nel caso in cui la guida ruoti con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse delle ordinate.



Meccanica Razionale - Esercizio

Seconda prova - 27/4/2000

Versione B

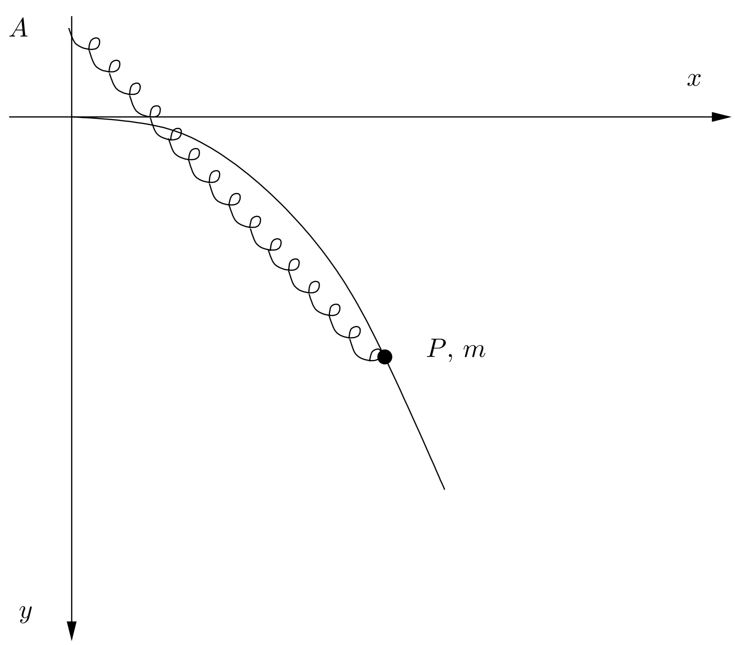
Si consideri un sistema di riferimento cartesiano Oxy in un piano verticale, con l'asse y orientato verso il basso. Nel semipiano delle ascisse positive, una guida liscia segue il profilo della parabola di equazione $y = ax^2$, $a > 0$. Un punto materiale P di massa m può scorrere sulla guida ed è sottoposto, oltre alla forza peso, ad una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto $A = \left(0, -\frac{1}{a}\right)$. Si chiede di determinare:

(1) le posizioni di equilibrio di P;

(2) la reazione vincolare nelle posizioni di equilibrio;

(3) l'equazione differenziale del moto di P;

(4) le posizioni di equilibrio relativo di P, nel caso in cui la guida ruoti con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse delle ordinate.

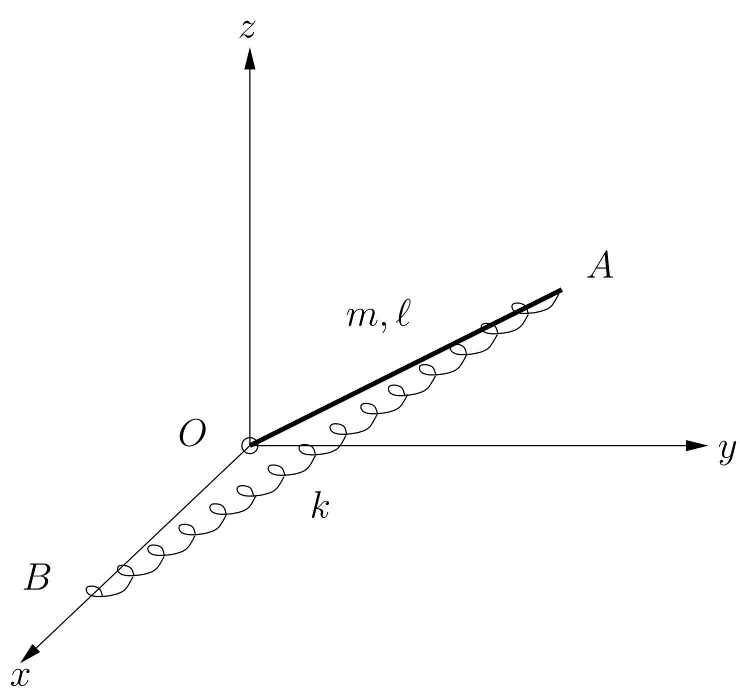


Meccanica Razionale - Esercizio

Terza prova - 1/6/2000

Un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ ha un estremo incernierato in modo liscio nell'origine di un riferimento cartesiano ortogonale, posto in modo che l'asse z sia verticale ascendente. L'asta è soggetta al proprio peso; inoltre, tra l'estremo libero dell'asta e il punto $B = (\ell, 0, 0)$ è applicata una forza elastica di costante $k = \dfrac{\alpha m g}{\ell}$, con $\alpha > 0$. Si indichi con θ l'angolo formato dall'asta con la parte positiva dell'asse z, e con φ l'angolo formato dalla proiezione dell'asta sul piano xy con la parte positiva dell'asse x. Supponendo $\theta \in]0, \pi[$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$, si chiede di determinare le posizioni di equilibrio dell'asta e di discuterne la stabilità.

Si chiede inoltre di determinare le equazioni differenziali del moto dell'asta.



Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione estiva - Primo appello - 13/6/2000

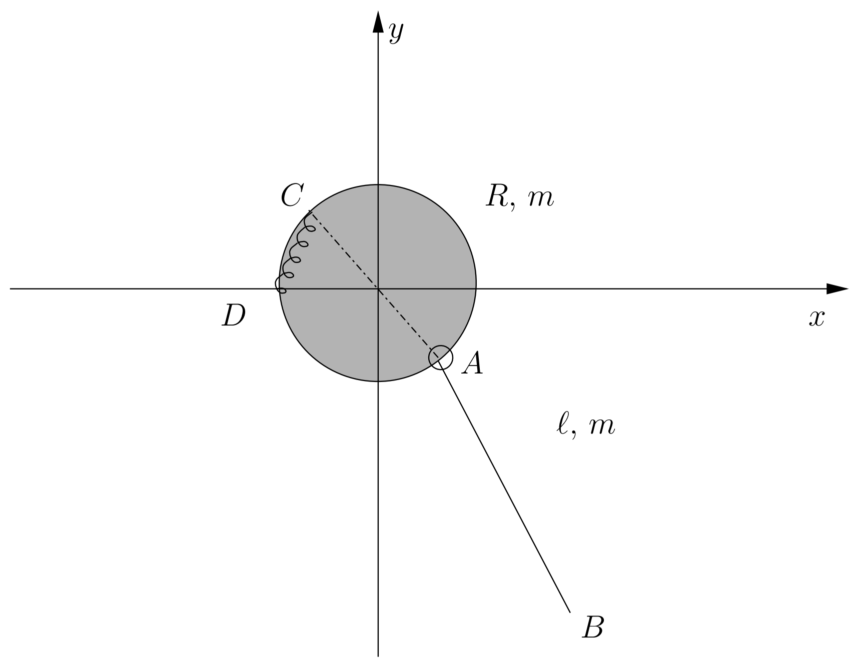
In un piano verticale, un disco omogeneo di raggio R e massa m è vincolato a ruotare attorno al proprio centro, il quale è fissato nell'origine di un sistema di assi cartesiani. Tra un punto C sul bordo del disco e il punto $D(-R, 0)$ intercorre una forza elastica di coefficiente $k > 0$. Al punto del disco diametralmente opposto a C, è incernierato l'estremo di un'asta omogenea AB, libera di ruotare intorno ad A. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

(a) le equazioni differenziali del moto;

(b) le posizioni di equilibrio del sistema e lo studio della loro stabilità;

(c) le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione estiva - Secondo appello - 27/6/2000

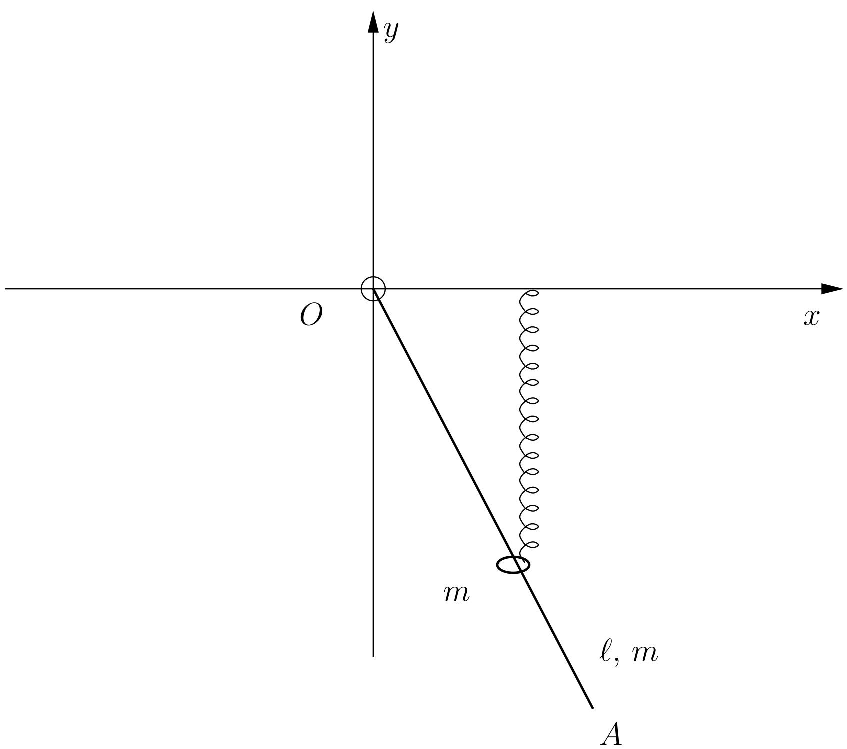
In un piano verticale, un'asta omogenea OB di lunghezza ℓ e massa m è vincolata a ruotare attorno al proprio estremo O, il quale è fissato nell'origine di un sistema di assi cartesiani. Sull'asta scorre un anellino di massa m e dimensioni trascurabili, il quale è soggetto ad una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto B, che si muove sull'asse x restando sulla verticale dell'anellino. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

(a) le equazioni differenziali del moto;

(b) le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema e lo studio della stabilità di quelle ordinarie;

(c) le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione estiva - Terzo appello - 11/7/2000

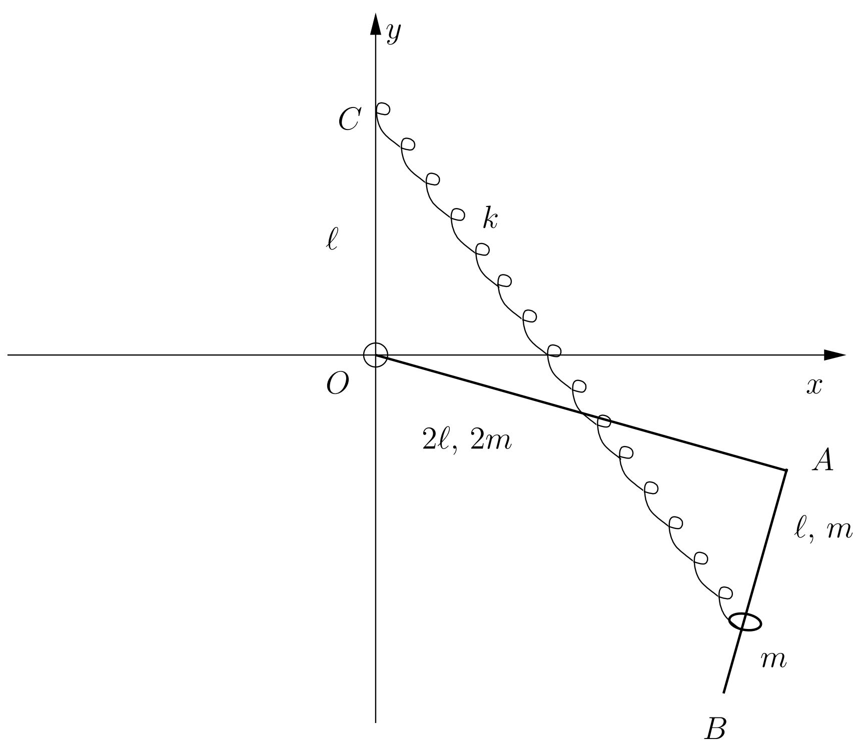
In un piano verticale, un'asta omogenea OA di lunghezza 2ℓ e massa $2m$ è vincolata a ruotare attorno al proprio estremo O, il quale è fissato nell'origine di un sistema di assi cartesiani. All'estremo A è saldato l'estremo di un'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza ℓ, in modo che le due aste risultino tra loro perpendicolari. Sull'asta AB scorre un anellino di massa m e dimensioni trascurabili, il quale è soggetto ad una forza elastica di coefficiente $k = \dfrac{3mg}{\ell}$ e polo il punto C di coordinate $(0, \ell)$. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

(a) le equazioni differenziali del moto;

(b) le posizioni di equilibrio **ordinarie** del sistema e lo studio della loro stabilità;

(c) le reazioni vincolari statiche in una posizione di equilibrio.



Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione autunnale - Primo appello - 12/9/2000

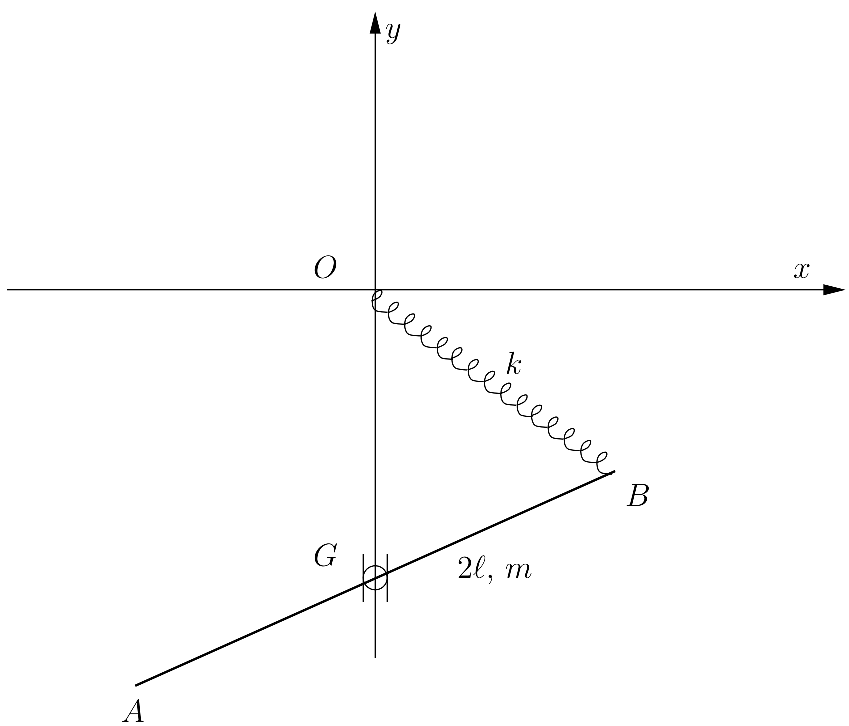
In un piano verticale è fissato un sistema di riferimento Oxy. Un'asta omogenea AB di lunghezza 2ℓ e massa m è vincolata a ruotare attorno al proprio baricentro G, il quale si può muovere lungo una guida verticale coincidente con l'asse y. Sull'estremo B dell'asta agisce una forza elastica con polo nell'origine O degli assi cartesiani e coefficiente di elasticità $k > 0$. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede:

(a) la lagrangiana del sistema;

(b) le posizioni di equilibrio del sistema e lo studio della loro stabilità;

(c) lo studio delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



Prova scritta di Meccanica Razionale
Secondo appello - 5/4/2001

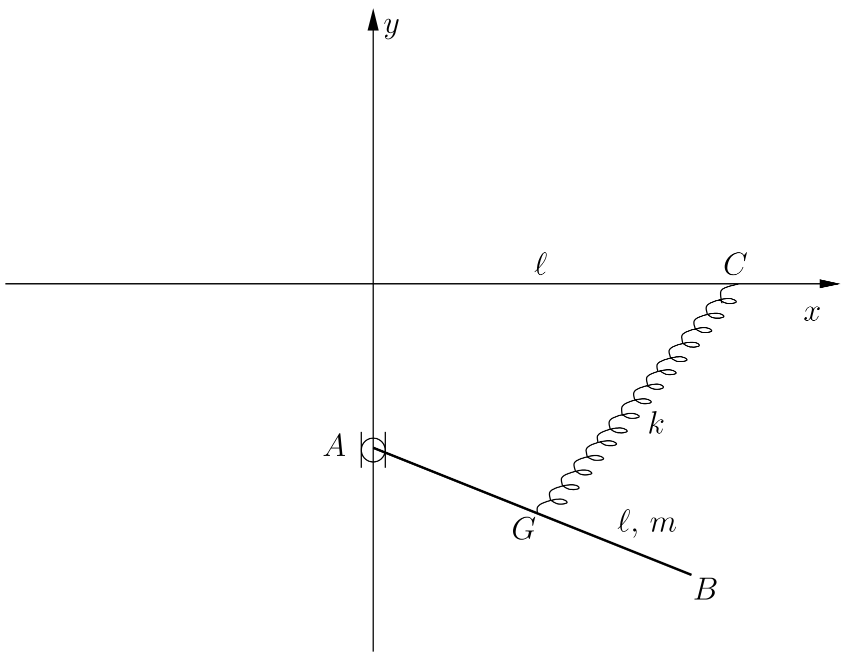
In un piano verticale è fissato un sistema di riferimento Oxy. Un'asta omogenea AB di lunghezza ℓ e massa m è vincolata con vincolo liscio a ruotare attorno al proprio estremo A, il quale si può muovere senza attrito lungo una guida verticale coincidente con l'asse y. Sul baricentro G dell'asta agisce una forza elastica di coefficiente di elasticità $k > 0$ con polo nel punto C di coordinate $(\ell, 0)$. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Si chiede di determinare:

(a) le posizioni di equilibrio del sistema e lo studio della loro stabilità al variare di k;

(b) la lagrangiana del sistema;

(c) le piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione estiva - Primo appello - 19 giugno 2001

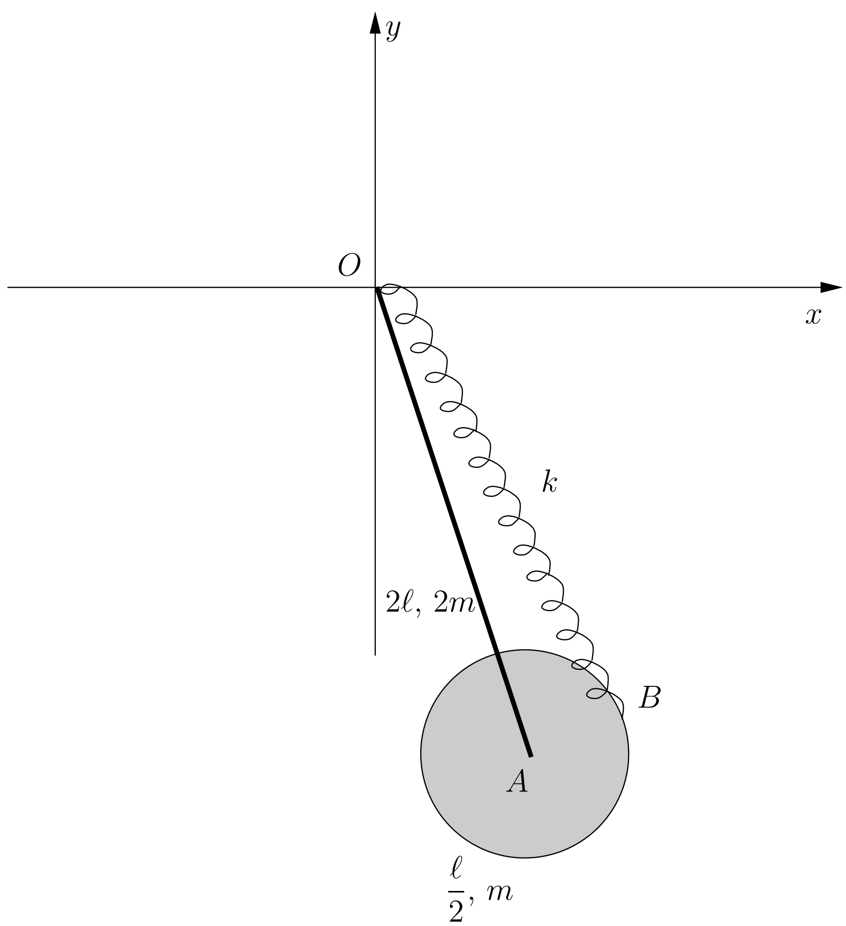
In un piano verticale, un'asta omogenea OA di massa $2m$ e lunghezza 2ℓ è vincolata a ruotare attorno al proprio estremo O, fissato nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali. Un disco omogeneo di raggio $\frac{\ell}{2}$ e massa m è vincolato a ruotare attorno al proprio centro, il quale è fissato nell'estremo A dell'asta. Tra un punto fissato B sul bordo del disco e il punto O intercorre una forza elastica di coefficiente $k > 0$. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

(a) le posizioni di equilibrio del sistema e lo studio della loro stabilità;

(b) le equazioni differenziali del moto;

(c) le reazioni vincolari statiche nella posizione di equilibrio stabile.



Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione estiva - Secondo appello - 10 luglio 2001

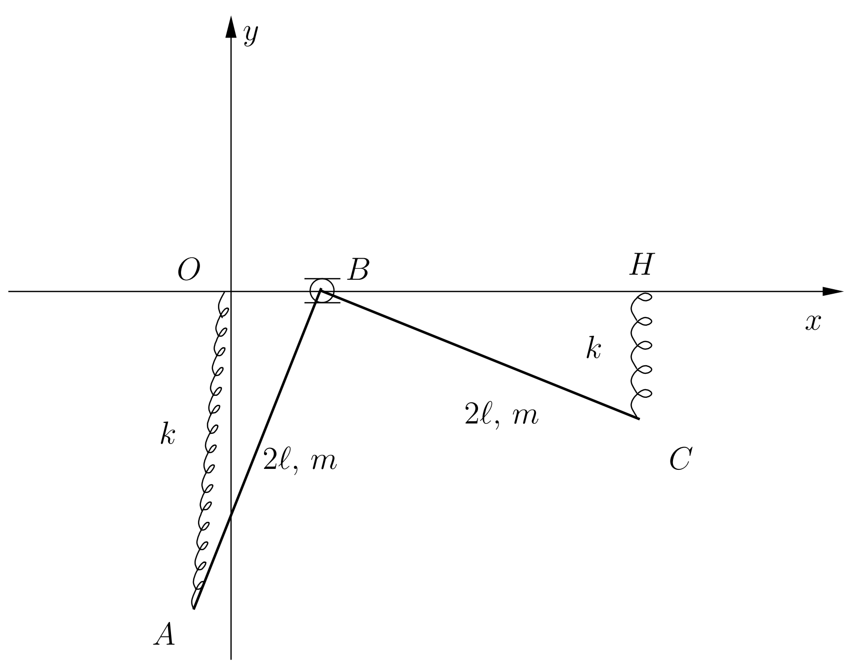
In un piano verticale, un corpo rigido è formato da due aste AB e BC, entrambe di massa m e lunghezza 2ℓ, saldate nel loro estremo comune B in modo da formare un angolo retto. Tale estremo B è vincolato a scorrere su una retta orizzontale e il corpo rigido può ruotare attorno ad esso. Tra un punto fissato O e l'estremo A intercorre una forza elastica di costante $k > 0$. Inoltre, sull'estremo C agisce un'altra forza elastica di costante $k > 0$ e polo il punto H che si muove sulla retta orizzontale restando sulla verticale di C. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

(a) le posizioni di equilibrio del sistema e lo studio della loro stabilità;

(b) le equazioni differenziali del moto;

(c) l'approssimazione lineare della lagrangiana e l'equazione delle pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



(a) Chiamo ξ l'ascissa di B e θ l'angolo $O\widehat{B}A$. Sia G il baricentro di AB e G' quello di BC. Allora $y_G = -\ell\sin\theta$ e $y_{G'} = -\ell\cos\theta$. Poi:

$$\begin{aligned}
&(A-O) = (A-B) + (B-O) = (-2\ell\cos\theta + \xi, -2\ell\sin\theta),\\
&(C-H) = (0, -2\ell\cos\theta).
\end{aligned}$$

Quindi il potenziale (a meno dei termini costanti) è:

$$\begin{aligned}
U(\xi,\theta) &= -mg(y_G + y_{G'}) - \frac{1}{2}k(|A-O|^2 + |C-H|^2) =\\
&= mg(\ell\sin\theta + \ell\cos\theta) - \frac{1}{2}k(\xi^2 - 4\xi\ell\cos\theta + 4\ell^2\cos^2\theta) =\\
&= mg(\ell\sin\theta + \ell\cos\theta) - \frac{1}{2}k(\xi - 2\ell\cos\theta)^2.
\end{aligned}$$

Cerchiamo i punti critici:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -k(\xi - 2\ell\cos\theta) = 0\\[2ex]
\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = mg\ell\cos\theta - mg\ell\sin\theta - k(\xi - 2\ell\cos\theta)2\ell\sin\theta\,;
\end{cases}$$

dall prima si ricava $\xi = 2\ell\cos\theta$, e dalla seconda $\cos\theta = \sin\theta$, da cui $\theta = \frac{\pi}{4}$ o $\theta = \frac{5}{4}\pi$. Quindi le posizioni di equilibrio sono $P_1(\ell\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ e $P_2(-\ell\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi)$. La matrice hessiana è

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k & -2k\ell\sin\theta\\[2ex] -2k\ell\sin\theta & -mg\ell\sin\theta - mg\ell\cos\theta - 4k\ell^2\sin^2\theta - k(\xi - 2\ell\cos\theta)2\ell\sin\theta \end{bmatrix}$$

da cui

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & -k\ell\sqrt{2}\\ -k\ell\sqrt{2} & -mg\ell\sqrt{2} - 2k\ell^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k & k\ell\sqrt{2}\\ k\ell\sqrt{2} & mg\ell\sqrt{2} - 2k\ell^2 \end{bmatrix}.$$

La posizione P_1 è un massimo per il potenziale, quindi è stabile, mentre P_2 è una sella.

