

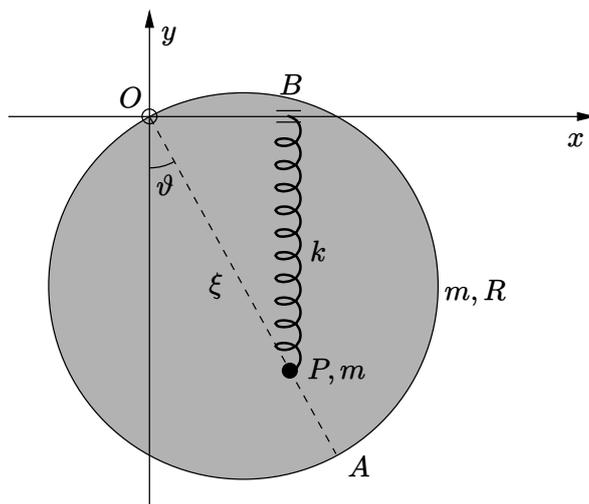
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 6 giugno 2025

I) In un piano verticale, una lamina circolare di massa m e diametro $OA = 2R$ è libera di ruotare attorno al suo punto O , fissato nell'origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy . Sul diametro OA della lamina scorre un punto materiale P di massa m , senza uscire dal segmento OA .

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto P agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto B sull'asse delle ascisse posto in verticale rispetto a P .

Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{kR}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare le posizioni di equilibrio di confine;
3. scrivere l'energia cinetica del sistema;
4. scrivere la lagrangiana linearizzata attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



II) Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = \sqrt{\alpha p} \sin q \\ P(q, p) = \sqrt{p} \cos q \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo $F_2(q, P)$.

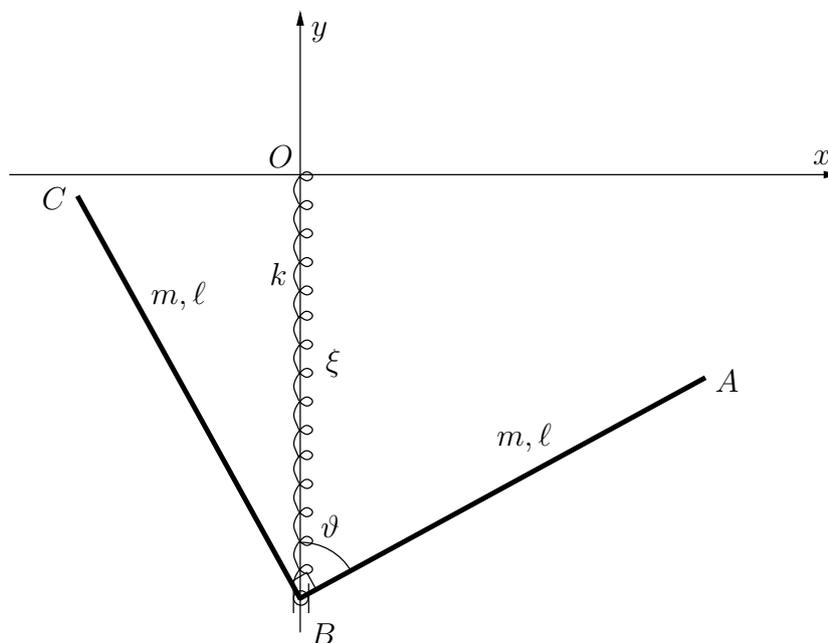
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 7 febbraio 2025

I) In un piano verticale, un corpo rigido ABC è formato da due aste omogenee AB , BC , entrambe di massa m e lunghezza ℓ , saldate ad angolo retto nell'estremo comune B . Tale estremo scorre sull'asse delle ordinate di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy e il corpo rigido è libero di ruotare intorno ad esso.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto B agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo nell'origine

Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. scrivere l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere la lagrangiana linearizzata attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



II) Determinare per quali valori di $k, \alpha > 0$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = kq^\alpha e^{-p} \\ P(q, p) = kq^\alpha e^p \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo $F_2(q, P)$.

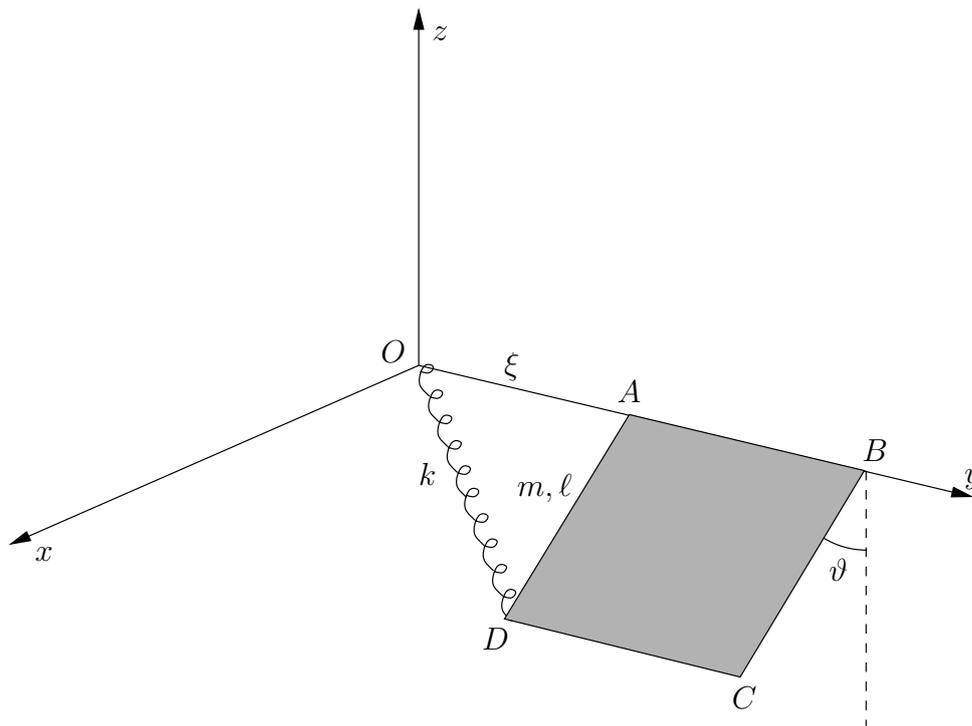
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 17 gennaio 2025

I) Un lamina quadrata omogenea $ABCD$ di lato ℓ e massa m è libera di ruotare attorno al suo lato AB , che scorre sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$.

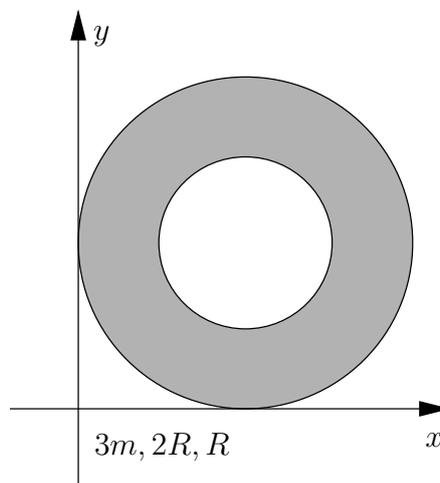
Sul vertice D della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O .

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico λ ;
3. determinare la lagrangiana del sistema e la matrice \mathbb{K} dell'energia cinetica.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della corona circolare di raggio esterno $2R$, raggio interno R e massa $3m$, rispetto al sistema di riferimento indicato.



