Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello dell'11 gennaio 2011

1) Un corpo rigido piano è formato da un disco di massa M e raggio R a cui è saldato sul bordo un punto materiale P di massa m.
Il corpo rigido si muove in un piano verticale, in modo che il centro C del disco possa scorrere in modo liscio sull'asse orizzontale di un sistema di riferimento Oxy.
Una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O agisce sul punto P, e tutto il sistema è sottoposto alla forza peso.

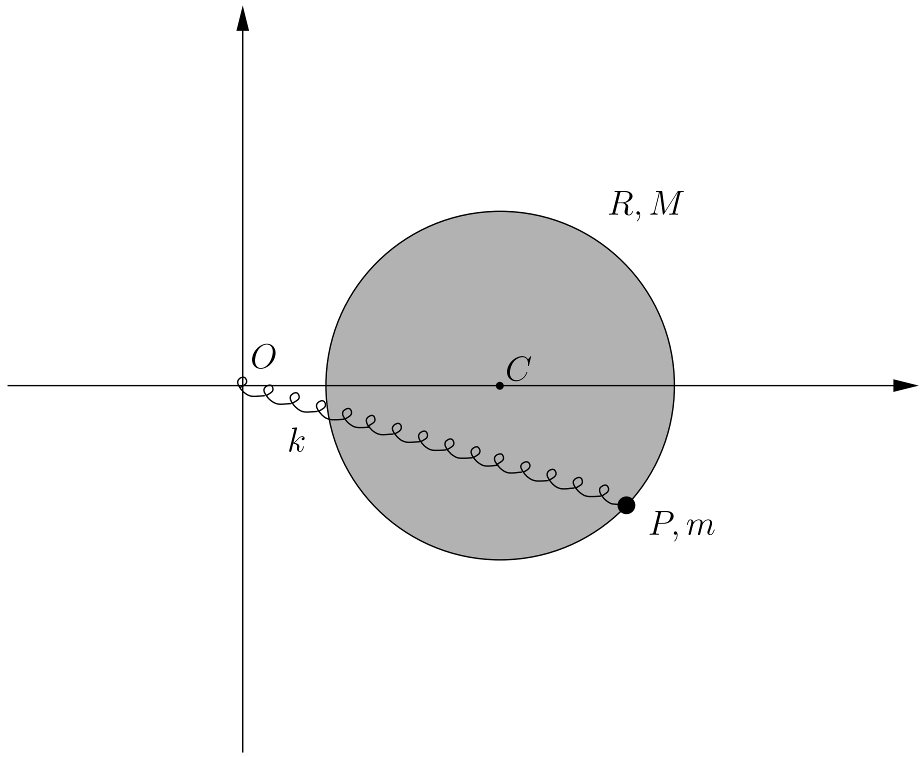
Si chiede di:

(a) trovare le posizioni di equilibrio del corpo rigido, e in particolare discuterne l'esistenza al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$;

(b) studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di λ;

(c) determinare la lagrangiana del moto;

(d) trovare le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Si trovino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la trasformazione

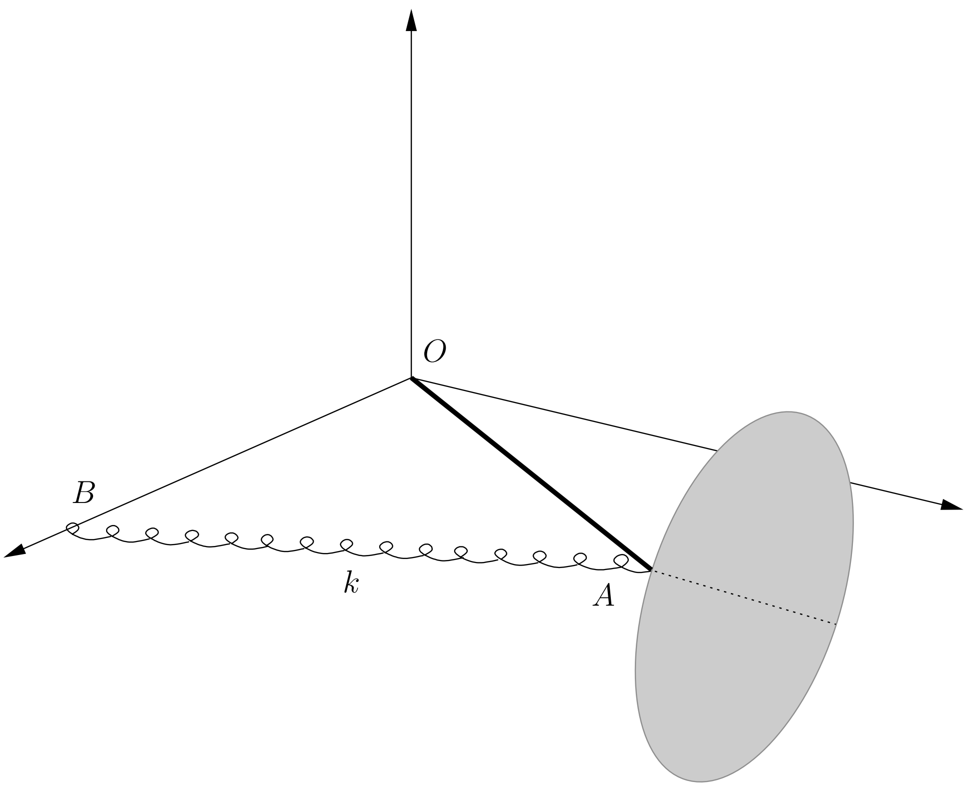
$$\begin{cases} Q = \dfrac{q}{1 - k\tan^2 p} \\ P = \tan p \end{cases}$$

è canonica. Si trovi poi una funzione generatrice del tipo $F(q, P)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 25 marzo 2011

1) Un corpo rigido è formato da un disco omogeneo di massa m e raggio R e da un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza $2R$. L'estremo A dell'asta è saldato ad un punto del bordo del disco in modo che l'asta sia perpendicolare al piano del disco.
Tale corpo rigido si può muovere in modo che l'asta OA stia nel piano orizzontale xy di un sistema di riferimento $Oxyz$ e il punto O sia fisso nell'origine.
Sull'estremo A dell'asta agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto B di coordinate $(2R, 0, 0)$.
Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. trovare le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Data la trasformazione

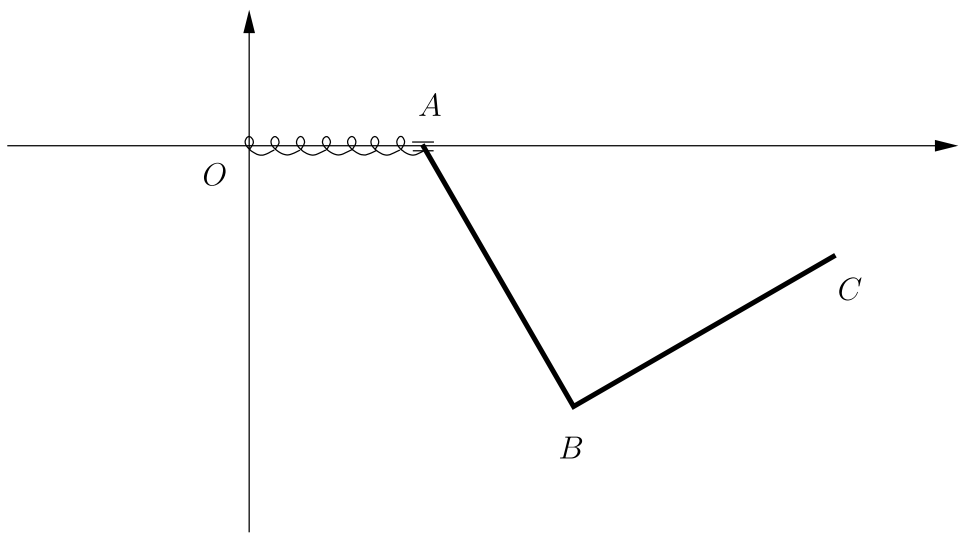
$$\begin{cases} Q = 2kp \\ P = q + \arccos p \end{cases}$$

se ne trovino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui è canonica.
Nei casi positivi si trovi poi una funzione generatrice del tipo $F(q, P)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 5 aprile 2011

1) Un corpo rigido è formato da due aste omogenee AB e BC, entrambe di massa m e lunghezza ℓ, saldate ad angolo retto nell'estremo comune B.
Tale corpo rigido si può muovere in un piano verticale in modo che il punto A si mantenga sempre sull'asse x di un sistema di riferimento Oxy.
Sull'estremo A agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O.
Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. trovare le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Data la trasformazione

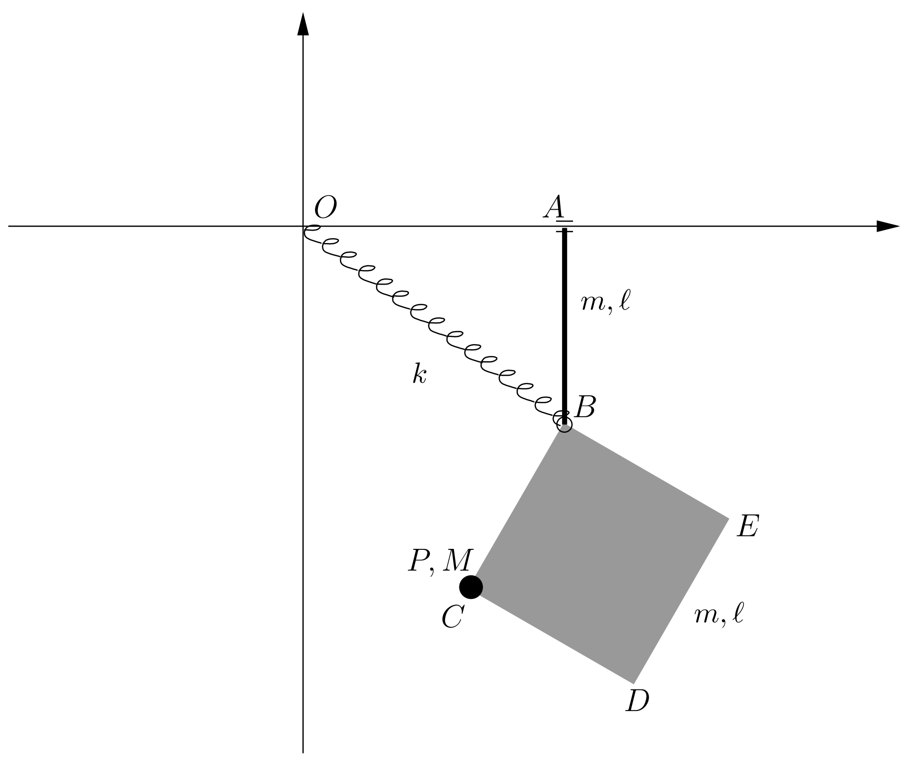
$$\begin{cases} Q = pe^{kq} \\ P = -e^{hq} \end{cases}$$

si trovino i valori di $h, k \in \mathbb{R}$ per cui è canonica.
Nei casi positivi si trovi poi una funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 28 giugno 2011

1) In un piano verticale, un'asta AB di massa m e lunghezza ℓ ha l'estremo A che scorre sull'asse x e si muove nel semipiano $y \leq 0$ restando sempre ortogonale a tale asse. All'estremo B dell'asta è vincolato il vertice di una lamina quadrata $BCDE$, di lato ℓ e massa m, che può ruotare liberamente attorno a B. Inoltre sul vertice C della lamina è saldato un punto materiale P di massa M.
Su B agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy.
Sapendo che il sistema è soggetto alla forza peso e che i vincoli sono lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio;
2. la stabilità di tali posizioni;
3. la lagrangiana del sistema;
4. la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la seguente trasformazione è canonica:

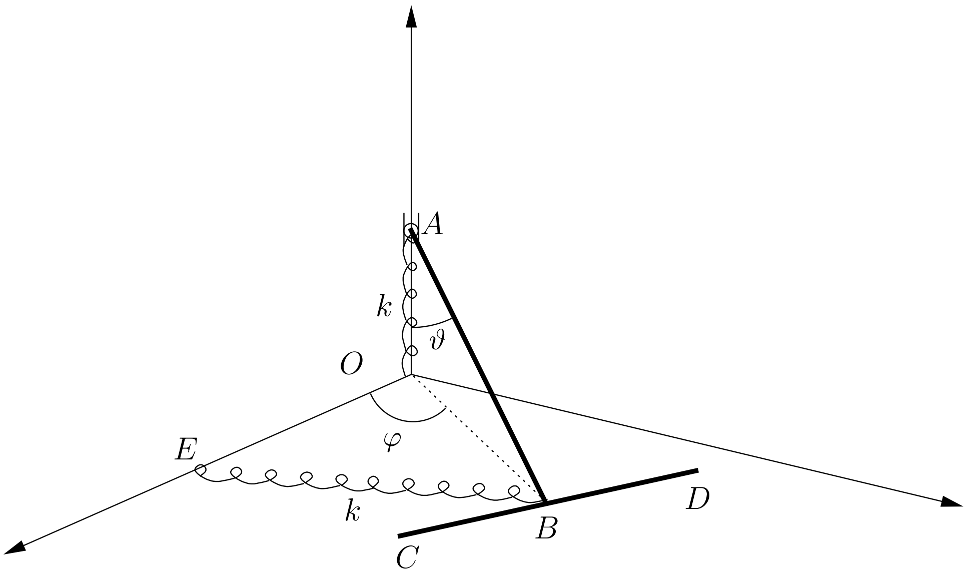
$$\begin{cases} Q = \log(kq^2 p) \\ P = kqp. \end{cases}$$

Nei casi in cui la trasformazione sia canonica, trovarne la funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$.
Trovare infine come si trasforma l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p) = q^3 p^2$ e dedurne le nuove equazioni di Hamilton in funzione di (Q, P).