(b) Posso trovare l'energia cinetica considerando le velocità dei baricentri delle due aste e i termini di rotazione attorno ai baricentri (la velocità angolare sarà $\dot\theta$ per entrambe le aste, visto che sono saldate). Si ha

$$\begin{aligned}
|v_G|^2 &= \dot\theta^2\ell^2 + \dot\xi^2 + 2\ell\dot\xi\dot\theta\sin\theta,\\
|v_{G'}|^2 &= \dot\theta^2\ell^2 + \dot\xi^2 + 2\ell\dot\xi\dot\theta\cos\theta,\\
\mathcal{J}_{Gz} &= \mathcal{J}_{G'z} = \frac{1}{12}m4\ell^2 = \frac{1}{3}m\ell^2,
\end{aligned}$$

quindi

$$K(\xi,\theta,\dot\xi,\dot\theta) = \frac{4}{3}m\ell^2\dot\theta^2 + m\dot\xi^2 + m\ell\dot\xi\dot\theta(\sin\theta + \cos\theta)\,.$$

In definitiva la lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\xi, \theta, \dot{\xi}, \dot{\theta}) = \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\dot{\xi}^2 + m\ell\dot{\xi}\dot{\theta}(\sin\theta + \cos\theta) + mg(\ell\sin\theta + \ell\cos\theta) - \frac{1}{2}k(\xi - 2\ell\cos\theta)^2\,,$$

e dunque si possono ricavare le equazioni differenziali del moto.

(c) Bisogna calcolare la matrice dell'energia cinetica e l'hessiano del potenziale nella posizione di equilibrio stabile; risulta:

$$\widetilde{J} = \begin{bmatrix} m & \frac{1}{2}m\ell\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}m\ell\sqrt{2} & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k & -k\ell\sqrt{2} \\ -k\ell\sqrt{2} & -mg\ell\sqrt{2} - 2k\ell^2 \end{bmatrix},$$

e la lagrangiana approssimata si ottiene calcolando

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\xi} & \dot{\theta} \end{bmatrix} \widetilde{J} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \xi - \sqrt{2}\ell & \theta - \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \mathcal{H} \begin{bmatrix} \xi - \sqrt{2}\ell \\ \theta - \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}.$$

La frequenza delle pulsazioni si ottiene risolvendo l'equazione

$$\det\left[\omega^2\widetilde{J} + \mathcal{H}\right] = 0,$$

che fornisce

$$\frac{5}{6}m^2\ell^2\omega^4 - \left(m^2gl\sqrt{2} + \frac{4}{3}km\ell^2\right)\omega^2 + kmgl\sqrt{2} = 0,$$

da cui si possono ricavare le pulsazioni ω^2.

Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione autunnale - Primo appello - 18 settembre 2001

In un piano verticale, una guida circolare di raggio R e massa m è vincolata a ruotare in modo liscio attorno al proprio centro O, posto nell'origine di un sistema di assi cartesiani Oxy. Al suo interno è vincolato a muoversi con vincolo di puro rotolamento un disco di massa m e raggio $R/2$ è vincolato a restare a contatto con la guida mediante un vincolo di puro rotolamento. Tra il centro O' del disco e un punto fissato A della guida circolare è presente una forza elastica di coefficiente k. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Si chiede di determinare:

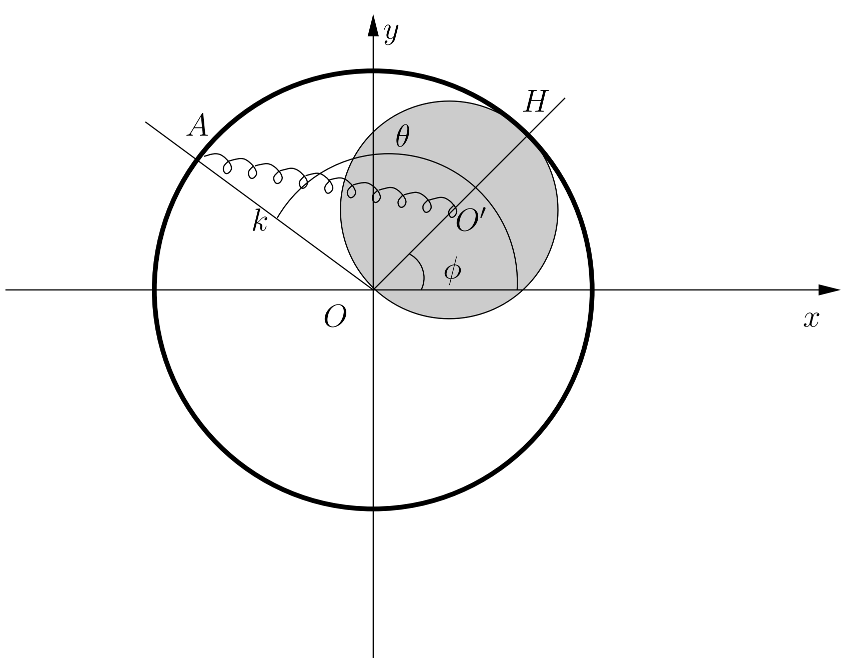
(a) le posizioni di equilibrio del sistema e lo studio della loro stabilità;

(b) la velocità angolare del disco;

(c) la lagrangiana del sistema;

(d) nel caso $m = 1, k = 1, g = 1,\ R = 1$, le equazioni del moto linearizzate attorno alla posizione di equilibrio stabile e l'ampiezza delle piccole oscillazioni.

Si indichi con ϕ l'angolo $x\widehat{O}H$ e con θ l'angolo $x\widehat{O}A$.



Tempo di risoluzione: 2 ore. È permessa la consultazione degli appunti del corso. Correzione e orali: giovedì 20 settembre alle ore 9,30.

Svolgimento del compito di Meccanica Razionale del 18 settembre 2001

Sia ϕ l'angolo $x\widehat{O}H$ e θ l'angolo $x\widehat{O}A$; si ha $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$, quindi non ci sono posizioni di confine.

1) Si ha

$$y_{O'} = \frac{R}{2}\sin\phi, \qquad |A - O'|^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} - R^2\cos(\theta - \phi),$$

quindi il potenziale si esprime come

$$\mathcal{U}(\theta, \phi) = -mg\frac{R}{2}\sin\phi + \frac{1}{2}kR^2\cos(\theta - \phi) + \text{cost.}$$

I punti stazionari si trovano risolvendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = -\dfrac{1}{2}kR^2\sin(\theta - \phi) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \phi} = -mg\dfrac{R}{2}\cos\phi + \dfrac{1}{2}kR^2\sin(\theta - \phi) = 0\,, \end{cases}$$

quindi $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi/2)$, $(3\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ o $(3\pi/2, 3\pi/2)$. La matrice hessiana è

$$\mathcal{H}(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -kR^2\cos(\theta - \phi) & kR^2\cos(\theta - \phi) \\ kR^2\cos(\theta - \phi) & mgR\sin\phi - kR^2\cos(\theta - \phi) \end{bmatrix},$$

da cui

$$\mathcal{H}(\pi/2, \pi/2) = -\frac{1}{2}mgR^3k \qquad \text{instabile,}$$

$$\mathcal{H}(3\pi/2, \pi/2) = \frac{1}{2}mgR^3k \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_{11} > 0 \qquad \text{instabile,}$$

$$\mathcal{H}(\pi/2, 3\pi/2) = -\frac{1}{2}mgR^3k \qquad \text{instabile,}$$

$$\mathcal{H}(3\pi/2, 3\pi/2) = \frac{1}{2}mgR^3k \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_{11} < 0 \qquad \text{stabile.}$$

2) La velocità angolare della guida circolare è $\dot\theta$, la velocità del centro O' del disco è $\frac{R}{2}\dot\phi\mathbf{t}$, dove $\mathbf{t}$ è il versore della rotazione di θ. Denotando con ω la velocità angolare del disco e imponendo il vincolo di puro rotolamento in H si ottiene

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v}_{O'} + \omega\mathbf{k} \wedge \frac{R}{2}\mathbf{r},$$

$$\mathbf{v}_H = R\dot\theta\mathbf{t},$$

da cui, tenendo conto che $\mathbf{k} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{t}$, si ottiene

$$\omega = 2\dot\theta - \dot\phi\,.$$

3) Per trovare la lagrangiana è sufficiente determinare l'energia cinetica del sistema. Si ha $K_{guida} = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2$. Inoltre, essendo $\frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\right)^2$ il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse per O' perpendicolare al piano, si ha

$$K_{disco} = \frac{1}{8}mR^2\dot\phi^2 + \frac{1}{16}mR^2(2\dot\theta - \dot\phi)^2 = \frac{1}{4}mR^2\dot\theta^2 + \frac{3}{16}mR^2\dot\phi^2 - \frac{1}{4}mR^2\dot\theta\dot\phi\,.$$

Quindi l'energia cinetica del sistema è

$$K = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{16}mR^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}\dot{\phi}\,,$$

da cui si esprime la lagrangiana

$$\mathcal{L}(\dot{\theta},\dot{\phi},\theta,\phi) = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{16}mR^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}\dot{\phi} - mg\frac{R}{2}\sin\phi + \frac{1}{2}kR^2\cos(\theta-\phi)\,.$$

4) L'unica posizione stabile si ha per $\theta = \phi = 3\pi/2$: ponendo le costanti uguali a 1, la matrice hessiana nella posizione di equilibrio stabile è

$$\mathsf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix},$$

quindi il potenziale linearizzato diventa

$$\mathsf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\theta - \frac{3}{2}\pi & \phi - \frac{3}{2}\pi\end{bmatrix}\mathsf{H}\begin{bmatrix}\theta - \frac{3}{2}\pi \\ \phi - \frac{3}{2}\pi\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \phi^2 + \theta\phi + \frac{3}{2}\pi\phi + \text{cost.}$$

Inoltre K non dipende dalla posizione, quindi la lagrangiana linearizzata è

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\dot{\theta},\dot{\phi},\theta,\phi) = \frac{3}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{3}{16}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{4}\dot{\theta}\dot{\phi} - \frac{1}{2}\theta^2 - \phi^2 + \theta\phi + \frac{3}{2}\pi\phi$$

da cui si ricavano le equazioni del moto approssimate:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{3}{2}\ddot{\theta} - \frac{1}{4}\ddot{\phi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{3}{8}\ddot{\phi} - \frac{1}{4}\ddot{\theta}$$
$$\frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial\theta} = -\theta + \phi \qquad \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial\phi} = -2\phi + \theta + \frac{3}{2}\pi\,,$$

quindi

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\ddot{\theta} - \frac{1}{4}\ddot{\phi} + \theta - \phi = 0 \\ \frac{3}{8}\ddot{\phi} - \frac{1}{4}\ddot{\theta} + 2\phi - \theta - \frac{3}{2}\pi = 0\,. \end{cases}$$

Per calcolare le pulsazioni delle piccole oscillazioni esprimiamo l'energia cinetica in forma matriciale:

$$\mathsf{K} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{\theta} & \dot{\phi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta} \\ \dot{\phi}\end{bmatrix}$$

da cui

$$\omega_{1,2}^2 = \det(\omega^2\mathsf{K} + \mathsf{H}) = \det\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\omega^2 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\omega^2 + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\omega^2 + \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\omega^2 - 1\end{bmatrix}$$

e si ricavano le ampiezze delle pulsazioni: $\omega^2 = \dfrac{23 \pm \sqrt{401}}{16}$. □

Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione autunnale - Secondo appello - 2 ottobre 2001

Sia Oxy un riferimento cartesiano ortogonale in un piano verticale, con l'asse y orientato verso l'alto. Una guida circolare di raggio R e massa m è vincolata a ruotare senza strisciare lungo l'asse y. Si denoti con H l'istantaneo punto di contatto tra la guida e l'asse. Il centro G della guida è sottoposto ad una forza elastica di coefficiente k e polo l'origine O. Inoltre, lungo la guida circolare scorre in modo liscio un punto materiale P di massa M. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

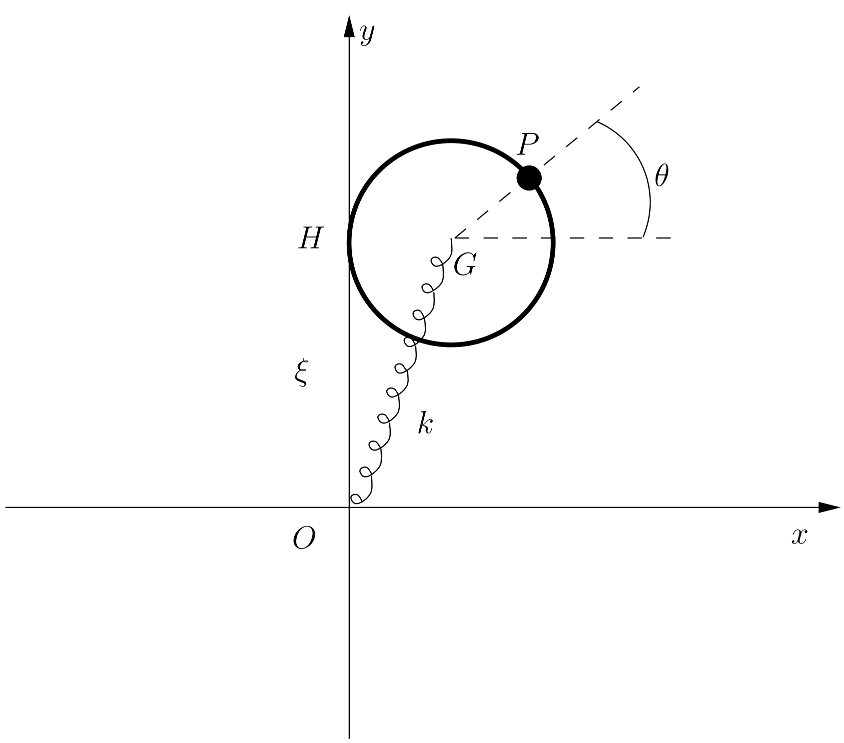
Si chiede di:

(a) determinare le posizioni di equilibrio del sistema e lo studio della loro stabilità;

(b) determinare la velocità angolare della guida e la lagrangiana del sistema;

(c) ponendo $k = 1$, $R = 1$, $M = m = 1$ e $g = 1$, determinare e <u>risolvere</u> le equazioni del moto linearizzate attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Si indichi con ξ l'ascissa di H e con θ l'angolo che descrive la posizione di P rispetto all'orizzontale.



Tempo di risoluzione: 2 ore. Correzione e orali: venerdì 5 ottobre alle ore 10,30.

Svolgimento del compito di Meccanica Razionale del 2 ottobre 2001

Si ha $\xi \in \mathbb{R}$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, quindi non ci sono posizioni di confine.

(a) Calcoliamo il potenziale: si ha

$$y_G = \xi \qquad y_P = \xi + R\sin\theta \qquad |G-O|^2 = R^2 + \xi^2$$

quindi

$$\mathcal{U}(\xi,\theta) = -mg\xi - Mg(\xi + R\sin\theta) - \frac{1}{2}k\xi^2 + \text{cost.}$$

I punti stazionari si trovano risolvendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = -mg - Mg - k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = -MgR\cos\theta = 0, \end{cases}$$

da cui si trovano due posizioni di equilibrio: $C_1\left(-\frac{m+M}{k}g, \frac{\pi}{2}\right)$ e $C_2\left(-\frac{m+M}{k}g, \frac{3}{2}\pi\right)$. La matrice hessiana è

$$\mathsf{H}(\xi,\theta) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & MgR\sin\theta \end{bmatrix},$$

da cui si ha immediatamente che C_1 è instabile e C_2 è stabile.

(b) La velocità angolare della guida circolare si trova imponendo il vincolo di puro rotolamento in H: poiché la velocità di H come punto dell'asse y è nulla, si deve avere

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{v}_H = \boldsymbol{v}_C + \omega\,\boldsymbol{k} \wedge (H-G) = \dot{\xi}\,\boldsymbol{j} + \omega\,\boldsymbol{k} \wedge (-R\,\boldsymbol{i}) = (\dot{\xi} - \omega R)\,\boldsymbol{j}$$

da cui $\omega = \frac{\dot{\xi}}{R}$.

Per trovare la lagrangiana non resta che determinare l'energia cinetica del sistema. Si ha

$$(P-O) = (P-G) + (G-O) = R\cos\theta\,\boldsymbol{i} + R\sin\theta\,\boldsymbol{j} + R\,\boldsymbol{i} + \xi\,\boldsymbol{j} = R(1+\cos\theta)\,\boldsymbol{i} + (\xi + R\sin\theta)\,\boldsymbol{j}\ ,$$

quindi la velocità di P è

$$\boldsymbol{v}_P = -R\dot{\theta}\sin\theta\,\boldsymbol{i} + (\dot{\xi} + R\dot{\theta}\cos\theta)\,\boldsymbol{j}\ , \qquad v_P^2 = R^2\dot{\theta}^2 + \dot{\xi}^2 + 2R\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta\,,$$

Inoltre, essendo $v_c^2 = \dot{\xi}^2$ e $I_{C_z} = mR^2$, si trova

$$K = \frac{1}{2}M(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{\xi}^2 + 2R\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{\dot{\xi}^2}{R^2} = \left(m + \frac{1}{2}M\right)\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + MR\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta\,.$$

Quindi la lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L}(\dot{\xi},\dot{\theta},\xi,\theta) = \left(m + \frac{1}{2}M\right)\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + MR\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta - mg\xi - Mg(\xi + R\sin\theta) - \frac{1}{2}k\xi^2\,.$$

(c) Ponendo le costanti uguali a 1, la posizione stabile si scrive $C_2(-2, \frac{3}{2}\pi)$ e la matrice hessiana

$$\mathsf{H} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

quindi il potenziale linearizzato diventa

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \xi + 2 & \theta - \frac{3}{2}\pi \end{bmatrix} \mathsf{H} \begin{bmatrix} \xi + 2 \\ \theta - \frac{3}{2}\pi \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\theta^2 - 2\xi + \frac{3}{2}\pi\theta + \text{cost.}$$

Inoltre l'energia cinetica K, calcolata nella posizione C_2 è

$$\widetilde{K} = \frac{3}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$$

e si ricava la lagrangiana linearizzata

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\dot{\xi}, \dot{\theta}, \xi, \theta) = \frac{3}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\theta^2 - 2\xi + \frac{3}{2}\pi\theta\,,$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\xi}} &= 3\ddot{\xi} \qquad & \frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} &= \ddot{\theta} \\ \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \xi} &= -\xi - 2 \qquad & \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \theta} &= -\theta + \frac{3}{2}\pi\,. \end{aligned}$$

Quindi le equazioni del moto approssimate sono

$$\begin{cases} 3\ddot{\xi} + \xi + 2 = 0 \\ \ddot{\theta} + \theta - \dfrac{3}{2}\pi = 0\,, \end{cases}$$

che si risolvono immediatamente: $\omega_1^2 = \frac{1}{3}$, $\omega_2^2 = 1$, quindi

$$\begin{cases} \xi(t) = A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t + \alpha\right) - 2 \\ \theta(t) = B\cos(t + \beta) + \frac{3}{2}\pi\,, \end{cases}$$

dove A, B, α, β dipendono dalle condizioni iniziali. $\square$

Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione invernale - Primo appello - 11 dicembre 2001

In un piano verticale, un'asta AB di massa m e lunghezza ℓ è vincolata a ruotare attorno al proprio estremo A, il quale scorre lungo l'asse y di un sistema di riferimento ortogonale (vedi figura). L'asta non è omogenea, bensì ha densità lineare $\rho(P) = \frac{2m}{\ell^2}|P - A|$. Tra l'estremo B dell'asta e l'origine O intercorre una forza elastica di coefficiente $k = \frac{2mg}{3\ell}$.

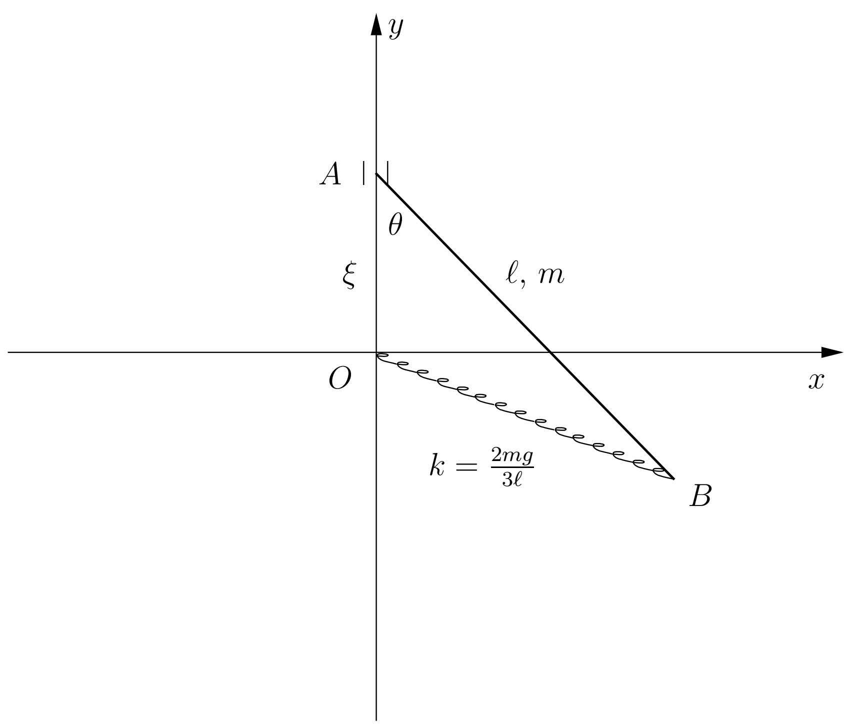
Si ponga $\xi = y_A - y_O$ e $\theta = y\hat{A}B$. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

(a) la posizione del centro di massa (baricentro) G e il momento d'inerzia baricentrale $\mathcal{I}_{Gz}$ dell'asta;

(b) le posizioni di equilibrio del sistema e lo studio della loro stabilità;

(c) la lagrangiana del sistema;

(d) le pulsazioni delle piccole oscillazioni nella posizione di equilibrio che si ha per $\theta = 0$.



Soluzione della prova scritta di Meccanica Razionale
Primo appello - 11/12/2001

(a) Calcoliamo la posizione del centro di massa dell'asta rispetto al suo estremo A: denotando con x la distanza del generico punto P dell'asta da A, la densità diventa $\rho(x) = \frac{2m}{\ell^2}x$. Quindi

$$|G - A| = \frac{1}{m}\int_0^\ell x\frac{2m}{\ell^2}x\,dx = \frac{2}{\ell^2}\int_0^\ell x^2\,dx = \frac{2}{3}\ell.$$

La posizione del baricentro in funzione dei parametri ξ, θ diviene

$$(G - O) = (G - A) + (A - O) = \frac{2}{3}\ell(\sin\theta\,\boldsymbol{i} - \cos\theta\,\boldsymbol{j}) + \xi\,\boldsymbol{j} = \frac{2}{3}\ell\sin\theta\,\boldsymbol{i} + (\xi - \frac{2}{3}\ell\cos\theta)\,\boldsymbol{j}\,.$$

Per calcolare $\mathcal{I}_{Gz}$, calcoliamo prima $\mathcal{I}_{Az}$: ricordando che la distanza al quadrato di P da A è x^2, si ha

$$\mathcal{I}_{Az} = \int_0^\ell \frac{2m}{\ell^2}x^3\,dx = \frac{m\ell^2}{2},$$

quindi

$$\mathcal{I}_{Gz} = \mathcal{I}_{Az} - md(A,G)^2 = \frac{m\ell^2}{2} - m\left(\frac{2}{3}\ell\right)^2 = \frac{m\ell^2}{18}.$$

(b) Ora troviamo il potenziale: le forze in gioco sono soltanto quella di gravità e quella elastica, quindi

$$U(\xi,\theta) = -mgy_G - \frac{1}{2}k|B - O|^2.$$

L'ordinata del baricentro la conosciamo, per trovare $|B - O|^2$ basta fare

$$(B - O) = (B - A) + (A - O) = \ell(\sin\theta\,\boldsymbol{i} - \cos\theta\,\boldsymbol{j}) + \xi\,\boldsymbol{j} = \ell\sin\theta\,\boldsymbol{i} + (\xi - \ell\cos\theta)\,\boldsymbol{j}\,,$$

da cui $|B - O|^2 = \ell^2 + \xi^2 - 2\xi\ell\cos\theta$. Quindi, a meno di costanti, ricordando anche il valore di k,

$$U(\xi,\theta) = -mg(\xi - \frac{2}{3}\ell\cos\theta) - \frac{mg}{3\ell}(\xi^2 - 2\xi\ell\cos\theta),$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi} = -mg - \frac{2mg}{3\ell}\xi + \frac{2mg}{3}\cos\theta \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{2}{3}mg\ell\sin\theta - \frac{2mg}{3}\xi\sin\theta. \end{cases}$$

Studiamo $-\frac{2}{3}mg\ell\sin\theta - \frac{2mg}{3}\xi\sin\theta = 0$: raccogliendo si ha $\sin\theta = 0$ oppure $-\ell - \xi = 0$. Da $\sin\theta = 0$ si ottiene $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, e sostituendo nella prima equazione si hanno le configurazioni di equilibrio $C_1(-\ell/2, 0)$ e $C_2(-5\ell/2, \pi)$. Dall'altra si ha $\xi = -\ell$ e sostituendo nella prima si ottiene $\cos\theta = 1/2$, ovvero $\theta = \pi/3$ o $\theta = 5\pi/3$. Quindi ci sono altre configurazioni di equilibrio date da $C_3(-\ell, \pi/3)$ e $C_4(-\ell, 5\pi/3)$.