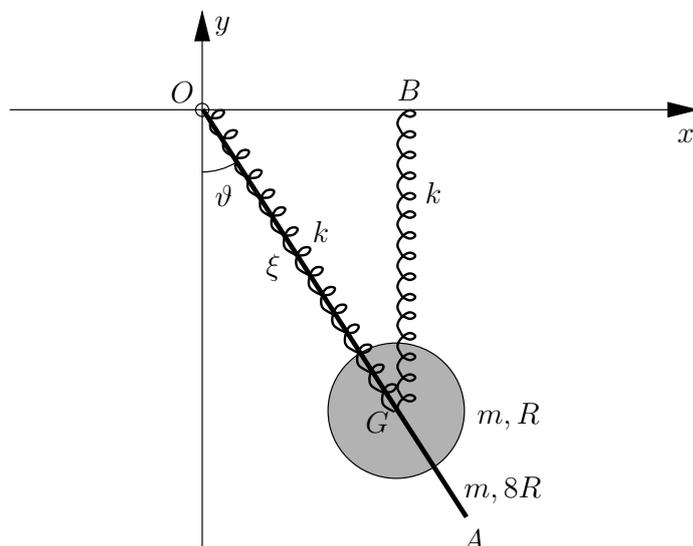
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 27 settembre 2024

I) Un sistema meccanico piano è formato da un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza $8R$ su cui scorre il centro di massa G di un disco omogeneo di massa m e raggio R , in modo che G non possa mai abbandonare l'asta. L'estremo O è vincolato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy e l'asta è libera di ruotare attorno ad esso.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità; inoltre sul centro G del disco agiscono due forze elastiche di coefficiente $k > 0$: una sempre verticale con polo il punto B sull'asse x e l'altra con polo l'origine.

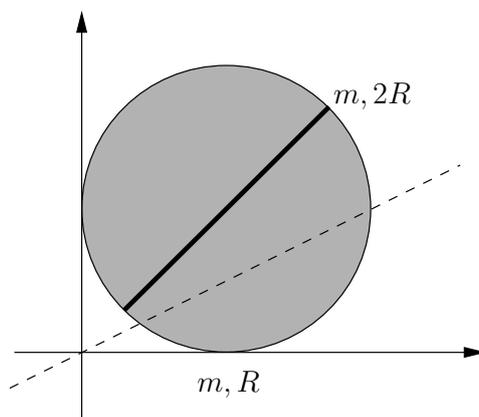
Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{kR}$, si chiede di:

1. trovare tutte le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità al variare di λ ;
3. discutere l'esistenza di posizioni di equilibrio di confine;
4. scrivere l'energia cinetica del sistema e la matrice \mathbb{K} dell'energia cinetica;



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della figura, formata da un disco omogeneo di massa m e raggio R e un'asta omogenea di massa m posta su un suo diametro e diretta come la bisettrice del I-III quadrante, rispetto al sistema di riferimento indicato.

Si calcoli poi il momento d'inerzia della figura rispetto alla retta $x = 2y$.



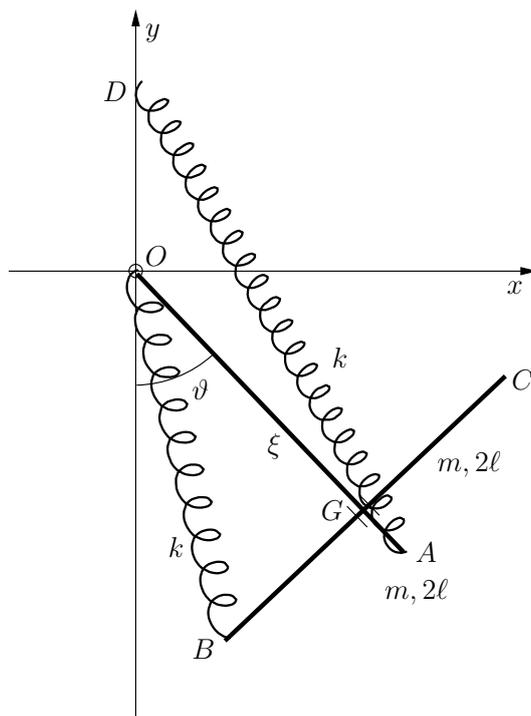
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 6 settembre 2024

I) Un sistema meccanico piano è formato da due aste omogenee, entrambe di massa m e lunghezza 2ℓ . L'asta OA è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso O , centrato in un riferimento cartesiano ortogonale Oxy , e su tale asta scorre il centro G di una seconda asta BC uguale alla prima e che resta sempre ortogonale a OA , come in figura.

Su tutto il sistema agisce la forza peso; sull'estremo B agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine; sull'estremo A agisce un'altra forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto $D(0; \ell)$.

Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione di λ ;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. determinare l'energia cinetica del sistema e la sua matrice \mathbb{K} .



II) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = q^3 - 2p \\ P(q, p) = kq \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo $F_1(q, Q)$.

Nel caso in cui si abbia l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2} - q^3$, qual è l'espressione di $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$?

Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

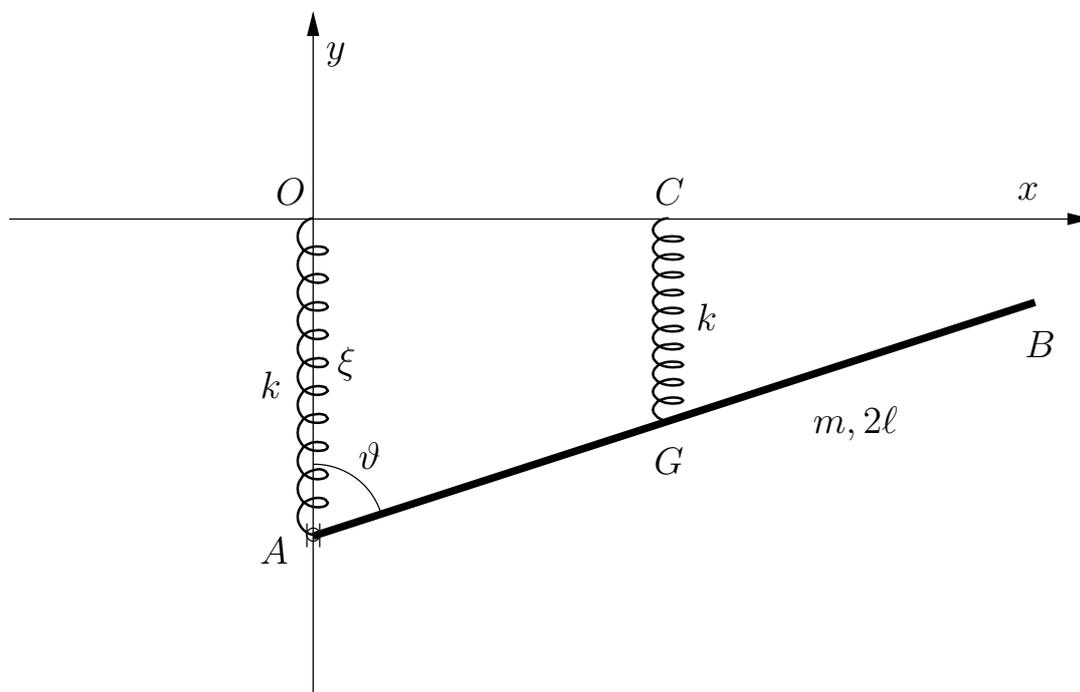
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 19 luglio 2024

I) Un'asta omogenea AB di massa m e lato 2ℓ è libera di ruotare attorno al vertice A , che si muove sull'asse verticale di un sistema di riferimento piano Oxy .