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 12 luglio 2011

1) Un corpo rigido è formato da due aste, AB e CD, entrambe di massa m e lunghezza 2ℓ, in modo che l'estremo B della prima asta sia saldato perpendicolarmente alla seconda asta nel punto medio. L'estremo A del corpo rigido si muove sull'asse z di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, mentre l'asta CD è vincolata a giacere sempre nel piano xy.
Oltre alla forza peso, sul corpo rigido agiscono due forze elastiche di coefficiente $k > 0$: la prima ha polo nell'origine e agisce sull'estremo A, la seconda ha polo nel punto $E(2\ell, 0, 0)$ e agisce sul punto B.
Si ponga $\lambda = \dfrac{k\ell}{mg}$. Sapendo che il corpo rigido è soggetto anche alla forza peso e che i vincoli sono lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio;
2. la stabilità di tali posizioni;
3. la lagrangiana del sistema;
4. le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile (scegliendo un opportuno valore di λ).



2) Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la trasformazione

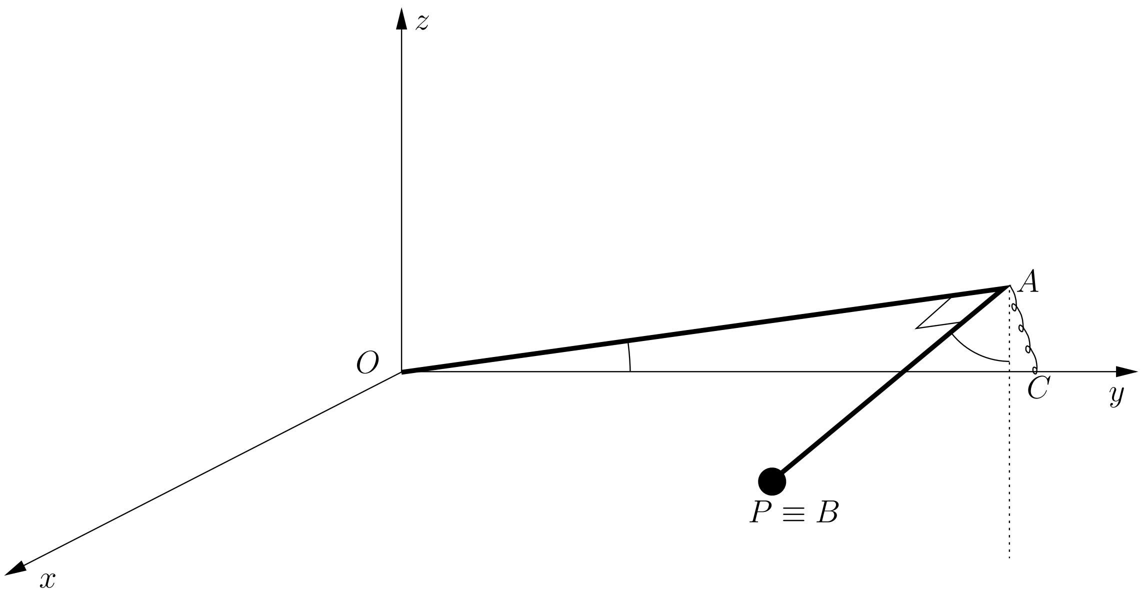
$$\begin{cases} Q = k\sqrt{p}\sin q \\ P = \sqrt{p}\cos q \end{cases}$$

è canonica. Si trovi poi una funzione generatrice del tipo $F(q, P)$.
Infine, data l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p) = -p\sin(2q)$, si **risolvano** le equazioni di Hamilton associate alle nuove variabili (Q, P).

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 6 settembre 2011

1) Un corpo rigido è formato da un'asta OA di massa $2m$ e lunghezza 2ℓ, un'asta AB di massa m e lunghezza ℓ saldata ad angolo retto alla prima nell'estremo comune A, e da un punto materiale P di massa m saldato all'estremo B della seconda asta.
Tale corpo rigido si può muovere in modo che l'asta OA stia nel piano verticale yz di un sistema di riferimento $Oxyz$ e il punto O sia fisso nell'origine.
Sul punto A agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto C di coordinate $(2\ell, 0, 0)$.
Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. trovare la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Data la trasformazione

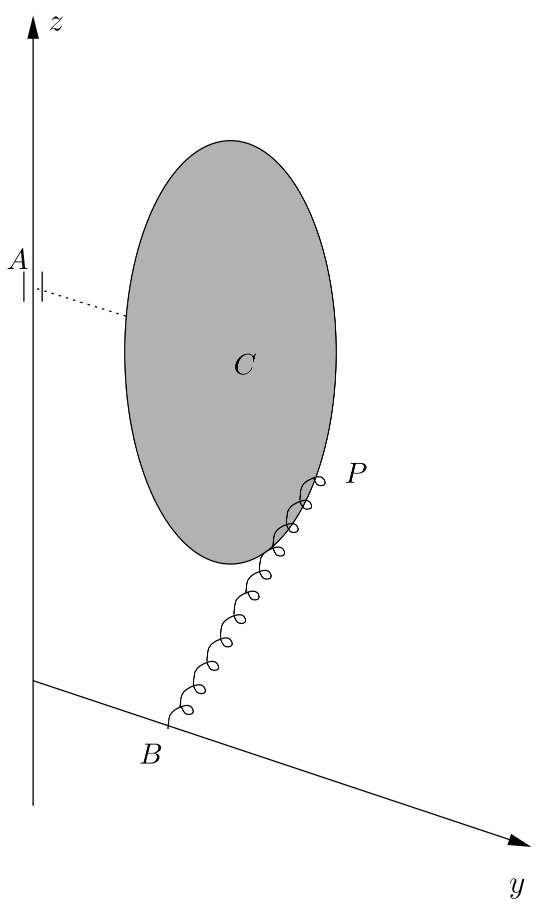
$$\begin{cases} Q = kq^3 \cos^2\left(\dfrac{1+p}{q^2}\right) + 1 \\ P = \tan\left(\dfrac{1+p}{q^2}\right) \end{cases}$$

se ne trovino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui è canonica.
Nei casi positivi si trovi poi una funzione generatrice del tipo $F(q, P)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 27 settembre 2011

1) Un corpo rigido è formato da un'asta AC di massa trascurabile e lunghezza $R/2$, saldata perpendicolarmente nel centro C di un disco di raggio R e massa m.
Il punto A è libero di scorrere sull'asse verticale z di un sistema di riferimento $Oxyz$, in modo che l'asta resti sempre nel piano yz e perpendicolare a tale asse.
Su un punto P situato sul bordo del disco agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto B di coordinate $(0, R/2, 0)$.
Il corpo è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata del sistema attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Dati $a > b > c > 0$, si dica quando è possibile costruire un corpo rigido che ammetta i tre parametri come momenti principali d'inerzia.
Nei casi in cui è possibile, si dia poi un esempio di tale corpo rigido.

Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 27 settembre 2011

1) 1. Scegliamo come parametri lagrangiani $\xi = z_A \in \mathbb{R}$ e $\vartheta \in [0, 2\pi[$ l'angolo (antiorario) tra la verticale discendente e CP.
Il potenziale è dato da

$$U = -mgz_C - \frac{1}{2}k|P - B|^2.$$

Si ha

$$(C - O) = (C - A) + (A - O) = \frac{R}{2}\boldsymbol{e}_2 + \xi\boldsymbol{e}_3$$

e anche

$$\begin{aligned}(P - B) = (P - C) + (C - O) + (O - B) &= -R\sin\vartheta\boldsymbol{e}_1 - R\cos\vartheta\boldsymbol{e}_3 + \frac{R}{2}\boldsymbol{e}_2 + \xi\boldsymbol{e}_3 - \frac{R}{2}\boldsymbol{e}_2 \\ &= -R\sin\vartheta\boldsymbol{e}_1 + (\xi - R\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

da cui

$$|P - B|^2 = R^2 + \xi^2 - 2\xi R\cos\vartheta.$$

Quindi si ha

$$U(\xi, \vartheta) = -mg\xi - \frac{1}{2}k\xi^2 + kR\xi\cos\vartheta + \text{cost}.$$

Le posizioni di equilibrio si trovano nei punti stazionari del potenziale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -mg - k\xi + kR\cos\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -kR\xi\sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda troviamo $\xi = 0$ oppure $\vartheta = 0, \pi$. Sostituendo $\xi = 0$ nella prima, troviamo

$$\cos\vartheta = \frac{mg}{kR}$$

che ha soluzione per $mg \leqslant kR$. In questo caso, ponendo $\alpha = \arccos\frac{mg}{kR}$ e osservando che α sta nel primo quadrante, troviamo

$$E_1 = \begin{cases} \xi = 0 \\ \vartheta = \alpha \end{cases} \qquad \text{e} \qquad E_2 = \begin{cases} \xi = 0 \\ \vartheta = 2\pi - \alpha. \end{cases}$$

Se ora sostituiamo $\vartheta = 0, \pi$ otteniamo $\xi = (\pm kR - mg)/k$ e quindi

$$E_3 = \begin{cases} \xi = \frac{kR - mg}{k} \\ \vartheta = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad E_4 = \begin{cases} \xi = \frac{-kR - mg}{k} \\ \vartheta = \pi. \end{cases}$$

2. La matrice hessiana è

$$\mathcal{H}(\xi, \vartheta) = \begin{bmatrix} -k & -kR\sin\vartheta \\ -kR\sin\vartheta & -kR\xi\cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Si ha, nel caso $mg < kR$,

$$\mathcal{H}(E_1) = \begin{bmatrix} -k & -kR\sin\alpha \\ -kR\sin\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

per cui $\det\mathcal{H}(E_1) < 0$ e la posizione è instabile (sella). Lo stesso per E_2.
Poi:

$$\mathcal{H}(E_3) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -R(kR - mg) \end{bmatrix}$$

e quindi E_3 è stabile per $kR > mg$ e instabile per $kR < mg$. Infine

$$\mathcal{H}(E_4) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & R(-kR - mg) \end{bmatrix}$$

e quindi E_4 è sempre stabile.

