Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 15 luglio 2022

I) 1. Usando i parametri indicati nel testo, si ha $\xi \in [-4\ell, 4\ell]$.

Denotando con G il baricentro della lamina quadrata, troviamo

$$
\begin{aligned}
(G-C) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y,\\
(C-O) &= \xi\sin\vartheta\boldsymbol{e}_x - \xi\cos\vartheta\boldsymbol{e}_y,\\
(G-O) &= (G-C)+(C-O) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\cos\vartheta + \xi\sin\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\sin\vartheta - \xi\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y,
\end{aligned}
$$

mentre la lunghezza al quadrato della molla vale $|y_C|^2 = \xi^2\cos^2\vartheta$. Quindi il potenziale è dato da

$$
U = -mgy_G - \frac{1}{2}k|y_C|^2 = mg\xi\cos\vartheta - mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\sin\vartheta - \frac{1}{2}k\xi^2\cos^2\vartheta + \text{cost}.
$$

Notiamo che il baricentro dell'asta è fisso, dunque la sua forza peso non contribuisce al potenziale.

Le posizioni di equilibrio si trovano risolvendo

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = (mg - k\xi\cos\vartheta)\cos\vartheta = 0\\[2mm]
\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -(mg - k\xi\cos\vartheta)\xi\sin\vartheta - mg\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ell\cos\vartheta = 0.
\end{cases}
$$

Partiamo dalla prima equazione: per $\cos\vartheta = 0$ si ha $\xi = 0$, da cui le posizioni $P_1(0,\pi/2)$ e $P_2(0,3\pi/2)$. Se invece poniamo $mg - k\xi\cos\vartheta = 0$, dalla seconda troviamo di nuovo $\cos\vartheta = 0$, che però stavolta implica $mg = 0$ e dunque non è accettabile. Quindi abbiamo trovato due posizioni di equilibrio, sempre accettabili.

Calcolando la matrice hessiana del potenziale troviamo

$$
\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k\cos^2\vartheta & -mg\sin\vartheta + 2k\xi\sin\vartheta\cos\vartheta\\ -mg\sin\vartheta + 2k\xi\sin\vartheta\cos\vartheta & -mg\xi\cos\vartheta + mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\sin\vartheta + k\xi^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\end{bmatrix},
$$

e nelle due posizioni di equilibrio risulta

$$
\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & -mg\\ -mg & mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & mg\\ mg & -mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\end{bmatrix}.
$$

In ogni caso il determinante è negativo, quindi le posizioni sono entrambe instabili.

2. Calcoliamo subito l'energia cinetica dell'asta AB, che ha punto fisso in O:

$$
J_O^{33} = \frac{1}{12}m(8\ell)^2 = \frac{16}{3}m\ell^2 \quad \Rightarrow \quad K_{\text{asta}} = \frac{1}{2}\frac{16}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{8}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.
$$

Per la lamina usiamo il Teorema di König: si ha

$$
\boldsymbol{v}_G = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\dot{\vartheta}\sin\vartheta + \dot{\xi}\sin\vartheta + \xi\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{\xi}\cos\vartheta + \xi\dot{\vartheta}\sin\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y,
$$

da cui

$$
|\boldsymbol{v}_G|^2 = \frac{1}{2}\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2 - \sqrt{2}\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}.
$$

Poiché anche la velocità angolare della lamina ha modulo $\dot{\vartheta}$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
K_{\text{tot}} &= \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2 - \sqrt{2}\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{8}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2\\
&= \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m(\xi^2 + 6\ell^2)\dot{\vartheta}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}.
\end{aligned}
$$

3. Le posizioni di equilibrio sono $P_1(0, \pi/2)$ e $P_2(0, 3\pi/2)$. La matrice dell'energia cinetica si scrive

$$J = \begin{bmatrix} m & -\frac{\sqrt{2}}{4}m\ell \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}m\ell & m(\xi^2 + 6\ell^2) \end{bmatrix},$$

quindi

$$J(P_1) = J(P_2) = \begin{bmatrix} m & -\frac{\sqrt{2}}{4}m\ell \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}m\ell & 6m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Ricordando che l'hessiano del potenziale nelle due posizioni vale

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & -mg \\ -mg & mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & mg \\ mg & -mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \end{bmatrix},$$

la lagrangiana approssimata in P_1 si scrive

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\xi} & \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -\frac{\sqrt{2}}{4}m\ell \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}m\ell & 6m\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \xi & \vartheta - \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -mg \\ -mg & mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \vartheta - \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

e la lagrangiana approssimata in P_2 si scrive

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\xi} & \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -\frac{\sqrt{2}}{4}m\ell \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}m\ell & 6m\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \xi & \vartheta - \frac{3\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & mg \\ mg & -mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \vartheta - \frac{3\pi}{2} \end{bmatrix}.$$

II)

Usando il criterio delle parentesi di Poisson, si deve avere

$$1 = [Q, P] = kp^\alpha \cos q k\alpha p^{\alpha-1} \cos q + k\alpha p^{\alpha-1} \sin q kp^\alpha \sin q = k^2 \alpha p^{2\alpha-1},$$

da cui $\alpha = 1/2$ e $k = \sqrt{2}$ (ricordando che k deve essere positivo). Quindi la trasformazione canonica si scrive

$$\begin{cases} Q(q,p) = \sqrt{2p}\sin q \\ P(q,p) = \sqrt{2p}\cos q. \end{cases}$$

Per trovare la funzione generatrice, dobbiamo scriverla in funzione di q, Q: facendo il quoziente, si ha

$$P = Q\frac{\cos q}{\sin q} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2p} = \frac{Q}{\sin q} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{Q^2}{2\sin^2 q}.$$

Quindi

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -Q\frac{\cos q}{\sin q} \quad \Rightarrow \quad F_1 = -\frac{Q^2}{2}\frac{\cos q}{\sin q} + g(q)$$

da cui

$$p = \frac{Q^2}{2\sin^2 q} = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{Q^2}{2}\frac{1}{\sin^2 q} + g'(q) \quad \Rightarrow \quad g = \text{cost}.$$

Quindi la funzione generatrice è $F_1(q, Q) = -\dfrac{Q^2}{2}\dfrac{\cos q}{\sin q}$.