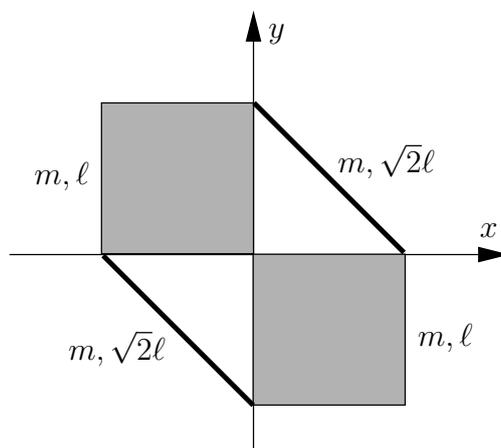
Sul vertice A e sul centro di massa G dell'asta agiscono due forze elastiche sempre verticali di coefficiente $k > 0$ e poli sull'asse delle x . Inoltre su tutto il sistema agisce la forza peso.

Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità al variare di $\lambda = \frac{mg}{kl}$;
3. determinare le equazioni differenziali del moto e la matrice \mathbb{K} dell'energia cinetica.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido formato da due lamine quadrate omogenee, ognuna di massa m e lato ℓ , e due aste omogenee, ognuna di massa m e lato $\sqrt{2}\ell$, disposte come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al foglio).



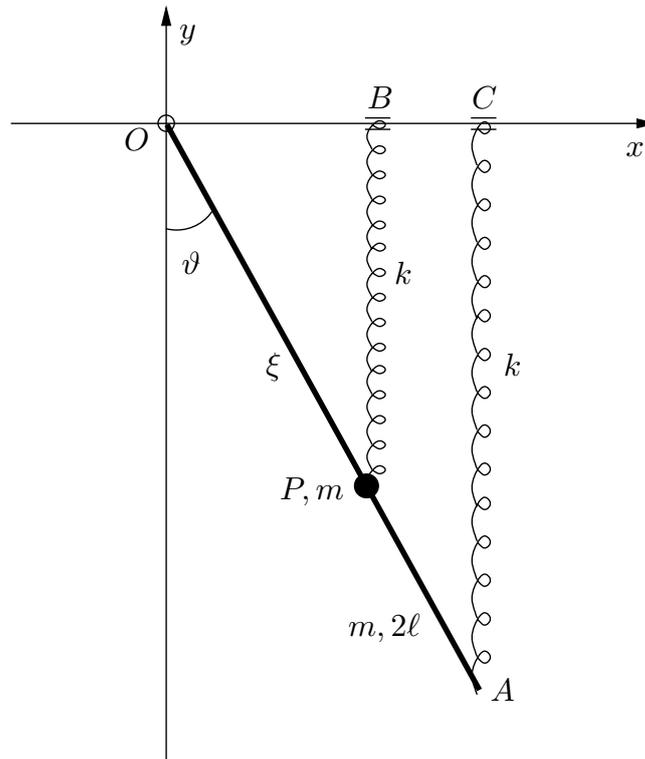
Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 5 luglio 2024

I) Un'asta OA omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso O , origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy . Sull'asta scorre un punto materiale P di massa m .

Su tutto il sistema agisce la forza peso. Inoltre, una forza elastica verticale di coefficiente $k > 0$ agisce tra il punto materiale P e il punto C posto sull'asse x , mentre sull'estremo A dell'asta agisce un'altra forza elastica verticale di coefficiente k e polo ancora sull'asse x . Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema in funzione di λ ;
2. discuterne la stabilità;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. determinare la lagrangiana del sistema.



II) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = 1 + q^2 + kp \\ P(q, p) = \frac{p}{2q} - k - 1 \end{cases}$$

è canonica e trovare una funzione generatrice del tipo $F_2(q, P)$.

Nel caso in cui si abbia l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2q^2} + q^2$, qual è l'espressione di $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$?

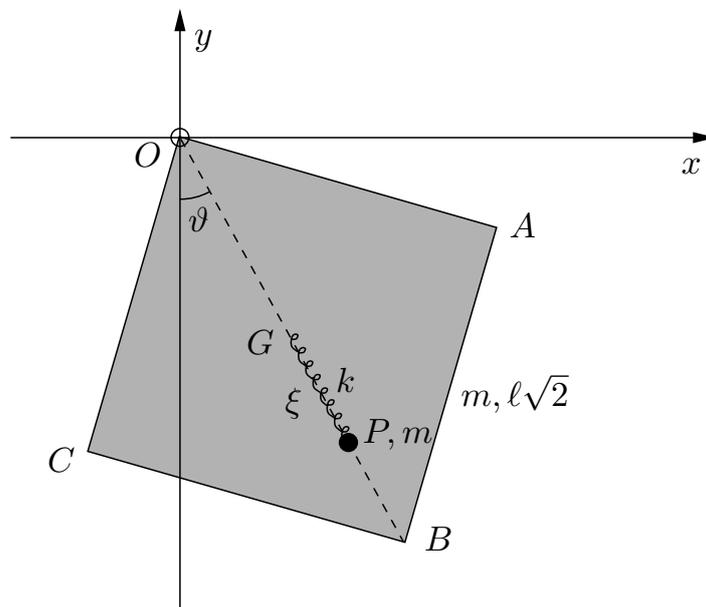
Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 6 giugno 2024

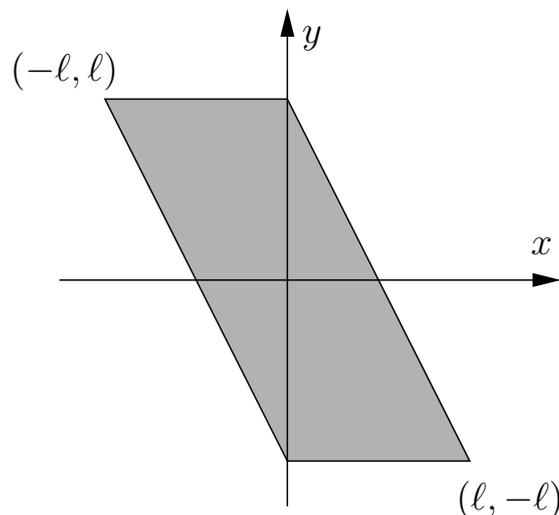
I) Una lamina quadrata $OABC$ omogenea di massa m e lato $\ell\sqrt{2}$ è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso O , origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy . Sulla diagonale OB della lamina scorre un punto materiale P di massa m .

Su tutto il sistema agisce la forza peso. Inoltre, una forza elastica di coefficiente $k > 0$ agisce tra il punto materiale P e il baricentro G della lamina. Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema in funzione di λ ;
2. discuterne la stabilità;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. determinare la lagrangiana del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana omogenea di massa $2m$, a forma di parallelogrammo, disposta come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al foglio).



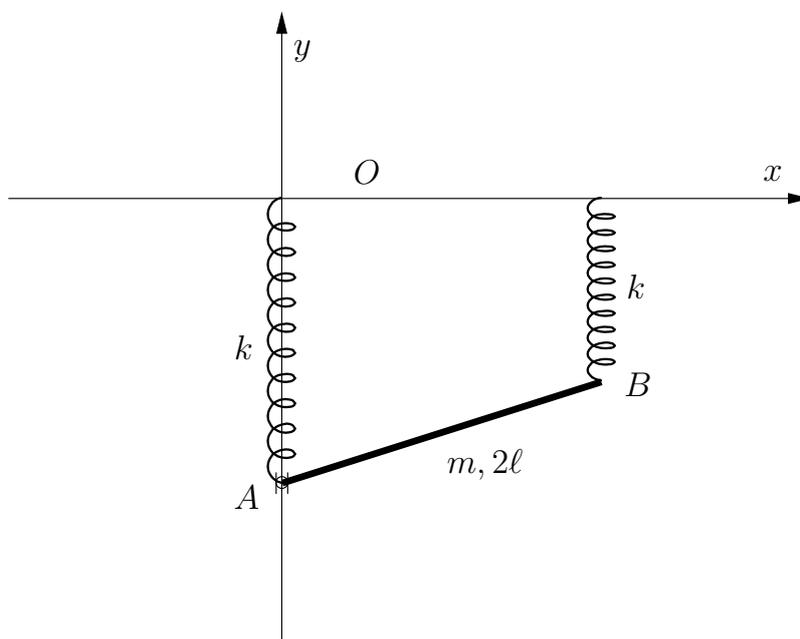
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 9 febbraio 2024

I) Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ è libera di ruotare attorno all'estremo A , che si muove sull'asse verticale di un sistema di riferimento piano Oxy .