Per la stabilità calcoliamo l'hessiano del potenziale:

$$H(\xi,\theta) = \begin{bmatrix} -\frac{2mg}{3\ell} & -\frac{2mg}{3}\sin\theta \\ -\frac{2mg}{3}\sin\theta & -\frac{2mg}{3}(\ell+\xi)\cos\theta \end{bmatrix} = \frac{2mg}{3}\begin{bmatrix} -1/\ell & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -(\ell+\xi)\cos\theta \end{bmatrix},$$

per cui C_1, C_2 sono stabili, mentre C_3, C_4 sono instabili.
(c) Calcoliamo l'energia cinetica del sistema: per farlo, troviamo la velocità del baricentro e l'energia di rotazione attorno al baricentro. Si ha

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{d}{dt}(G - O) = \frac{2}{3}\ell\dot{\theta}\cos\theta\,\boldsymbol{i}\ + (\dot{\xi} + \frac{2}{3}\ell\dot{\theta}\sin\theta)\,\boldsymbol{j}\ ,$$

da cui, tenendo conto che il termine di rotazione è $\mathcal{I}_{Gz}\dot{\theta}^2/2$,

$$K(\xi, \dot{\xi}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\left(\frac{4}{9}\ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{\xi}^2 + \frac{4}{3}\ell\dot{\xi}\dot{\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{18}\dot{\theta}^2.$$

La lagrangiana si trova ponendo $\mathscr{L} = K + U$, ovvero

$$\mathscr{L}(\xi, \dot{\xi}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{2}{9}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{2}{3}m\ell\dot{\xi}\dot{\theta}\sin\theta + \frac{m\ell^2}{36}\dot{\theta}^2 - mg\xi + \frac{2}{3}mg\ell\cos\theta - \frac{mg}{3\ell}\xi^2 + \frac{2mg}{3}\xi\cos\theta.$$

(d) La posizione è C_1; si procede nel modo ordinario. $\square$

Prova scritta di Meccanica Razionale
Sessione invernale – Secondo appello – 8/1/2002

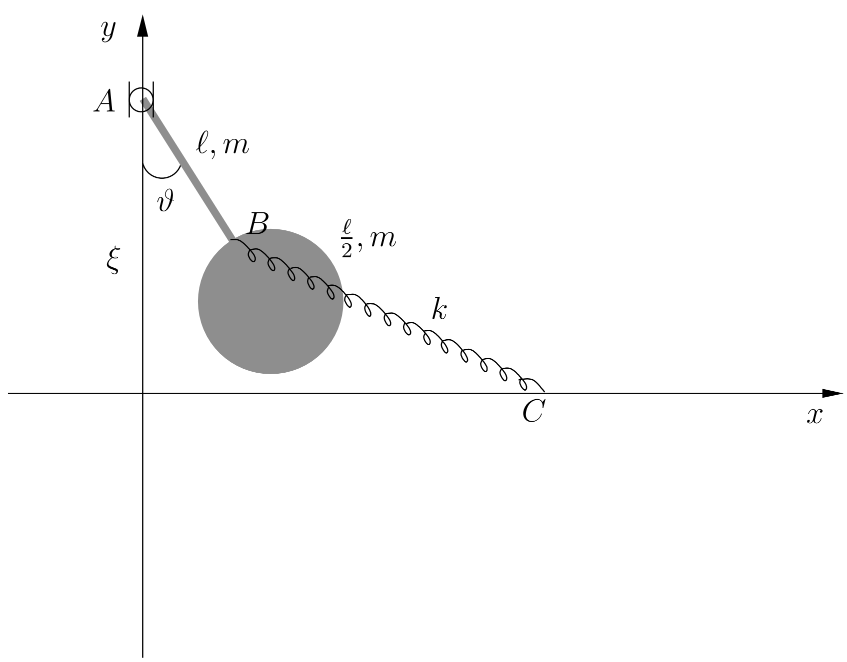
In un piano verticale è fissato un sistema di riferimento Oxy. Un corpo rigido, formato da un'asta omogenea AB di lunghezza ℓ e massa m al cui estremo B è saldato il bordo di un disco omogeneo di raggio $\ell/2$ e massa m, è vincolato con vincolo liscio a ruotare attorno all'estremo libero A dell'asta, il quale si può muovere senza attrito lungo una guida verticale coincidente con l'asse y. Sul punto B del corpo agisce una forza elastica di coefficiente di elasticità $k > 0$ con polo nel punto C di coordinate $(2\ell, 0)$. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Denotando con ξ la posizione sull'asse y dell'estremo A dell'asta e con ϑ l'angolo formato dall'asse y con l'asta, si chiede di determinare:

(a) le posizioni di equilibrio del sistema e lo studio della loro stabilità al variare di k;

(b) la lagrangiana del sistema;

(c) le piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



Svolgimento del compito di Meccanica Razionale dell'8 gennaio 2002

Si ha $\xi \in \mathbb{R}$ e $\vartheta \in [-\pi, \pi]$, quindi non ci sono posizioni di confine.

(a) Il baricentro del corpo rigido si trova chiaramente in B, e si ha:

$$(B - O) = (B - A) + (A - O) = \ell \sin\vartheta \, \boldsymbol{i} + (\xi - \ell \cos\vartheta) \, \boldsymbol{j} \,,$$
$$(B - C) = (B - O) + (O - C) = (\ell \sin\vartheta - 2\ell) \, \boldsymbol{i} + (\xi - \ell \cos\vartheta) \, \boldsymbol{j} \,.$$

Quindi il potenziale è

$$\mathcal{U}(\xi, \vartheta) = -2mg(\xi - \ell\cos\vartheta) - \frac{1}{2}k(\xi^2 - 4\ell^2 \sin\vartheta - 2\ell\xi\cos\vartheta) + \text{cost.}$$

I punti stazionari si trovano risolvendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = -2mg - k\xi + k\ell\cos\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \vartheta} = -2mg\ell\sin\vartheta + 2k\ell^2\cos\vartheta - k\ell\xi\sin\vartheta = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $\xi = \ell\cos\vartheta - 2mg/k$; sostituendo nella seconda

$$-2mg\ell\sin\vartheta + 2k\ell^2\cos\vartheta - k\ell^2\cos\vartheta\sin\vartheta + 2mg\ell\sin\vartheta = 0.$$

Semplificando e raccogliendo, si ottiene $\cos\vartheta(2 - \sin\vartheta) = 0$, da cui $\vartheta = \pm\pi/2$ Quindi ci sono due posizioni di equilibrio: $P_1(-2mg/k, -\pi/2)$ e $P_2(-2mg/k, \pi/2)$.
La matrice hessiana è

$$\mathsf{H}(\xi, \vartheta) = \begin{bmatrix} -k & -k\ell\sin\vartheta \\ -k\ell\sin\vartheta & -(2mg + k\xi)\ell\cos\vartheta - 2k\ell^2\sin\vartheta \end{bmatrix},$$

e si ha $\det \mathsf{H}(P_1) < 0$, $\det \mathsf{H}(P_2) > 0$, da cui segue che P_2 è l'unica posizione di equilibrio stabile, essendo l'unico punto di massimo per il potenziale.

(b) Calcoliamo l'energia cinetica del corpo rigido: il baricentro si trova in B, di cui abbiamo già determinato la posizione, quindi la componente di traslazione è

$$\frac{1}{2}2m\left[\frac{d}{dt}(B - O)\right]^2 = m(\dot\xi^2 + \ell^2\dot\vartheta^2 + 2\ell\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta).$$

Per la componente di rotazione calcoliamo i momenti d'inerzia dell'asta e del disco rispetto al baricentro B per l'asse perpendicolare al piano xy, ottenendo

$$\mathcal{I}_{B,z}^{\text{asta}} = \frac{1}{3}m\ell^2, \qquad \mathcal{I}_{B,z}^{\text{disco}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}m\ell^2\,;$$

quindi il momento d'inerzia del corpo è

$$\mathcal{I}_{B,z}^{\text{corpo}} = \frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{3}{8}m\ell^2 = \frac{17}{24}m\ell^2\,.$$

La velocità angolare del corpo rigido è $\dot\vartheta$, per cui risulta

$$\mathcal{K} = m(\dot\xi^2 + \ell^2\dot\vartheta^2 + 2\ell\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta) + \frac{17}{48}m\ell^2\dot\vartheta^2 = m\dot\xi^2 + 2m\ell\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta + \frac{65}{48}m\ell^2\dot\vartheta^2,$$

da cui si ottiene la lagrangiana del sistema

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot\xi,\dot\vartheta,\xi,\vartheta) = \mathcal{K} + \mathcal{U} &= m\dot\xi^2 + 2m\ell\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta + \frac{65}{48}m\ell^2\dot\vartheta^2 \\ &\qquad - 2mg(\xi - \ell\cos\vartheta) - \frac{1}{2}k(\xi^2 - 4\ell^2\sin\vartheta - 2\ell\xi\cos\vartheta).\end{aligned}$$

(c) Nella posizione stabile $P_2(-2mg/k, \pi/2)$ la matrice hessiana è

$$\mathsf{H} = \begin{bmatrix} -k & -k\ell \\ -k\ell & -2k\ell^2 \end{bmatrix};$$

inoltre l'energia cinetica, calcolata nella posizione P_2, diventa

$$\mathcal{K} = m\dot\xi^2 + 2m\ell\dot\xi\dot\vartheta + \frac{65}{48}m\ell^2\dot\vartheta^2.$$

Scrivendo $\mathcal{K}$ come forma quadratica rispetto a $\dot\xi, \dot\vartheta$, si ottiene

$$\mathcal{K}(\dot\xi,\dot\vartheta) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot\xi & \dot\theta\end{bmatrix}\mathsf{J}\begin{bmatrix}\dot\xi \\ \dot\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot\xi & \dot\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2m & 2m\ell \\ 2m\ell & \frac{65}{24}m\ell^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\xi \\ \dot\theta\end{bmatrix}.$$

Quindi si può impostare il calcolo delle pulsazioni ω delle piccole oscillazioni:

$$\det\left[\omega^2\mathsf{J} + \mathsf{H}\right] = \det\begin{bmatrix} 2m\omega^2 - k & 2m\ell\omega^2 - k\ell \\ 2m\ell\omega^2 - k\ell & \frac{65}{24}m\ell^2\omega^2 - 2k\ell^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Raccogliendo si ottiene

$$(2m\omega^2 - k)\left(\frac{65}{24}m\ell^2\omega^2 - 2k\ell^2 - 2m\ell^2\omega^2 + k\ell^2\right) = 0,$$

da cui

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{24k}{17m}} = . \qquad \square$$

Prova scritta di Meccanica Razionale – Nuovo ordinamento
Appello del 21 marzo 2002

Prima parte.

Nel sistema di riferimento $Oxyz$ con l'asse z orientato verso l'alto, un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di un paraboloide di equazione

$$z = x^2 + \frac{y^2}{4}.$$

Su tale punto agisce, oltre alla forza peso, una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto $(0, 0, 1)$.
Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio di P;
2. la stabilità di tali posizioni;
3. la reazione vincolare nelle posizioni di equilibrio.

Seconda parte.

Supponiamo ora che il punto P sia vincolato, oltre che al paraboloide suddetto, anche al piano $y = 0$. Sapendo che tutto il sistema è posto in rotazione uniforme attorno all'asse z con velocità angolare di modulo ω, si calcoli l'equazione differenziale del moto di P nel caso $k = 2mg$.

Svolgimento del compito di Meccanica Razionale del 21 marzo 2002

Prima parte.

1. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con $\varphi(x,y) = x^2 + y^2/4 - z$. Le forze agenti su P sono il peso $-mg\,\boldsymbol{k}$ e la forza elastica $-k(P-A)$, dove $A = (0,0,1)$. Denotando con (x,y,z) le coordinate di P, si ha

$$(P-A) = (P-O) + (O-A) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + (z-1)\,\boldsymbol{k}\,,$$

e dunque, scomponendo l'equazione vettoriale $\boldsymbol{F} + \lambda\nabla\varphi = 0$, il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} -kx + 2\lambda x = 0 \\ -ky + \frac{\lambda}{2} y = 0 \\ -mg - k(z-1) - \lambda = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} - z = 0. \end{cases}$$

Una soluzione immediata è $x = 0, y = 0, z = 0, \lambda = k - mg$. Inoltre: se $x \neq 0$, dalla prima si ha $\lambda = k/2$, dunque $y = 0, z = 1/2 - mg/k$ e quindi $x = \pm\sqrt{1/2 - mg/k}$. Questa posizione esiste soltanto quando $1/2 - mg/k > 0$, ovvero $k > 2mg$ (se fosse $1/2 - mg/k = 0$ avremmo la posizione nulla trovata in precedenza). Se invece $y \neq 0$, dalla seconda si ottiene $\lambda = 2k$, dunque $x = 0$ e $z = -1 - mg/k$, ma questa contrasta con l'equazione del vincolo, quindi non è accettabile.

In sintesi, se $k \leq 2mg$ c'è solo la posizione $P_1(0,0,0)$; se $k > 2mg$, oltre alla posizione P_1 ci sono anche le posizioni $P_{2,3} = (\pm\sqrt{1/2 - mg/k}, 0, 1/2 - mg/k)$.

2. Per lo studio della stabilità, è opportuno ricorrere allo studio della funzione potenziale, scegliendo x, y come gradi di libertà. Si ha

$$U(x,y) = -mg\left(x^2 + \frac{y^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right)^2\right),$$

e dunque, con facili calcoli, si trova la matrice hessiana

$$\mathsf{H}(x,y) = \begin{bmatrix} -2mg + k - 2k\left(3x^2 + \frac{y^2}{4}\right) & -kxy \\ -kxy & -\frac{1}{2}mg - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{3}{4}y^2\right) \end{bmatrix}.$$

In particolare,

$$\mathsf{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -2mg + k & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(mg + k) \end{bmatrix}, \quad \mathsf{H}(P_{2,3}) = \begin{bmatrix} 4mg - 2k & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4}k \end{bmatrix}.$$

Se $k < 2mg$, P_1 è stabile; se $k > 2mg$, P_1 è instabile e $P_{2,3}$ sono stabili. Il caso $k = 2mg$ per P_1 va trattato a parte: conviene riscrivere la funzione potenziale, che diventa

$$U(x,y) = -mg\left(2x^2 + \frac{5}{4}y^2 + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right)^2\right).$$

Si verifica facilmente che $U(x,y) \leq U(0,0) = -mg$, quindi il punto P_1 è stabile anche in questo caso.

Riassumendo: se $k \leq 2mg$, P_1 è stabile; se $k > 2mg$, P_1 è instabile e $P_{2,3}$ sono stabili. Si ha una tipica situazione di biforcazione della stabilità dell'equilibrio.

3. Ricordando che la reazione vincolare è proprio $\lambda \nabla \varphi$, si ha:

$$\Phi(P_1) = (mg - k)\,\boldsymbol{k}\,, \quad \Phi(P_{2,3}) = \pm k\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{mg}{k}}\,\boldsymbol{i} + \left(\frac{mg}{2} - \frac{k}{4}\right)\boldsymbol{k}\,.$$

Seconda parte.

Il punto risulta vincolato alla parabola $z = x^2, y = 0$, quindi ha un solo grado di libertà, diciamo x. Quindi $(P - O) = x\,\boldsymbol{i} + x^2\,\boldsymbol{k}$. Per calcolare l'equazione del moto possiamo usare l'integrale dell'energia, visto che le forze ammettono potenziale. Tenendo conto del potenziale centrifugo, si ha

$$U(x) = -mgx^2 - \frac{1}{2}k\big(x^2 + (x^2-1)^2\big) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$
$$K(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 4x^2\dot{x}^2),$$

dove abbiamo usato $\boldsymbol{v}(P) = \frac{d}{dt}(P - O) = \dot{x}\,\boldsymbol{i} + 2x\dot{x}\,\boldsymbol{k}$. Imponendo $K - U = c$ e usando la condizione $k = 2mg$, si ha

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 4x^2\dot{x}^2) + mgx^2 + mg(x^4 - x^2 + 1) - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 4x^2\dot{x}^2) + mgx^4 + mg - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \end{aligned}$$

Derivando rispetto al tempo e semplificando $m\dot{x}$, si ottiene

$$\ddot{x} + 4(x\dot{x}^2 + x^2\ddot{x}) + 4gx^3 - \omega^2 x = 0,$$

ovvero

$$(1 + 4x^2)\ddot{x} + 4x\dot{x}^2 + 4gx^3 - \omega^2 x = 0,$$

che è l'equazione differenziale del moto relativo di P. $\square$

Prova scritta di Meccanica Razionale
Secondo appello - 5 aprile 2002

Prima parte.

In un piano verticale Oxy, un punto P di massa m è vincolato a muoversi su una guida liscia di equazione $y = ax^3$, dove a è una costante positiva assegnata. Il punto P è soggetto alla forza peso, orientata in senso opposto all'asse y. Inoltre, tutto il piano Oxy è posto in rotazione uniforme di modulo ω attorno all'asse y.
Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare, nel sistema relativo:

1. le posizioni di equilibrio di P;
2. lo studio della loro stabilità;
3. l'equazione differenziale del moto di P.

Seconda parte.

Nel sistema di riferimento $Oxyz$ con l'asse z rivolto verso l'alto, un punto P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sulla superficie dell'ellissoide di equazione

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2z = 0.$$

Su tale punto agisce, oltre alla forza peso, una forza elastica di coefficiente $k = 2mg$ e polo il punto $A = (0, 0, 2)$.
Determinare le posizioni di equilibrio di P e le relative reazioni vincolari statiche.

Svolgimento del compito di Meccanica Razionale del 5 aprile 2002

Prima parte.

1. Il sistema è a vincoli lisci e le forze ammettono un potenziale. Denotando con x l'ascissa di P, che ha un grado di libertà, troviamo il potenziale come somma del potenziale gravitazionale e del potenziale centrifugo:

$$U(x) = -mgax^3 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

e dunque le posizioni di equilibrio si possono trovare imponendo

$$U'(x) = -3mgax^2 + m\omega^2 x = 0,$$

da cui $x = 0$ oppure $x = \omega^2/3ga$. Quindi le posizioni di equilibrio sono $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (\omega^2/3ga, \omega^6/27g^3a^2)$.

2. Per lo studio della stabilità, studiamo la derivata seconda del potenziale:

$$U''(x) = -6mgax + m\omega^2.$$

Si ha $U''(0) = m\omega^2 > 0$, quindi P_1 è instabile, mentre $U''(\omega^2/3ga) = -m\omega^2 < 0$, quindi P_2 è stabile.

3. Per trovare l'equazione differenziale del moto relativo di P, poiché siamo in presenza di un solo grado di libertà, possiamo usate l'integrale dell'energia. Si ha

$$\frac{d(P-O)}{dt} = \dot{x}\,\boldsymbol{i} + 3ax^2\dot{x}\,\boldsymbol{j}\,,$$

quindi

$$E = K(x,\dot{x}) - U(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + 9a^2x^4) + mgax^3 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \text{cost.}$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo

$$m\dot{x}\ddot{x}(1 + 9a^2x^4) + 18ma^2x^3\dot{x}^3 + 3mgax^2\dot{x} - m\omega^2x\dot{x} = 0,$$

da cui, semplificando $m\dot{x}$,

$$\ddot{x}(1 + 9a^2x^4) + 18a^2x^3\dot{x}^2 + 3gax^2 - \omega^2x = 0.$$

Seconda parte.

Useremo il metodo del moltiplicatore di Lagrange. Ponendo $\varphi(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2z$, si ha $\nabla\varphi(x, y, z) = 6x\,\boldsymbol{i} + 4y\,\boldsymbol{j} + 2(z-1)\,\boldsymbol{k}$. Poiché la forza peso è $-mg\,\boldsymbol{k}$ e la forza elastica è $-2mg(P-A) = -2mg(x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + (z-2)\,\boldsymbol{k})$, dall'equazione vettoriale $\boldsymbol{F} + \lambda\nabla\varphi = 0$ unita all'equazione $\varphi(x,y,z) = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2mgx + 6\lambda x = 0 \\ -2mgy + 4\lambda y = 0 \\ -2mgz + 3mg + 2\lambda(z-1) = 0 \\ 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2z = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $x = 0$ oppure $\lambda = mg/3$. Dalla seconda si ha $y = 0$ oppure $\lambda = mg/2$. Quindi: se $x = 0, y = 0$ dalla quarta si ha $z = 0$ oppure $z = 2$, che porta rispettivamente a $\lambda = 3mg/2$ e $\lambda = mg/2$. Se invece $x = 0, \lambda = mg/2$ dalla terza si ha di nuovo $z = 2$ e dunque $y = 0$. Infine, se $y = 0, \lambda = mg/3$ dalla terza si ha $z = 7/4$ e dunque $x = \pm\sqrt{7/48}$. Ricapitolando, le soluzioni sono

$$P_1 = (0,0,0), \lambda = 3mg/2, \quad P_2 = (0,0,2), \lambda = mg/2, \quad P_{3,4} = \left(\pm\sqrt{\frac{7}{48}}, 0, \frac{7}{4}\right), \lambda = mg/3.$$

Per le reazioni vincolari, sostituendo i valori in $\lambda\nabla\varphi$ abbiamo

$$\boldsymbol{\Phi}(P_1) = -3mg\,\boldsymbol{k}\,, \quad \boldsymbol{\Phi}(P_2) = mg\,\boldsymbol{k}\,, \quad \boldsymbol{\Phi}(P_{3,4}) = \pm 2mg\sqrt{\frac{7}{48}}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}mg\,\boldsymbol{k}$$

e l'esercizio è concluso. $\square$

Prova scritta di Meccanica Razionale – Meccanica Analitica
Sessione estiva - Primo appello - 20 giugno 2002

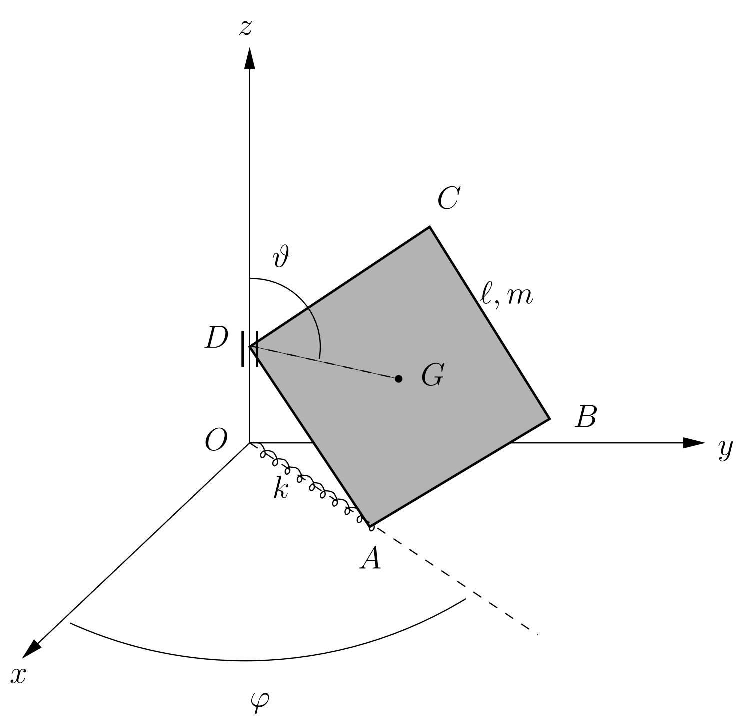
Sia $ABCD$ una lamina quadrata omogenea di massa m e lato ℓ. Il vertice D della lamina scorre sull'asse z di un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, mentre il vertice A è vincolato a giacere nel piano xy, in modo che la lamina giaccia sempre in un piano verticale.
Sul vertice A della lamina è applicata una forza elastica, di coefficiente $k = \sqrt{2}\frac{mg}{\ell}$ e polo l'origine O del sistema di riferimento.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.
Si denoti tramite φ l'angolo formato dall'asse x con la retta OA e tramite ϑ l'angolo formato dalla retta DG (G è il centro della lamina) con l'asse z. Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio del sistema;

2. le reazioni vincolari nelle posizioni di equilibrio;

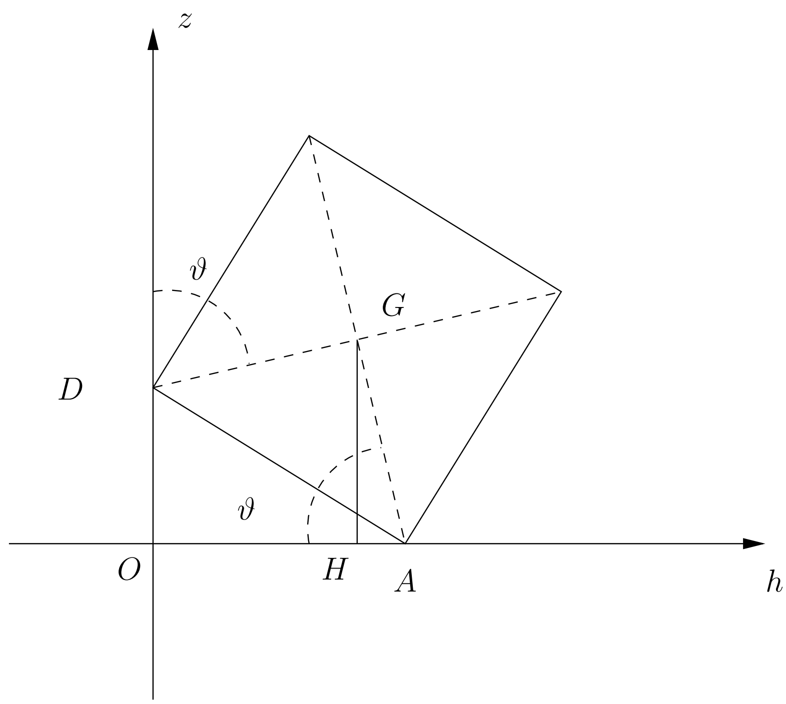
3. la stabilità dell'equilibrio nel caso $\varphi = 0$;

4. la lagrangiana del sistema ed eventuali integrali primi del moto.



Svolgimento del compito di Meccanica Razionale del 20 giugno 2002

1. Il sistema ha due gradi di libertà, è a vincoli lisci e le forze ammettono un potenziale. Per calcolare la quota di G e la lunghezza di $(A - O)$, vediamo un disegno sul piano hz, dove h è la retta di $(A - O)$:



Si ha $z_G = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \sin\vartheta$ e $|A - O|^2 = \ell^2 \cos^2(\vartheta - \pi/4)$, quindi

$$U(\vartheta, \varphi) = -mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta - \frac{1}{2}k\ell^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + \text{cost.}$$

Dunque le posizioni di equilibrio si possono trovare imponendo

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}k\ell^2\left(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione è sempre verificata, mentre dalla prima ricaviamo, sostituendo anche il valore di k,

$$2\cos^2\vartheta + \cos\vartheta - 1 = 0,$$

da cui $\cos\vartheta = -1$ o $\cos\vartheta = 1/2$. Le soluzioni sono $\vartheta = \pm\pi/3$ e $\vartheta = \pi$. Si trova che le posizioni di equilibrio sono indipendenti da φ, quindi sono infinite.