3. Troviamo l'energia cinetica. Il baricentro del corpo rigido si trova in C, la velocità angolare vale $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{v}(A) = \dot{\xi}\boldsymbol{e}_3$. Poiché $(C - A)$, $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{v}(A)$ sono complanari, possiamo usare il Teorema di König nella forma semplificata

$$K = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_A|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot J_A\boldsymbol{\omega}.$$

Calcoliamo J_A nel sistema di riferimento solidale centrato in A in cui $\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}'_1$ è l'asse parallelo a CP. Si ha, dal Teorema di Steiner,

$$J_1 = J_2 = \frac{1}{4}mR^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mR^2, \qquad J_3 = \frac{1}{2}mR^2.$$

In realtà ci interessa soltanto J_3, per cui

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2.$$

Quindi la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2 - mg\xi - \frac{1}{2}k\xi^2 + kR\xi\cos\vartheta.$$

4. L'energia cinetica è già indipendente dalla posizione, quindi nella posizione stabile E_4 si ha

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\xi + \frac{kR+mg}{k} & \vartheta - \pi\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & R(-kR - mg) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi + \frac{kR+mg}{k} \\ \vartheta - \pi\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{k}{2}\left(\xi + \frac{kR+mg}{k}\right)^2 - \frac{R}{2}(kR+mg)(\vartheta - \pi)^2.\end{aligned}$$

2) Poiché i momenti d'inerzia devono poter formare i lati di un triangolo, per poter costruire il corpo rigido si deve avere

$$a < b + c.$$

Ora basta prendere ad esempio dei punti materiali nelle posizioni $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$, di masse rispettivamente m_x, m_y, m_z, in modo che

$$\begin{cases} 2m_y + 2m_z = a \\ 2m_z + 2m_x = b \\ 2m_x + 2m_y = c. \end{cases}$$

Risolvendo si ha

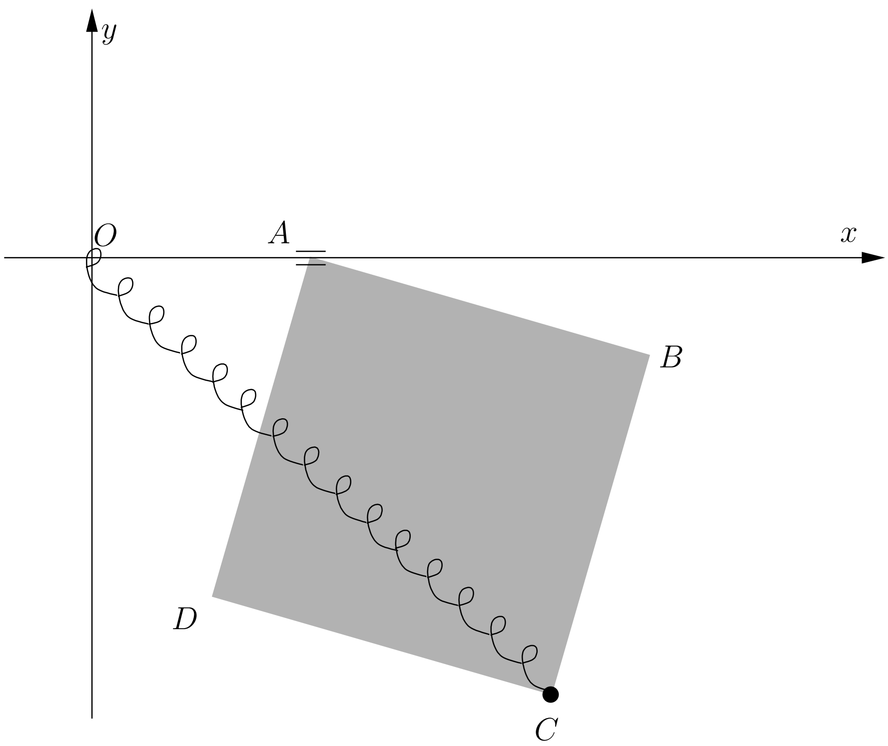
$$m_x = \frac{b + c - a}{4}, \qquad m_y = \frac{a + c - b}{4}, \qquad m_z = \frac{a + b - c}{4}$$

e i secondi membri, grazie alla condizione data, sono sicuramente positivi.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 9 dicembre 2011

1) Un corpo rigido è formato da una lamina quadrata $ABCD$ omogenea di massa m e lato ℓ al cui estremo C è saldato un punto materiale, anch'esso di massa m. Il corpo si muove in un piano verticale in modo che il punto A possa scorrere sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità; inoltre, sul punto C agisce una forza elastica di polo l'origine e coefficiente $k > 0$. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio della sistema;
2. discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile (si fissi un valore di λ opportuno).



2) Data la lagrangiana

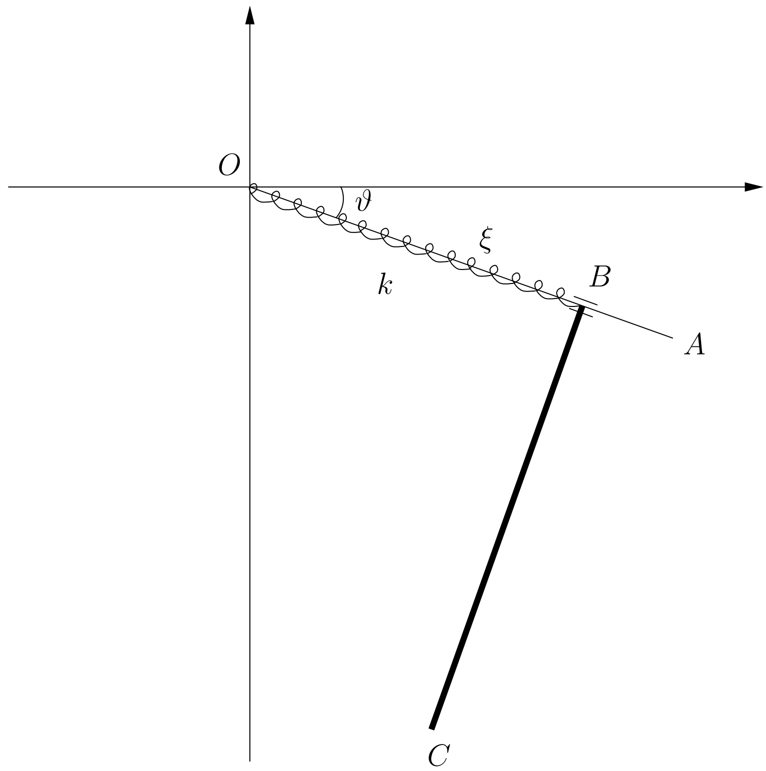
$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (2 + \cos q_2)\dot{q}_1^2 + (2 + \sin q_2)\dot{q}_2^2 + q_2^2$$

se ne determini l'hamiltoniana associata e le equazioni di Hamilton.
Si trovino poi due integrali primi del moto.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello dell'11 gennaio 2012

1) In un piano verticale, un'asta OA di lunghezza 2ℓ e massa trascurabile è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso O. Una seconda asta BC, di lunghezza 2ℓ e massa m, si muove nel piano restando perpendicolare alla prima asta e in modo da avere l'estremo B sulla prima asta.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità; inoltre, sul punto B agisce una forza elastica di polo l'origine e coefficiente $k > 0$. Introducendo il parametro $\lambda = \frac{k\ell}{mg}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità in funzione di λ;
2. trovare le posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile (si fissi un valore di λ opportuno).



2) Data la trasformazione

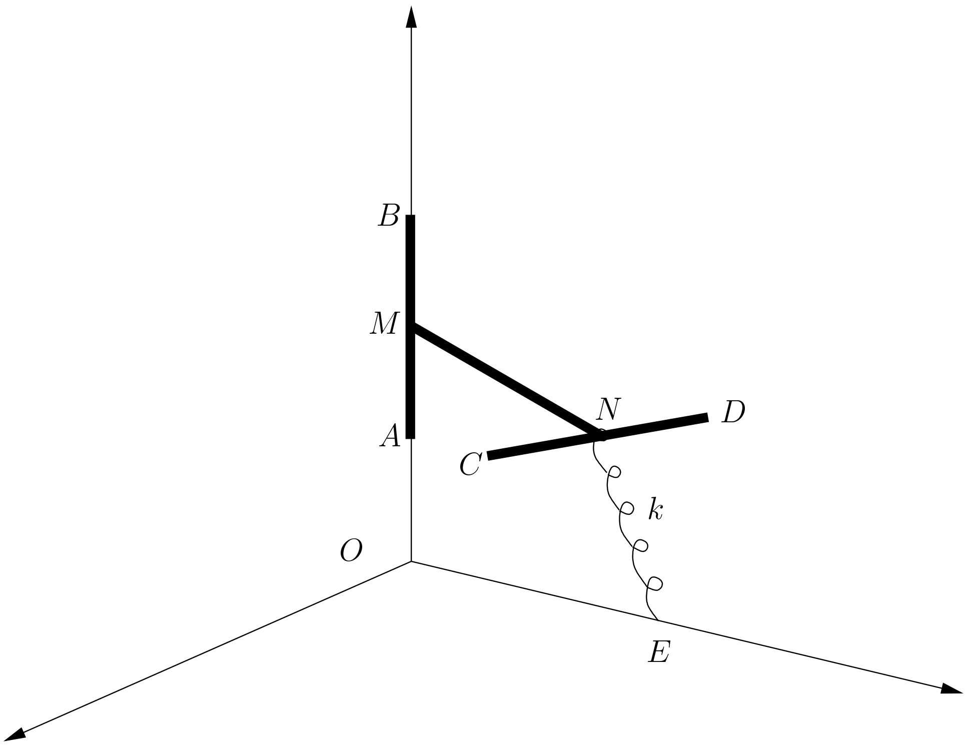
$$\begin{cases} Q = \dfrac{kp}{\sqrt{p} - q} \\ P = (\sqrt{p} - q)^2 \end{cases}$$

se ne trovino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui è canonica.
Nei casi affermativi si trovi poi una funzione generatrice del tipo $F(q, P)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 30 marzo 2012

1) Un corpo rigido è formato da tre aste omogenee e mutuamente perpendicolari AB, MN, CD, tutte di lunghezza 2ℓ e massa m, in modo che M sia saldato nel punto medio di AB e N nel punto medio di CD.
Tale corpo rigido è vincolato ad avere l'asta AB che scorre su una guida verticale e può liberamente ruotare attorno a tale asta.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità; inoltre, sul punto N agisce una forza elastica di polo il punto $E(0, 2\ell, 0)$ e coefficiente $k > 0$. Si chiede di:

1. calcolare la matrice d'inerzia baricentrale del corpo rigido in un sistema di riferimento opportuno;
2. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile e le relative equazioni del moto linearizzate.



2) Data la trasformazione

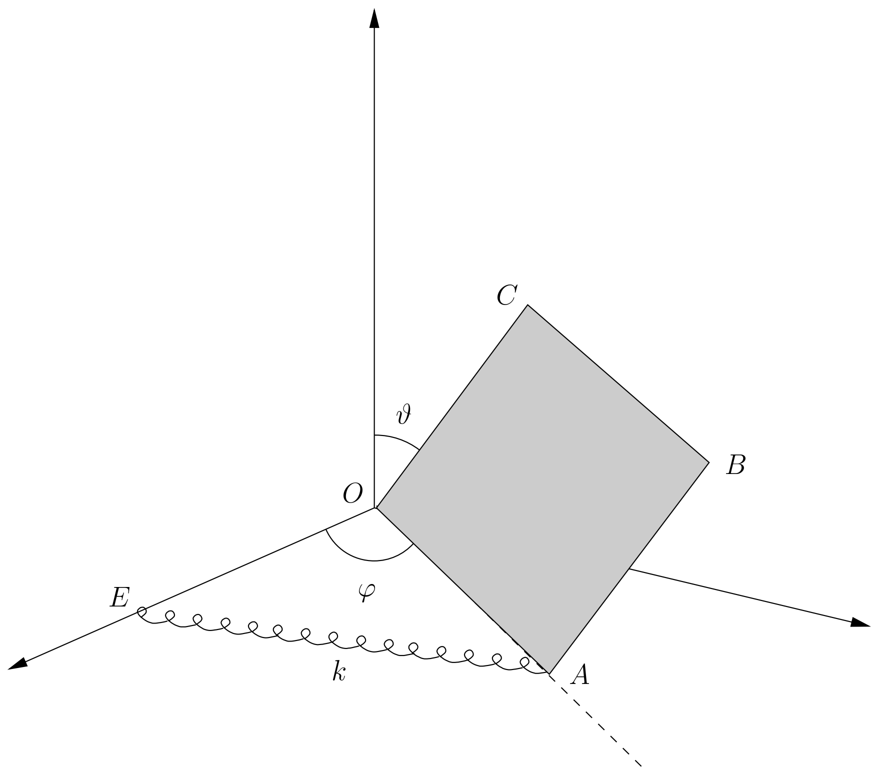
$$\begin{cases} Q = qp - qe^q \\ P = \log(p + ke^q) \end{cases}$$

se ne trovino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui è canonica.
Nei casi affermativi si trovi poi una funzione generatrice del tipo $F(q, P)$.

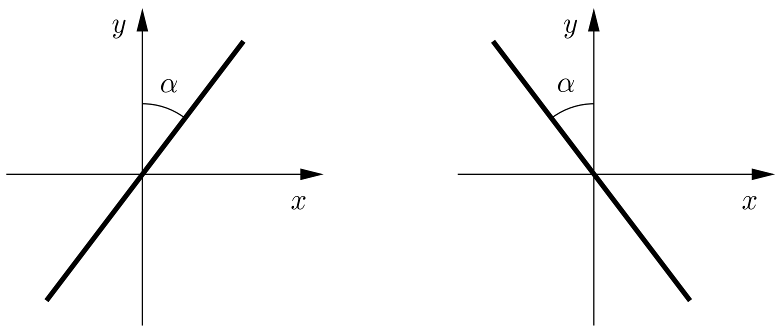
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 13 aprile 2012

1) In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, una lamina quadrata omogenea $OABC$ di lato ℓ e massa m si muove in modo che il suo vertice O sia fisso nell'origine e il lato OA resti sempre nel piano orizzontale xy.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità; inoltre, sul vertice A agisce una forza elastica di polo il punto $E(\ell, 0, 0)$ e coefficiente $k > 0$. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile;
4. determinare eventuali integrali primi del sistema.



