Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 30 giugno 2023

I) 1. Usiamo il parametro ϑ indicato nel testo e come ξ l'ascissa del centro G lungo l'asta: in questo modo si ha la limitazione $\xi \in [0, 4\ell]$.

Nel caso $\xi \in (0, 4\ell)$ usiamo il potenziale, che si scrive

$$U = -mgy_G - mgy_{G_{\text{asta}}} - \frac{1}{2}ky_G^2 = 2mg\ell\cos\vartheta + mg\xi\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2\cos^2\vartheta.$$

Le posizioni di equilibrio si trovano risolvendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg\cos\vartheta - k\xi\cos^2\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -2mg\ell\sin\vartheta - mg\xi\sin\vartheta + k\xi^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0. \end{cases}$$

Raccogliendo, si ottiene

$$\begin{cases} \cos\vartheta(mg - k\xi\cos\vartheta) = 0 \\ \sin\vartheta(-2mg\ell - mg\xi + k\xi^2\cos\vartheta) = 0. \end{cases}$$

Prendendo nella prima $\cos\vartheta = 0$ e sostituendo nella seconda, si ha $\xi < 0$ che non è accettabile. Quindi bisogna prendere nella prima $k\xi\cos\vartheta = mg$. Sostituendo nella seconda si ottiene

$$\sin\vartheta(-2mg\ell - mg\xi + mg\xi) = \sin\vartheta(-2mg\ell) = 0$$

da cui $\vartheta = 0, \pi$. Ma per $\vartheta = \pi$ si ha ancora $\xi < 0$ che non è accettabile, quindi resta solo $\vartheta = 0$ da cui $\xi = mg/k$, che è accettabile per $mg/k < 4\ell$, ovvero per $\lambda < 4$.

Quindi si ha solo la posizione

$$P\left(\frac{mg}{k}, 0\right) \quad \text{per } \lambda < 4.$$

Calcolando la matrice hessiana del potenziale troviamo

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k\cos^2\vartheta & -mg\sin\vartheta + 2k\xi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ -mg\sin\vartheta + 2k\xi\sin\vartheta\cos\vartheta & -2mg\ell\cos\vartheta - mg\xi\cos\vartheta + k\xi^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \end{bmatrix},$$

e quindi risulta

$$\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -2mg\ell \end{bmatrix}$$

che è sempre definita negativa, quindi P quando esiste è stabile.

2. Si hanno posizioni di confine per $\xi = 0$ e per $\xi = 4\ell$. Nel caso $\xi = 0$ si ha $\dot\xi \geqslant 0$, quindi

$$\begin{cases} mg\cos\vartheta \leqslant 0 \\ -2mg\ell\sin\vartheta = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda segue $\vartheta = 0, \pi$ e la prima è soddisfatta per $\vartheta = \pi$, quindi $(0, \pi)$ è posizione di equilibrio di confine.

Nel caso $\xi = 4\ell$ si ha $\dot\xi \leqslant 0$, quindi

$$\begin{cases} mg\cos\vartheta - 4k\ell\cos^2\vartheta \geqslant 0 \\ -2mg\ell\sin\vartheta - 4mg\ell\sin\vartheta + 16k\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0. \end{cases}$$

Studiamo la seconda: raccogliendo $\sin\vartheta$ si ha $\vartheta = 0, \pi$ e resta

$$-6mg\ell + 16k\ell^2\cos\vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\vartheta = \frac{3}{8}\lambda.$$

Per $\vartheta = 0$ la prima risulta $mg - 4k\ell \geqslant 0$, da cui $\lambda \geqslant 4$, quindi $(4\ell, 0)$ è posizione di equilibrio di confine per $\lambda \geqslant 4$.

Per $\vartheta = \pi$ si ha $-mg - 4k\ell \geqslant 0$ che non è mai vera.

Per $\cos\vartheta = \frac{3}{8}\lambda$ si ha

$$\frac{3}{8}mg\lambda - \frac{9}{16}k\ell\lambda^2 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{8}k\ell\left(\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda^2\right) \geqslant 0$$

che non è mai vera.

Riassumendo: abbiamo trovato in tutto due posizioni di equilibrio di confine: $(0, \pi)$ e $(4\ell, 0)$; la seconda lo è solo per $\lambda \geqslant 4$.

3. Per l'energia cinetica usiamo il Teorema di König. L'asta ha l'estremo O fisso, quindi

$$K_{\text{asta}} = \frac{1}{2}\omega \cdot J_O\omega = \frac{1}{2}\frac{1}{3}m(4\ell)^2\dot\vartheta^2 = \frac{8}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2.$$

Per la lamina calcoliamo

$$(G - O) = \xi\sin\vartheta\boldsymbol{e}_x - \xi\cos\vartheta\boldsymbol{e}_y \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_G = (\dot\xi\sin\vartheta + \xi\dot\vartheta\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x - (\dot\xi\cos\vartheta - \xi\dot\vartheta\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_y,$$

da cui $|\boldsymbol{v}_G|^2 = \dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2$. Quindi

$$K_{\text{lam}} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\omega \cdot J_G\omega = \frac{1}{2}m\left(\dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{6}\ell^2\dot\vartheta^2\right).$$

L'energia cinetica totale si ottiene da

$$K = K_{\text{asta}} + K_{\text{lam}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{16}{3}\ell^2\dot\vartheta^2 + \dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{6}\ell^2\dot\vartheta^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 + \frac{11}{2}\ell^2\dot\vartheta^2\right).$$

In particolare, la matrice dell'energia cinetica $\mathbb{K}$ è data da

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{11}{2}m\ell^2 + m\xi^2 \end{bmatrix}.$$

II) Il corpo ha un asse di simmetria (quello verticale), quindi i prodotti d'inerzia sono nulli.

Per ogni asta si ha

$$J^{11}_{\text{asta}} = \frac{1}{3}m(\sqrt{2}\ell)^2\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}m\ell^2 = J^{22}_{\text{asta}},$$

quindi

$$J_{\text{aste}} = \text{diag}\left(\frac{2}{3}m\ell^2, \frac{2}{3}m\ell^2, \frac{4}{3}m\ell^2\right).$$

Per il disco applico il teorema di Steiner, ottenendo

$$J_{\text{disco}} = \text{diag}\left(\frac{5}{4}m\ell^2, \frac{1}{4}m\ell^2, \frac{3}{2}m\ell^2\right).$$

Quindi la matrice d'inerzia della figura è data da

$$J_O = \text{diag}\left(\frac{23}{12}m\ell^2, \frac{11}{12}m\ell^2, \frac{17}{6}m\ell^2\right).$$

Per calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse tratteggiato, dobbiamo scriverne il versore: la direzione è data da $(1, 1, 0)$, normalizzando otteniamo

$$\boldsymbol{r} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

quindi

$$I_r = \boldsymbol{r} \cdot J_O\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\frac{23}{12}m\ell^2 + \frac{1}{2}\frac{11}{12}m\ell^2 = \frac{17}{12}m\ell^2.$$