2. In ogni posizione di equilibrio si hanno reazioni vincolari in D e in A. Poiché i vincoli sono lisci, $\mathbf{\Phi}_D$ ha la direzione di $(A - O)$, mentre $\mathbf{\Phi}_A$ ha direzione verticale. Quindi è facile

vedere che $\boldsymbol{\Phi}_D$ deve opporsi solo alla forza elastica e $\boldsymbol{\Phi}_A$ deve opporsi solo alla forza peso. In ogni posizione di equilibrio $(\pi/3, \varphi)$ si ha dunque

$$\boldsymbol{\Phi}_A = mg\,\boldsymbol{k}\,, \qquad \boldsymbol{\Phi}_D = k(A-O) = \sqrt{2}mg\left(\cos\frac{\pi}{12}\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\frac{\pi}{12}\sin\varphi\,\boldsymbol{j}\right),$$

mentre nelle posizioni $(-\pi/3, \varphi)$ si ha

$$\boldsymbol{\Phi}_A = mg\,\boldsymbol{k}\,, \qquad \boldsymbol{\Phi}_D = k(A-O) = \sqrt{2}mg\left(\cos\frac{7\pi}{12}\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\frac{7\pi}{12}\sin\varphi\,\boldsymbol{j}\right),$$

e nelle posizioni (π, φ) si ha

$$\boldsymbol{\Phi}_A = mg\,\boldsymbol{k}\,, \qquad \boldsymbol{\Phi}_D = k(A-O) = -mg\left(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j}\right).$$

3. Notiamo che la richiesta $\varphi = 0$ è irrilevante, in quanto l'equilibrio non dipende da φ. Questo però ci permette di ridurre i gradi di libertà, in modo da poter studiare facilmente la stabilità. Dal punto 1 si ha

$$U'(\vartheta) = -mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta - mg\ell\sqrt{2}\cos^2\vartheta + mg\ell\sqrt{2},$$

da cui

$$U''(\vartheta) = mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta + 2mg\ell\sqrt{2}\cos\vartheta\sin\vartheta.$$

Quindi $U''(\pi/3) = 3mg\ell\sqrt{6}/4 > 0$, da cui si ricava che $\pi/3$ è instabile; al contrario, $U''(-\pi/3) = -3mg\ell\sqrt{6}/4 < 0$, dunque $-\pi/3$ è stabile. Si ha poi $U''(\pi) = 0$, quindi si deve proseguire con le derivate:

$$U'''(\vartheta) = mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta + 2mg\ell\sqrt{2}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta),$$

quindi $U'''(\pi) = -mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2} + 2mg\ell\sqrt{2} \neq 0$, ovvero π è un punto di flesso, dunque instabile.

4. Per il calcolo dell'energia cinetica, applichiamo il teorema di König. Per la velocità del baricentro, calcoliamo prima la posizione:

$$\begin{aligned}(G-O) &= (G-D) + (D-O)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\sin\vartheta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\sin\vartheta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\cos\vartheta + \ell\sin(\vartheta - \pi/4)\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

e dunque, dopo alcuni conti,

$$v_G^2 = \ell^2\dot\vartheta^2\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\ell^2\dot\vartheta^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{1}{2}\ell^2\dot\varphi^2\sin^2\vartheta.$$

Per il termine di rotazione, fissiamo in G una terna solidale alla lamina con gli assi x', y' paralleli ai lati e z' ortogonale alla lamina. In questo modo gli assi sono principali e i momenti sono $m\ell^2/12$ (per x' e y') e $m\ell^2/6$ (per z'). La velocità angolare è

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\,\boldsymbol{k}' + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k} = \dot{\vartheta}\,\boldsymbol{k}' + \dot{\varphi}(\cos(\vartheta - \pi/4)\,\boldsymbol{i}' - \sin(\vartheta - \pi/4)\,\boldsymbol{j}'),$$

dunque

$$K_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{m\ell^2}{24}\dot{\varphi}^2 + \frac{m\ell^2}{12}\dot{\vartheta}^2.$$

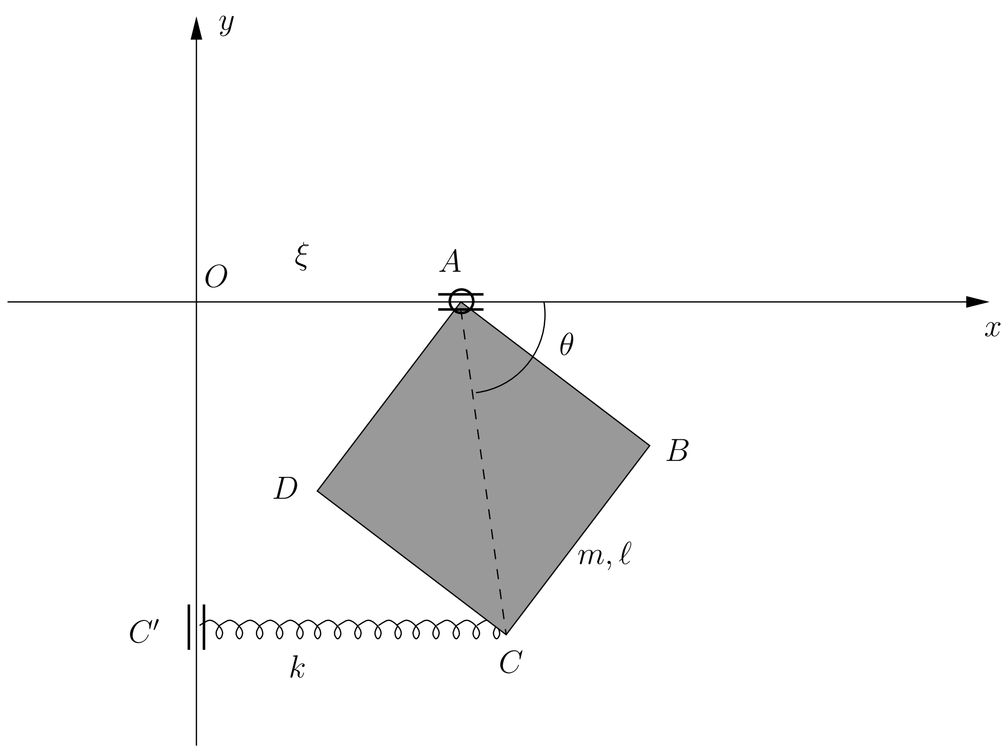
A questo punto, la lagrangiana è costruita.

Si verifica poi immediatamente che essa non dipende dal tempo e da φ, quindi gli integrali primi sono quello dell'energia e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \mathrm{cost}$, che corrisponde alla conservazione del momento angolare lungo l'asse z. $\square$

Prova scritta di Meccanica Razionale – Meccanica Analitica
Sessione estiva - Secondo appello - 11 luglio 2002

In un piano verticale, una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di massa m e lato ℓ è vincolata a ruotare attorno al proprio vertice A, il quale può scorrere sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy.
Sul vertice C (opposto ad A) agisce una forza elastica orizzontale, di coefficiente $k = \frac{mg}{\lambda\ell}$, $\lambda > 0$ e polo il punto C', proiezione ortogonale di C sull'asse y.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.
Si denoti con ξ l'ascissa di A e con θ l'angolo formato dalla retta AC con l'asse x. Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio del sistema;
2. lo studio della loro stabilità;
3. la lagrangiana del sistema;
4. nel caso $\lambda = 4$, le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



Svolgimento del compito di Meccanica Razionale dell'11 luglio 2002 - Seconda unità

1. Il sistema ha due gradi di libertà, $\xi \in \mathbb{R}$ e $\theta \in [0, 2\pi[$, è a vincoli lisci e le forze ammettono un potenziale. Denotiamo con G il baricentro della lamina: poiché $|A - G| = \ell\sqrt{2}/2$, si ha $y_G = -(\ell\sqrt{2}/2)\sin\theta$. Inoltre $|C - C'| = |\xi + \ell\sqrt{2}\cos\theta|$. Quindi il potenziale del sistema diventa

$$U(\xi, \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} mg\ell \sin\theta - \frac{1}{2}k(\xi^2 + 2\ell^2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\ell\xi\cos\theta).$$

Dunque le posizioni di equilibrio si possono trovare imponendo

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi - \sqrt{2}k\ell\cos\theta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell\cos\theta + 2k\ell^2\sin\theta\cos\theta + \sqrt{2}k\ell\xi\sin\theta = 0. \end{cases}$$

Dalla prima ricaviamo $\xi = -\sqrt{2}\ell\cos\theta$, che sostituito nella seconda dà

$$\frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell\cos\theta + 2k\ell^2\sin\theta\cos\theta - 2k\ell^2\sin\theta\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell\cos\theta = 0,$$

da cui $\theta_1 = \pi/2$ e $\theta_2 = 3\pi/2$. Quindi $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

Notiamo che tali posizioni non dipendono dal valore di λ.

2. Per la stabilità di tali posizioni, l'intuizione ci suggerisce che $(0, \pi/2)$ sia stabile, mentre $(0, 3\pi/2)$ sia instabile. Lo verifichiamo studiando la matrice hessiana del potenziale:

$$\mathcal{H}(\xi, \theta) = \begin{bmatrix} -k & \sqrt{2}k\ell\sin\theta \\ \sqrt{2}k\ell\sin\theta & -\frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell\sin\theta + 2k\ell^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \sqrt{2}k\ell\xi\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Si ha quindi

$$\mathcal{H}(0, \pi/2) = \begin{bmatrix} -k & \sqrt{2}k\ell \\ \sqrt{2}k\ell & -\frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell - 2k\ell^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{H}(0, 3\pi/2) = \begin{bmatrix} -k & -\sqrt{2}k\ell \\ -\sqrt{2}k\ell & \frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell - 2k\ell^2 \end{bmatrix}.$$

In entrambi i casi si ha $\mathcal{H}_{11} < 0$; poiché $\det\mathcal{H}(0, \pi/2) = \sqrt{2}kmg\ell/2 > 0$ e $\det\mathcal{H}(0, 3\pi/2) = -\sqrt{2}kmg\ell/2 < 0$, si ha che $(0, \pi/2)$ è stabile mentre $(0, 3\pi/2)$ è instabile.

Anche qui notiamo che la stabilità non dipende dal valore di λ.

3. Per il calcolo dell'energia cinetica, applichiamo il teorema di König. Si ha

$$(G - O) = (G - A) + (A - O) = \left(\xi + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\cos\theta\right)\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\sin\theta\,\boldsymbol{j}$$

e dunque

$$\boldsymbol{v}_G = \left(\dot\xi - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\dot\theta\sin\theta\right)\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\dot\theta\cos\theta\,\boldsymbol{j} \quad\Rightarrow\quad v_G^2 = \dot\xi^2 + \frac{1}{2}\ell^2\dot\theta^2 - \sqrt{2}\ell\dot\xi\dot\theta\sin\theta.$$

Inoltre, il momento d'inerzia della lamina rispetto ad un asse baricentrale perpendicolare è $m\ell^2/6$ e il la velocità angolare è $-\dot\theta\,\boldsymbol{k}$, quindi

$$K=\frac{1}{2}m\dot\xi^2+\frac{1}{4}m\ell^2\dot\theta^2-\frac{\sqrt{2}}{2}m\ell\dot\xi\dot\theta\sin\theta+\frac{1}{12}m\ell^2\dot\theta^2=\frac{1}{2}m\dot\xi^2+\frac{1}{3}m\ell^2\dot\theta^2-\frac{\sqrt{2}}{2}m\ell\dot\xi\dot\theta\sin\theta.$$

Dunque la lagrangiana del sistema diventa

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot\xi^2+\frac{1}{3}m\ell^2\dot\theta^2-\frac{\sqrt{2}}{2}m\ell\dot\xi\dot\theta\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell\sin\theta-\frac{1}{2}k\xi^2-k\ell^2\cos^2\theta-\sqrt{2}k\ell\xi\cos\theta.$$

4. Poniamo ora $mg=4k\ell$ e mettiamoci nella posizione $(\xi=0,\theta=\pi/2)$. Si ha

$$K=\frac{1}{2}m\dot\xi^2+\frac{1}{3}m\ell^2\dot\theta^2-\frac{\sqrt{2}}{2}m\ell\dot\xi\dot\theta=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot\xi & \dot\theta\end{bmatrix}J\begin{bmatrix}\dot\xi\\ \dot\theta\end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix}m & -\frac{\sqrt{2}}{2}m\ell\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}m\ell & \frac{2}{3}m\ell^2\end{bmatrix};$$

inoltre,

$$\mathcal{H}(0,\pi/2)=\begin{bmatrix}-k & \sqrt{2}k\ell\\ \sqrt{2}k\ell & -2(\sqrt{2}+1)k\ell^2\end{bmatrix}$$

Quindi le pulsazioni delle piccole oscillazioni si trovano risolvendo

$$\det(\omega^2J+\mathcal{H})=0,$$

ovvero

$$\det\begin{bmatrix}m\omega^2-k & -\frac{\sqrt{2}}{2}m\ell\omega^2+\sqrt{2}k\ell\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}m\ell\omega^2+\sqrt{2}k\ell & \frac{2}{3}m\ell^2\omega^2-2(\sqrt{2}+1)k\ell^2\end{bmatrix}.$$

Dopo alcuni conti si ottiene

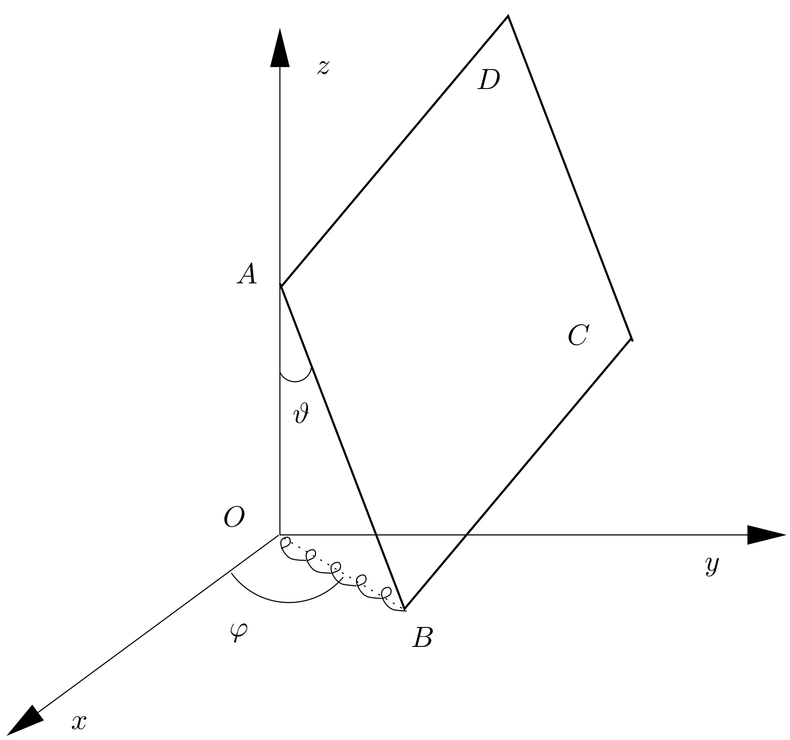
$$m^2\omega^4-4(1+3\sqrt{2})mk\omega^2+12\sqrt{2}k^2=0,$$

che dà le pulsazioni cercate. $\square$

Prova scritta di Meccanica Razionale e Analitica (seconda unità)
Sessione autunnale - Primo appello - 12 settembre 2002

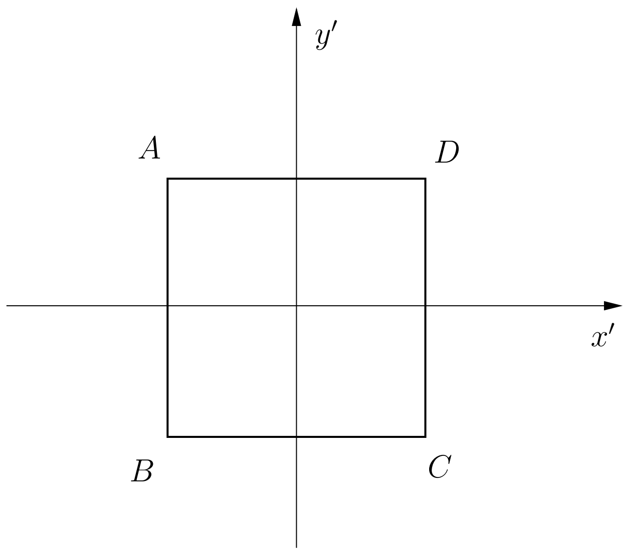
Un corpo rigido $ABCD$ è formato da quattro aste omogenee, ognuna di massa m e lunghezza ℓ, saldate tra loro a formare un quadrato. Tale corpo rigido si muove in un sistema di riferimento ortogonale $Oxyz$, in modo che il piano determinato dalle aste passi sempre per l'asse z. Inoltre A è vincolato a scorrere sulla <u>parte positiva</u> dell'asse z e B è vincolato a scorrere sul piano xy.
Il corpo è soggetto alla forza peso, diretta in senso opposto all'asse z; inoltre, tra l'origine O del sistema di riferimento e il punto B del corpo rigido intercorre una forza elastica di coefficiente $k \geq 0$.
Denotando con ϑ, φ gli angoli in figura e tenendo presente che $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, si chiede di determinare:

1. la matrice d'inerzia di $ABCD$ rispetto a un sistema di riferimento solidale baricentrale;
2. la lagrangiana del sistema;
3. nel caso $k = 0$, le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine.



Svolgimento del compito di Meccanica Razionale del 12 settembre 2002 - Seconda unità

1. Il baricentro G si trova chiaramente nel punto d'incontro delle rette AC e BD, ovvero a distanza $\ell/2$ da ogni asta. Consideriamo un sistema di riferimento centrato in G e con l'asse x' parallelo a BC, l'asse y' parallelo a CD e l'asse z' ortogonale al piano del corpo rigido.



Per calcolare la matrice d'inerzia rispetto a questo sistema, conviene calcolare quella di ogni asta e sfruttare l'additività. Si ha

$$
\begin{aligned}
I_{11}(AB) = I_{11}(CD) &= \frac{m\ell^2}{12}\,, \\
I_{22}(AB) = I_{22}(CD) &= \frac{m\ell^2}{4}\,, \\
I_{33}(AB) = I_{33}(CD) &= \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}\,, \\
I_{12}(AB) = I_{12}(CD) = I_{23}(AB) &= I_{23}(CD) = I_{13}(AB) = I_{13}(CD) = 0.
\end{aligned}
$$

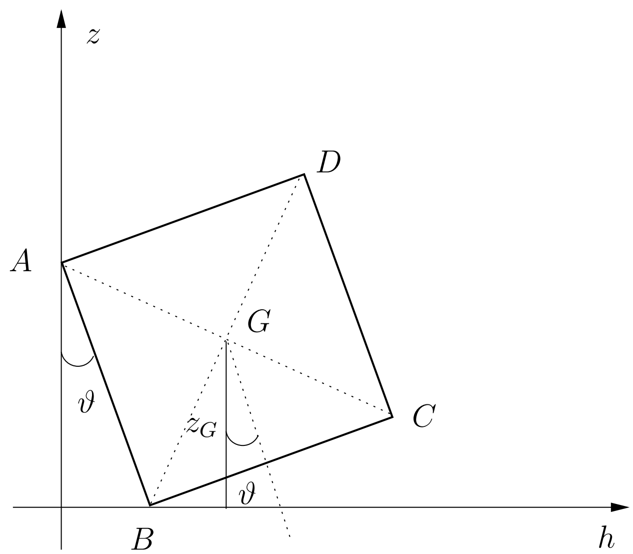
Per quanto riguarda le altre due aste, il conto è simile, e risulta

$$
\begin{aligned}
I_{11}(AD) = I_{11}(BC) &= \frac{m\ell^2}{4}\,, \\
I_{22}(AD) = I_{22}(BC) &= \frac{m\ell^2}{12}\,, \\
I_{33}(AD) = I_{33}(BC) &= \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}\,, \\
I_{12}(AD) = I_{12}(BC) = I_{23}(AD) &= I_{23}(BC) = I_{13}(AD) = I_{13}(BC) = 0.
\end{aligned}
$$

Quindi la matrice d'inerzia è

$$\mathcal{I}_G = \begin{bmatrix} 2m\ell^2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2m\ell^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4m\ell^2/3 \end{bmatrix}.$$

2. Calcoliamo la quota di G.



$$z_G = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \cos\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right) = \frac{\ell}{2}(\sin\vartheta + \cos\vartheta).$$

Inoltre $|B - O| = \ell \sin\vartheta$, quindi

$$U(\vartheta, \varphi) = -2mg\ell(\sin\vartheta + \cos\vartheta) - \frac{1}{2}k\ell^2 \sin^2\vartheta.$$

Per il calcolo dell'energia cinetica, applichiamo il teorema di König. Si ha

$$\begin{aligned}(G - O) &= (G - A) + (A - O) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)\cos\varphi\, \boldsymbol{i}\,, \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)\sin\varphi\, \boldsymbol{j}\,, \frac{\ell}{2}(\sin\vartheta + \cos\vartheta)\, \boldsymbol{k}\,,\end{aligned}$$

quindi, derivando e facendo alcuni conti,

$$v_g^2 = \frac{1}{2}\ell^2\Big[\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}\dot\varphi^2 + (\dot\varphi^2 - 2\dot\vartheta^2)\sin\vartheta\cos\vartheta\Big].$$

La velocità angolare è data da $\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\, \boldsymbol{k} + \dot\vartheta\, \boldsymbol{k}'$, dove $\boldsymbol{k}'$ è il vettore lungo z' del sistema solidale al corpo rigido usato nel punto 1. Si ha $\boldsymbol{k} = \sin\vartheta\, \boldsymbol{i}' + \cos\vartheta\, \boldsymbol{j}'$, quindi

$$\begin{aligned}
K_{\text{rot}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathcal{I}_G\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{5}{6}m\ell^2\dot\varphi^2\sin^2\vartheta + \frac{5}{6}m\ell^2\dot\varphi^2\cos^2\vartheta + \frac{4}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2\Big) \\
&= \frac{5}{12}m\ell^2\dot\varphi^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2.
\end{aligned}$$

Quindi la lagrangiana è

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= m\ell^2\Big[\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}\dot\varphi^2 + (\dot\varphi^2 - 2\dot\vartheta^2)\sin\vartheta\cos\vartheta\Big] + \frac{5}{12}m\ell^2\dot\varphi^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 \\
&\quad - 2mg\ell(\sin\vartheta + \cos\vartheta) - \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\vartheta \\
&= \frac{5}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{11}{12}m\ell^2\dot\varphi^2 + m\ell^2(\dot\varphi^2 - 2\dot\vartheta^2)\sin\vartheta\cos\vartheta \\
&\quad - 2mg\ell(\sin\vartheta + \cos\vartheta) - \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\vartheta.
\end{aligned}$$

3. Per le posizioni ordinarie si ha

$$U(\vartheta,\varphi) = -2mg\ell(\sin\vartheta + \cos\vartheta),$$

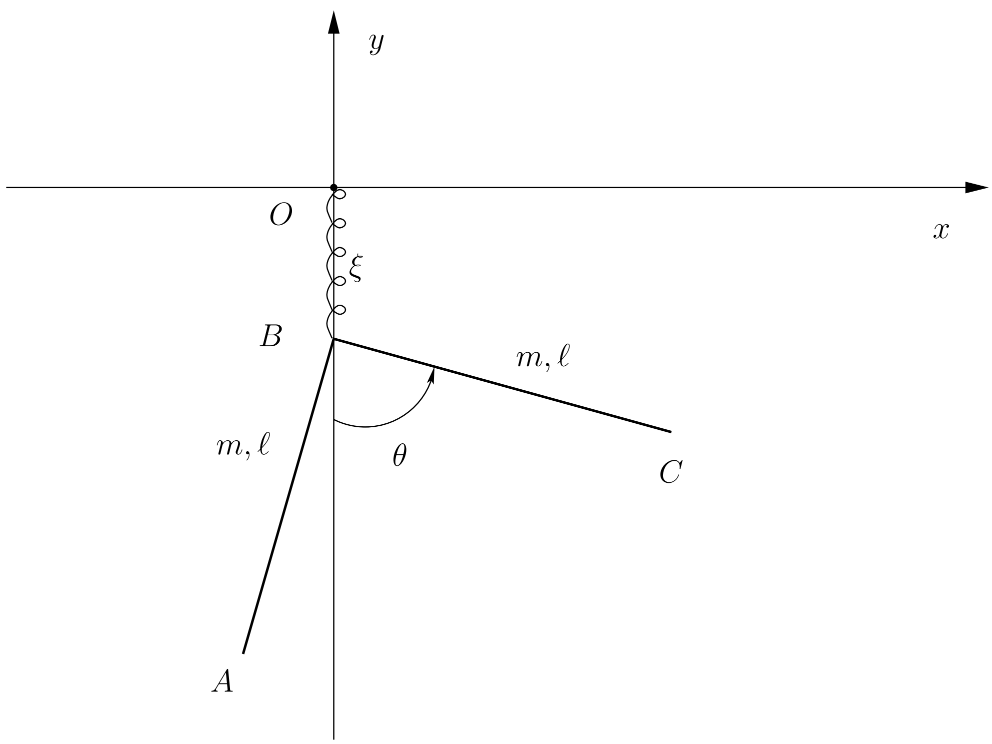
da cui si trovano facilmente le posizioni (e saranno indipendenti da φ).

