Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 6 giugno 2024

I) 1. Come parametri lagrangiani usiamo l'ascissa di P a partire da G lungo la retta OB e l'angolo ϑ indicato nel testo: in questo modo si ha la limitazione $\xi \in [-\ell, \ell]$.

Nel caso $\xi \in (-\ell, \ell)$ usiamo il potenziale, che si scrive

$$U = -mgy_G - mgy_P - \frac{1}{2}k|P-G|^2 = mg\ell\cos\vartheta + mg(\ell+\xi)\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2.$$

Le posizioni di equilibrio si trovano risolvendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg\cos\vartheta - k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\ell\sin\vartheta - mg(\ell+\xi)\sin\vartheta = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $\xi = \frac{mg}{k}\cos\vartheta$ e raccogliendo nella seconda e sostituendo, si ottiene

$$\sin\vartheta(-2mg\ell - \frac{m^2g^2}{k}\cos\vartheta) = 0,$$

da cui

$$\vartheta = 0, \pi, \qquad \cos\vartheta = -\frac{2}{\lambda}.$$

Per $\vartheta = 0$ si ha $\xi = \frac{mg}{k}$, che è accettabile se $\lambda < 1$.

Per $\vartheta = \pi$ si ha $\xi = -\frac{mg}{k}$, che è accettabile se $\lambda < 1$.

L'equazione $\cos\vartheta = -2/\lambda$ è risolubile se $\lambda \geqslant 2$ e in questo caso si ha

$$\xi = \frac{mg}{k}\cos\vartheta = -\frac{mg}{k}\frac{2}{\lambda} > -\ell \quad \Rightarrow \quad 2 < 1$$

e quindi le soluzioni non sono mai accettabili.

Quindi si hanno le posizioni di equilibrio

$$P_1\left(\frac{mg}{k}, 0\right),\ P_2\left(-\frac{mg}{k}, \pi\right) \quad \text{per } \lambda < 1.$$

2. Calcolando la matrice hessiana del potenziale troviamo

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k & -mg\sin\vartheta \\ -mg\sin\vartheta & -2mg\ell\cos\vartheta - mg\xi\cos\vartheta \end{bmatrix},$$

e quindi risulta

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -2mg\ell - \frac{m^2g^2}{k} \end{bmatrix}$$

che è sempre definita negativa, quindi P_1 quando esiste è stabile.

Per P_2:

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 2mg\ell - \frac{m^2g^2}{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & mg\ell(2-\lambda) \end{bmatrix}$$

e per $\lambda < 1$ si ha sempre una sella, quindi P_2 è instabile quando esiste.

3. Si hanno posizioni di confine per $\xi = \pm\ell$. Nel caso $\xi = -\ell$ si ha $\dot{\xi} \geqslant 0$, quindi

$$\begin{cases} mg\cos\vartheta + k\ell \leqslant 0 \\ -mg\ell\sin\vartheta = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda segue $\vartheta = 0, \pi$ e la prima è soddisfatta per $\vartheta = \pi$ e $\lambda \geqslant 1$, quindi $(-\ell, \pi)$ è posizione di equilibrio di confine per $\lambda \geqslant 1$.

Nel caso $\xi = \ell$ si ha $\dot{\xi} \leqslant 0$, quindi

$$\begin{cases} mg\cos\vartheta - k\ell \geqslant 0 \\ -3mg\ell\sin\vartheta = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda segue $\vartheta = 0, \pi$ e la prima è soddisfatta per $\vartheta = 0$ e $\lambda \geqslant 1$, quindi $(\ell, 0)$ è posizione di equilibrio di confine per $\lambda \geqslant 1$.

4. Per trovare l'energia cinetica usiamo il Teorema di König. La lamina quadrata ha l'estremo O fisso, quindi

$$K_{\text{lam}} = \frac{1}{2}\omega \cdot J_O\omega = \frac{1}{2}\frac{2}{3}m(\sqrt{2}\ell)^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

Per il punto materiale calcoliamo

$$(P-O) = (\ell+\xi)\sin\vartheta\boldsymbol{e}_x - (\ell+\xi)\cos\vartheta\boldsymbol{e}_y \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_P = (\dot{\xi}\sin\vartheta + (\ell+\xi)\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x - (\dot{\xi}\cos\vartheta - (\ell+\xi)\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_y,$$

da cui $|\boldsymbol{v}_P|^2 = \dot{\xi}^2 + (\ell+\xi)^2\dot{\vartheta}^2$. Quindi

$$K_P = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_P|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + (\ell+\xi)^2\dot{\vartheta}^2).$$

La lagrangiana si ottiene da

$$\mathcal{L}(\xi, \vartheta, \dot{\xi}, \dot{\vartheta}) = K_{\text{lam}} + K_P + U = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + (\ell+\xi)^2\dot{\vartheta}^2) + mg\ell\cos\vartheta + mg(\ell+\xi)\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2.$$

II) La lamina non ha evidenti assi di simmetria. Possiamo suddividerla mediante l'asse y in due triangoli rettangoli di cateti ℓ e 2ℓ, ognuno con massa m. I due triangoli avranno la stessa matrice d'inerzia rispetto ad O.

Consideriamo il triangolo nel semipiano $y \geqslant 0$; ricordando la matrice d'inerzia di un triangolo rettangolo rispetto ai suoi cateti, abbiamo

$$J_{O_1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 & -\frac{1}{6}m\ell^2 & 0 \\ -\frac{1}{6}m\ell^2 & \frac{1}{6}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}$$

dove O_1 è il vertice dell'angolo retto. Ora vogliamo spostare questa matrice in O; dovendo passare per il baricentro G_1 del triangolo, troviamo $\boldsymbol{d} = (G_1 - O_1) = (\ell/3, 2\ell/3, 0)$, quindi

$$J_{G_1} = J_{O_1} - m(|\boldsymbol{d}|^2\mathsf{I} - \boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{d}) = J_{O_1} - \begin{bmatrix} \frac{4}{9}m\ell^2 & -\frac{2}{9}m\ell^2 & 0 \\ -\frac{2}{9}m\ell^2 & \frac{1}{9}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{9}m\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9}m\ell^2 & \frac{1}{18}m\ell^2 & 0 \\ \frac{1}{18}m\ell^2 & \frac{1}{18}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{18}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Ora calcoliamo $\boldsymbol{d} = (G_1 - O) = (\ell/3, -\ell/3, 0)$, da cui

$$J_O^{\text{tria}} = J_{G_1} + m(|\boldsymbol{d}|^2\mathsf{I} - \boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{d}) = J_{G_1} + \begin{bmatrix} \frac{1}{9}m\ell^2 & \frac{1}{9}m\ell^2 & 0 \\ \frac{1}{9}m\ell^2 & \frac{1}{9}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9}m\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m\ell^2 & \frac{1}{6}m\ell^2 & 0 \\ \frac{1}{6}m\ell^2 & \frac{1}{6}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Poiché la matrice d'inerzia dell'altro triangolo è identica, basta raddoppiare, e dunque

$$J_O = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 & \frac{1}{3}m\ell^2 & 0 \\ \frac{1}{3}m\ell^2 & \frac{1}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & m\ell^2 \end{bmatrix}.$$