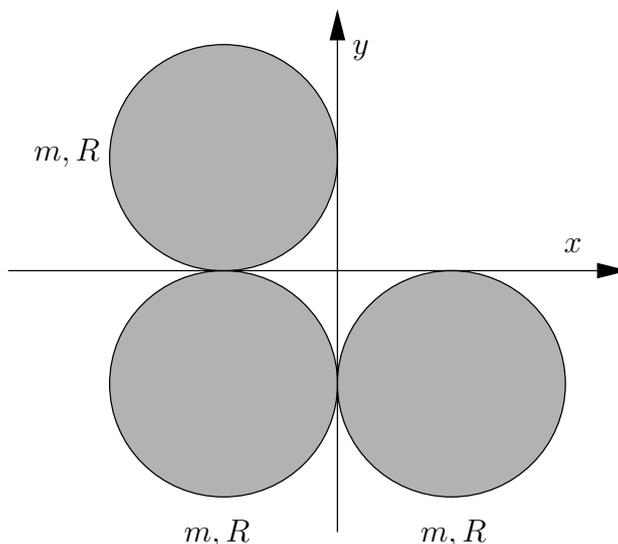
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sugli estremi A e B agiscono due forze elastiche sempre verticali di coefficiente $k > 0$ e poli sull'asse delle x .

Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità al variare di $\lambda = \frac{mg}{kl}$;
3. determinare le equazioni differenziali del moto.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido formato da tre dischi omogenei, ognuno di massa m e raggio R , disposti come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al foglio).



Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

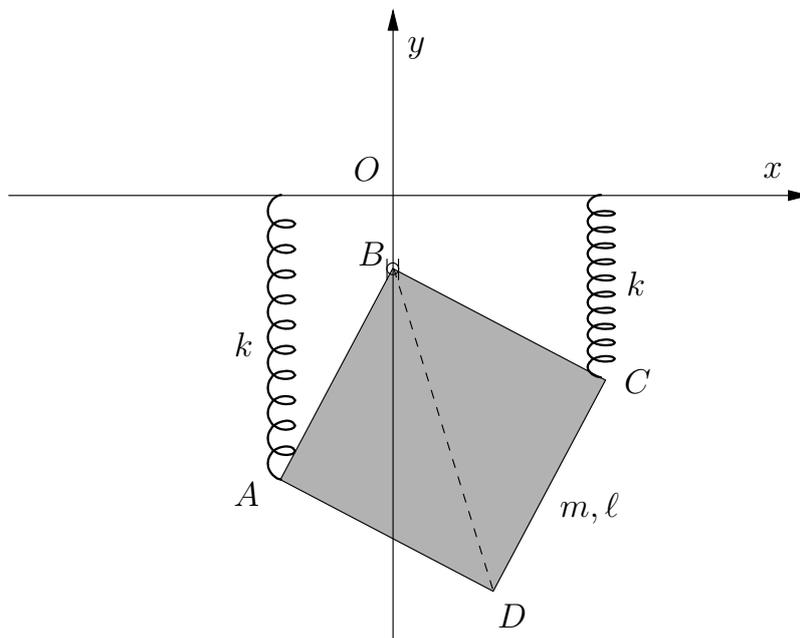
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 19 gennaio 2024

I) Una lamina quadrata piana omogenea $ABCD$ di massa m e lato ℓ è libera di ruotare attorno al vertice B , che si muove sull'asse verticale di un sistema di riferimento piano Oxy .

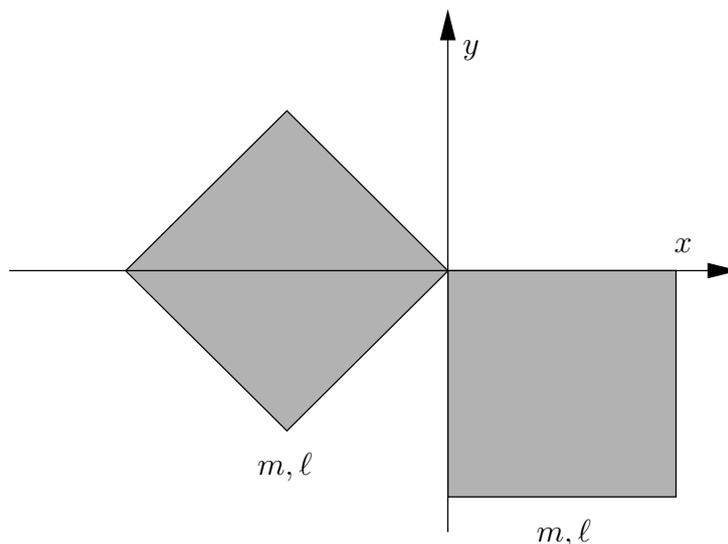
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sui punti A e C agiscono due forze elastiche sempre verticali di coefficiente $k > 0$ e poli sull'asse delle x .

Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità al variare di $\lambda = \frac{mg}{kl}$;
3. determinare le equazioni differenziali del moto.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia di un corpo rigido formato da due lamine quadrate, ognuna di massa m e lunghezza ℓ , disposte come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al foglio).



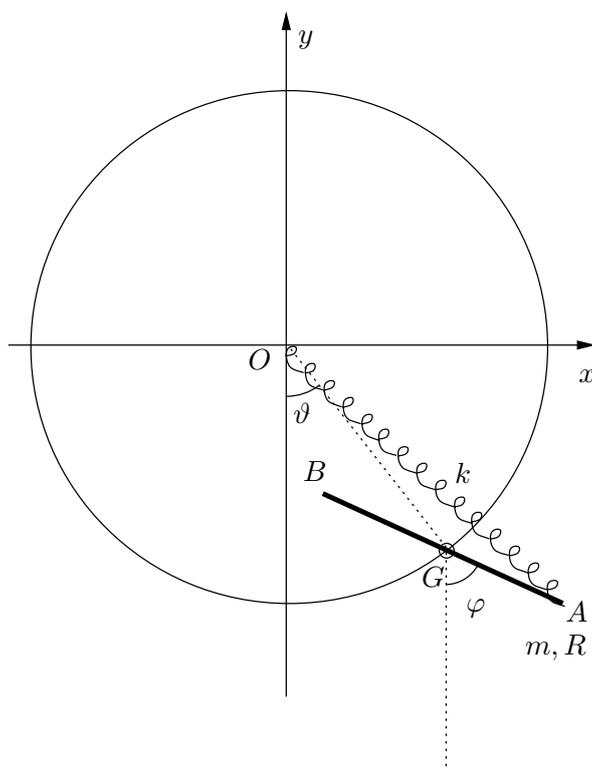
Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 22 settembre 2023

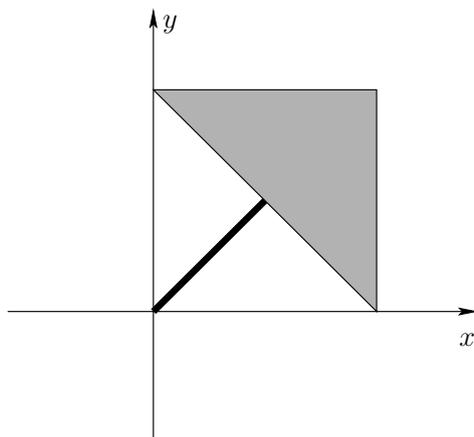
I) Un'asta AB omogenea di massa m e lunghezza R è libera di ruotare attorno al suo baricentro G , che si muove su una guida circolare di raggio R e centro O , origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy . All'estremo A dell'asta agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo O . Su tutto il sistema agisce la forza peso.

Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{kR}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare l'energia cinetica del sistema e la matrice \mathbb{K} dell'energia cinetica.



II) Si trovi la matrice d'inerzia della figura, formata da un'asta omogenea e da una lamina omogenea a forma di triangolo rettangolo isoscele, entrambe di massa m , rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è perpendicolare al foglio), sapendo che il cateto della lamina triangolare misura ℓ .

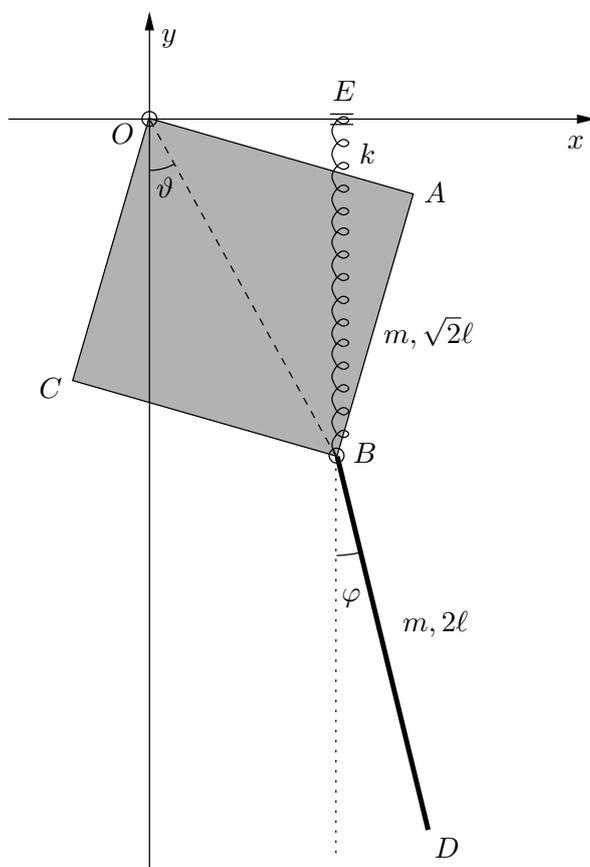


UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 8 settembre 2023

I) Una lamina quadrata $OABC$ omogenea di massa m e lato $\sqrt{2}\ell$ è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso O , origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy . Al vertice B della lamina opposto ad O è agganciato l'estremo di un'asta omogenea BD , di massa m e lunghezza 2ℓ , libera di ruotare attorno a B .

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul vertice B agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo E sull'asse x . Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema in funzione di λ ;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare l'energia cinetica del sistema e scrivere le equazioni del moto.



II) Si verifichi che la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = \log(q^2 p) \\ P(q, p) = qp \end{cases}$$

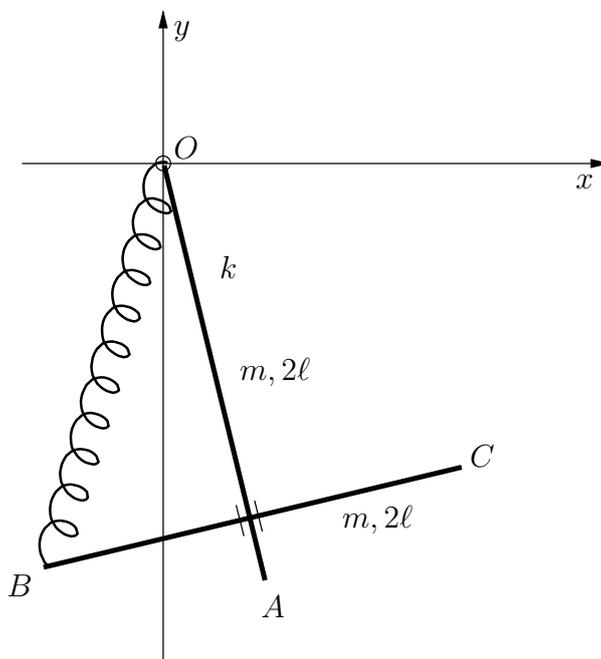
è canonica e se ne trovi una funzione generatrice del tipo $F_2(q, P)$.

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 14 luglio 2023

I) Un sistema meccanico piano è formato da due aste omogenee, entrambe di massa m e lunghezza 2ℓ . L'asta OA è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso O , centrato in un riferimento cartesiano ortogonale Oxy , e su tale asta scorre il centro G di una seconda asta BC uguale alla prima e che resta sempre ortogonale a OA , come in figura.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sull'estremo B agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine. Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità in funzione di λ ;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare l'energia cinetica del sistema e le equazioni differenziali del moto.



II) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = kp \\ P(q, p) = p^3 - 2q \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo $F_2(q, P)$.

Nel caso in cui si abbia l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2} + q$, qual è l'espressione di $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$?

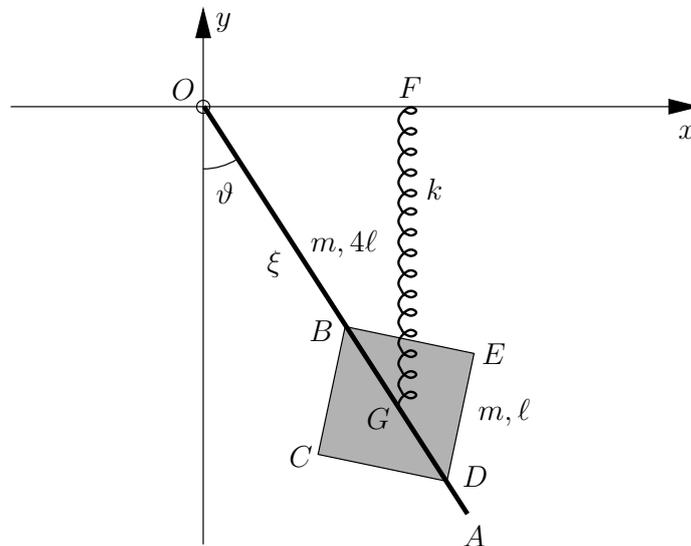
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 30 giugno 2023

I) Un sistema meccanico piano è formato da un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza 4ℓ su cui scorrono gli estremi B e D di una lamina quadrata omogenea $BCDE$ di massa m e lato ℓ , in modo che il centro G del quadrato non possa mai abbandonare l'asta. L'estremo O è vincolato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy e l'asta è libera di ruotare attorno ad esso.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul centro G della lamina agisce una forza elastica sempre verticale di polo il punto F sull'asse x e coefficiente $k > 0$.

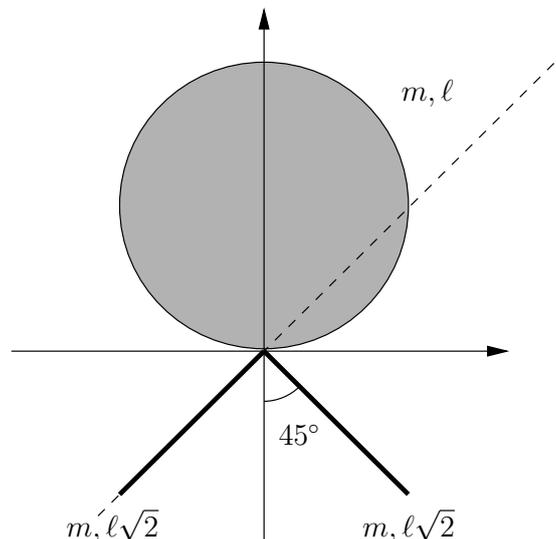
Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

1. trovare tutte le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità al variare di λ ;
2. discutere l'esistenza di posizioni di equilibrio di confine;
3. scrivere l'energia cinetica del sistema e la matrice \mathbb{K} dell'energia cinetica;



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della figura, formata da un disco omogeneo di massa m e raggio ℓ e da due aste omogenee, ognuna di massa m e lunghezza $\ell\sqrt{2}$, rispetto al sistema di riferimento indicato.