Per le posizioni di confine, si può applicare il Principio delle potenze virtuali. $\square$

Prova scritta di Meccanica Razionale – Meccanica Analitica
Secondo appello - 26 settembre 2002

Sia dato, in un piano verticale con riferimento cartesiano ortogonale Oxy, un corpo rigido formato da due aste omogenee AB e BC, entrambe di massa m e lunghezza ℓ, saldate ad angolo retto nell'estremo comune B. Tale estremo B è vincolato a scorrere sull'asse y.
Una forza elastica, di coefficiente $k > 0$, ha polo nel punto $O(0,0)$ e agisce sul punto B del corpo.
Denotando con ξ l'ordinata di B e con θ l'angolo formato dall'asse y con l'asta BC, e supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. studiare le posizioni di equilibrio del corpo e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. calcolare i momenti cinetici p_ξ e p_θ;
4. trovare le pulsazioni fondamentali delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



Prova scritta di Meccanica Razionale – Meccanica Analitica
Primo appello - 17 dicembre 2002

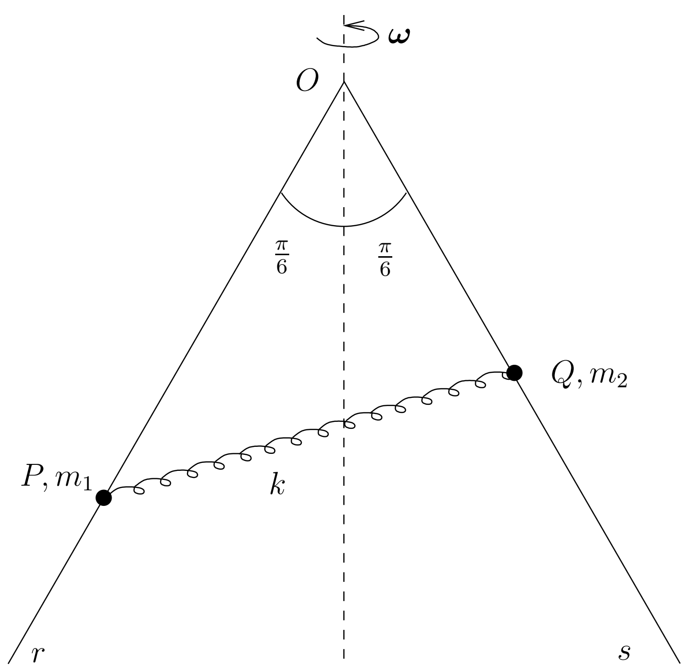
In un piano verticale, due semirette r e s, aventi origine nel medesimo punto O, formano angoli di $\pi/6$ e $-\pi/6$ con la verticale discendente.
Su r scorre un punto materiale P di massa m_1, su s un punto materiale Q di massa m_2.
Tra i due punti P e Q intercorre una forza elastica di coefficiente $k > 0$.
Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;

2. discuterne la stabilità;

3. determinare la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.

Si supponga poi che il piano contenente le due semirette sia posto in rotazione uniforme con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse verticale passante per O. Si determinino anche in questo caso le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare di $\boldsymbol{\omega}$.

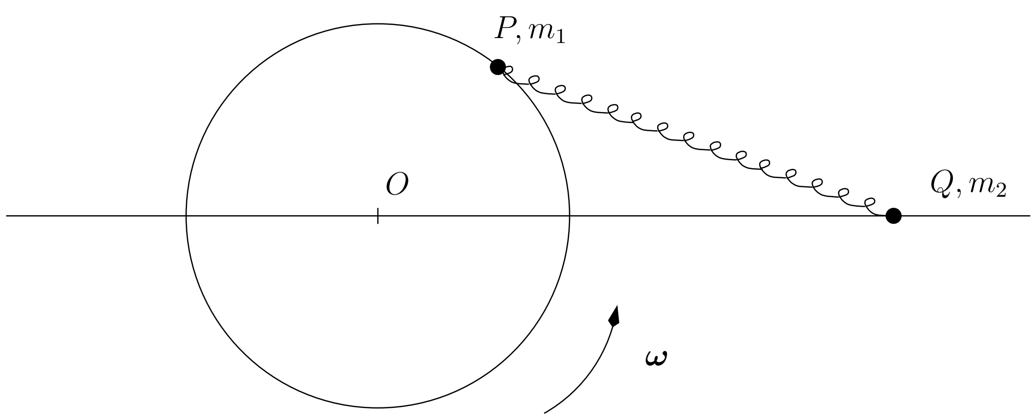


Prova scritta di Meccanica Razionale – Meccanica Analitica
Secondo appello - 7 gennaio 2003

In un piano orizzontale, un punto materiale P di massa m_1 si muove su una guida circolare di raggio R. Per il centro O di questa guida, passa una guida rettilinea, giacente nello stesso piano, su cui si muove un punto materiale Q di massa m_2. Tali punti P e Q sono soggetti ad una mutua attrazione elastica di coefficiente $k > 0$.
Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.

Si supponga poi che il piano orizzontale contenente le due guide sia posto in rotazione uniforme con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse perpendicolare al piano passante per O. Si determinino anche in questo caso le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare di $\boldsymbol{\omega}$.

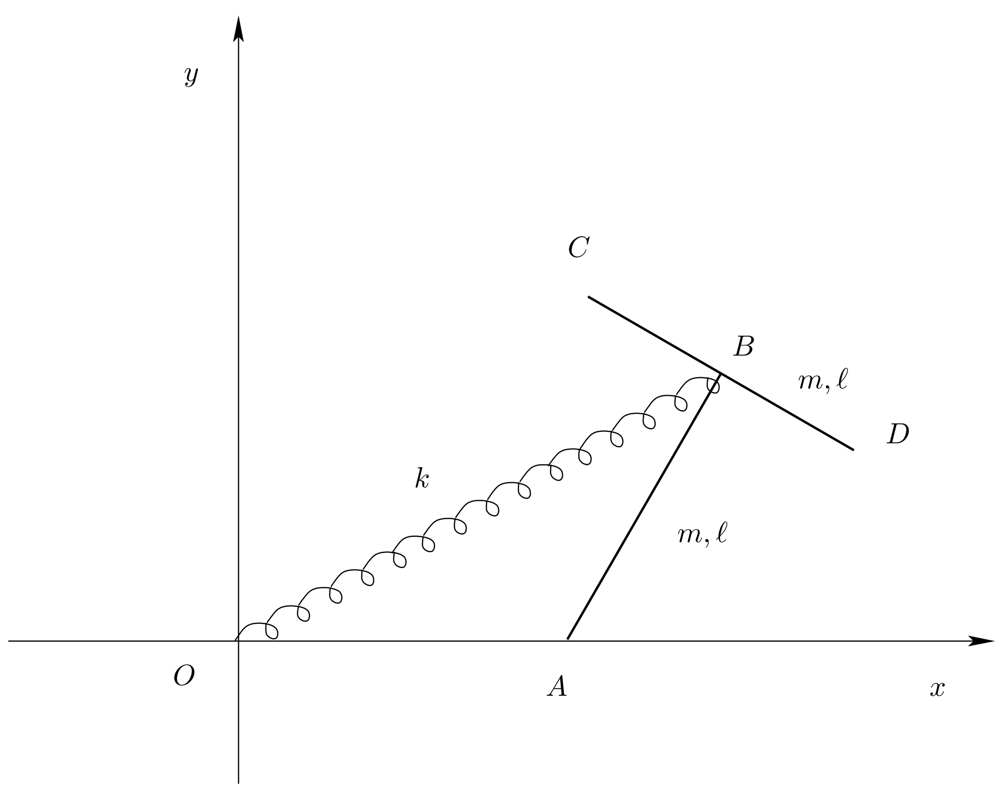


Prova scritta di Meccanica Razionale – Meccanica Analitica
Primo appello - 18 marzo 2003

Un corpo rigido è formato da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza ℓ, al cui estremo B è saldata ad angolo retto un'asta omogenea CD, anch'essa di massa m e lunghezza ℓ, nel suo punto medio. Tale corpo rigido può ruotare liberamente attorno all'estremo A in un piano verticale, e l'estremo A scorre senza attrito sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, fissato con l'asse y rivolto verso l'alto.
Sul punto B del corpo rigido agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O. Inoltre tutto il sistema è soggetto alla forza peso.

Dopo aver posto $\lambda = \frac{3mg}{k\ell}$, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio del sistema;
2. la stabilità di tali posizioni in funzione del parametro λ;
3. la lagrangiana del sistema e i momenti cinetici;
4. per $\lambda > 8$, le equazioni linearizzate del moto attorno ad una posizione di equilibrio stabile e le pulsazioni delle piccole oscillazioni.

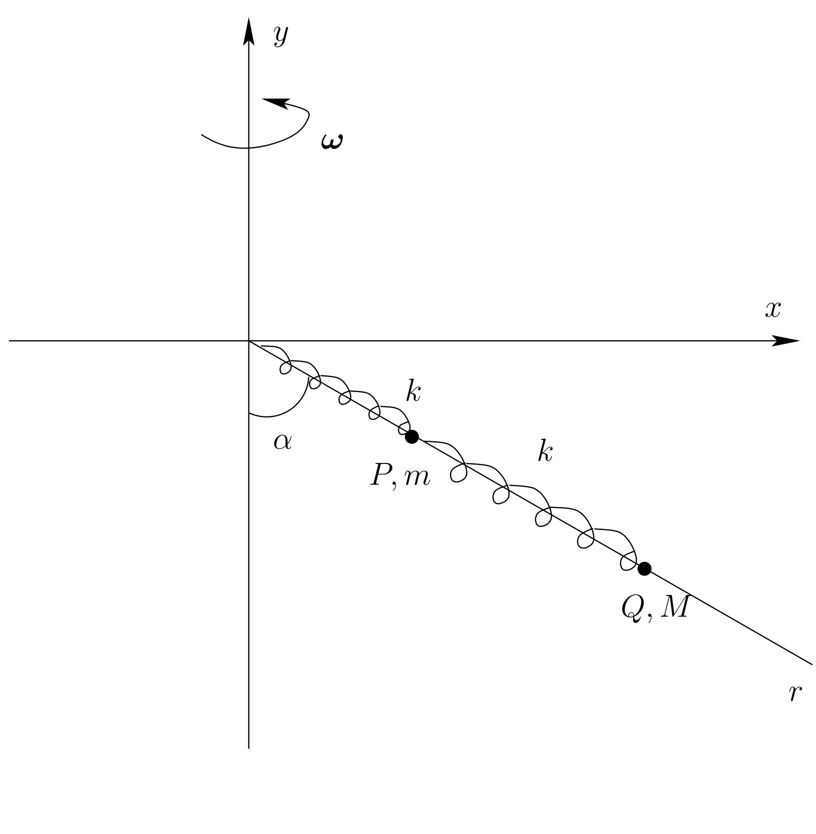


Prova scritta di Meccanica Razionale – Meccanica Analitica
Prima unità
Primo appello - 18 marzo 2003

In un piano verticale, due punti materiali P e Q, di masse m e M rispettivamente, si muovono su una semiretta fissa r, che ha l'origine in un sistema di riferimento ortogonale Oxy e giace nel quarto quadrante di tale sistema, formando un angolo $\alpha \in]0, \pi/2[$ con la verticale discendente. Sul punto P agisce una forza elastica di polo l'origine O della semiretta, sul punto Q agisce una forza elastica di polo il punto P. Tali forze elastiche hanno il medesimo coefficiente $k > 0$. Denotando con ξ la distanza di P da O e con η la distanza di Q da O, e supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.

Si supponga poi che il piano verticale contenente la semiretta sia posto in rotazione uniforme con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse y. Si determinino anche in questo caso le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare di $\boldsymbol{\omega}$.

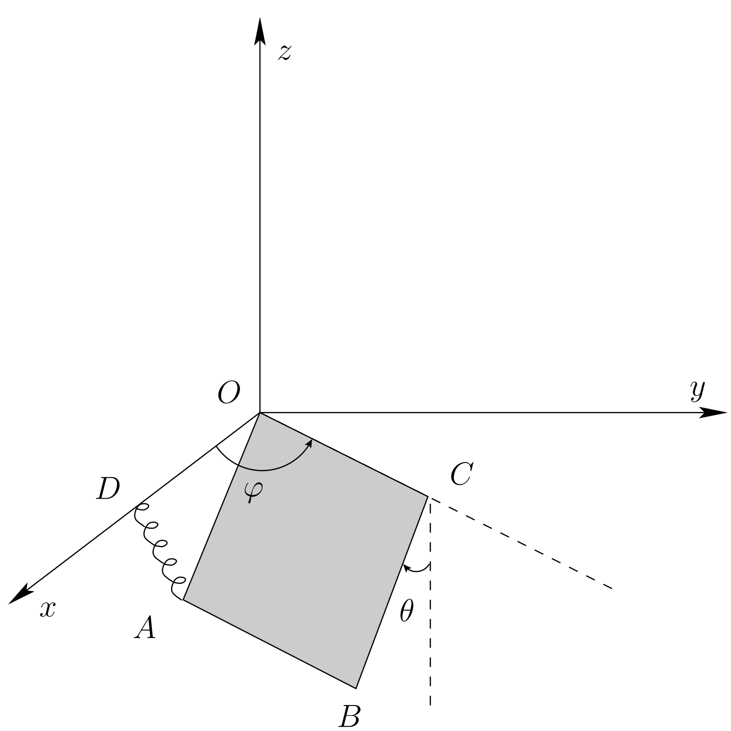


Prova scritta di Meccanica Analitica
Seconda unità
Secondo appello - 1 aprile 2003

SIa $Oxyz$ un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con l'asse z rivolto verso l'alto. Una lamina quadrata $OABC$ di massa m e lato ℓ è libera di ruotare attorno alla retta OC, la quale si può muovere nel piano xy ruotando attorno ad O.
Sul vertice A della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto $D(\ell, 0, 0)$. Inoltre tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Si denoti con φ l'angolo formato dall'asse x con la semiretta OC, e con θ l'angolo tra il piano della lamina e la verticale. Si ponga inoltre $mg = 2k\ell$. Si chiede di:

1. mostrare che si ha $(A - O) = \ell \sin\theta \sin\varphi\, \boldsymbol{i} - \ell \sin\theta \cos\varphi\, \boldsymbol{j} - \ell \cos\theta\, \boldsymbol{k}$;
2. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e la loro stabilità;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



Prova scritta di Meccanica Razionale
Prima unità
Secondo appello - 1 aprile 2003

In un piano verticale dotato di un sistema di riferimanto cartesiano ortogonale Oxy con l'asse y rivolto verso l'alto, un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una guida di equazione $y = ax^3$, $a > 0$. Su P agisce la forza peso.

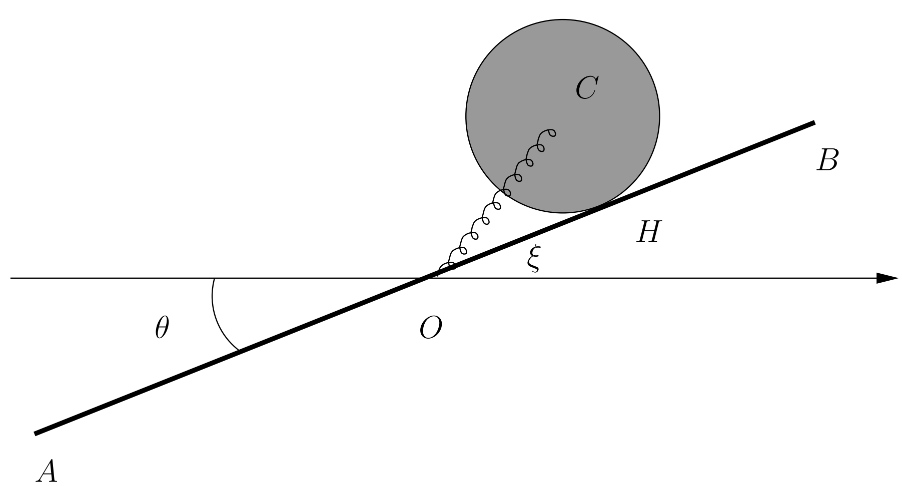
Si chiede di determinare le posizioni di equilibrio, discuterne la stabilità e trovare le equazioni del moto.

Supposto poi che tutto il sistema ruoti attorno all'asse y con velocità angolare uniforme $\boldsymbol{\omega} = \omega\, \boldsymbol{j}$, si chiede anche in questo caso di trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità, la reazione vincolare nelle posizioni di equilibrio e l'equazione del moto di P.

Prova scritta di Meccanica Razionale – Meccanica Analitica
Primo appello - 17 giugno 2003

In un piano orizzontale è data un'asta AB omogenea, di massa m e lunghezza 2ℓ. L'asta può liberamente ruotare attorno al suo punto medio O. Un disco omogeneo di raggio R e massa m è vincolato a muoversi rotolando senza strisciare sull'asta AB. Tra il centro C del disco e il punto medio O dell'asta agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$.
Detto H il punto di contatto del disco con l'asta, si indichi con θ l'angolo che l'asta forma con un asse fisso e con ξ l'ascissa di H rispetto all'asta AB.

1. Supposto dapprima θ costante, si determini il moto del disco in tali condizioni.
2. Nel caso θ variabile, si scriva l'energia cinetica del sistema.
3. Si scrivano poi le equazioni differenziali del moto in tale caso generale.
4. Si mostri che il sistema ammette due integrali primi e se ne diano le espressioni.
5. Si studi la stabilità delle posizioni di equilibrio del sistema.



Risoluzione della prova del 17 giugno 2003 - seconda unità

Il sistema ha due gradi di libertà, $\xi \in [-\ell, \ell]$ e $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Essendo il moto in un piano orizzontale, non consideriamo la forza peso.

1. Nel caso ϑ costante, il sistema ha un solo grado di libertà. Fissiamo un sistema di riferimento con l'asse x lungo l'asta e l'origine in O e scriviamo le equazioni cardinali della dinamica per il disco. Si ha $(C-O) = \xi\,\boldsymbol{i} + R\,\boldsymbol{j}$, quindi $\boldsymbol{F} = -k\xi\,\boldsymbol{i} - kR\,\boldsymbol{j}$. Calcoliamo poi il momento di $\boldsymbol{F}$ rispetto al centro di istantanea rotazione H: poiché $(H-C) = -R\,\boldsymbol{j}$, segue

$$\boldsymbol{M}_H = (-k\xi\,\boldsymbol{i} - kR\,\boldsymbol{j}) \wedge (-R\,\boldsymbol{j}) = kR\xi\,\boldsymbol{k}\ .$$

Poiché il vincolo di puro rotolamento impone $\boldsymbol{\omega} = -\frac{\dot{\xi}}{R}\boldsymbol{k}$ e $(J_H)_{33} = \frac{3}{2}mR^2$, il momento della quantità di moto rispetto a H diventa

$$\boldsymbol{\Gamma}_H = J_H\boldsymbol{\omega} = -\frac{3}{2}mR\dot{\xi}\,\boldsymbol{k}\ , \qquad \frac{d\boldsymbol{\Gamma}_H}{dt} = -\frac{3}{2}mR\ddot{\xi}\,\boldsymbol{k}\ .$$

Quindi dalla seconda equazione cardinale della dinamica si ottiene

$$\ddot{\xi} + \frac{2k}{3m}\xi = 0\,,$$

che dà un moto armonico con pulsazione $\sqrt{\frac{2k}{3m}}$.

2. Il modulo della velocità angolare dell'asta è $\dot{\vartheta}$, quindi si ha

$$K_{\text{asta}} = \frac{1}{2}m(2\ell)^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

Per trovare l'energia cinetica del disco, applichiamo il teorema di König. Essendo il disco omogeneo, il suo baricentro si trova in C e si ha

$$(C-O) = (\xi\cos\vartheta - R\sin\vartheta)\,\boldsymbol{i} + (\xi\sin\vartheta + R\cos\vartheta)\,\boldsymbol{j}\ ,$$

da cui

$$|\boldsymbol{v}_C|^2 = (\dot{\xi} - R\dot{\vartheta})^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2\,.$$

Tenendo presente che la velocità angolare del disco si trova sovrapponendo il movimento rotatorio del disco (con velocità $-\dot{\xi}/R$) e quello dell'asta (con velocità $\dot{\vartheta}$), si ottiene

$$K_{\text{disco}} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_C|^2 + \frac{1}{2}(J_C)_{33}\omega^2_{\text{disco}} = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\xi^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{3}{2}mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\,.$$

Quindi risulta

$$K = K_{\text{asta}} + K_{\text{disco}} = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\xi^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{3}{2}mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\,.$$

3. Per scrivere le equazioni del moto determiniamo prima la lagrangiana. L'unica forza attiva agente sul sistema è quella elastica, quindi

$$U = -\frac{1}{2}k\xi^2 + \text{cost.}$$

da cui si ricava immediatamente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\xi^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{3}{2}mR\dot{\xi}\dot{\vartheta} - \frac{1}{2}k\xi^2.$$

Le equazioni del moto si trovano con i soliti conti.

4. Dal fatto che $\mathcal{L}$ non dipende dal tempo, si ha l'integrale dell'energia

$$K - U = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\xi^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{3}{2}mR\dot{\xi}\dot{\vartheta} + \frac{1}{2}k\xi^2 = \text{cost.}$$

Inoltre, poiché la lagrangiana non dipende da ϑ, si ha un altro integrale primo:

$$p_\vartheta = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\vartheta} + \frac{3}{2}mR^2\dot{\vartheta} + m\xi^2\dot{\vartheta} - \frac{3}{2}mR\dot{\xi} = \text{cost.}$$

5. Per quanto riguarda le posizioni ordinarie, cercando i punti critici del potenziale si verifica immediatamente che tutte le posizioni per cui $\xi = 0$ sono di equilibrio. Poiché in queste posizioni il potenziale ha evidentemente un massimo, esse sono tutte stabili. Si può poi controllare (ed è facile farlo, ad esempio col PPV) che le posizioni di confine non risultano mai di equilibrio.

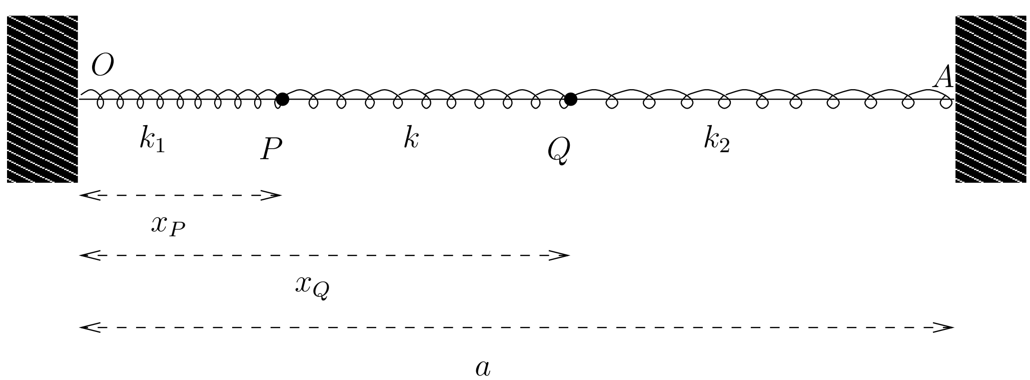
Prova scritta di Meccanica Razionale – Meccanica Analitica
Prima unità
Primo appello - 17 giugno 2003

Due punti materiali P, Q di masse m_P, m_Q rispettivamente, si muovono sul segmento OA di lunghezza a di una retta orizzontale liscia. Tra P e Q, O e P, Q e A agiscono tre forze elastiche di coefficienti positivi k, k_1, k_2 rispettivamente.
Assunti come parametri lagrangiani le ascisse x_P e x_Q dei due punti rispetto ad O, si chiede di determinare:

1. il potenziale del sistema;
2. le posizioni di equilibrio.

Nel caso $k_1 = k/2$, $k_2 = 2k/3$, $m_P = m_Q = m$, si chiede poi di:

3. discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio trovate;
4. determinare la lagrangiana del sistema;
5. trovare le equazioni differenziali del moto.



Risoluzione della prova del 17 giugno 2003 - prima unità

Il sistema ha due gradi di libertà, $x_P, x_Q \in [0, a]$. Essendo il moto su una retta orizzontale, non consideriamo la forza peso.

1. Il potenziale delle tre forze elastiche si scrive

$$U = -\frac{1}{2}k_1|P-O|^2 - \frac{1}{2}k|P-Q|^2 - \frac{1}{2}k_2|Q-A|^2 = \\ = -\frac{1}{2}\big(k_1 x_P^2 + k(x_Q - x_P)^2 + k_2(a - x_Q)^2\big).$$

2. Si verifica immediatamente che nelle posizioni di confine non ci sono punti di equilibrio. Per quanto riguarda le posizioni ordinarie, cerchiamo i punti critici del potenziale:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_P} = -(k_1 + k)x_P + kx_Q = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_Q} = -(k_2 + k)x_Q + kx_P + k_2 a = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che c'è una sola posizione di equilibrio

$$x_P = \frac{k_2 k a}{k_1 k + k_2 k + k_1 k_2}, \qquad x_Q = \frac{k_2(k_1 + k)a}{k_1 k + k_2 k + k_1 k_2}.$$

3. Nel caso $k_1 = k/2$ e $k_2 = 2k/3$, la posizione di equilibrio si scrive

$$x_P = \frac{4}{9}a, \qquad x_Q = \frac{2}{3}a,$$

e la matrice hessiana del potenziale è la matrice costante

$$\mathsf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}k & k \\ k & -\frac{5}{3}k \end{bmatrix};$$

poiché $\det \mathsf{H} = 3k^2/2 > 0$ e $\mathsf{H}_{11} < 0$, la posizione è stabile. In realtà, è facile verificare che per ogni valore di k, k_1, k_2 la posizione di equilibrio è stabile.