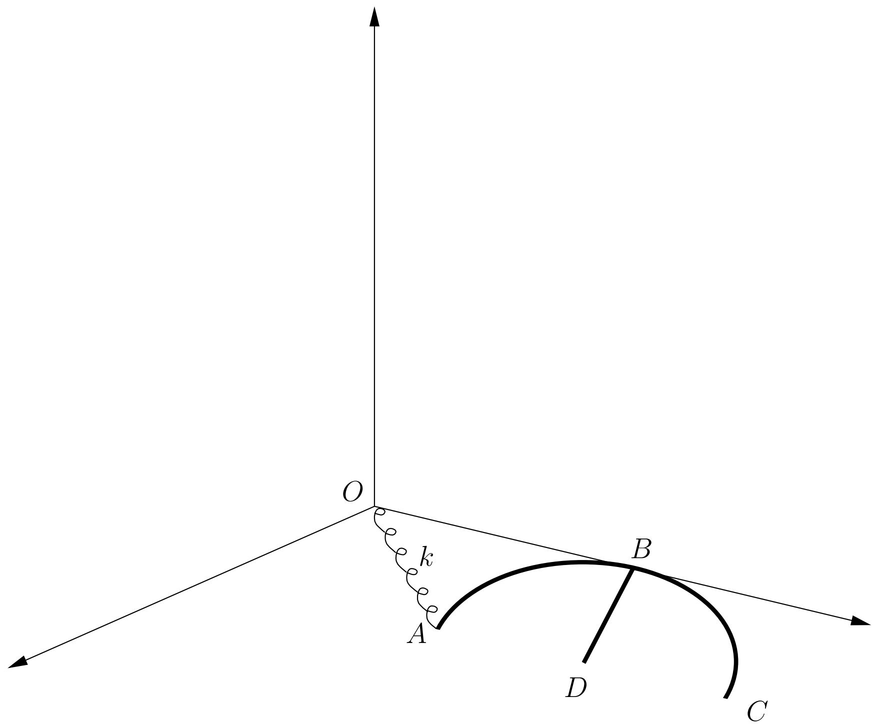
2) Si calcoli la matrice d'inerzia di un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ nei due sistemi di riferimento baricentrali indicati in figura (l'asse z è ortogonale al foglio). Le due matrici d'inerzia sono uguali?



Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 22 giugno 2012

1) Un corpo rigido piano è formato da una semicirconferenza materiale ABC di diametro $\overline{AC} = 2R$ e massa m a cui è saldata, a partire dal centro D e perpendicolarmente al diametro, un'asta DB di massa m e lunghezza R (si veda la figura). Il corpo rigido si muove in modo che il punto B scorra sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ e l'asta resti sempre ortogonale all'asse y (il corpo può anche ruotare attorno a tale asse).
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità; inoltre, sul punto A agisce una forza elastica di polo l'origine e coefficiente $k > 0$. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile;
4. determinare eventuali integrali primi del sistema.



2) Data la trasformazione

$$\begin{cases} Q = -\arctan\left(\dfrac{p}{q}\right) \\ P = k(q^2 + p^2) \end{cases}$$

se ne trovino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui è canonica.
Nei casi affermativi si trovi poi una funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$.

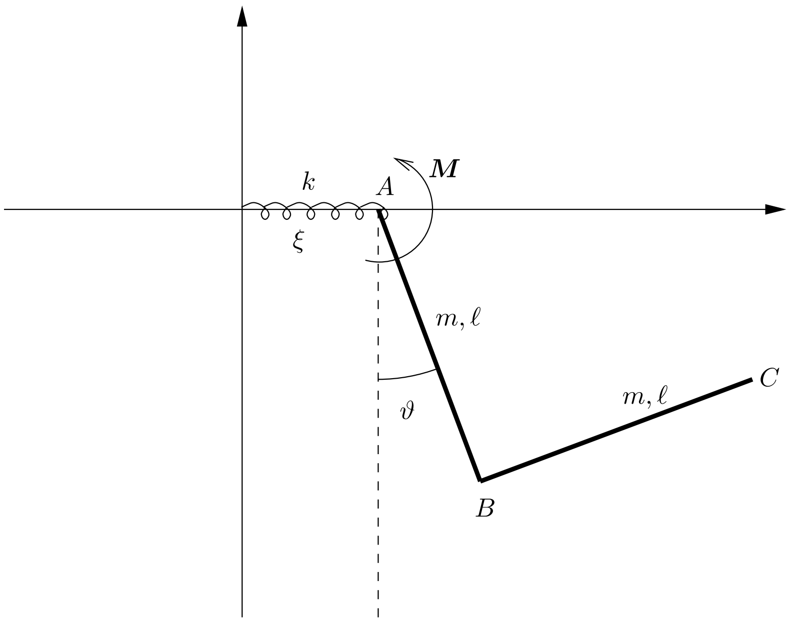
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 13 luglio 2012

1) Un corpo rigido piano è formato da due aste AB e BC di massa m e lunghezza ℓ saldate perpendicolarmente nel punto B. Il corpo rigido si può muovere in un piano dotato di un sistema di riferimento Oxy, in modo che l'estremo A sia vincolato in modo liscio all'asse orizzontale.
Si denoti con ξ l'ascissa di A e con θ l'angolo formato dalla verticale discendente con l'asta AB.
Le forze agenti sul corpo rigido sono:

- la forza peso;
- una forza elastica di polo l'origine e coefficiente $k > 0$ agente sul punto A;
- un momento $\mathbf{M} = k\ell^2 \cos\theta \mathbf{e}_z$ (ricordiamo che il potenziale di un momento $\mathbf{M} = f(\theta)\mathbf{e}_z$ è una primitiva di f).

Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{k\ell}{mg}$;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. scrivere le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Data la lagrangiana

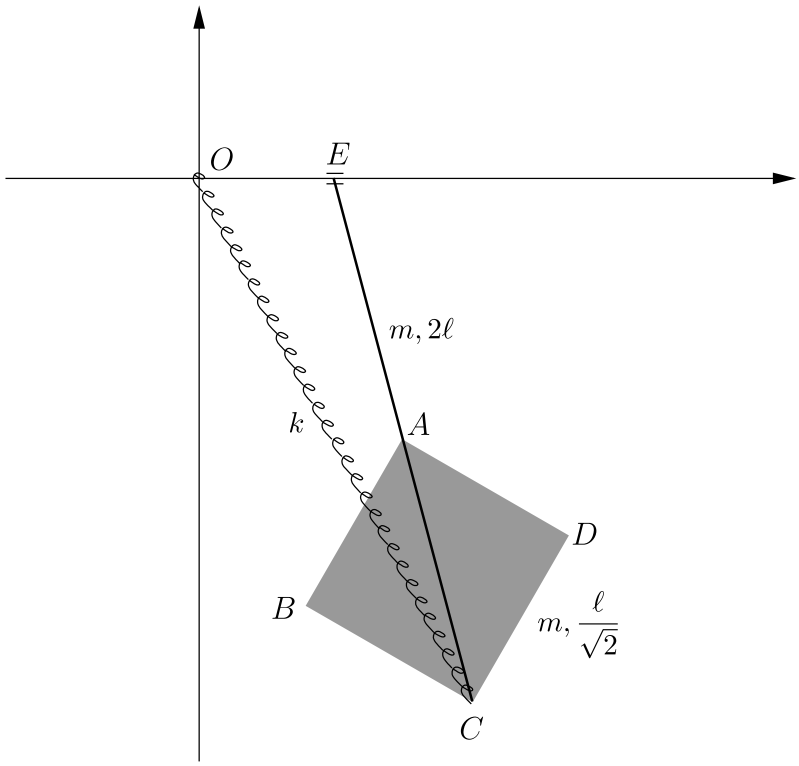
$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{\dot{q}_1^2}{2q_2} + \frac{\dot{q}_2^2}{2q_1} - \dot{q}_1 - \dot{q}_2$$

se ne trovi l'hamiltoniana associata. Si scrivano poi le equazioni di Hamilton relative all'hamiltoniana trovata.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 7 settembre 2012

1) In un piano verticale, un corpo rigido è formato da un'asta EC di massa m e lunghezza 2ℓ cui è vincolata la diagonale di una lamina quadrata $ABCD$, di lato $\ell/\sqrt{2}$ e massa m, come in figura.
Il corpo rigido ha l'estremo E che può scorrere sull'asse x e ruota attorno a tale punto.
Su C agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy.
Sapendo che il sistema è soggetto alla forza peso e che i vincoli sono lisci, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio;
2. la stabilità di tali posizioni;
3. la lagrangiana del sistema;
4. la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la seguente trasformazione è canonica:

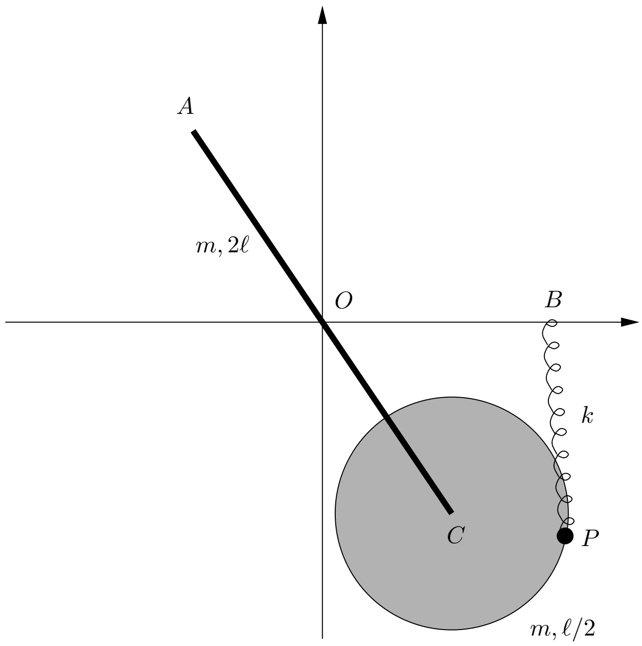
$$\begin{cases} Q = \dfrac{p}{kq^2} - kq \\ P = -q^3. \end{cases}$$

Nei casi affermativi, trovarne una funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$.
Trovare infine come si trasforma l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p) = p^2 + q^2$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 25 gennaio 2013

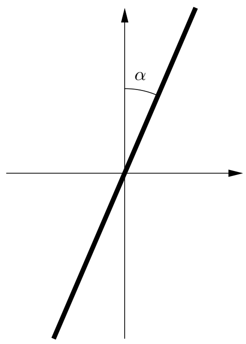
1) In un sistema piano, un'asta omogenea AC di massa m e lunghezza 2ℓ può ruotare attorno al suo baricentro collocato al centro di un sistema di riferimento Oxy. All'estremo C è vincolato il centro di un disco di massa m e raggio $\ell/2$ e tale disco può ruotare attorno al suo centro. Sul bordo del disco è saldato un punto materiale P di massa m, su cui agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto $B(\ell, 0)$. Sapendo che tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e che tutti i vincoli sono lisci, si chiede di:

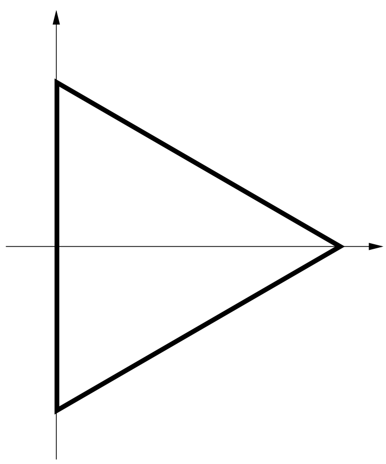
1. trovare il potenziale e la lagrangiana del sistema;
2. scrivere le equazioni differenziali del moto linearizzate attorno a una generica posizione di equilibrio;
3. se il disco viene saldato all'asta, in modo che il punto P si trovi sul prolungamento dell'asta oltre C, si trovino le posizioni di equilibrio del corpo rigido e se ne discuta la stabilità.



2) Si trovi la matrice d'inerzia dell'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ nel sistema di riferimento indicato nella prima figura.

Si usi poi tale risultato per calcolare la matrice d'inerzia di un corpo rigido formato da tre aste, ognuna di massa m e lunghezza ℓ, disposte a triangolo equilatero secondo il sistema di riferimento indicato nella seconda figura.