Si calcoli poi il momento d'inerzia della figura rispetto alla bisettrice $y = x$, tratteggiata in figura.



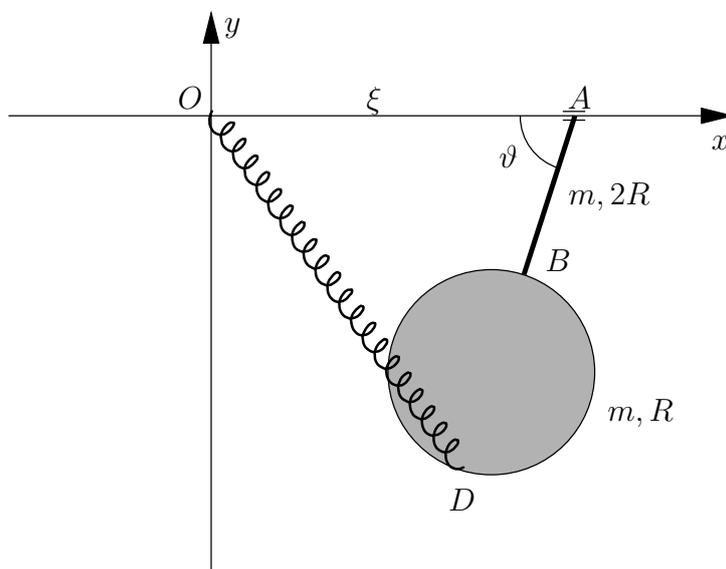
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 9 giugno 2023

I) Un corpo rigido piano è formato da un disco omogeneo di massa m e diametro $2R$ saldato a un'asta AB di massa m e lunghezza $2R$, come in figura. L'estremo A è vincolato a scorrere sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy e il corpo è libero di ruotare attorno ad A .

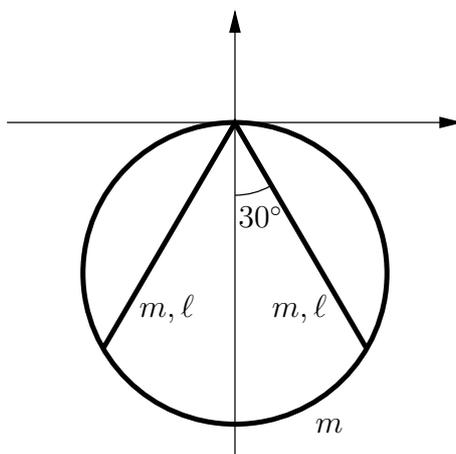
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto D del bordo del disco diametralmente opposto a B agisce una forza elastica di polo l'origine O e coefficiente $k > 0$.

Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{kR}$, si chiede di:

1. trovare tutte le posizioni di equilibrio del corpo rigido e discuterne la stabilità al variare di λ ;
2. scrivere l'energia cinetica del corpo rigido e la matrice \mathbb{K} dell'energia cinetica;
3. trovare la lagrangiana del sistema meccanico e le equazioni differenziali del moto.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della figura, formata da una circonferenza omogenea e da due aste omogenee, rispetto al sistema di riferimento indicato.



Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

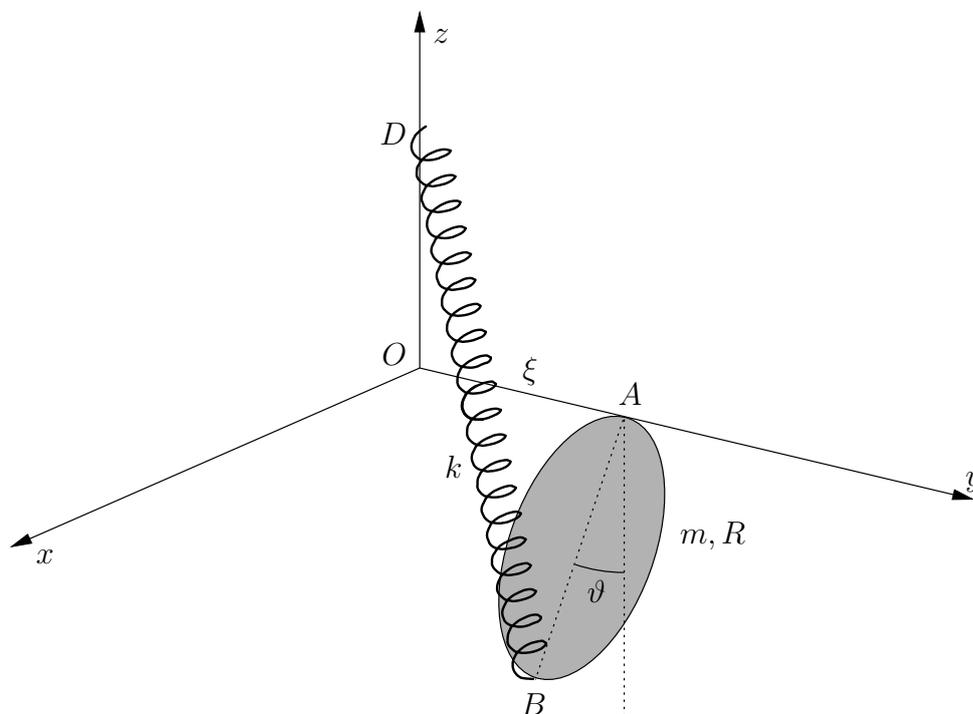
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 10 febbraio 2023

I) Un disco omogeneo di massa m e diametro $AB = 2R$ rotola senza strisciare sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ e resta sempre complanare a tale asse.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto B del bordo del disco agisce una forza elastica di polo il punto D di coordinate $(0, 0, 2R)$ e coefficiente $k > 0$.

Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{kR}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del corpo rigido;
2. discuterne la stabilità al variare di λ ;
3. trovare l'energia cinetica del corpo rigido e scrivere i coefficienti della matrice dell'energia cinetica.



II) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = p^{1/3} \exp(-q/3) \\ P(q, p) = \alpha p^{2/3} \exp(q/3) \end{cases}$$

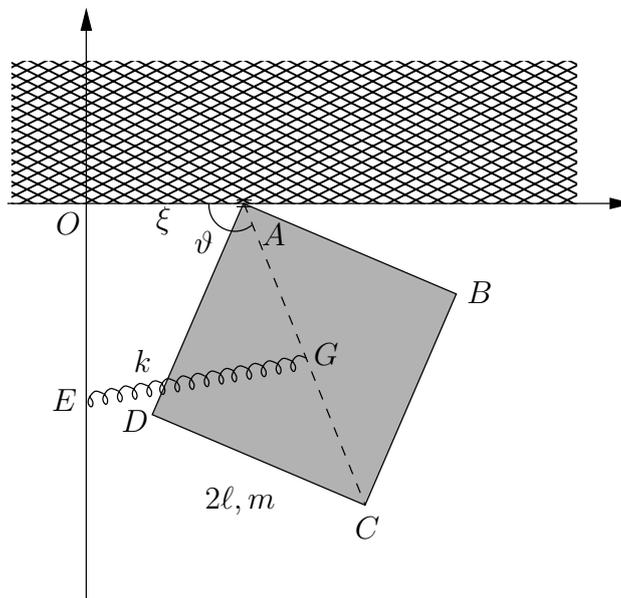
è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo $F_1(q, Q)$.