4. Essendo $m_P = m_Q = m$ e poiché si ha $\boldsymbol{v}_P = \dot{x}_P\, \boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{v}_Q = \dot{x}_Q\, \boldsymbol{i}$, l'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}_P^2 + \dot{x}_Q^2),$$

quindi la lagrangiana diventa, tralasciando i termini costanti,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}_P^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_Q^2 - \frac{3}{4}kx_P^2 + kx_P x_Q - \frac{5}{6}kx_Q^2 + \frac{2}{3}kax_Q.$$

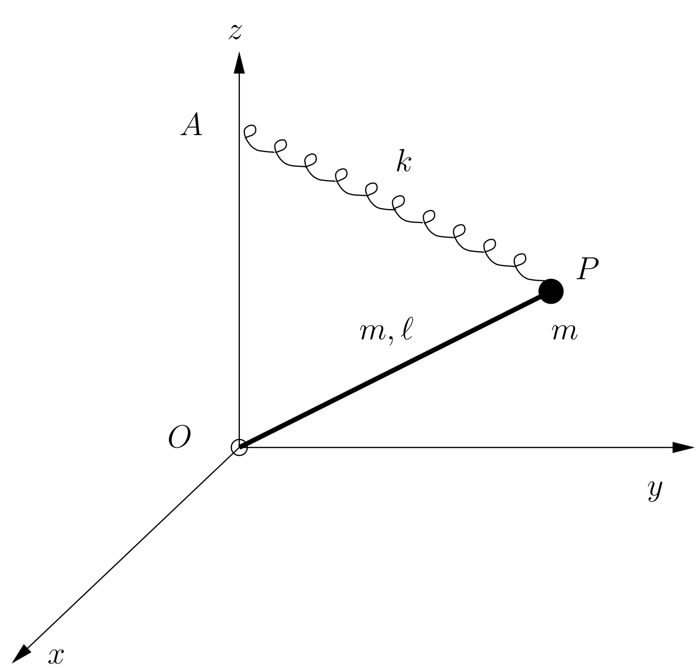
5. Infine, le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{cases} m\ddot{x}_P = -\frac{3}{2}kx_P + kx_Q \\ m\ddot{x}_Q = kx_P - \frac{5}{3}kx_Q + \frac{2}{3}ka\,. \end{cases}$$

Prova scritta di Meccanica Razionale – Meccanica Analitica
Seconda unità
Secondo appello - 15 luglio 2003

Si fissi nello spazio tridimensionale un sistema di riferimento ortogonale $Oxyz$ con l'asse z rivolto in senso opposto alla forza di gravità. Un'asta omogenea OP di massa m e lunghezza ℓ ha l'estremo O fissato nell'origine con una cerniera liscia. Nell'estremo P di tale asta è saldato un punto materiale di massa m. Su P agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto A di coordinate $(0, 0, \ell)$.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.
Si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio e la loro stabilità in funzione del parametro materiale $\lambda = \frac{mg}{kl}$;
2. la lagrangiana del sistema ed eventuali integrali primi;
3. nel caso in cui il sistema sia vincolato a muoversi nel piano xz, e ponendo $\lambda = 1$, si risolva l'equazione del moto linearizzata attorno alla posizione di equilibrio stabile.

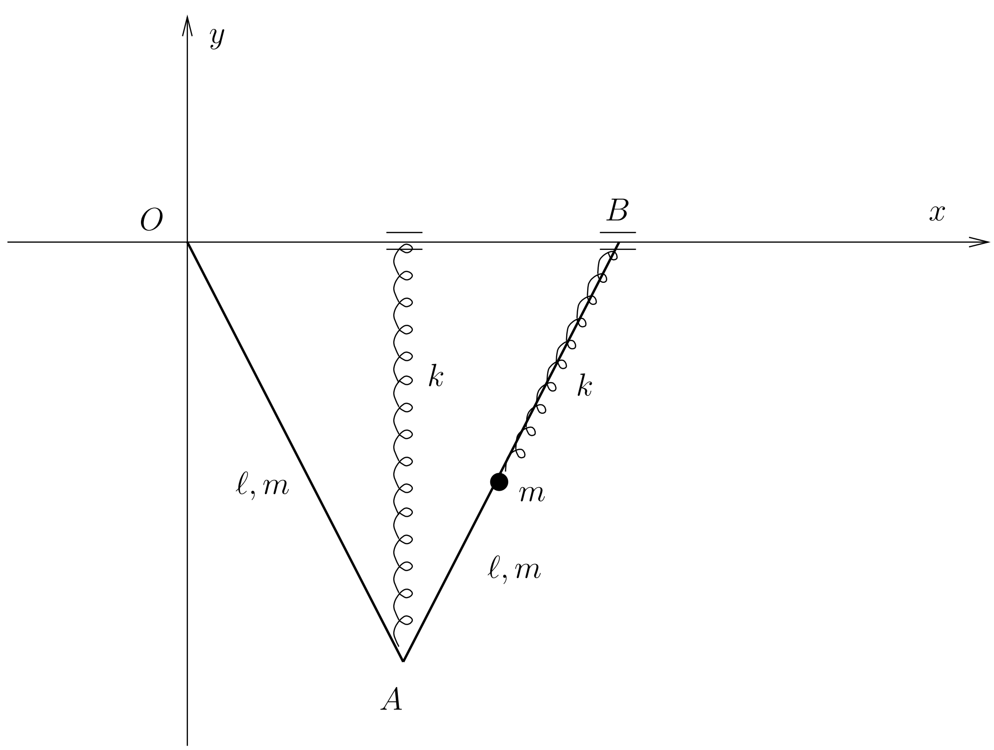


Prova scritta di Meccanica Analitica
Primo appello - 16 settembre 2003

Sia dato, in un piano verticale, un sistema di due aste omogenee OA e AB, entrambe di massa m e lunghezza ℓ, incernierate nell'estremo A. La prima asta è libera di ruotare attorno ad O, che coincide con l'origine di un sistema di riferimanto cartesiano ortogonale Oxy, mentre l'estremo B della seconda asta scorre sull'asse x. Inoltre, sull'asta AB scorre un punto materiale P di massa m.
Sul punto A agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto H dell'asse x che sta sulla verticale di A, mentre sul punto P agisce un'altra forza elastica del medesimo coefficiente k e polo l'estremo B.

Supposti tutti i vincoli lisci e ponendo $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di determinare:

1. l'esistenza e la stabilità delle posizioni di equilibrio del sistema in funzione del parametro λ;
2. la lagrangiana del sistema;
3. nel caso $\lambda = \frac{4}{5}$, le equazioni linearizzate del moto attorno ad una posizione di equilibrio stabile e le pulsazioni delle piccole oscillazioni.



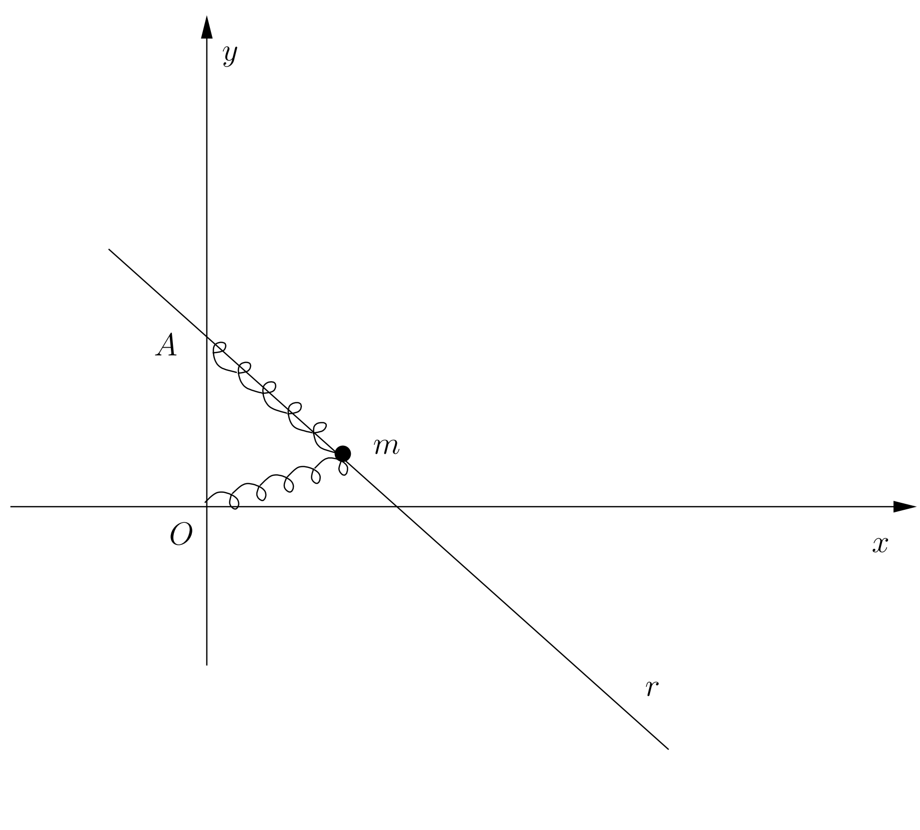
Prova scritta di Meccanica Razionale – Meccanica Analitica
Prima unità
Primo appello - 16 settembre 2003

In un piano verticale è fissato un sistema di riferimento Oxy, con l'asse y verticale ascendente. Lungo la retta r, passante per il punto $A(0, a)$, $a > 0$, e formante con l'asse x un angolo di $3\pi/4$, scorre in modo liscio un punto materiale P di massa m. Tale punto è sottoposto alla forza di gravità e a due forze elasitche di coefficiente $k > 0$ e poli i punto A e O. Inoltre, il piano verticale è posto in rotazione uniforme attorno all'asse y con velocità angolare di modulo ω.
Si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio di P e la loro stabilità;

2. la reazione vincolare dinamica in P;

3. l'equazione finita del moto di P.

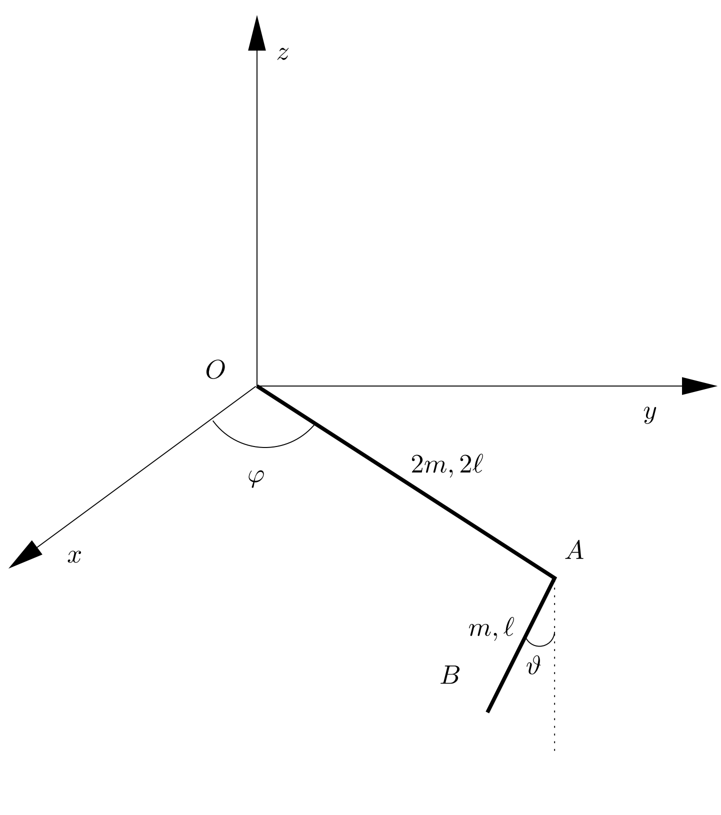


Prova scritta di Meccanica Analitica – Seconda unità
Secondo appello - 30 settembre 2003

Sia dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$. Un corpo rigido omogeneo è formato da due aste OA e AB, saldate ad angolo retto nel punto A. L'estremo O è incernierato nell'origine del sistema di riferimento, in modo che l'asta OA giaccia sempre nel piano xy. Inoltre l'asta OA è lunga 2ℓ ed ha massa $2m$, mentre l'asta AB è lunga ℓ ed ha massa m.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Supposti tutti i vincoli lisci e denotando con ϕ l'angolo formato dall'asse x con l'asta OA e con θ l'angolo formato dall'asta AB con la verticale, si chiede di determinare:

1. la matrice d'inerzia del corpo in un sistema di riferimento solidale centrato in O;
2. l'energia cinetica del sistema;
3. eventuali integrali primi del moto;
4. supponendo infine che una forza elastica di polo il punto $C(2\ell, 0, 0)$ e coefficiente $k > 0$ agisca su B, si trovino le posizioni di equilibrio del nuovo sistema.

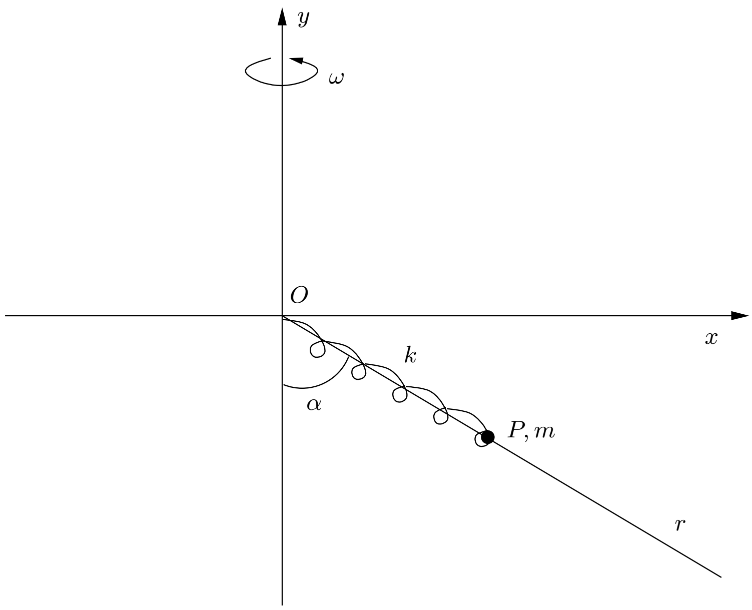


Prova scritta di Meccanica Razionale – Prima unità
Primo appello - 9 dicembre 2003

Primo esercizio

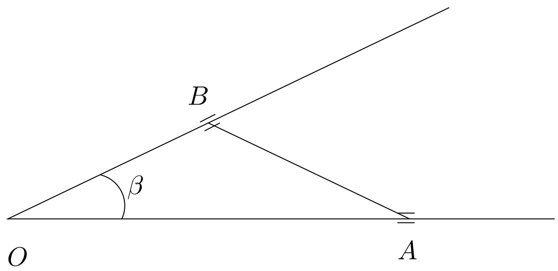
In un piano verticale, dotato di un sistema di riferimanto cartesiano ortogonale Oxy con l'asse y diretto verso l'alto, un punto materiale P di massa m, scorre in modo liscio su una semiretta r che forma un angolo $\alpha \in (0, \pi/2)$ con la verticale. Su tale punto agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine del sistema di riferimento. Inoltre, il piano verticale è posto in rotazione uniforme attorno all'asse y con velocità angolare di modulo ω.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.
Si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio del sistema, mettendo in evidenza quale relazione deve sussistere tra i parametri affinché il sistema ammetta infinite posizioni di equilibrio;
2. le reazioni vincolari nelle posizioni di equilibrio;
3. l'equazione del moto di P, sapendo che all'istante iniziale P si trova fermo nell'origine.



Secondo esercizio

Trovare l'equazione di base e rulletta del moto di un segmento AB che ha l'estremo A vincolato all'asse x e l'estremo B vincolato a una retta che forma un angolo β con l'asse x.

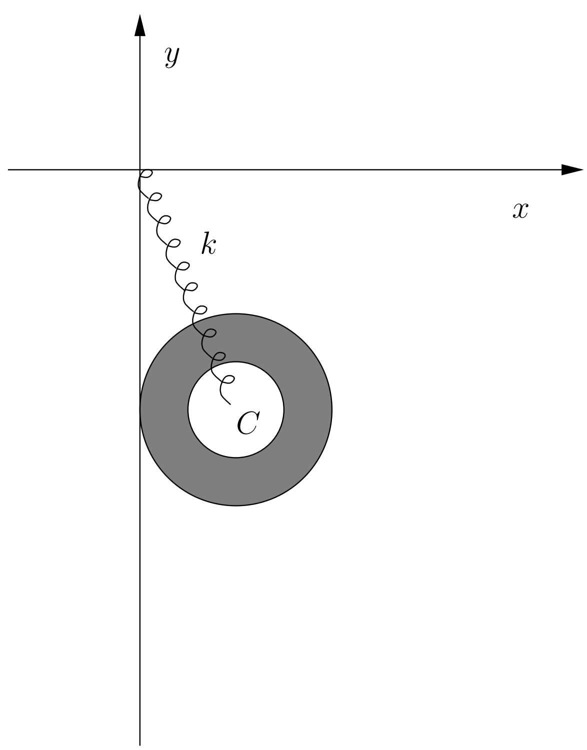


Prova scritta di Meccanica Analitica – Seconda unità
Secondo appello - 13 gennaio 2004

In un piano verticale, sia dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy. Una lamina omogenea di massa m è formata da una corona circolare di raggio esterno R e interno $R/2$. Il centro C di tale corona è sottoposto all'azione di una forza elastica di polo l'origine e coefficiente $k > 0$. Inoltre, tale corona rotola senza strisciare lungo l'asse delle ordinate.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio della lamina;
2. lo studio della loro stabilità;
3. l'equazione del moto della lamina;
4. l'equazione linearizzata del moto attorno a una posizione di equilibrio stabile e le pulsazioni delle piccole oscillazioni.

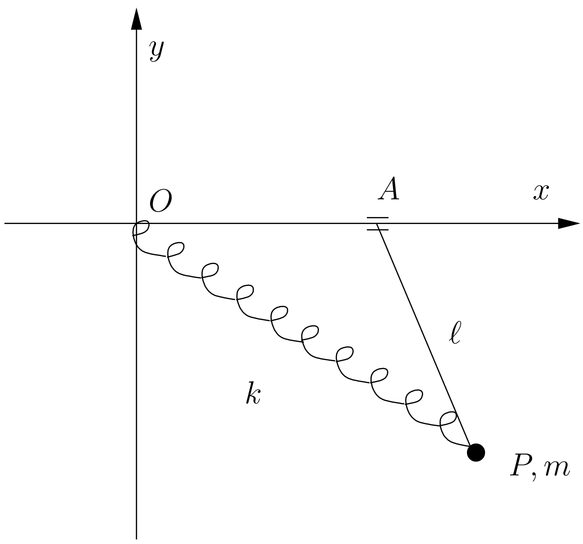


Prova scritta di Meccanica Razionale – Prima unità
Secondo appello - 13 gennaio 2004

Primo esercizio

In un piano verticale, dotato di un sistema di riferimanto cartesiano ortogonale Oxy con l'asse y diretto verso l'alto, un punto materiale P di massa m è saldato all'estremo di un'asta AP di lunghezza ℓ e massa trascurabile. L'estremo A dell'asta scorre sull'asse x in modo liscio. Sul punto P agische, oltre alla forza peso, una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine del sistema di riferimento. Si ponga $\lambda = \dfrac{mg}{kl}$.
Si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio del sistema al variare di λ;
2. le reazioni vincolari nelle posizioni di equilibrio;
3. le nuove posizioni di equilibrio se il piano verticale viene posto in rotazione uniforme con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse delle ordinate.



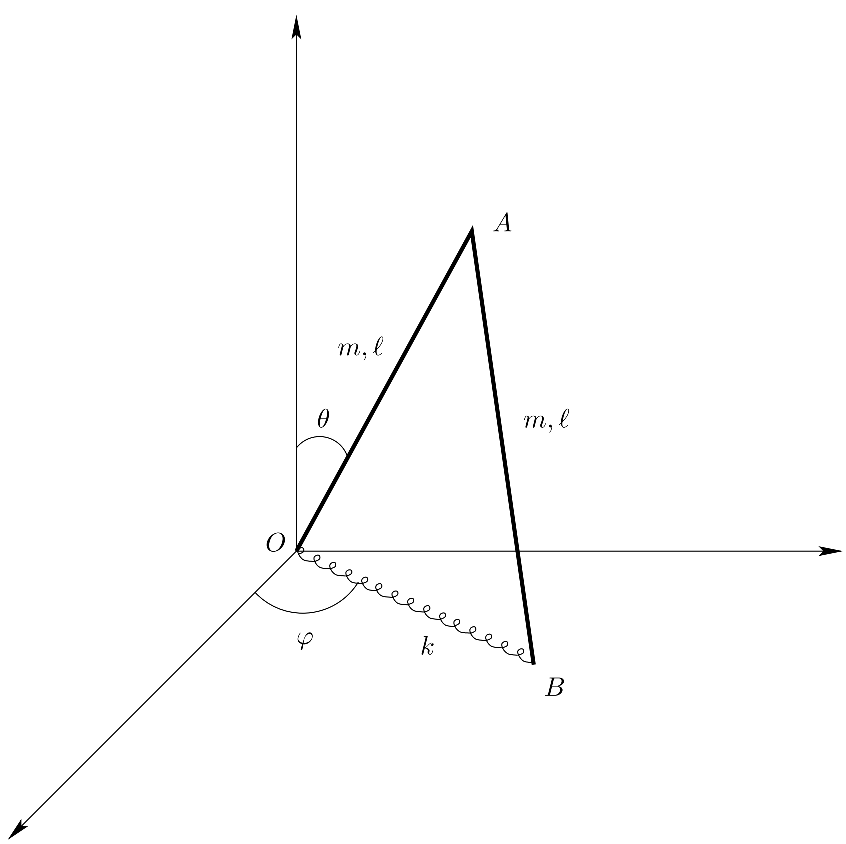
Secondo esercizio

Trovare la base e la rulletta del moto di un segmento che ruota uniformemente con velocità angolare ω intorno a un suo estremo A, mentre A percorre una retta con velocità costante v.

Prova scritta di Meccanica Analitica – Seconda unità
Primo appello - 23 marzo 2004

In un piano verticale, un sistema di due aste OA e AB , entrambe di massa m e lunghezza ℓ, è fatto in modo che l'estremo O sia fisso mentre B si possa muovere sulla retta orizzontale passante per O. L'estremo A è una cerniera tra le due aste e deve mantenersi sempre ad una quota positiva. Il piano verticale è libero di ruotare attorno ad una retta verticale passante per O. Tra il punto fisso O e l'estremo B intercorre una forza elastica di costante $k > 0$. Tutti i vincoli sono lisci e il sistema è soggetto alla forza peso.
Denotando con $\theta \in (0, \pi/2)$ l'angolo che l'asta OA forma con la verticale e con $\varphi \in [0, 2\pi)$ l'angolo tra il piano delle due aste e un piano verticale fisso, si chiede di determinare:

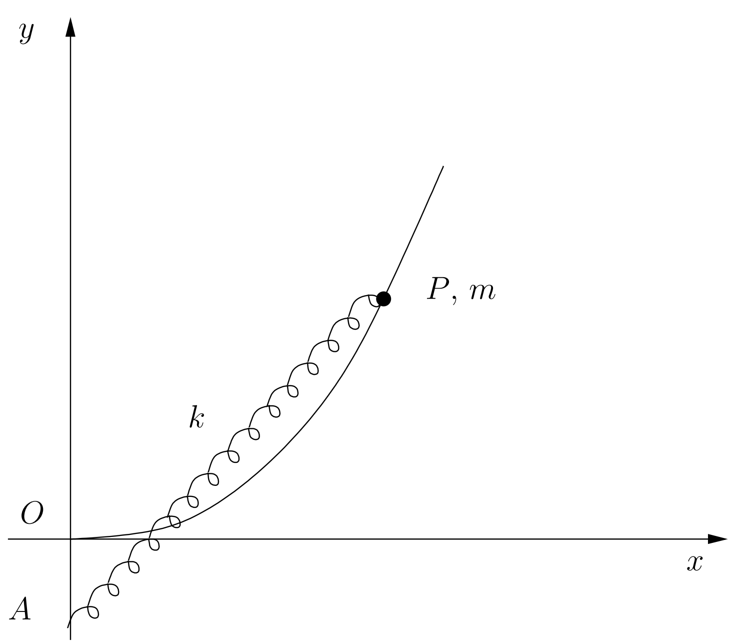
1. l'energia cinetica del sistema;
2. posto $\lambda = \frac{mg}{4k\ell}$, le posizioni di equilibrio e la loro stabilità;
3. eventuali integrali primi del sistema;
4. le equazioni del moto.



Prova scritta di Meccanica Razionale – Prima unità
Primo appello - 23 marzo 2004

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano Oxy in un piano verticale, con l'asse y orientato verso l'alto. Nel semipiano delle ascisse positive, una guida liscia segue il profilo della parabola di equazione $y = ax^2$, $a > 0$. Un punto materiale P di massa m può scorrere sulla guida ed è sottoposto, oltre alla forza peso, ad una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto $A = \left(0, -\frac{1}{a}\right)$. Si chiede di determinare:

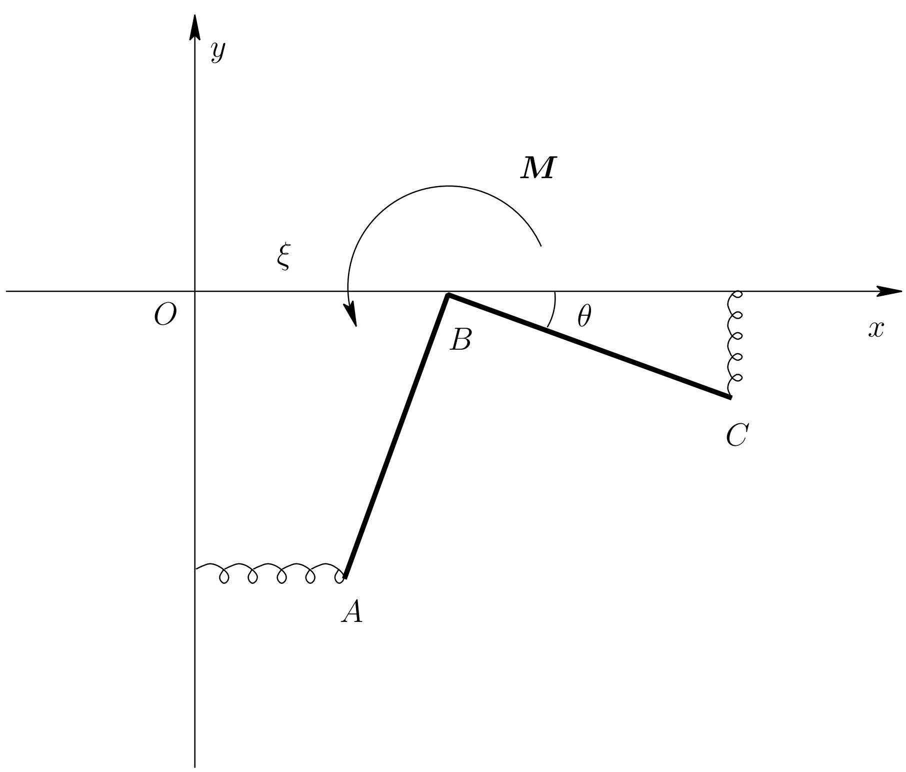
1. le posizioni di equilibrio di P;
2. la reazione vincolare nelle posizioni di equilibrio;
3. l'equazione differenziale del moto di P;
4. le posizioni di equilibrio relativo di P, nel caso in cui la guida ruoti con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse delle ordinate.