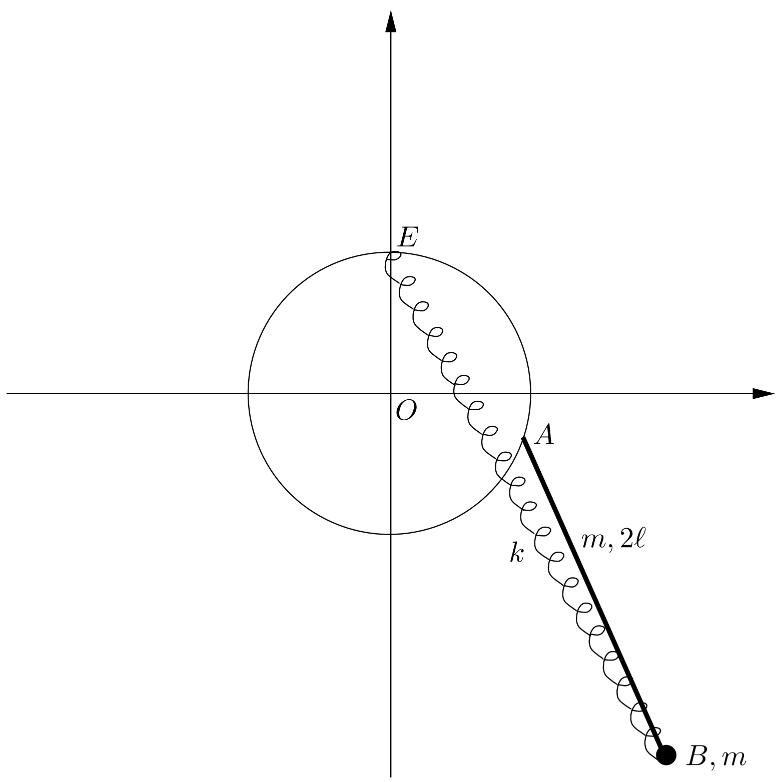


Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello dell'8 febbraio 2013

1) In un piano verticale un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ ha l'estremo A vincolato a scorrere attorno a una guida circolare di centro l'origine e raggio ℓ, e può ruotare liberamente attorno a tale estremo. All'estremo B dell'asta è saldato un punto materiale di massa m, su cui agisce una forza elastica di coefficiente $k \geq 0$ e polo il punto E della guida circolare di coordinate $(0, \ell)$.

Sapendo che tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e che i vincoli sono lisci, si chiede di:

1. trovare il potenziale del sistema;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. trovare le posizioni di equilibrio del sistema nel caso $k = 0$;
4. sempre nel caso $k = 0$, scrivere le equazioni differenziali del moto linearizzate attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) Data la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \log(1 + q^2)\dot{q}^2 - q^2\dot{q}$$

determinarne l'hamiltoniana associata e le equazioni differenziali di Hamilton.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 14 giugno 2013

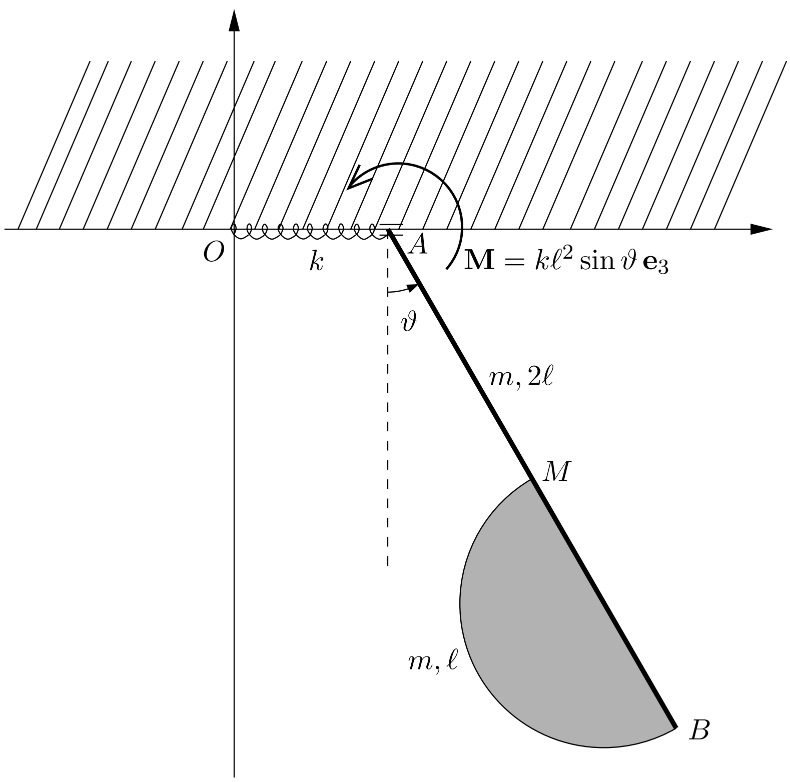
1) Un corpo rigido è formato da un'asta AB di lunghezza 2ℓ e massa m a cui è saldato un semidisco di massa m e raggio ℓ, in modo che gli estremi del diametro del semidisco coincidano col punto medio e con l'estremo B dell'asta.

Tale corpo rigido si muove in un piano verticale e l'estremo A è vincolato a scorrere sull'asse orizzontale di un sistema di riferimento Oxy. Inoltre il punto B deve sempre stare nel semipiano delle ordinate negative: denotando con ϑ l'angolo antiorario formato dalla parte negativa dell'asse verticale con l'asta AB, si deve quindi avere $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Sul punto A agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine. Inoltre sul corpo rigido agisce un momento $\mathbf{M} = k\ell^2 \sin\vartheta\, \mathbf{e}_3$.

Sapendo che tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e che i vincoli sono lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema in funzione del parametro $\lambda = \frac{k\ell}{mg}$;
2. discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie al variare di λ;
3. scrivere la lagrangiana del sistema;
4. nel caso $\lambda = \frac{1}{2}$ scrivere la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) Con riferimento al corpo rigido dell'esercizio precedente, se ne trovi la *matrice* d'inerzia in un sistema di riferimento solidale opportuno centrato in A.

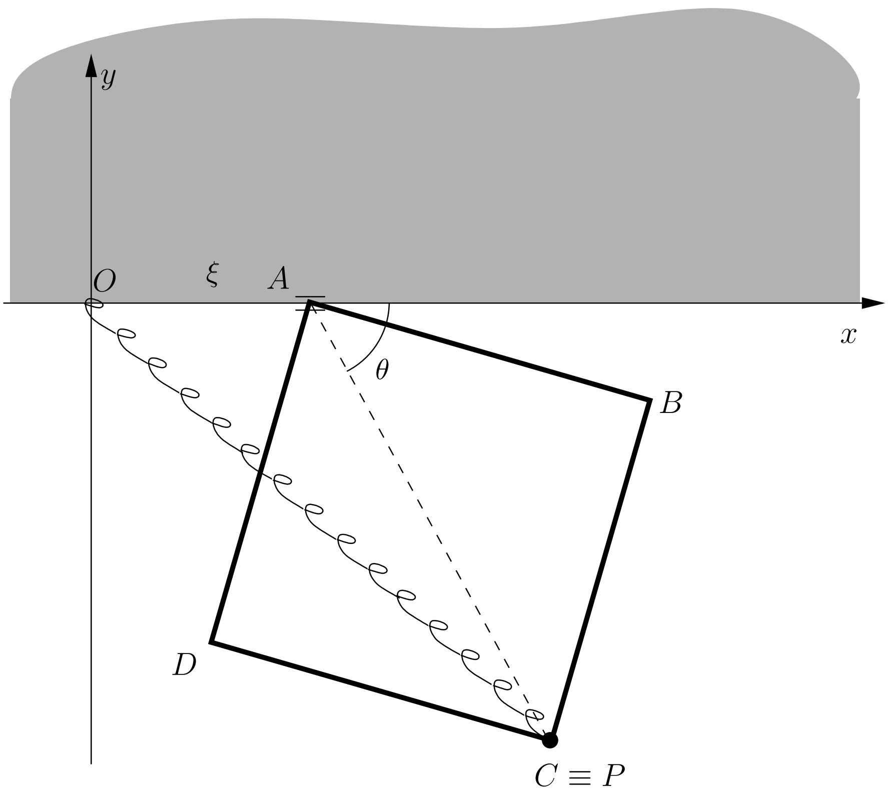
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 27 giugno 2013

1) Un corpo rigido è formato da quattro aste omogenee AB, BC, CD, DA, ognuna di lunghezza ℓ e massa m, saldate a formare il perimetro di un quadrato. Al vertice C è saldato un punto materiale P di massa m.

Il corpo si muove in un piano verticale in modo che il punto A possa scorrere sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Inoltre il corpo deve sempre stare nel semipiano delle ordinate negative.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto P agisce una forza elastica di polo l'origine e coefficiente $k > 0$. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$;
2. discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie al variare di λ;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. scrivere la lagrangiana del sistema.



2) Con riferimento al corpo rigido dell'esercizio precedente, se ne trovi la *matrice* d'inerzia in un sistema di riferimento solidale opportuno centrato in A.

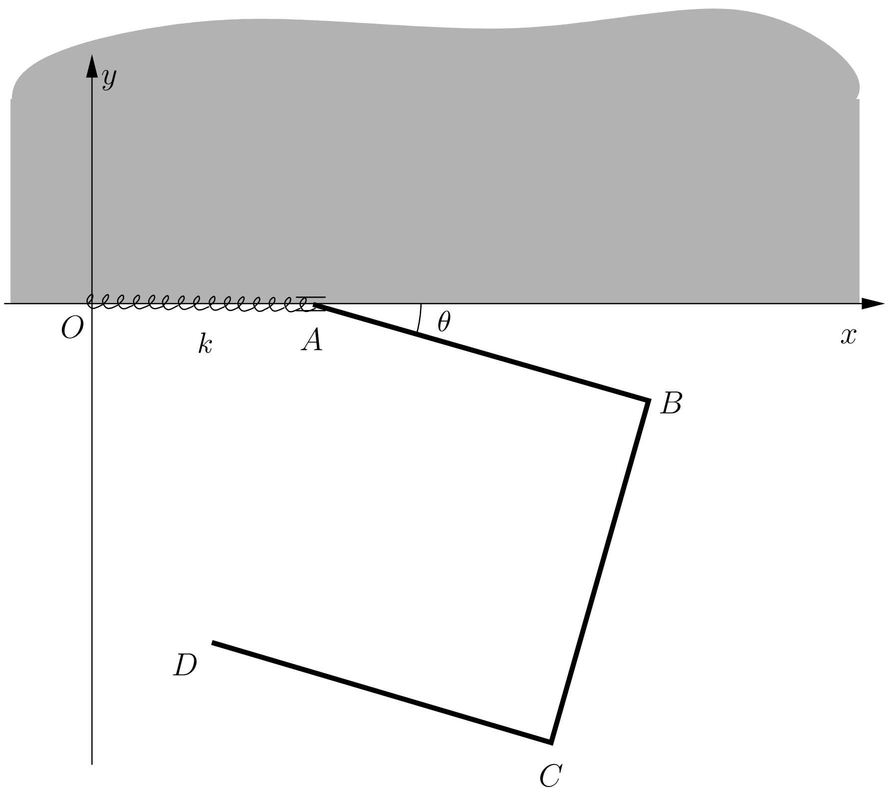
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 18 luglio 2013

1) Un corpo rigido è formato da tre aste omogenee AB, BC, CD, ognuna di lunghezza 2ℓ e massa m, saldate a i tre lati di un quadrato.

Il corpo è libero di ruotare in un piano verticale e il punto A scorre sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Inoltre il corpo deve sempre stare nel semipiano delle ordinate negative.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto A agisce una forza elastica di polo l'origine e coefficiente $k > 0$. Considerando tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine del sistema;
3. scrivere la lagrangiana del sistema;
4. scrivere le equazioni differenziali del moto linearizzate attorno alla posizione di equilibrio stabile.

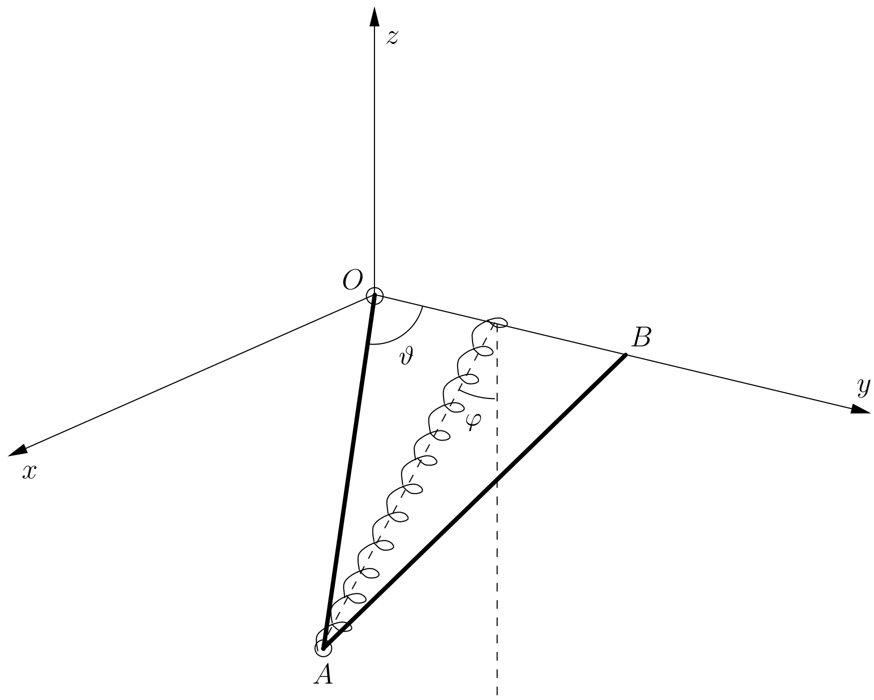


2) Con riferimento al corpo rigido dell'esercizio precedente, se ne trovi la *matrice* d'inerzia in un sistema di riferimento solidale opportuno centrato in A.

