Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 17 luglio 2020

I) 1. Scegliamo come parametri gli angoli ϑ e φ (in verso antiorario) indicati nel disegno.
Denotando con G_1 il baricentro dell'asta OA e con G_2 quello dell'asta AB, si ha:

$$\begin{aligned}(G_1 - O) &= \frac{\ell}{2}\sin\vartheta\,\boldsymbol{e}_x - \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\,\boldsymbol{e}_y \\ (G_2 - O) &= \left(\ell\sin\vartheta + \frac{\ell}{2}\sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_x - \left(\ell\cos\vartheta + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_y \\ (C - B) &= \ell(\cos\vartheta + \cos\varphi)\boldsymbol{e}_y,\end{aligned}$$

quindi il potenziale è dato da

$$U = -mg(y_{G_1} + y_{G_2}) - \frac{1}{2}k|C-B|^2 = \frac{3}{2}mg\ell\cos\vartheta + \frac{1}{2}mg\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}k\ell^2(\cos\vartheta+\cos\varphi)^2.$$

Le posizioni di equilibrio si trovano nei punti stazionari del potenziale:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = -\dfrac{3}{2}mg\ell\sin\vartheta + k\ell^2(\cos\vartheta+\cos\varphi)\sin\vartheta \\ \dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = -\dfrac{1}{2}mg\ell\sin\varphi + k\ell^2(\cos\vartheta+\cos\varphi)\sin\varphi.\end{cases}$$

Dalla prima raccogliamo $\sin\vartheta$, da cui

$$\sin\vartheta = 0 \quad \vee \quad \cos\vartheta + \cos\varphi = \frac{3}{2}\lambda.$$

Anche dalla seconda raccogliamo $\sin\varphi$, da cui

$$\sin\varphi = 0 \quad \vee \quad \cos\vartheta + \cos\varphi = \frac{1}{2}\lambda.$$

Il primo caso dà $\vartheta = 0, \pi$, e sostituito nella seconda equazione risulta

$$\begin{aligned}&\vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0,\pi \quad \vee \quad \cos\varphi = \frac{\lambda}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm\arccos\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) \quad \text{se } \lambda \leqslant 4 \\ &\vartheta = \pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0,\pi \quad \vee \quad \cos\varphi = \frac{\lambda}{2} + 1 \quad \text{non accettabile.}\end{aligned}$$

Se invece $\sin\varphi = 0$, si ha $\varphi = 0, \pi$, e sostituito nella prima equazione risulta

$$\begin{aligned}&\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 0,\pi \quad \vee \quad \cos\vartheta = \frac{3}{2}\lambda - 1 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \pm\arccos\left(\frac{3}{2}\lambda - 1\right) \quad \text{se } \lambda \leqslant \frac{4}{3} \\ &\varphi = \pi \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 0,\pi \quad \vee \quad \cos\vartheta = \frac{3}{2}\lambda + 1 \quad \text{non accettabile.}\end{aligned}$$

Quindi abbiamo quattro posizioni di equilibrio sempre accettabili:

$$P_1(0,0), \quad P_2(0,\pi), \quad P_3(\pi,0), \quad P_4(\pi,\pi)$$

e le posizioni

$$P_{5,6} = \left(0, \pm\arccos\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right)\right), \quad P_{7,8} = \left(\pm\arccos\left(\frac{3}{2}\lambda - 1\right), 0\right),$$

accettabili rispettivamente nel caso $\lambda \leqslant 4$ e $\lambda \leqslant \frac{4}{3}$.

2. Nel caso $\lambda > 4$ esistono solo le prime quattro posizioni di equilibrio. Calcoliamo la matrice hessiana del potenziale:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}mg\ell\cos\vartheta + k\ell^2(\cos\vartheta+\cos\varphi)\cos\vartheta - k\ell^2\sin^2\vartheta & -k\ell^2\sin\vartheta\sin\varphi \\ -k\ell^2\sin\vartheta\sin\varphi & -\frac{1}{2}mg\ell\cos\varphi + k\ell^2(\cos\vartheta+\cos\varphi)\cos\varphi - k\ell^2\sin^2\varphi \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}mg\ell + 2k\ell^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}mg\ell + 2k\ell^2 \end{bmatrix}$$

che è stabile per $2k\ell < \frac{1}{2}mg \quad \Rightarrow \quad \lambda > 4$;

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}mg\ell & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mg\ell \end{bmatrix}$$

che è sempre instabile,

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}mg\ell & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}mg\ell \end{bmatrix},$$

che è sempre instabile, e

$$\mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}mg\ell + 2k\ell^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mg\ell + 2k\ell^2 \end{bmatrix}$$

che è sempre instabile.