Prova scritta di Meccanica Analitica – Seconda unità
Secondo appello - 6 aprile 2004

In un piano verticale, due aste AB e BC, entrambe di massa m e lunghezza ℓ, sono saldate ad angolo retto nell'estremo B. Tale estremo B può scorrere in modo liscio sull'asse orizzontale di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy e il sistema delle due aste può ruotare liberamente attorno a B. Si denoti con ξ l'ascissa di B e con θ l'angolo tra l'asta BC e l'asse x.
Sull'estremo A agisce una forza elastica di coefficiente k, che ha polo sull'asse y in modo da mantenersi sempre orizzontale. Allo stesso modo, sull'estremo C agisce una seconda forza elastica sempre verticale di coefficiente k e polo sull'asse x. Sul corpo rigido agisce poi una coppia di forze di momento $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2} mg\ell \sin\theta$. Inoltre il sistema è soggetto alla forza peso.
Avendo posto $\lambda = \frac{mg}{2k\ell}$, si chiede di determinare:

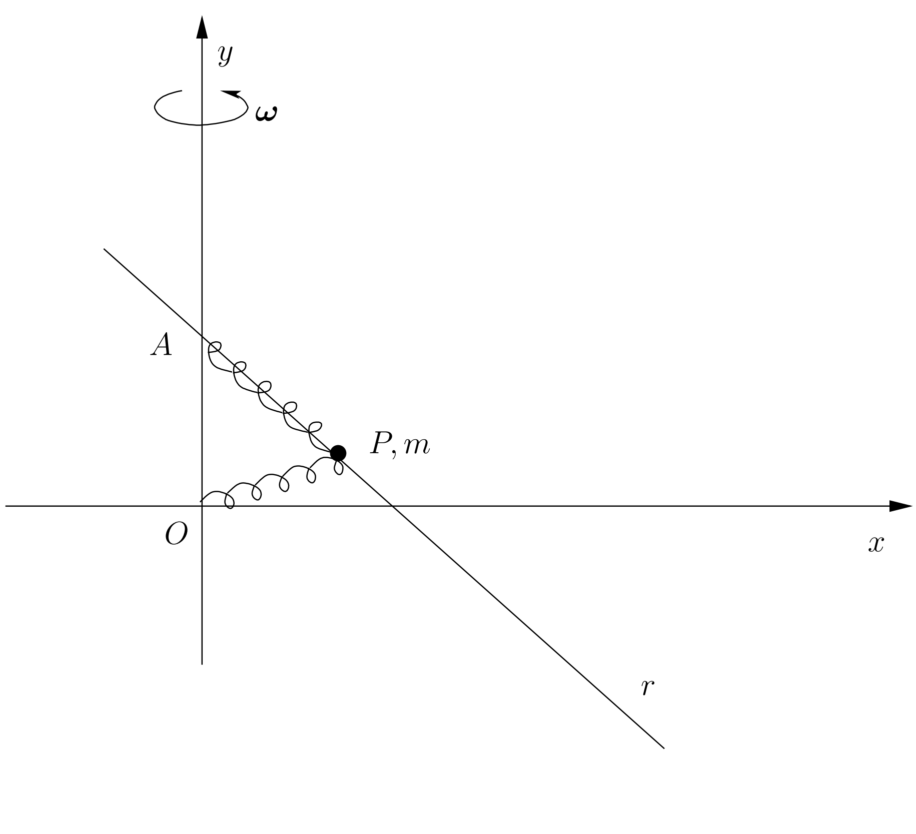
1. le posizioni di equilibrio del sistema;
2. la stabilità di tali posizioni al variare di λ;
3. la lagrangiana del sistema;
4. nel caso $\lambda < 1$, le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



Prova scritta di Meccanica Razionale – Meccanica Analitica
Prima unità
Secondo appello - 6 aprile 2004

In un piano verticale è fissato un sistema di riferimento Oxy, con l'asse y verticale ascendente. Lungo la retta r, passante per il punto $A(0, a)$, $a > 0$, e formante con l'asse x un angolo di $3\pi/4$, scorre in modo liscio un punto materiale P di massa m. Tale punto è sottoposto alla forza di gravità e a due forze elasitche di coefficiente $k > 0$ e poli i punto A e O. Inoltre, il piano verticale è posto in rotazione uniforme attorno all'asse y con velocità angolare di modulo ω.
Si chiede di determinare:

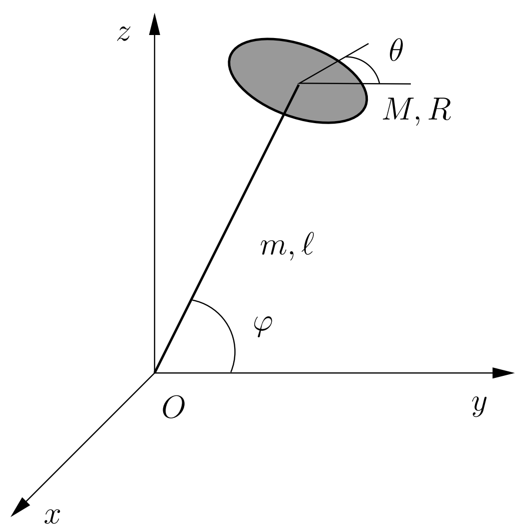
1. le posizioni di equilibrio di P e la loro stabilità;
2. la reazione vincolare dinamica in P;
3. l'equazione finita del moto di P.



Prova scritta di Meccanica Analitica – Seconda unità
Primo appello - 15 giugno 2004

Un corpo rigido è formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R al cui centro è saldata un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ, in modo che l'asta sia ortogonale al piano del disco. L'estremo libero dell'asta è fisso nell'origine di un sistema di riferimento $Oxyz$ e il corpo rigido può muoversi attorno a tale estremo in modo che l'asta resti sempre nel piano verticale yz. Si denoti con φ l'angolo che l'asta forma con l'asse y e con θ l'angolo di rotazione del disco attorno al proprio asse ortogonale.
Sapendo che il sistema è soggetto alla forza peso, si chiede di determinare:

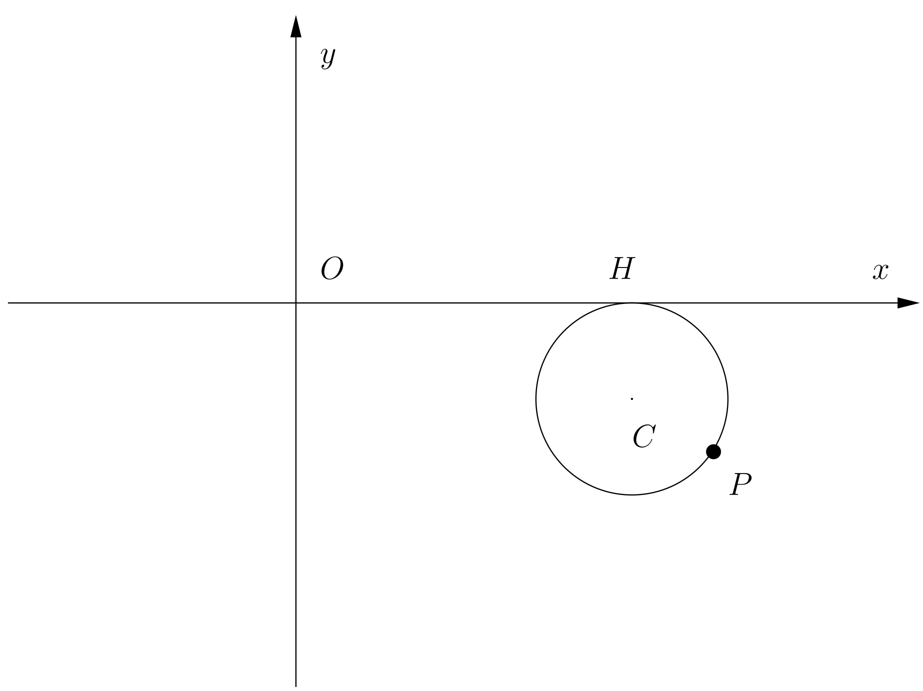
1. le posizioni di equilibrio;
2. la stabilità di tali posizioni;
3. la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto;
4. le soluzioni, se esistono, del tipo $\varphi =$ cost. e $\dot{\theta} =$ cost.



Prova scritta di Meccanica Razionale
Prima unità
Secondo appello - 13 luglio 2004

In un piano verticale è fissato un sistema di riferimento Oxy, con l'asse y verticale ascendente. Una guida circolare di massa trascurabile e raggio R è vincolata a rotolare senza strisciare al di sotto dell'asse delle ascisse; su tale guida è saldato un punto materiale P di massa m.
Supponendo che P si trovi nell'origine quando il centro della guida è sull'asse dell ordinate, si chiede di determinare:

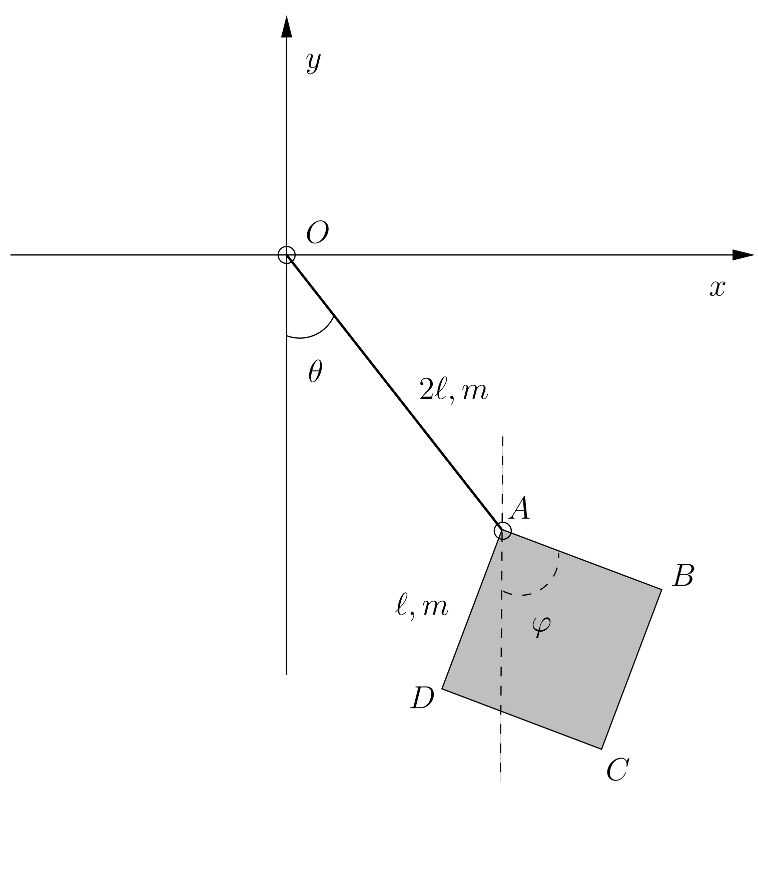
1. le posizioni di equilibrio di P e la loro stabilità;
2. la reazione vincolare nelle posizioni di equilibrio;
3. l'energia totale di P lungo il moto;
4. la traiettoria di P.



Prova scritta di Meccanica Analitica – Seconda unità
Primo appello - 3 settembre 2004

In un piano verticale, un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza 2ℓ ruota attorno al suo estremo O che è fisso nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy. Una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di massa m e lato ℓ è appesa per il vertice A all'asta ed è libera di ruotare attorno a tale vertice.
Si denotino rispettivamente con θ e φ gli angoli formati dall'asta OA e dal lato AB con l'asse verticale.
Sapendo che il sistema è soggetto alla forza peso e che tutti i vincoli sono lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio del sistema;
2. la stabilità di tali posizioni;
3. la lagrangiana del sistema;
4. le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



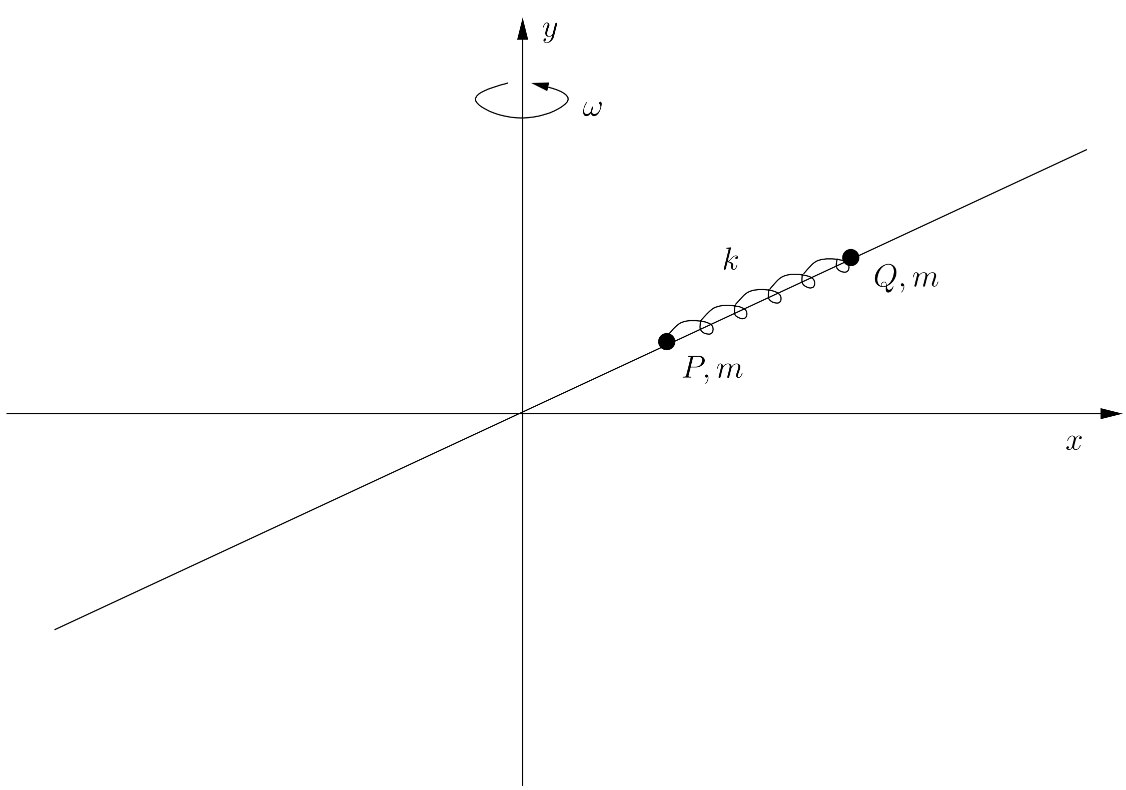
Prova scritta di Meccanica Razionale – Prima unità
Primo appello - 3 settembre 2004

In un piano verticale, dotato di un sistema di riferimanto cartesiano ortogonale Oxy con l'asse y diretto verso l'alto, due punti materiali P e Q, entrambi di massa m, scorrnon in modo liscio su una guida rettilinea di equazione $y = ax$ ($a \in \mathbb{R}$). Tra i due punti intercorre una forza elastica di coefficiente $k > 0$. Inoltre, tale piano verticale è posto in rotazione uniforme attorno all'asse y con velocità angolare di modulo ω.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.
Si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio del sistema, mettendo in evidenza quale relazione deve sussistere tra i parametri affinché il sistema ammetta infinite posizioni di equilibrio;

2. le reazioni vincolari nelle posizioni di equilibrio;

3. la lagrangiana del sistema e le equazioni differenziali del moto.



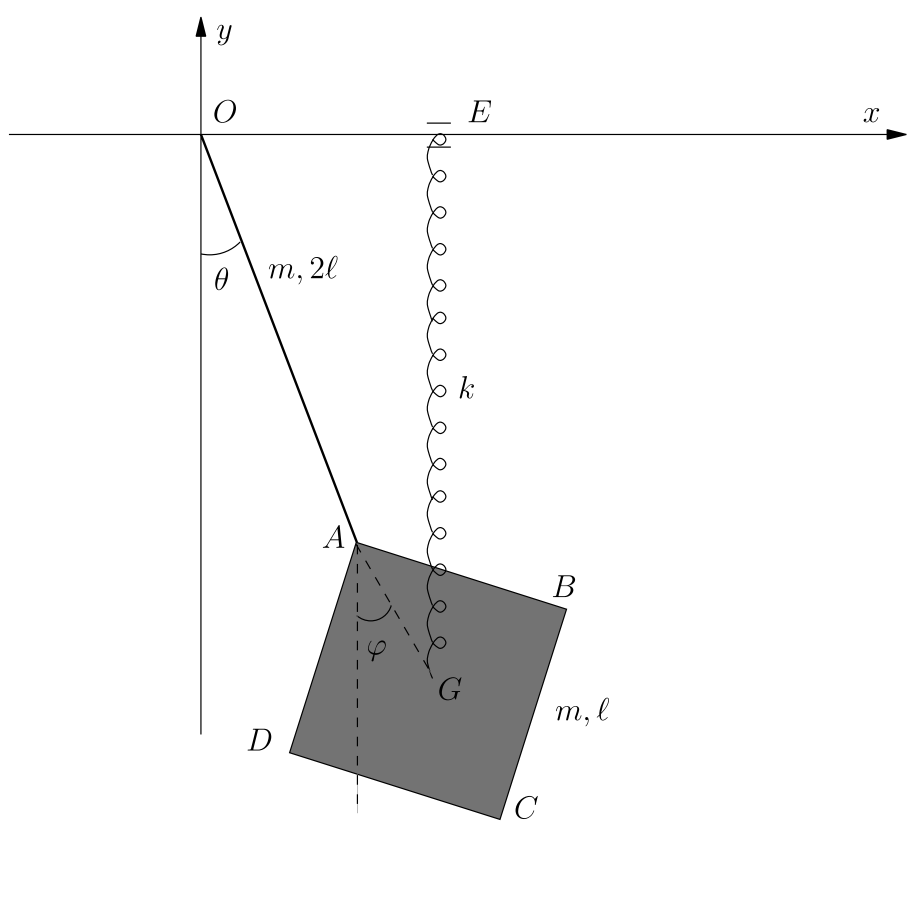
Prova scritta di Meccanica Analitica – Seconda unità
Secondo appello - 21 settembre 2004

In un piano verticale, un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza 2ℓ è libera di ruotare attorno al proprio estremo O. Una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di lato ℓ e massa m ha il vertice A coincidente con l'estremo libero dell'asta ed è libera di ruotare attorno a tale vertice. Sul centro G della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto E che si trova alla stessa quota di O. Tale forza elastica si mantiene sempre verticale.

Si denotino rispettivamente con θ e φ gli angoli formati dalla verticale discendente con l'asta OA e col segmento AG. Si ponga inoltre $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$.

Sapendo che il sistema è soggetto alla forza peso e supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

1. per quali valori di λ esistono infinite posizioni di equilibrio;
2. la stabilità della posizione $\theta = 0, \varphi = 0$ al variare di λ;
3. la lagrangiana del sistema;
4. nel caso $\lambda = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, le equazioni linearizzate del moto attorno alla posizione di equilibrio stabile.



Prova scritta di Meccanica Razionale – Prima unità
Secondo appello - 21 settembre 2004

Si fissi un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ con l'asse z diretto verso l'alto. Sulla superficie di equazione

$$z = ax^2 + by^2 \qquad a > 0,\, b > 0$$

si muove il punto materiale P di massa m.
Supponendo il vincolo liscio, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio di P;
2. la reazione vincolare nelle posizioni di equilibrio;
3. le equazioni differenziali del moto di P.

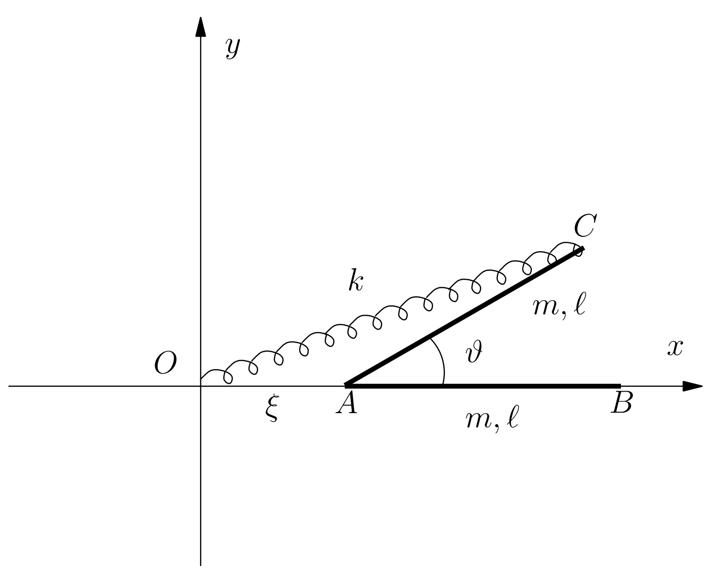
Supponendo poi che il sistema sia posto in rotazione uniforme attorno all'asse z con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$, si chiede di determinare per quali valori dei parametri esistono infinite posizioni di equlibrio.

Prova scritta di Meccanica Analitica – Seconda unità
Primo appello - 14 dicembre 2004

In un piano verticale, due aste omogenee AB e AC, entrambe di massa m e lunghezza ℓ, sono incernierate nell'estremo comune A. Inoltre l'asta AB è vincolata a scorrere sull'asse delle ascisse di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy.
Sull'estremo libero C dell'asta AC agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto O.
Si denoti con ξ l'ascissa di A e con ϑ l'angolo formato dall'asta AC con l'asse delle ascisse.
Si ponga inoltre $\lambda = \dfrac{mg}{k\ell}$.

Sapendo che il sistema è soggetto alla forza peso e supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio del sistema;
2. la stabilità di tali posizioni al variare di λ;
3. la lagrangiana del sistema;
4. nel caso $\lambda = 3$, le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



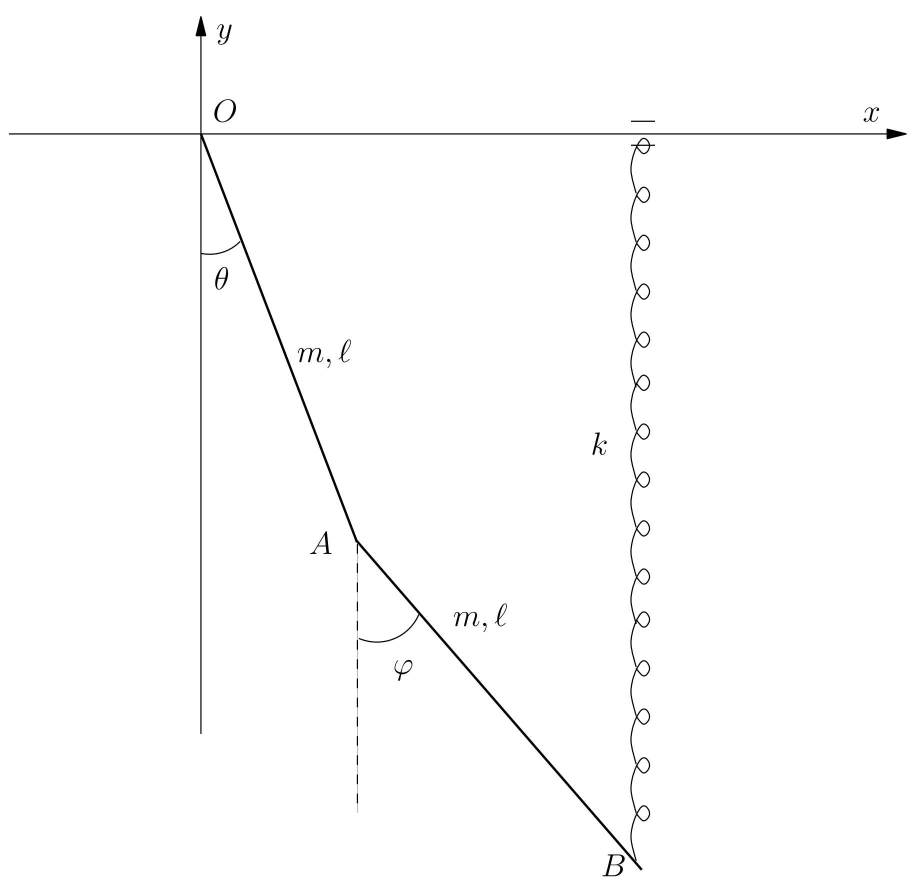
Prova scritta di Meccanica Analitica – Seconda unità
Secondo appello - 11 gennaio 2005

In un piano verticale, un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza ℓ è libera di ruotare attorno al proprio estremo O. Un'altra asta AB, uguale alla precedente, è incernierata all'estremo libero A ed è libera di ruotare attorno ad esso. Sull'estremo B dell'asta AB agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse delle ascisse. Tale forza elastica si mantiene sempre verticale.

Si denotino rispettivamente con θ e φ gli angoli formati dalla verticale discendente con l'asta OA e AB. Si ponga inoltre $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$.

Sapendo che il sistema è soggetto alla forza peso e supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio del sistema;
2. la stabilità di tali posizioni al variare di λ;
3. la lagrangiana del sistema;
4. nel caso $\lambda = 5$, le equazioni linearizzate del moto attorno alla posizione di equilibrio stabile.