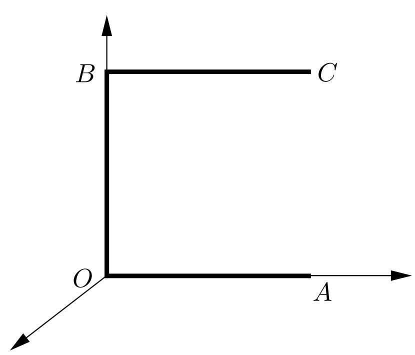
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 5 settembre 2013

1) In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si muovono due aste, OA e AB, entrambe di massa m e lunghezza 2ℓ. L'estremo O della prima asta è vincolato a stare nell'origine, e le due aste sono vincolate ad avere l'estremo A in comune. Infine, l'estremo B della seconda asta è libero di scorrere in modo liscio sulla parte positiva dell'asse y.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità; inoltre, sul punto A agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ che ha polo sull'asse y e resta sempre perpendicolare a tale asse.
Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie in funzione di λ;
4. determinare la lagrangiana del sistema.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido $OABC$, formato da tre aste OA, OB, BC, tutte di massa m e lunghezza 2ℓ, rispetto al sistema di riferimento indicato in figura.
[Si faccia attenzione alla possibile presenza di prodotti d'inerzia!]

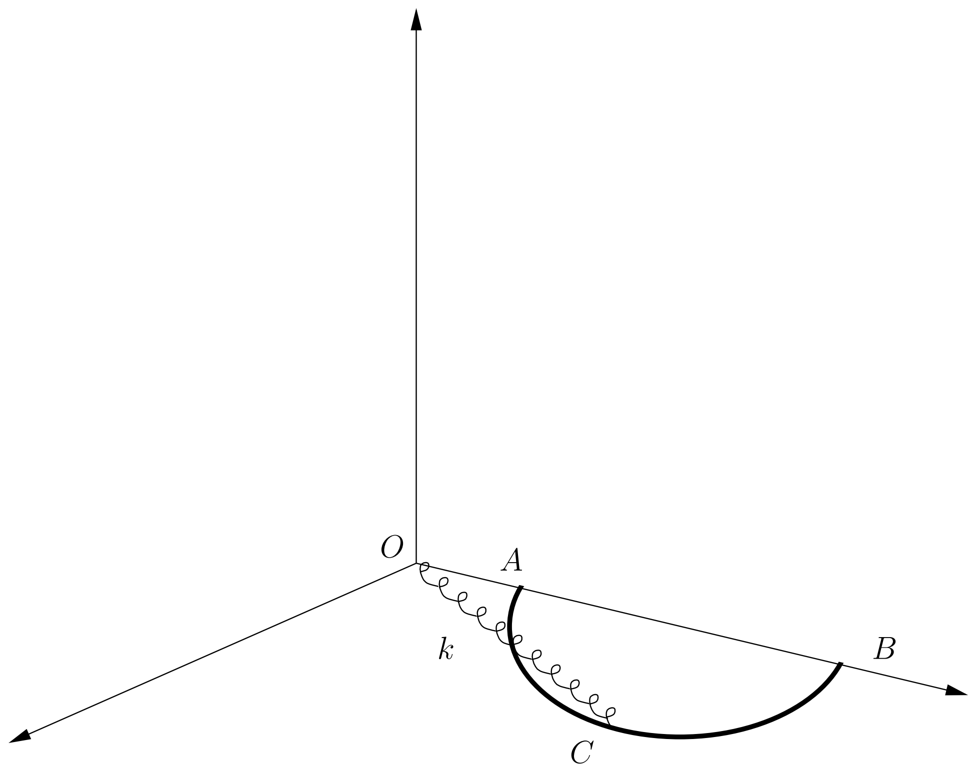


Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 19 settembre 2013

1) Una semicirconferenza materiale ACB di diametro $\overline{AB} = 2R$ e massa m si muove in modo che il diametro AB scorra sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ e la semicirconferenza possa anche ruotare attorno a tale asse.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità; inoltre, sul punto C della semicirconferenza più lontano dall'asse y agisce una forza elastica di polo l'origine e coefficiente $k > 0$. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

[Si ricorda che il baricentro di una semicirconferenza di raggio R giace a distanza $\dfrac{2R}{\pi}$ dal diametro.]



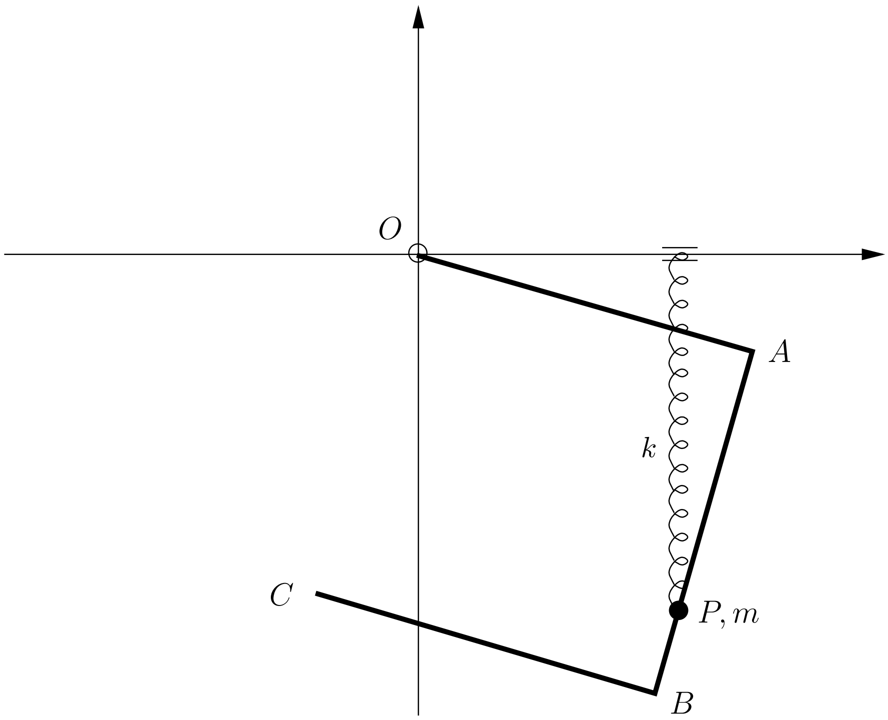
2) Si calcoli la matrice d'inerzia della figura precedente in un sistema di riferimento opportuno centrato nel punto A.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 24 gennaio 2014

1) Un corpo rigido è formato da tre aste omogenee OA, AB, BC, ognuna di lunghezza 4ℓ e massa m, saldate a i tre lati di un quadrato. Il corpo è libero di ruotare in un piano verticale e il punto O è fisso nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Sull'asta AB scorre poi un punto P, anch'esso di di massa m.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto P agisce una forza elastica verticale con polo sull'asse orizzontale e coefficiente $k > 0$. Considerando tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine del sistema;
3. scrivere la lagrangiana del sistema.

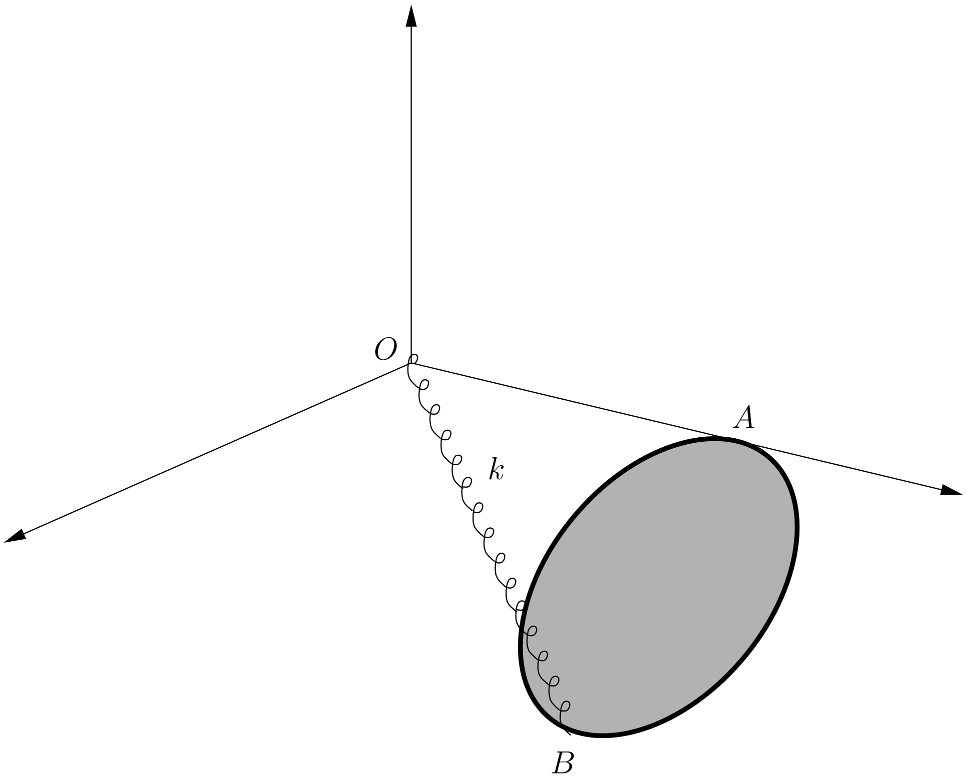


2) Con riferimento al corpo rigido dell'esercizio precedente (senza il punto P), se ne trovi la *matrice* d'inerzia in un sistema di riferimento baricentrale opportuno.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 7 febbraio 2014

1) Un corpo rigido piano è formato da un disco omogeneo di massa m e raggio R a cui è sovrapposta una circonferenza materiale omogenea concentrica di massa m e raggio R. Tale corpo si muove in modo che il punto A della circonferenza scorra sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$. Inoltre il corpo può ruotare attorno all'asse y.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto B del diametro AB agisce una forza elastica di polo l'origine e coefficiente $k > 0$. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) Data la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \dfrac{p}{q}\sqrt{1 - kq^2} \\ P = k\sqrt{1 - kq^2} \end{cases}$$

si trovino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui essa è canonica. Nei casi affermativi si trovi poi una funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$.

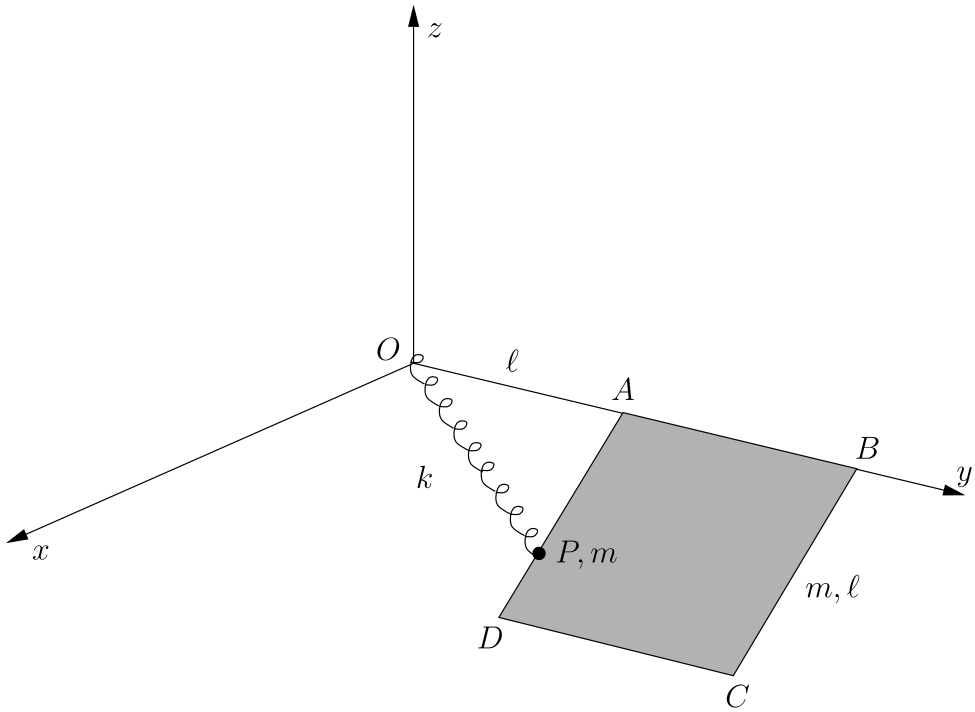
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 6 giugno 2014

1) Un lamina quadrata omogenea $ABCD$ di lato ℓ e massa m è libera di ruotare attorno al suo lato AB, che è fissato sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ in modo che A disti ℓ dall'origine.