3. L'asta OA ha un punto fisso e il moto è piano, quindi, usando il Teorema di König:

$$K = \frac{1}{2}J_O^{33}\omega_{OA}^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_{G_2}|^2 + \frac{1}{2}J_{G_2}^{33}\omega_{AB}^2.$$

Si ha

$$\boldsymbol{v}_{G_2} = \frac{d}{dt}(G_2 - O) = \ell\left(\dot\vartheta\cos\vartheta + \frac{1}{2}\dot\varphi\cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_x + \ell\left(\dot\vartheta\sin\vartheta + \frac{1}{2}\dot\varphi\sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_y,$$

da cui

$$|\boldsymbol{v}_{G_2}|^2 = \ell^2\left(\dot\vartheta^2 + \frac{1}{4}\dot\varphi^2 + \dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi)\right).$$

Inoltre

$$J_O^{33} = \frac{1}{3}m\ell^2, \quad J_{G_2}^{33} = \frac{1}{12}m\ell^2, \omega_{OA}^2 = \dot\vartheta^2, \quad \omega_{AB}^2 = \dot\varphi^2,$$

da cui

$$K = \frac{1}{6}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot\vartheta^2 + \frac{1}{4}\dot\varphi^2 + \dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi)\right) + \frac{1}{24}m\ell^2\dot\varphi^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\frac{4}{3}\dot\vartheta^2 + \frac{1}{3}\dot\varphi^2 + \dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi)\right).$$

II) Dividiamo la lamina in due lamine rettangolari, rispettivamente di basi $2\ell, \ell$ e $\ell, 3\ell$ e masse $2m$ e $3m$. Inoltre la lamina ha l'asse x come asse di simmetria, quindi i prodotti d'inerzia sono tutti nulli.
La matrice baricentrale di una lamina rettangolare di massa m e lati a, b è

$$J_G = \mathrm{diag}\left(\frac{mb^2}{12}, \frac{ma^2}{12}, \frac{m(a^2+b^2)}{12}\right),$$

quindi nel caso del primo rettangolo diventa

$$J_{G_1} = \mathrm{diag}\left(\frac{2m\ell^2}{12}, \frac{2m\,4\ell^2}{12}, \frac{2m(4\ell^2+\ell^2)}{12}\right) = \mathrm{diag}\left(\frac{m\ell^2}{6}, \frac{2m\ell^2}{3}, \frac{5m\ell^2}{6}\right)$$

e per il secondo

$$J_{G_2} = \mathrm{diag}\left(\frac{3m\ 9\ell^2}{12}, \frac{3m\ell^2}{12}, \frac{3m(\ell^2+9\ell^2)}{12}\right) = \mathrm{diag}\left(\frac{9m\ell^2}{4}, \frac{m\ell^2}{4}, \frac{5m\ell^2}{2}\right).$$

Ora usiamo il Teorema di Steiner per spostare i momenti rispetto all'asse y e all'asse z: poiché $|G_1 - O|^2 = \ell^2$ e $|G_2 - O|^2 = \frac{25}{4}\ell^2$, si ha

$$J_O^1 = \mathrm{diag}\left(\frac{m\ell^2}{6}, \frac{2m\ell^2}{3} + 2m\ell^2, \frac{5m\ell^2}{6} + 2m\ell^2\right) = \mathrm{diag}\left(\frac{m\ell^2}{6}, \frac{8m\ell^2}{3}, \frac{17m\ell^2}{6}\right),$$

$$J_O^2 = \mathrm{diag}\left(\frac{9m\ell^2}{4}, \frac{m\ell^2}{4} + 3m\frac{25\ell^2}{4}, \frac{5m\ell^2}{2} + 3m\frac{25\ell^2}{4}\right) = \mathrm{diag}\left(\frac{9m\ell^2}{4}, 19m\ell^2, \frac{85m\ell^2}{4}\right).$$

Quindi sommando le due matrici si ha

$$J_O = \mathrm{diag}\left(\frac{29m\ell^2}{12}, \frac{65m\ell^2}{3}, \frac{289m\ell^2}{12}\right).$$