Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 14 giugno 2021
a cura di Sara Mastaglio

I) Entrambi i paramenti lagrangiani sono forniti dall'esercizio; possiamo inoltre osservare che

$$\xi \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \vartheta \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right].$$

1. Prima di determinare il potenziale, che ci permetterà di calcolare le posizioni di equilibrio, determiniamo le coordinate del baricentro della lamina quadrata e del vettore $(G - E)$:

$$(G - O) = (G - A) + (A - O) = \sqrt{2}\ell \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_x + \left(\xi + \sqrt{2}\ell\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y,$$

$$(G - E) = (G - O) + (O - E) = \left(\sqrt{2}\ell \operatorname{sen}\vartheta - \sqrt{2}\ell\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\xi + \sqrt{2}\ell\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y,$$

da cui $|G - E|^2 = 4\ell^2 - 4\ell^2 \operatorname{sen}\vartheta + \xi^2 + 2\sqrt{2}\ell\xi\cos\vartheta$.
Il potenziale, a meno di una costante, sarà quindi dato da

$$U = -mgy_G - \frac{k}{2}|G - E|^2 = -mg\xi - \sqrt{2}mg\ell\cos\vartheta + 2k\ell^2 \operatorname{sen}\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 - \sqrt{2}k\ell\xi\cos\vartheta + c.$$

Procediamo ora con la determinazione delle posizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -mg - k\xi - \sqrt{2}k\ell\cos\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = \sqrt{2}mg\ell \operatorname{sen}\vartheta + 2k\ell^2\cos\vartheta + \sqrt{2}k\ell\xi \operatorname{sen}\vartheta = 0; \end{cases}$$

dalla prima equazione ricaviamo $\xi = -\dfrac{mg}{k} - \sqrt{2}\ell\cos\vartheta$, che sostituito nella seconda dà

$$\sqrt{2}mg\ell \operatorname{sen}\vartheta + 2k\ell^2\cos\vartheta - \sqrt{2}mg\ell \operatorname{sen}\vartheta - 2k\ell^2 \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta = 0,$$

da cui si ricava

$$\cos\vartheta\,(1 - \operatorname{sen}\vartheta) = 0$$

che ci fornisce un'unica soluzione accettabile, cioè $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$; la soluzione $\dfrac{3}{2}\pi$ non è accettabile, infatti $\dfrac{3}{2}\pi \notin \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3}{4}\pi\right)$.
Sostituendo $\dfrac{\pi}{2}$ nella ξ, otteniamo quindi la sola posizione di equilibrio

$$P\left(-\frac{mg}{k}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Passiamo ora al calcolo dell'hessiano per valutare la stabilità della posizione di equilibrio:

$$\mathcal{H}(\xi,\vartheta)=\begin{bmatrix} -k & \sqrt{2}k\ell\operatorname{sen}\vartheta \\ \sqrt{2}k\ell\operatorname{sen}\vartheta & \sqrt{2}mg\ell\cos\vartheta-2k\ell^2\operatorname{sen}\vartheta+\sqrt{2}k\ell\xi\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

che valutata nella posizione di equilibrio P diventa

$$\mathcal{H}(P)=\begin{bmatrix} -k & \sqrt{2}k\ell \\ \sqrt{2}k\ell & -2k\ell^2 \end{bmatrix},$$

ma avendo determinante nullo non fornisce alcuna informazione riguardo alla stabilità di P.

2. Le eventuali posizioni di equilibrio di confine sono

$$\overline{P}_1\left(\overline{\xi};\frac{\pi}{4}\right)\quad \text{e}\quad \overline{P}_2\left(\overline{\xi};\frac{3}{4}\pi\right).$$

Per quanto riguarda $\overline{P}_1$ abbiamo $w_\xi\in\mathbb{R}$ e $w_\vartheta\geq 0$, quindi

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right|_{\overline{P}_1}=-mg-k\overline{\xi}-k\ell=0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}\right|_{\overline{P}_1}=mg\ell+\sqrt{2}k\ell^2+k\ell\overline{\xi}\leq 0, \end{cases}$$

da cui $\overline{\xi}=-\dfrac{mg}{k}-\ell$ che inserita nella seconda ci dà $\left(\sqrt{2}-1\right)k\ell^2\leq 0$ che non è mai verificata. Non è quindi possibile trovare posizioni di equilibrio di confine con angolo $\vartheta=\dfrac{\pi}{4}$.

