Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 12 giugno 2020

I) 1. Scegliamo come parametri l'ordinata di A cambiata di segno $\xi = -y_A$ e l'angolo antiorario $\vartheta \in [0, 2\pi[$ tra la verticale discendente e il diametro AB

Denotando con G il centro del disco, il potenziale è dato da

$$U = -mgy_G - \frac{1}{2}k(|B-O|^2 + |A-D|^2).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
&(G-O) = R\sin\vartheta \boldsymbol{e}_x - (\xi + R\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_y,\\
&(A-D) = -(\xi + R)\boldsymbol{e}_y,\\
&(B-O) = (B-A) + (A-O) = 2R\sin\vartheta \boldsymbol{e}_x - (\xi + 2R\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_y,
\end{aligned}$$

da cui

$$U(\xi,\vartheta) = mg(\xi + R\cos\vartheta) - \frac{k}{2}\left(2\xi^2 + 2R\xi + 4R\xi\cos\vartheta\right) + \text{cost.}$$

Le posizioni di equilibrio si trovano nei punti stazionari del potenziale:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg - 2k\xi - kR - 2kR\cos\vartheta,\\
\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mgR\sin\vartheta + 2kR\xi\sin\vartheta.
\end{cases}$$

Dalla seconda raccogliamo $\sin\vartheta$, da cui

$$\sin\vartheta = 0 \quad \vee \quad \xi = \frac{mg}{2k}.$$

Il primo caso dà $\vartheta = 0, \pi$, e sostituito nella prima equazione risulta

$$\begin{aligned}
\vartheta = 0 \quad &\Rightarrow \quad \xi = \frac{mg - 3kR}{2k},\\
\vartheta = \pi \quad &\Rightarrow \quad \xi = \frac{mg + kR}{2k}.
\end{aligned}$$

Se invece $\xi = \frac{mg}{2k}$, sostituendo nella prima abbiamo

$$\cos\vartheta = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \frac{2}{3}\pi \quad \vee \quad \vartheta = \frac{4}{3}\pi.$$

Quindi abbiamo quattro posizioni di equilibrio, tutte accettabili:

$$P_1\left(\frac{mg-3kR}{2k}, 0\right), \quad P_2\left(\frac{mg+kR}{2k}, \pi\right), \quad P_3\left(\frac{mg}{2k}, \frac{2}{3}\pi\right), \quad P_4\left(\frac{mg}{2k}, \frac{4}{3}\pi\right).$$

2. Calcoliamo la matrice hessiana del potenziale:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -2k & 2kR\sin\vartheta \\ 2kR\sin\vartheta & (2k\xi - mg)R\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -2k & 0 \\ 0 & -3kR^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -2k & 0 \\ 0 & -kR^2 \end{bmatrix}$$

da cui P_1 e P_2 sono stabili. Poi

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} -2k & \sqrt{3}kR \\ \sqrt{3}kR & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} -2k & -\sqrt{3}kR \\ -\sqrt{3}kR & 0 \end{bmatrix}$$

che, avendo entrambe determinante negativo, ci dice che P_3 e P_4 sono instabili.
3. Non essendoci un punto fisso, usiamo il Teorema di König baricentrale:

$$K = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot J_G\boldsymbol{\omega}.$$

Si ha

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{d}{dt}(G-O) = R\dot\vartheta\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x - (\dot\xi - R\dot\vartheta\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_y,$$

da cui

$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = \dot\xi^2 + R^2\dot\vartheta^2 - 2R\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta.$$

Per il termine di rotazione, avendo un moto piano, è sufficiente conoscere

$$J_G^{33} = \frac{1}{2}mR^2, \quad \omega_z = \dot\vartheta,$$

da cui

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot J_G\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{4}mR^2\dot\vartheta^2.$$

Quindi l'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2}m\dot\xi^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot\vartheta^2 - mR\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta + \frac{1}{4}mR^2\dot\vartheta^2 = \frac{1}{2}m\dot\xi^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot\vartheta^2 - mR\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta.$$

Ne segue che la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = K+U = \frac{1}{2}m\dot\xi^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot\vartheta^2 - mR\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta + mg(\xi + R\cos\vartheta) - \frac{k}{2}\left(2\xi^2 + 2R\xi + 4R\xi\cos\vartheta\right) + \text{cost.}$$

II)
La matrice baricentrale di una lamina quadrata di massa m e lato ℓ è

$$\mathrm{diag}\left(\frac{m\ell^2}{12}, \frac{m\ell^2}{12}, \frac{m\ell^2}{6}\right)$$

mentre quella centrata in un vertice e con gli assi lungo i lati e la lamina nel primo quadrante è

$$\begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & -\frac{m\ell^2}{4} & 0 \\ -\frac{m\ell^2}{4} & \frac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m\ell^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Ora consideriamo la lamina dell'esercizio come una lamina quadrata di lato 2ℓ e massa $4m$ con un buco quadrato di massa m. Nel sistema indicato, la matrice d'inerzia della lamina completa è

$$\begin{bmatrix} \frac{16m\ell^2}{3} & -4m\ell^2 & 0 \\ -4m\ell^2 & \frac{16m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32m\ell^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Per quella del buco, partiamo dalla matrice del quadrato baricentrale e spostiamola secondo il vettore $(G-O) = (3\ell/2, \ell/2, 0)$: risulta

$$\begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & -\frac{3m\ell^2}{4} & 0 \\ -\frac{3m\ell^2}{4} & \frac{7m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8m\ell^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Quindi sottraendo le due matrici si ha

$$J_O = \begin{bmatrix} \frac{16m\ell^2}{3} & -4m\ell^2 & 0 \\ -4m\ell^2 & \frac{16m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32m\ell^2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & -\frac{3m\ell^2}{4} & 0 \\ -\frac{3m\ell^2}{4} & \frac{7m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8m\ell^2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5m\ell^2 & -\frac{13m\ell^2}{4} & 0 \\ -\frac{13m\ell^2}{4} & 3m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8m\ell^2 \end{bmatrix}.$$