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 13 gennaio 2023

I) Una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di massa m e lato 2ℓ si muove in modo che il vertice A scorra sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy e la lamina possa stare solo nel semipiano $y \leq 0$.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul baricentro G della lamina agisce una forza elastica di polo il punto E di coordinate $(0, -\ell\sqrt{2})$ e coefficiente $k > 0$. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare la lagrangiana del sistema.



II) Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = 2\alpha qp \\ P(q, p) = \alpha \log \frac{p}{q} \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo $F_2(q, P)$.

Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutte le facciate del foglio e la matricola sulla prima facciata. Al termine, scansionare e spedire ad

alessandro.musesti@unicatt.it

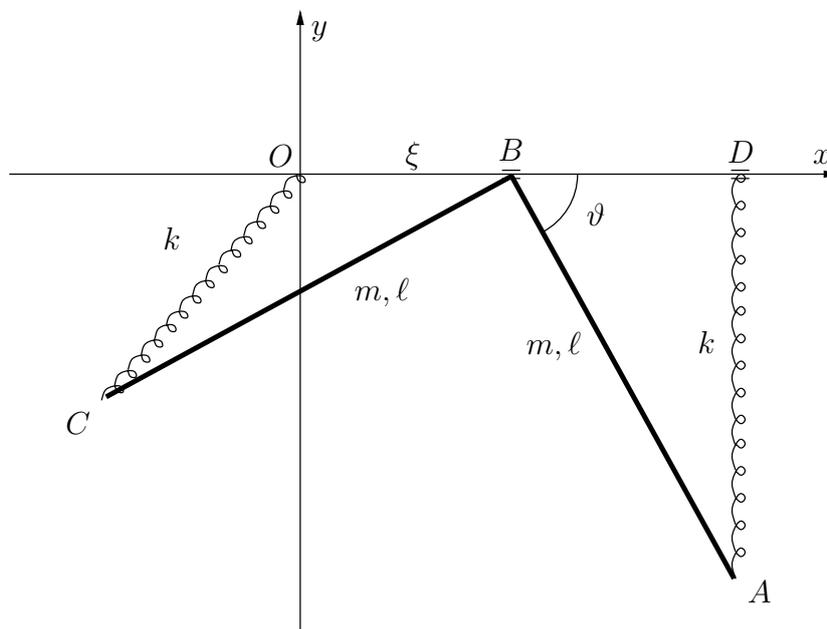
Prova scritta di Meccanica Analitica - 16 settembre 2022

I) In un piano verticale, un corpo rigido ABC è formato da due aste omogenee AB , BC , entrambe di massa m e lunghezza ℓ , saldate ad angolo retto nell'estremo comune B . Tale estremo scorre sull'asse delle ascisse di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy e il corpo rigido è libero di ruotare intorno ad esso.

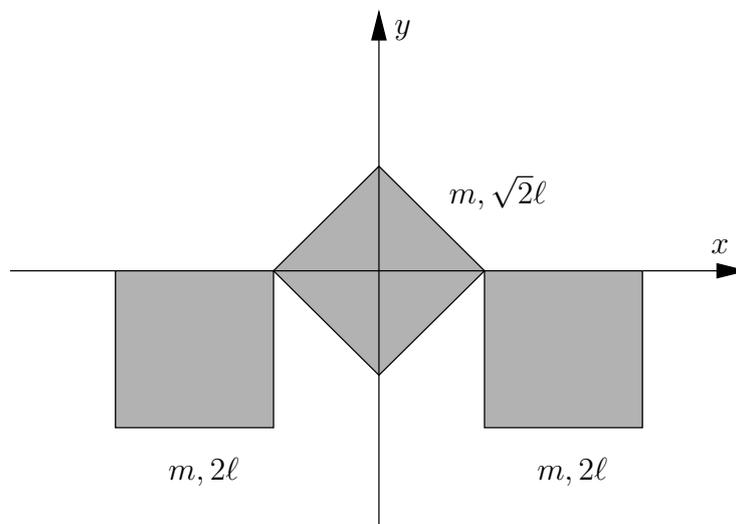
Su tutto il sistema agisce la forza peso, sull'estremo C agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo nell'origine, mentre sull'estremo A agisce un'altra forza elastica col medesimo coefficiente k e tale che resti sempre verticale e il polo sia sull'asse x .

Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. scrivere l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere la lagrangiana linearizzata attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido piano formato da tre lamine quadrate omogenee disposte come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al piano del foglio).



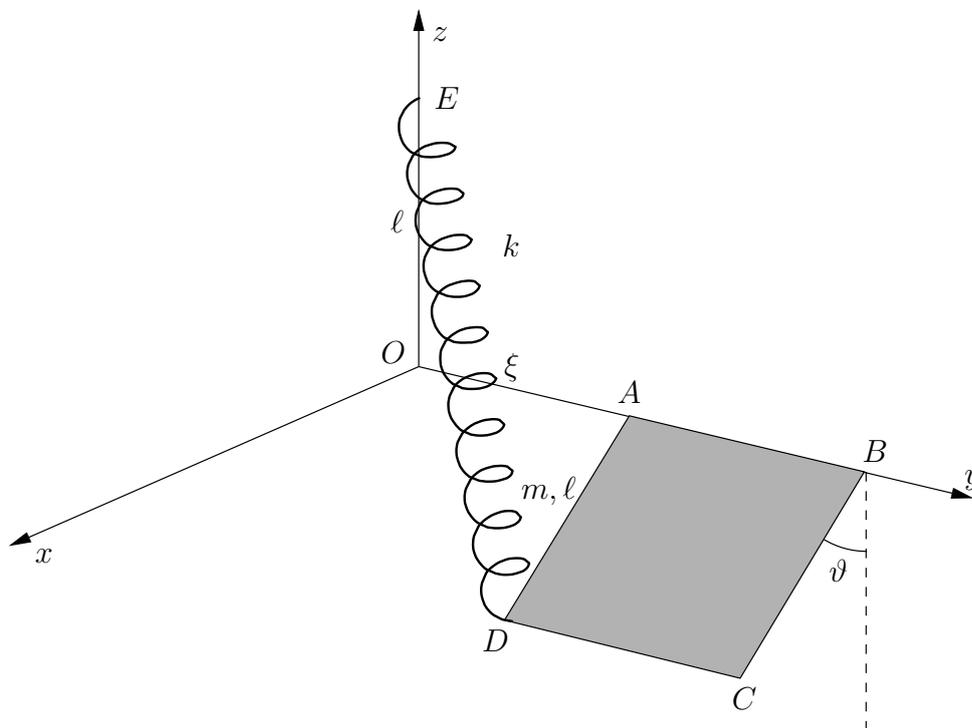
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 2 settembre 2022

I) Un lamina quadrata omogenea $ABCD$ di lato ℓ e massa m è libera di ruotare attorno al suo lato AB , che scorre sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$.

Sul vertice D della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto E di coordinate $(0, 0, \ell)$.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico λ ;
3. determinare la lagrangiana del sistema e le equazioni differenziali del moto.