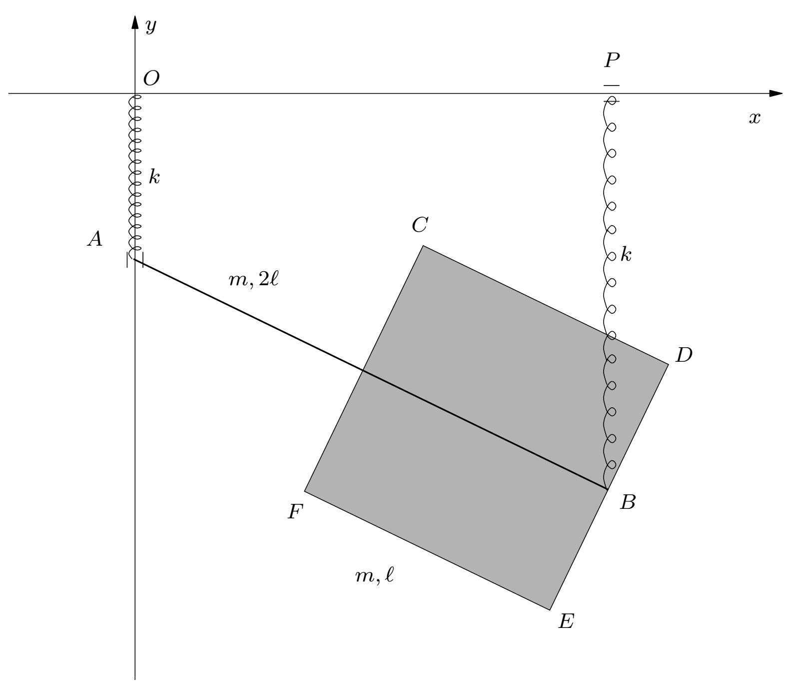
Prova scritta di Meccanica analitica -
Meccanica analitica ed elementi di meccanica statistica
Primo appello - 22 marzo 2005

1) Un corpo rigido è formato da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ a cui è saldata una lamina quadrata omogenea $CDEF$ di lato ℓ e massa m, in modo che i punti medi dei lati DE e CF coincidano rispettivamente con l'estremo B e con il punto medio dell'asta.

Tale corpo rigido è libero di ruotare in un piano attorno al proprio estremo A, il quale scorre sull'asse verticale di un sistema di riferimento Oxy. Sul punto A agisce una forza elastica di coefficiente k e polo l'origine O, mentre sul punto B agisce un'altra forza elastica del medesimo coefficiente k e polo il punto P giacente sull'asse delle ascisse, in modo che tale forza resti sempe verticale. Inoltre sul corpo rigido agisce la forza peso.

Ponendo $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ e supponendo tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio del sistema;
2. la stabilità di tali posizioni al variare di λ;
3. la lagrangiana del sistema.



2) Determinare la funzione di Hamilton associata alla lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}(2\dot{x}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi + \ell^2\dot{\phi}^2) + mg\ell\cos\phi$$

e dedurre eventuali integrali primi del moto.

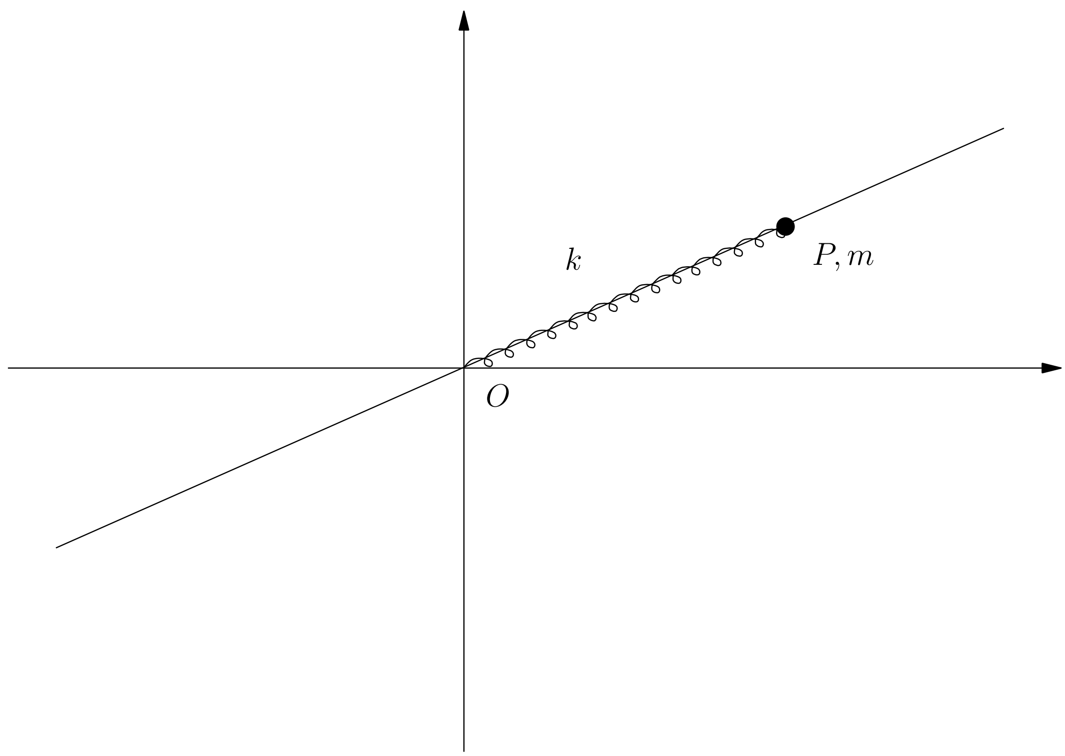
Prova scritta di Meccanica analitica -
Meccanica analitica ed elementi di meccanica statistica
Secondo appello - 12 aprile 2005

In un piano, si consideri una guida rettilinea liscia libera di ruotare attorno al suo punto fisso O. Su tale guida si muove un punto materiale P di massa m, il quale è sottoposto ad una forza elastica di polo il punto O e coefficiente $k > 0$.

Supponendo il piano verticale, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio di P e la loro stabilità;

2. le equazioni differenziali del moto.



Supponendo invece il piano orizzontale (ovvero trascurando l'azione della forza peso), si chiede di:

3 determinare due integrali primi del moto;

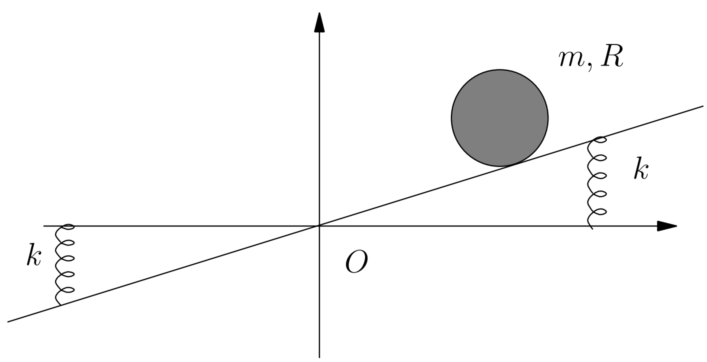
4 studiare, anche solo qualitativamente, il moto di P;

5 trovare esplicitamente tutti i possibili moti con condizione iniziale $P \equiv O$ per $t = 0$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Meccanica analitica ed elemanti di meccanica statistica 2
Primo appello - 20 giugno 2005

1) Sia dato un piano verticale e un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy con l'asse y diretto verso l'alto.
Una guida rettilinea priva di massa ha un punto fisso coincidente con O ed è libera di ruotare attorno ad esso. Su tale guida rotola senza strisciare (e senza distaccarsi) un disco di massa m e raggio R. Inoltre sui punti A e B della guida opposti rispetto ad O e a distanza ℓ da esso agiscono due forze elastiche verticali di coefficiente $k > 0$ e poli sull'asse delle ascisse.
Sapendo che il sistema è soggetto alla forza peso, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio;
2. la stabilità di tali posizioni;
3. la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.



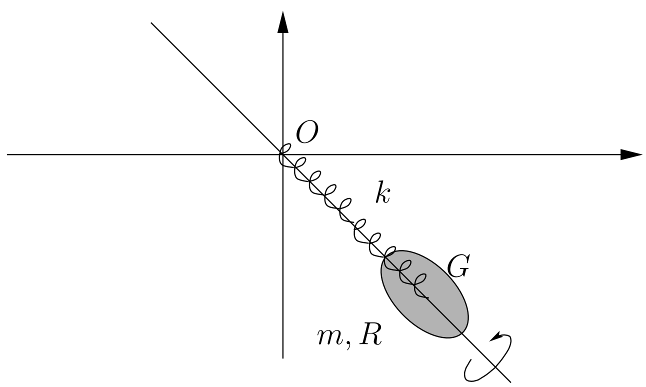
2) **(Meccanica analitica - CdL in Matematica)** Si determini per quali valori del parametro k la funzione
$$\phi_k(x;t) = \frac{x + \operatorname{tg} t}{1 - kx \operatorname{tg} t}$$
soddisfa le proprietà dei semigruppi continui.
[Si ricordi la formula di addizione della tangente: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$.]

2) **(Mecc. anal. el. mecc. stat. 2 - CdL in Fisica)** Determinare per quali valori di α la seguente trasformazione è canonica:
$$\begin{cases} P = 2pe^{\alpha q} \\ Q = \dfrac{1}{2} e^{-\alpha q}\,. \end{cases}$$
Nei casi in cui la trasformazione sia canonica, trovarne la funzione generatrice.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Meccanica analitica ed elemanti di meccanica statistica 2
Secondo appello - 12 luglio 2005

1) Si consideri un piano verticale dotato di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy con l'asse y diretto verso l'alto.
Un disco di massa m e raggio R è vincolato a mantenere il diametro AB su su una guida rettilinea di equazione $x+y=0$, ed è libero di ruotare attorno a tale diametro. Sul centro G agisce una forza elastica di coefficiente $k>0$ e polo O.
Sapendo che il sistema è soggetto alla forza peso, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio;
2. la stabilità di tali posizioni;
3. la lagrangiana del sistema e gli integrali primi del moto.



2) **(Meccanica analitica - CdL in Matematica)** Si determini per quali valori del parametro k la funzione

$$\phi_k(x;t) = \frac{kx}{k+tx}$$

soddisfa le proprietà dei semigruppi continui per $x \geq 0$ e $t \geq 0$.

2) **(Mecc. anal. el. mecc. stat. 2 - CdL in Fisica)** Determinare per quali valori di $\alpha \neq 0$ la seguente trasformazione è canonica:

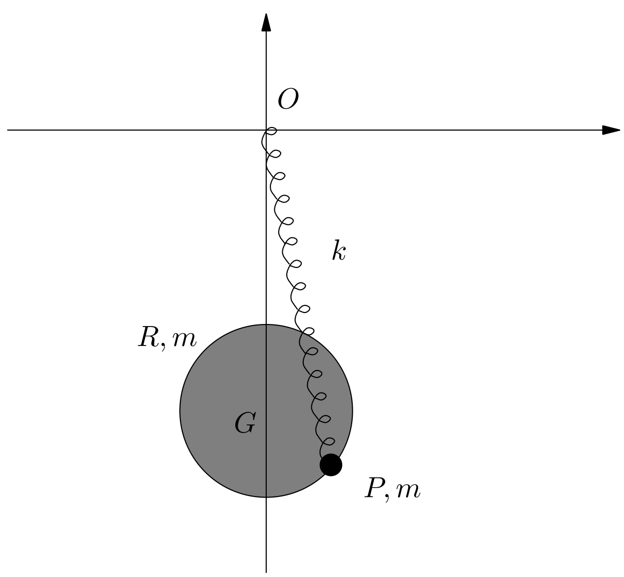
$$\begin{cases} P = \alpha p e^{q} \\ Q = \dfrac{1}{\alpha} e^{-q}\,. \end{cases}$$

Nei casi in cui la trasformazione sia canonica, trovarne la funzione generatrice.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Meccanica analitica ed elementi di meccanica statistica 2
Secondo appello - 27 settembre 2005

1) Si consideri un piano verticale dotato di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy con l'asse y diretto verso l'alto.
Il centro G di un disco omogeneo di massa m e raggio R è vincolato a scorrere sull'ase y. Un punto materiale P di massa m è saldato sul bordo del disco ed è sottoposto all'azione di una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine del sistema di riferimento.
Sapendo che il sistema è soggetto alla forza peso e che i vincoli sono lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio;
2. la stabilità di tali posizioni;
3. la lagrangiana del sistema e le equazioni differenziali del moto.



2) **(Meccanica analitica - CdL in Matematica)** Si determini per quali valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\phi_{h,k}(x;t) = \frac{hxe^t}{1 + x - kxe^t}$$

soddisfa le proprietà dei semigruppi continui.

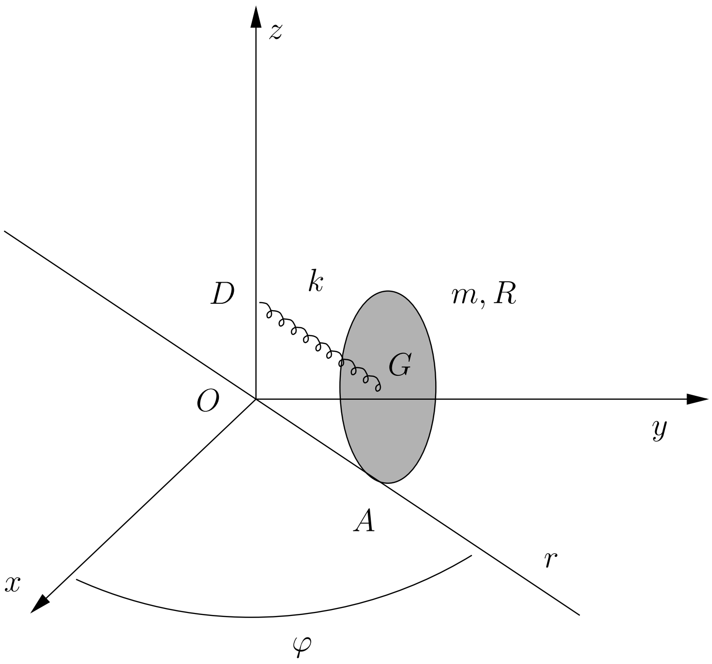
2) **(Meccanica analitica ed elementi di meccanica statistica 2 - CdL in Fisica)** Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} Q = 2\alpha p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}} \\ P = p^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} \,. \end{cases}$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 23 marzo 2006

1) Un disco di massa m e raggio R rotola senza strisciare su una guida rettilinea r che giace nel piano orizzontale e passa per l'origine di un sistema di riferimento $Oxyz$. Il disco giace sempre in un piano verticale e la guida può ruotare liberamente attorno ad O. Si chiami φ l'angolo formato dalla guida con l'asse x e si denoti con ξ l'ascissa rispetto a r del punto A di contatto tra il disco e il piano xy.
Sul centro G del disco agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto D di coordinate $(0, 0, R)$.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Si chiede di:

1. trovare la lagrangiana del sistema e gli integrali primi del moto;
2. nel caso $\varphi \equiv 0$, risolvere l'equazione differenziale del moto;
3. sempre nel caso $\varphi \equiv 0$, trovare la reazione vincolare dinamica.



2) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} Q = 3kq^{-\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}} \\ P = -q^{\frac{5}{3}}p^{\frac{2}{3}} \, . \end{cases}$$

Nei casi in cui la trasformazione sia canonica, trovarne una funzione generatrice.

3) Classificare le orbite attorno all'origine del sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + 4y \\ \dot{y} = x + \mu y \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq \pm 2$.

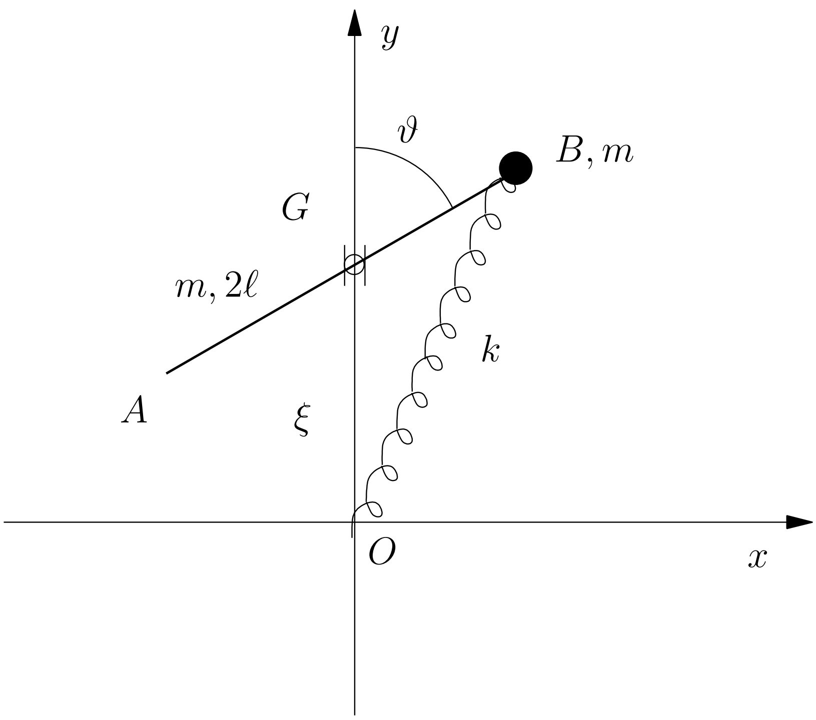
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello dell'11 aprile 2006

1) In un piano verticale si consideri un corpo rigido formato da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ al cui estremo B è saldato un punto materiale di massa m. Il punto medio G dell'asta scorre in modo liscio sull'asse verticale di un sistema di riferimento Oxy e l'asta può ruotare in modo liscio attorno a G. Sull'estremo B agisce una forza elastica di polo il punto O e coefficiente $k > 0$. Inoltre, tutto il sistema è soggetto alla forza peso.
Si denoti con ξ l'ordinata di G e con ϑ l'angolo formato dall'asta con l'asse y. Posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di determinare, in funzione di λ:

(a) le posizioni di equilibrio del corpo rigido;

(b) la stabilità delle posizioni di equilibrio;

(c) le equazioni differenziali del moto.



2) Determinare per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} Q = \log\left(\dfrac{p}{k\cos q}\right) \\ P = -h\,p\tan q\,. \end{cases}$$

Nei casi in cui la trasformazione sia canonica, trovarne la funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$.

3) Si determini per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

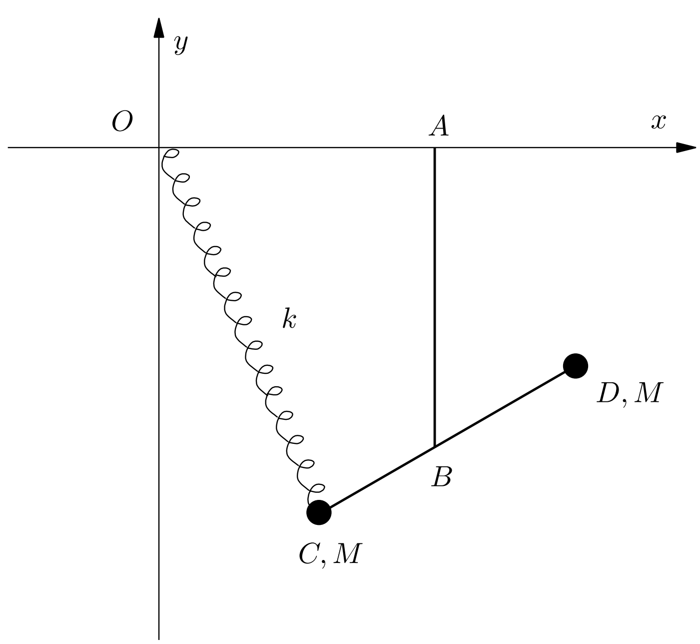
$$\phi_\alpha(x; t) = \alpha + \sqrt{2t + (x+3)^2}$$

è un semigruppo continuo per $t \geq 0$, $x \geq -3$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Meccanica analitica ed elementi di meccanica statistica 2
Secondo appello - 18 luglio 2006

1) Si consideri un piano verticale dotato di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy con l'asse y diretto verso l'alto.
Un'asta AB di massa m e lunghezza ℓ ha l'estremo A che scorre sull'asse x e si muove nel semipiano $y \leq 0$ restando sempre ortogonale a tale asse. All'estremo B è vincolato il punto medio di un'asta CD uguale alla precedente e che può ruotare liberamente attorno a B. Inoltre agli estremi C e D sono saldati due punti materiali, entrambi di massa M. Su C agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O del sistema di riferimento.
Sapendo che il sistema è soggetto alla forza peso e che i vincoli sono lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio;
2. la stabilità di tali posizioni;
3. la lagrangiana del sistema;
4. il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse passante per l'asta AB (in funzione della posizione del sistema).



2) Determinare per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} Q = \log p - \log \cos q + k \\ P = (h+1)p \operatorname{tg} q \,. \end{cases}$$

Nei casi in cui la trasformazione sia canonica, trovarne la funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 5 settembre 2006

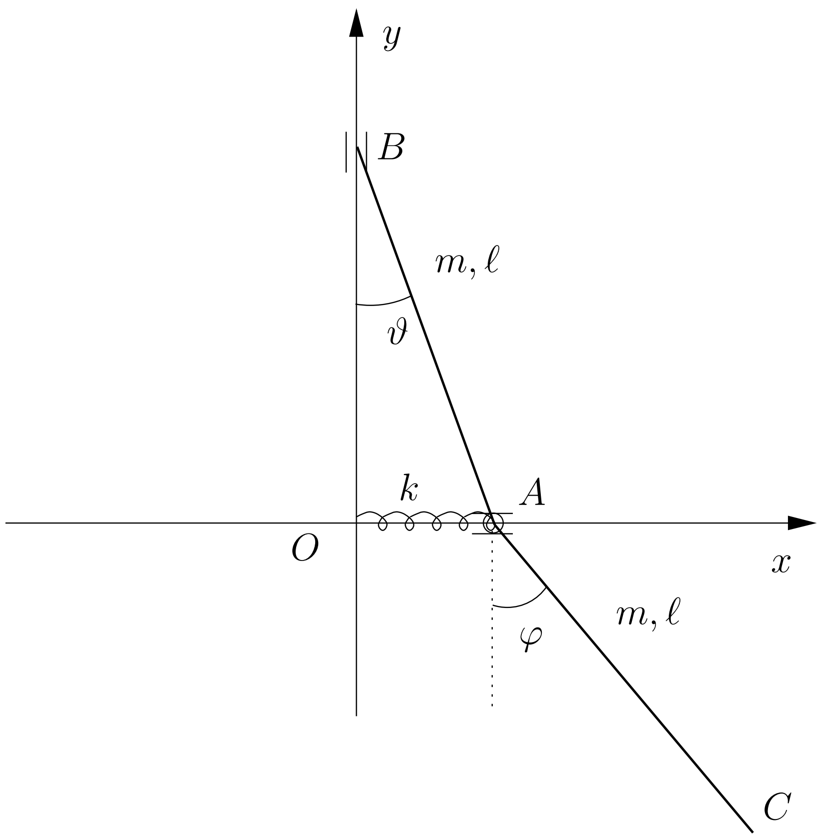
1) In un piano verticale si muove un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza ℓ, in modo che l'estremo A scorra sull'asse x e l'estremo B sull'asse y. All'estremo A è incernierata una seconda asta AC, identica alla prima, e libera ruotare attorno ad A. Inoltre, sull'estremo A agisce una forza elastica di polo il punto O e coefficiente $k > 0$. Tutto il sistema è soggetto alla forza peso.
Si denoti con ϑ l'angolo formato dall'asta AB con l'asse y e con φ l'angolo formato dall'asta AC con la verticale. Posto $\lambda = \frac{mg}{2k\ell}$ e supposti tutti i vincoli lisci, si chiede di determinare, in funzione di λ:

(a) le posizioni di equilibrio del corpo rigido;

(b) la stabilità delle posizioni di equilibrio;

(c) la lagrangiana del sistema;

(d) le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} Q = \log\left(\dfrac{p}{q}\right) \\ P = k\, qp\,. \end{cases}$$

Nei casi in cui la trasformazione sia canonica, trovarne la funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 14 dicembre 2006

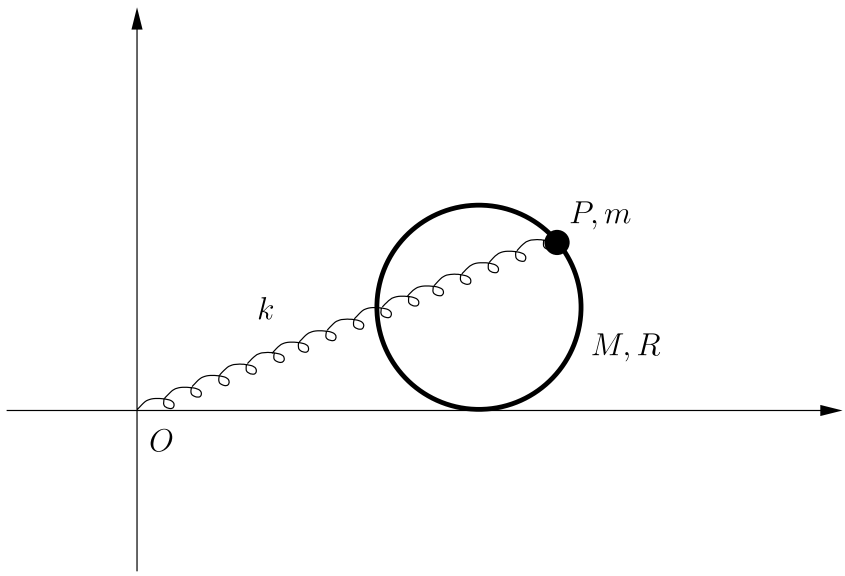
1) In un piano verticale, un profilo circolare omogeneo di massa M e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare su una guida orizzontale. Su tale profilo si muove in modo liscio un punto materiale P di massa m che è soggetto ad una forza elastica di coefficiente k e polo il punto fisso O della guida orizzontale.
Essendo il sistema soggetto alla forza peso, e posto $\lambda = \frac{mg}{kR}$, si chiede di determinare:

(a) le posizioni di equilibrio del sistema in funzione di λ;

(b) la stabilità delle posizioni di equilibrio in funzione di λ;

(c) le equazioni differenziali del moto;

(d) l'equazione delle pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} Q = \log\left(\dfrac{q}{kp}\right) \\ P = \dfrac{qp}{k}\,. \end{cases}$$

Nei casi in cui la trasformazione sia canonica, trovarne la funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$.