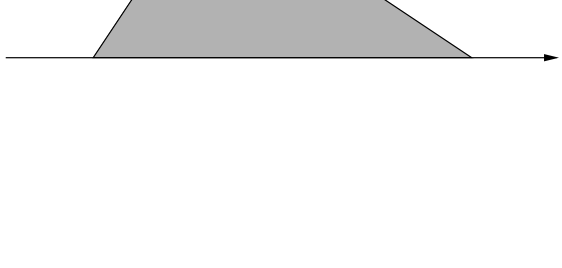
Sul lato AD della lamina scorre un punto P di massa m, su cui agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. discutere l'esistenza di posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) Ricordando che il momento d'inerzia di una lamina a forma di triangolo rettangolo omogenea di cateti a, b e massa m rispetto a un asse passante per il cateto a vale $\frac{1}{6}mb^2$, si calcoli il momento d'inerzia della lamina omogenea di massa m in figura rispetto all'asse indicato.



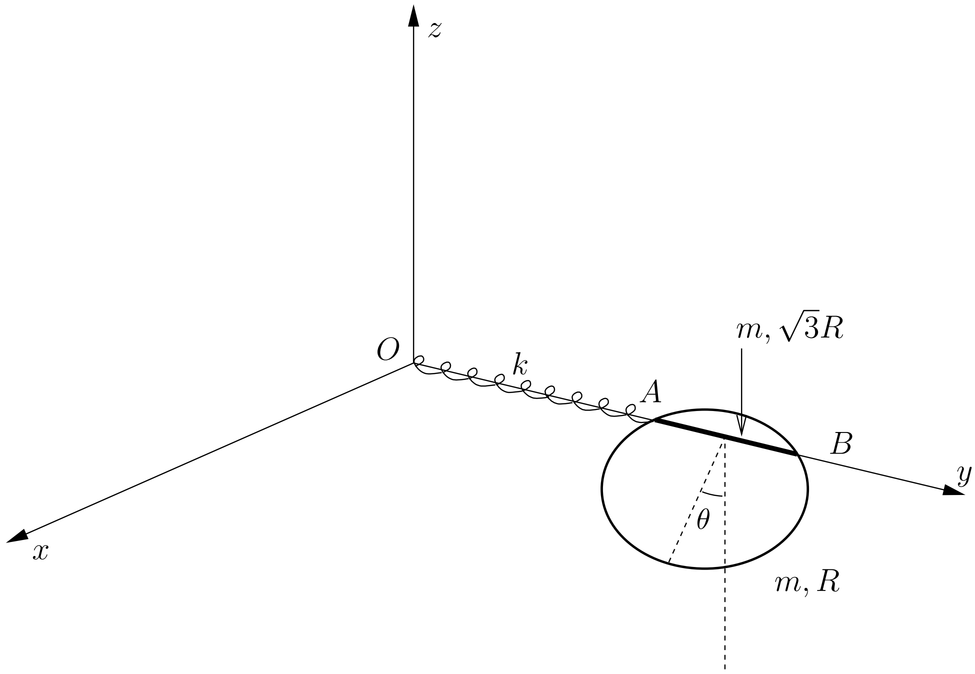
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 26 giugno 2014

1) Un corpo rigido è formato da una circonferenza materiale di massa m e raggio R a cui è saldata un'asta AB di massa m e lunghezza $\sqrt{3}R$, in modo che gli estremi A e B stiano sulla circonferenza.

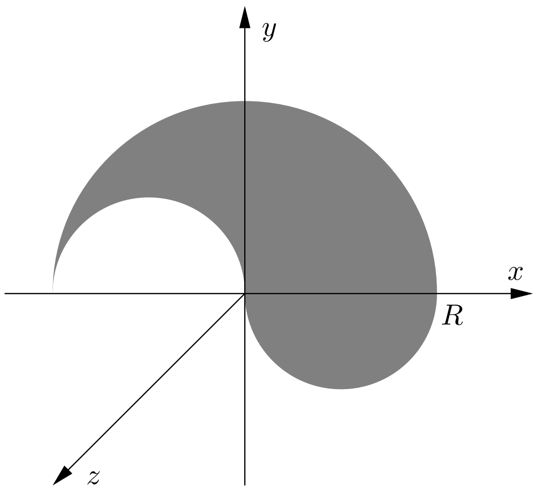
Tale corpo rigido si muove in modo che l'asta AB scorra sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, e il corpo sia libero di ruotare attorno a tale asse. Inoltre sull'estremo A dell'asta agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. scrivere la lagrangiana approssimata e trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) La lamina omogenea di massa m in figura è formata da un semidisco di raggio R cui è stato tolto un semidisco di raggio $R/2$ e aggiunto un altro semidisco di raggio $R/2$. Se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato.



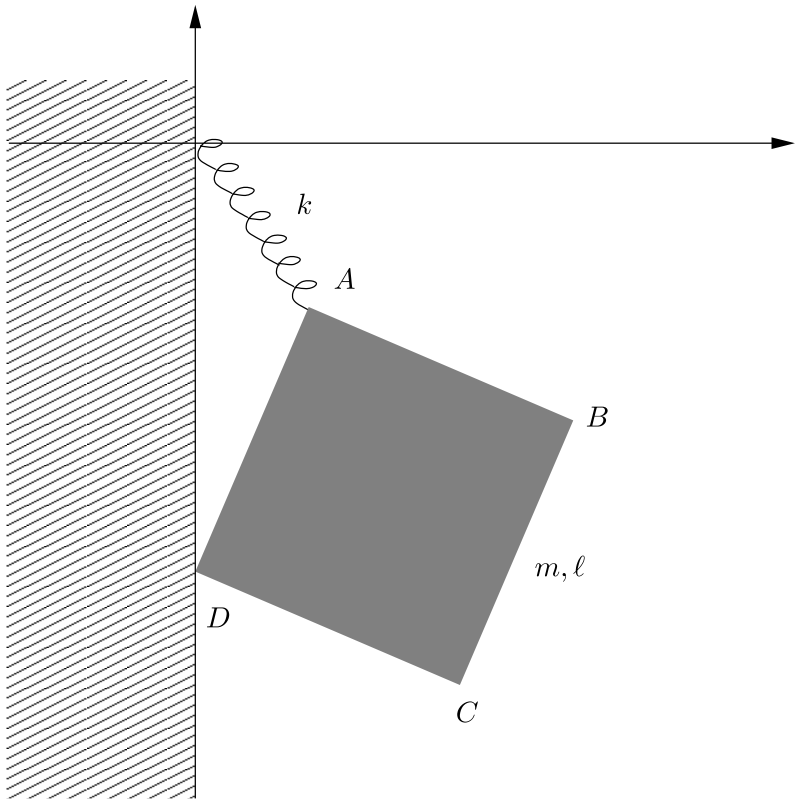
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 18 luglio 2014

1) Sia dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy in un piano verticale. Nel semipiano $\{x \geq 0\}$, una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di massa m e lato ℓ è libera di ruotare attorno al suo vertice D. Tale vertice può scorrere sull'asse verticale $x = 0$.

Sulla lamina agisce la forza peso. Inoltre, sul vertice A della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine.

Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. discutere l'esistenza di posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) Data una lamina omogenea a forma di triangolo rettangolo ABC di cateti $AB = c, AC = b$ e massa m, se ne trovi il momento d'inerzia rispetto all'asse perpendicolare alla lamina passante per C.

Si applichi tale risultato per trovare il momento d'inerzia di una lamina omogenea a forma di triangolo equilatero di lato ℓ e massa m, rispetto ad un asse perpendicolare alla lamina passante per un suo vertice.

Traccia della soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 18 luglio 2014

1) Sia dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy in un piano verticale. Nel semipiano $\{x \geq 0\}$, una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di massa m e lato ℓ è libera di ruotare attorno al suo vertice D. Tale vertice può scorrere sull'asse verticale $x = 0$.

Sulla lamina agisce la forza peso. Inoltre, sul vertice A della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine.

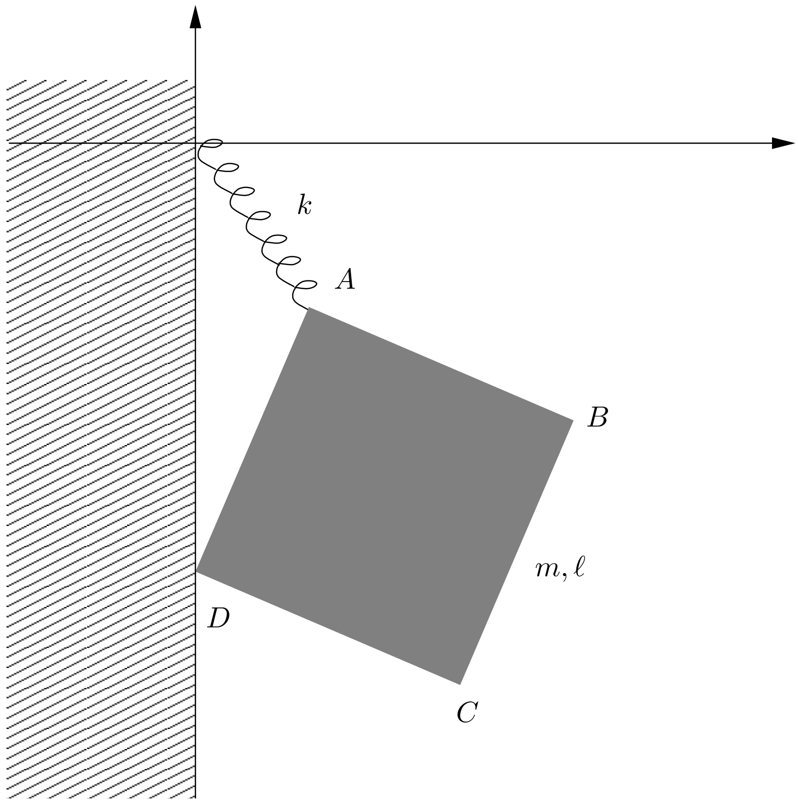
Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;

2. discutere l'esistenza di posizioni di equilibrio di confine;

3. determinare la lagrangiana del sistema;

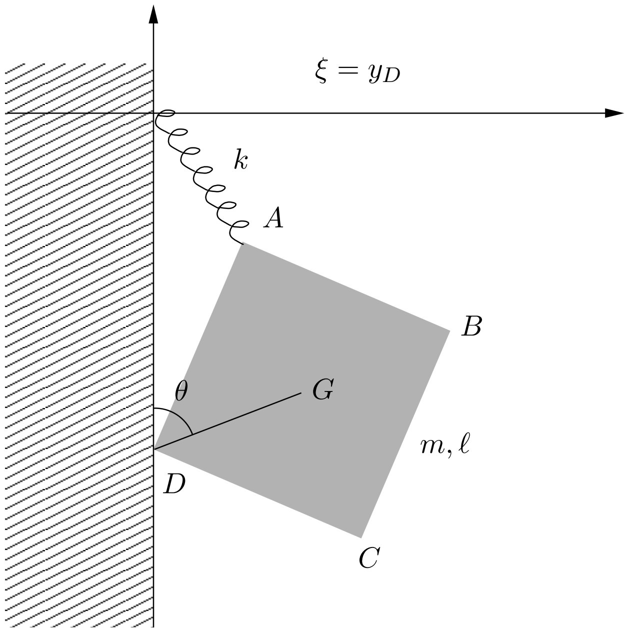
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) Data una lamina omogenea a forma di triangolo rettangolo ABC di cateti $AB = c, AC = b$ e massa m, se ne trovi il momento d'inerzia rispetto all'asse perpendicolare alla lamina passante per C.

Si applichi tale risultato per trovare il momento d'inerzia di una lamina omogenea a forma di triangolo equilatero di lato ℓ e massa m, rispetto ad un asse perpendicolare alla lamina passante per un suo vertice.