Ripetiamo i passaggi con $\overline{P}_2$ che invece ha $w_\xi\in\mathbb{R}$ e $w_\vartheta\leq 0$:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right|_{\overline{P}_2}=-mg-k\overline{\xi}+k\ell=0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}\right|_{\overline{P}_2}=mg\ell-\sqrt{2}k\ell^2+k\ell\overline{\xi}\geq 0, \end{cases}$$

da cui $\overline{\xi}=\ell-\dfrac{mg}{k}$ che inserita nella seconda ci dà $\left(1-\sqrt{2}\right)k\ell^2\geq 0$ che non è mai verificata: nemmeno in questo caso è possibile trovare posizioni di equilibrio di confine.

3. Per determinare la lagrangiana $\mathcal{L}=K+U$ dobbiamo prima calcolare l'energia cinetica. In questo caso non ci sono punti fissi, quindi procediamo nel calcolo dell'energia cinetica rispetto al baricentro:

$$K=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_G\boldsymbol{\omega}.$$

Innanzitutto la velocità angolare è data da $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$; della matrice $\mathbf{J}_G$ ci interessa soltanto il momento d'inerzia rispetto all'asse z, quindi $J_G^{33} = \dfrac{m(2\ell)^2}{6} = \dfrac{2}{3}m\ell^2$; infine per il calcolo della velocità del baricentro basta derivare rispetto al tempo il vettore $(G-O)$ precedentemente calcolato:

$$\boldsymbol{v}_G = \sqrt{2}\ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x + \left(\dot{\xi} - \sqrt{2}\ell\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y,$$

da cui si ricava $v_G^2 = \dot{\xi}^2 + 2\ell^2\dot{\vartheta}^2 - 2\sqrt{2}\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta$.
A questo punto, dopo qualche semplice calcolo, l'energia cinetica risulta:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 - \sqrt{2}m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta.$$

Infine, la lagrangiana risulterà

$$\mathcal{L} = K+U = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2+\frac{4}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2-\sqrt{2}m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta-mg\xi-\sqrt{2}mg\ell\cos\vartheta+2k\ell^2\operatorname{sen}\vartheta-\frac{k}{2}\xi^2-\sqrt{2}k\ell\xi\cos\vartheta.$$

II) Per il calcolo della matrice d'inerzia del corpo rigido procediamo separatamente con il calcolo della matrice d'inerzia dell'asta e della lamina quadrata rispetto al sistema di riferimento indicato. Cominciamo con la matrice d'inerzia $\mathbf{J}_O^{asta}$, che possiamo facilmente ricondurre a dei casi che conosciamo, osservando che in questo caso il punto O coincide con il baricentro dell'asta e che la lunghezza dell'asta è di $2\sqrt{2}\ell$:

$$\mathbf{J}_O^{asta} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Per il calcolo della matrice del quadrato $\mathbf{J}_O^{quad}$ dobbiamo prima calcolare la matrice $\mathbf{J}_G^{quad}$ fatta rispetto ad un sistema di riferimento baricentrale (con lato del quadrato di 2ℓ) e successivamente spostarla con Huygens-Steiner nel punto O; osserviamo che il quadrato è un corpo a struttura giroscopica e quindi, rispetto ad un sistema di riferimento baricentrale e rispetto ad una qualsiasi rotazione, la matrice d'inerzia non cambia:

$$\mathbf{J}_O^{quad} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_G^{quad}} + m\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 4\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\ell^2 \end{bmatrix}}_{d^2\mathbf{I}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2\ell^2 & 2\ell^2 & 0 \\ 2\ell^2 & 2\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{d\otimes d}\right) = \begin{bmatrix} \frac{7}{3}m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & \frac{7}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3}m\ell^2 \end{bmatrix},$$

dove $d = (G - O) = \left(\sqrt{2}\ell, \sqrt{2}\ell, 0\right)$ e quindi $d^2 = 4\ell^2$.

Infine, per calcolare la matrice d'inerzia dell'intero corpo rigido basta sommare le matrici $\mathbf{J}_O^{asta}$ e $\mathbf{J}_O^{quad}$:

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} 3m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & \dfrac{7}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{16}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$