Traccia della soluzione



Esercizio 1)

1. Consideriamo i parametri lagrangiani $\xi = y_D$ e ϑ l'angolo orario tra la parte positiva dell'asse y e il lato AD. Si ha allora $\xi \in \mathbb{R}$ e $\vartheta \in [\pi/4, 3\pi/4]$.

   Calcoliamo:

$$
\begin{aligned}
&(G-D) = \ell\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\vartheta\mathbf{e}_1 + \cos\vartheta\mathbf{e}_2),\\
&(D-O) = \xi\mathbf{e}_2\\
&(A-D) = \ell(\sin(\vartheta-\pi/4)\mathbf{e}_1 + \cos(\vartheta-\pi/4)\mathbf{e}_2),\\
&(G-O) = (G-D)+(D-O) = \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta\mathbf{e}_1 + \left(\xi + \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta\right)\mathbf{e}_2,\\
&(A-O) = (A-D)+(D-O) = \ell\sin(\vartheta-\pi/4)\mathbf{e}_1 + (\xi + \ell\cos(\vartheta-\pi/4))\,\mathbf{e}_2,
\end{aligned}
$$

   da cui

$$|A-O|^2 = \ell^2 + \xi^2 + 2\ell\xi\cos(\vartheta-\pi/4).$$

   Quindi il potenziale del sistema si scrive

$$U(\xi,\vartheta) = -mgy_G - \frac{1}{2}k|A-O|^2 = -mg\left(\xi + \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta\right) - \frac{1}{2}k\xi^2 - k\ell\xi\cos(\vartheta-\pi/4).$$

   Per trovare le posizioni di equilibrio risolviamo

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial\xi} = -mg - k\xi - k\ell\cos(\vartheta-\pi/4) = 0\\[2mm]
\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = mg\ell\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta + k\ell\xi\sin(\vartheta-\pi/4) = 0.
\end{cases}
$$

   Ricaviamo dalla prima $k\xi = -mg - k\ell\cos(\vartheta-\pi/4)$ e sostituiamo nella seconda:

$$
\begin{aligned}
mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta + (-mg - k\ell\cos(\vartheta-\pi/4))\ell\sin(\vartheta-\pi/4) = 0\\
mg\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta - mg\sin(\vartheta-\pi/4) - k\ell\cos(\vartheta-\pi/4)\sin(\vartheta-\pi/4) = 0.
\end{aligned}
$$

L'ultimo termine si può riscrivere come

$$\cos(\vartheta - \pi/4)\sin(\vartheta - \pi/4) = \frac{1}{2}\sin(2\vartheta - \pi/2) = -\frac{1}{2}\sin(\pi/2 - 2\vartheta) = -\frac{1}{2}\cos(2\vartheta),$$

e applichiamo la formula di addizione al termine centrale:

$$\sin(\vartheta - \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\vartheta - \cos\vartheta).$$

Quindi troviamo l'equazione

$$mg\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta - mg\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta + mg\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2}k\ell\cos(2\vartheta) = 0$$

in cui i primi due addendi si semplificano. Ora possiamo procedere sviluppando $\cos(2\vartheta) = 2\cos^2\vartheta - 1$:

$$mg\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta + k\ell\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}k\ell = 0$$

e ponendo $\lambda = \frac{mg}{2k\ell}$ e risolvendo l'equazione di secondo grado troviamo

$$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 1}\right).$$

Ricordando che deve essere $\pi/4 < \vartheta < 3\pi/4$, ovvero $-\sqrt{2}/2 < \cos\vartheta < \sqrt{2}/2$, solo la soluzione positiva è accettabile, quindi

$$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}\right) \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}\right)\right) = \alpha,$$

da cui $\xi = -mg/k - \ell\cos(\alpha - \pi/4)$. Si noti che $\pi/4 < \alpha < \pi/2$, quindi $\cos(\alpha - \pi/4) > 0$.

Per la stabilità, calcoliamo la matrice hessiana:

$$\begin{bmatrix} -k & k\ell\sin(\vartheta - \pi/4) \\ k\ell\sin(\vartheta - \pi/4) & mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta + k\ell\xi\cos(\vartheta - \pi/4) \end{bmatrix}$$

I conti però ora diventano troppo complicati, ma visti i risultati del punto successivo, si può affermare che la posizione è stabile.

2. Cerchiamo le posizioni di equilibrio per $\vartheta = \pi/4$ e $\vartheta = 3\pi/4$. Ricordando che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -mg - k\xi - k\ell\cos(\vartheta - \pi/4) \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = mg\ell\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta + k\ell\xi\sin(\vartheta - \pi/4) \end{cases}$$

per $\vartheta = \pi/4$ si deve avere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} \leq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -mg - k\xi - k\ell = 0 \\ \dfrac{1}{2}mg\ell \leq 0 \end{cases}$$

che non è mai vera.

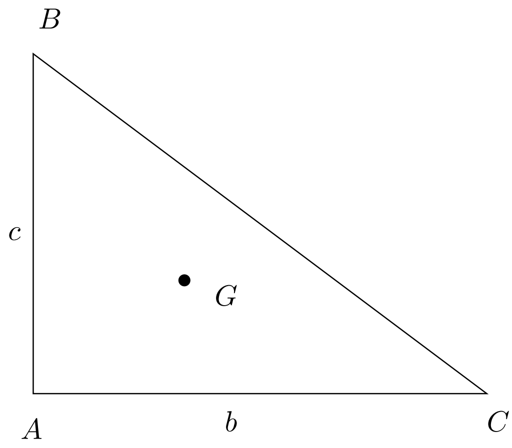
per $\vartheta = 3\pi/4$ si deve avere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -mg - k\xi = 0 \\ \dfrac{1}{2}mg\ell + k\ell\xi \geq 0 \end{cases}$$

quindi $\frac{1}{2}mg\ell - mg\ell \geq 0$ che pure non è mai vera. Quindi non esistono posizioni di equilibrio di confine.

I punti 3. e 4. sono standard.

Esercizio 2)



Ricordando che il momento d'inerzia di una lamina a forma di triangolo rettangolo rispetto all'asse z passante per A è

$$I_A = \frac{1}{6}m(b^2 + c^2),$$

poiché il baricentro ha coordinate $G(b/3, c/3)$ e il punto C ha coordinate $C(b, 0)$, dal teorema di Steiner troviamo

$$I_C = I_G + m\overline{GC}^2 = I_A - m\overline{AG}^2 + m\overline{GC}^2.$$

Essendo $\overline{AG}^2 = (b^2 + c^2)/9$ e $\overline{GC}^2 = 4b^2/9 + c^2/9$, si trova

$$I_C = \frac{1}{6}m(b^2 + c^2) + \frac{m}{9}(4b^2 + c^2 - b^2 - c^2) = \frac{1}{2}mb^2 + \frac{1}{6}mc^2.$$

Applicando il risultato ai due triangoli rettangoli in cui si divide un triangolo equilatero tracciando un'altezza, si ha $b = \ell\sqrt{3}/2$ e $c = \ell/2$, da cui

$$I = \frac{1}{2}m\frac{3}{4}\ell^2 + \frac{1}{6}m\frac{\ell^2}{4} = \frac{5}{12}m\ell^2.$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 9 settembre 2014

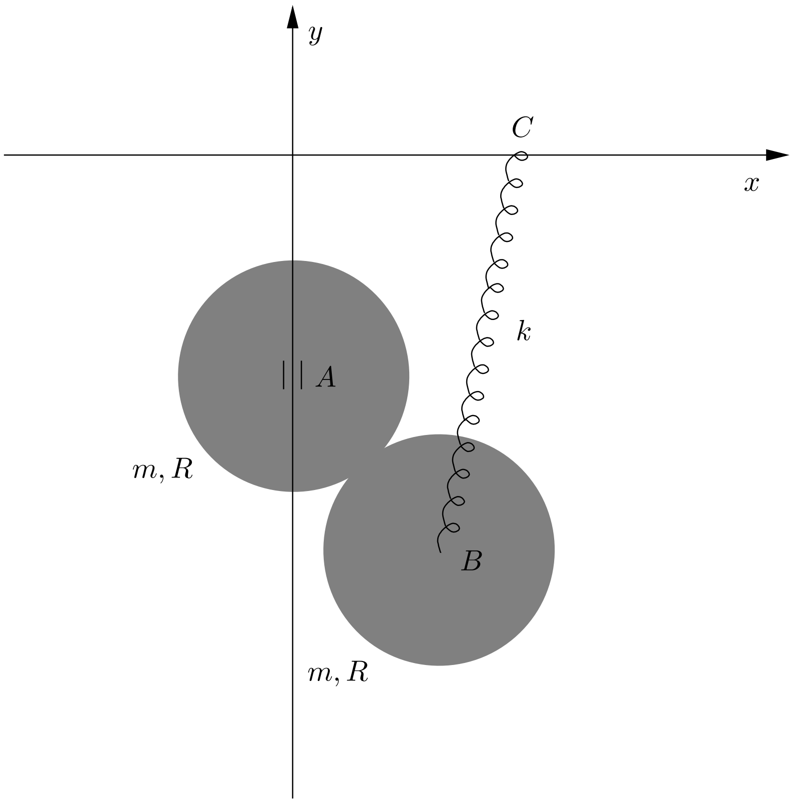
1) Sia dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy in un piano verticale. Una lamina omogenea è formata da due dischi di massa m e raggio R saldati in un loro punto sul bordo. La lamina è libera di ruotare attorno al centro A del primo disco, che scorre sull'asse verticale.

Sulla lamina agisce la forza peso e sul centro B del secondo disco una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto $C(2R; 0)$.

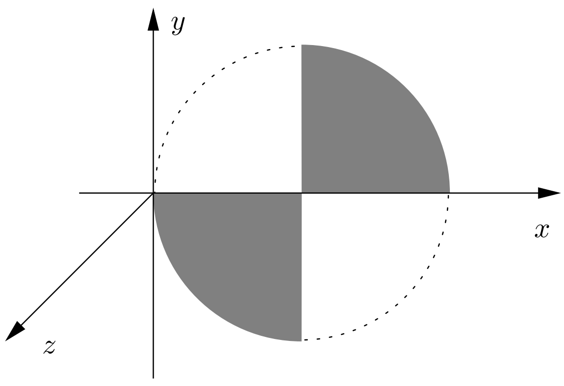
Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile.

NOTA CORRETTIVA: il conto per trovare le posizioni di equilibrio è troppo complicato!



2) Una lamina piana omogenea di massa m è formata da due quarti di un disco di raggio R opposti al vertice. Se ne calcoli la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento indicato in figura.



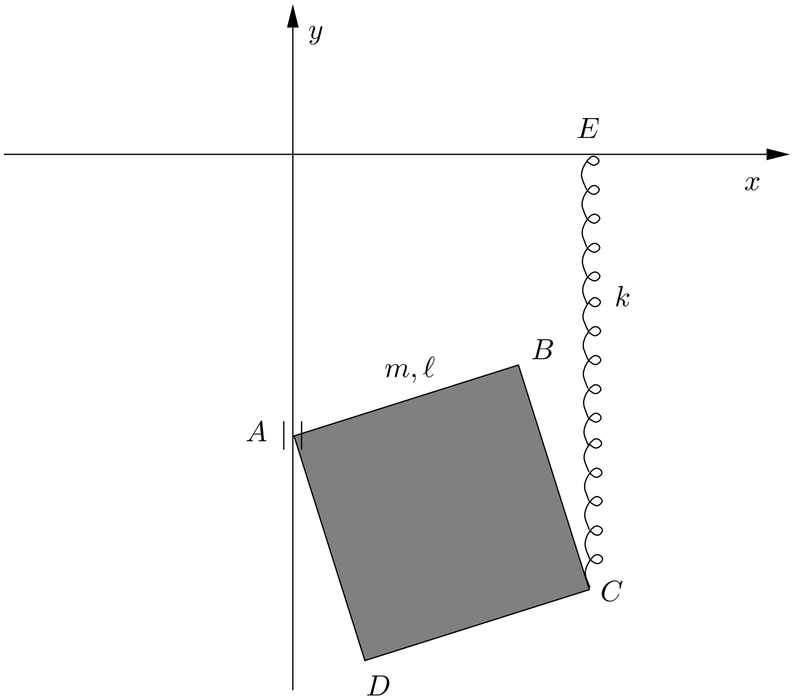
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 25 settembre 2014

1) Sia dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy in un piano verticale. Una lamina quadrata omogenea di massa m e lato ℓ è libera di ruotare attorno al suo vertice A, che scorre sull'asse verticale.

Sulla lamina agisce la forza peso e sul vertice C opposto ad A agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse x.

Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Una lamina piana omogenea di massa m è formata da due quadrati di lato $\ell/2$ opposti al vertice. Se ne calcoli la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento indicato in figura.