II) Determinare per quali valori di $k, \alpha > 0$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = kp^\alpha e^{q/2} \\ P(q, p) = kp^\alpha e^{-q/2} \end{cases}$$

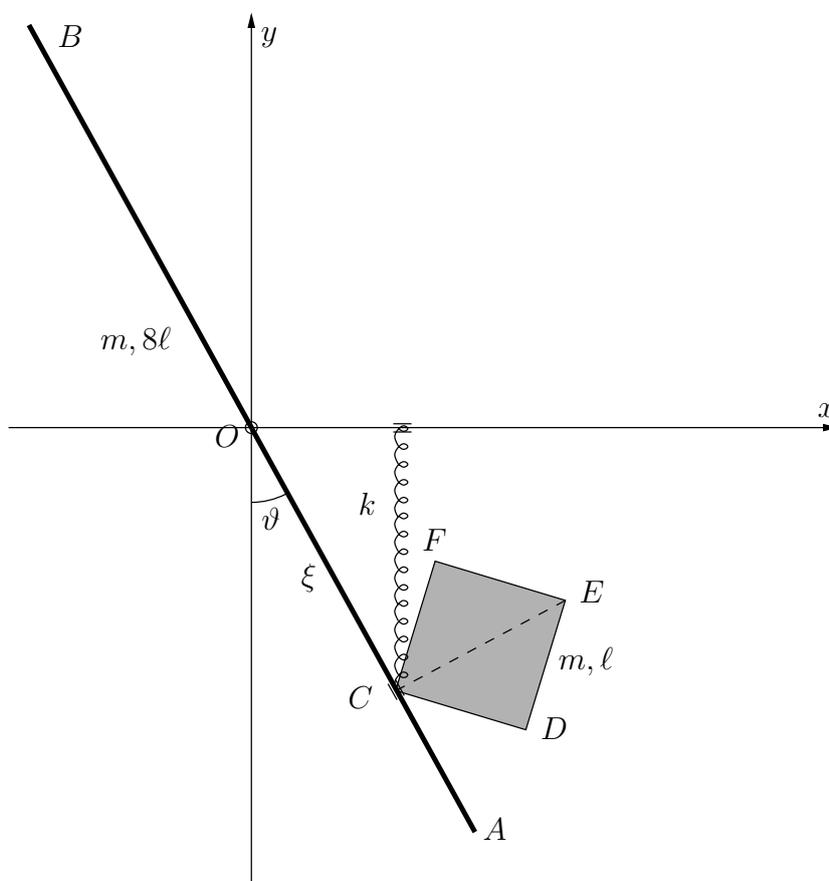
è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo $F_2(q, P)$.

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 15 luglio 2022

I) In un piano verticale, un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 8ℓ è libera di ruotare attorno al suo baricentro fisso in O , origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy . Una lamina quadrata $CDEF$ di lato ℓ e massa m è vincolata a muoversi nel piano in modo che il suo vertice C stia sull'asta AB e la diagonale CE stia sempre perpendicolare all'asta.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e su C agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse x . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema; discuterne la stabilità;
2. scrivere l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere la lagrangiana linearizzata attorno ad ogni posizione di equilibrio (anche se instabile).



II) Determinare per quali valori di $k, \alpha > 0$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = kp^\alpha \sin q \\ P(q, p) = kp^\alpha \cos q \end{cases}$$

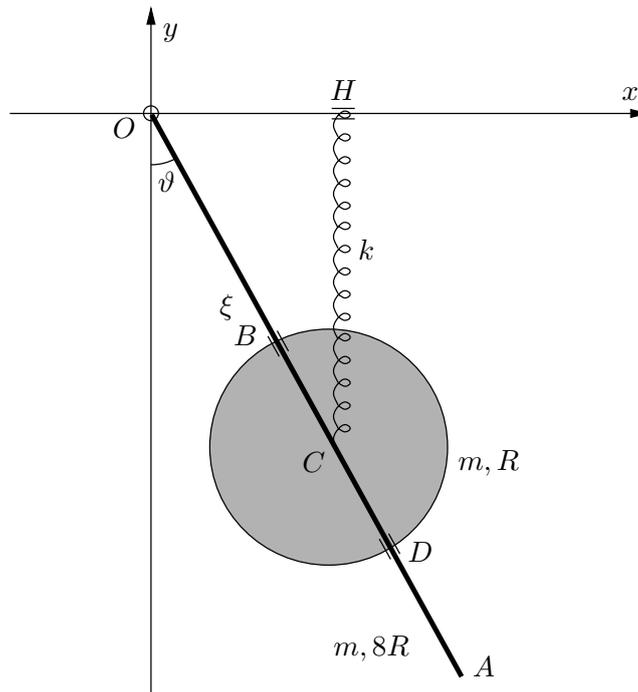
è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo $F_1(q, Q)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica - 1 luglio 2022

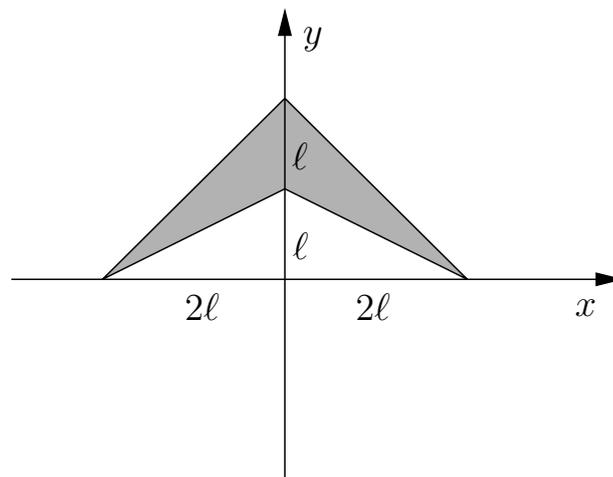
I) In un piano verticale, un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza $8R$ è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso O , origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy . Una lamina circolare di raggio R e massa m è vincolata a muoversi nel piano in modo che il suo diametro BD scorra lungo l'asta e il centro C non esca dall'asta.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e su C agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse x . Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{kR}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne l'esistenza e la stabilità al variare di λ ;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. scrivere l'energia cinetica del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina omogenea in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è perpendicolare al foglio). La massa totale della lamina è $2m$.



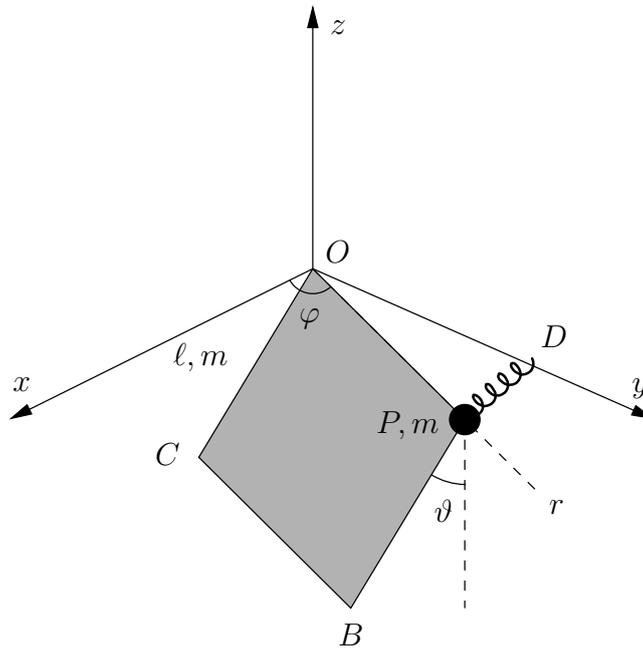
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Prova scritta di Meccanica Analitica - 10 giugno 2022

I) Un corpo rigido è formato da una lamina quadrata $OPBC$ di massa m e lato ℓ a cui è saldato un punto materiale di massa m nel vertice P . Tale corpo rigido si muove in modo che il lato OP stia nel piano orizzontale xy di un sistema di riferimento $Oxyz$ e il punto O sia fisso nell'origine.

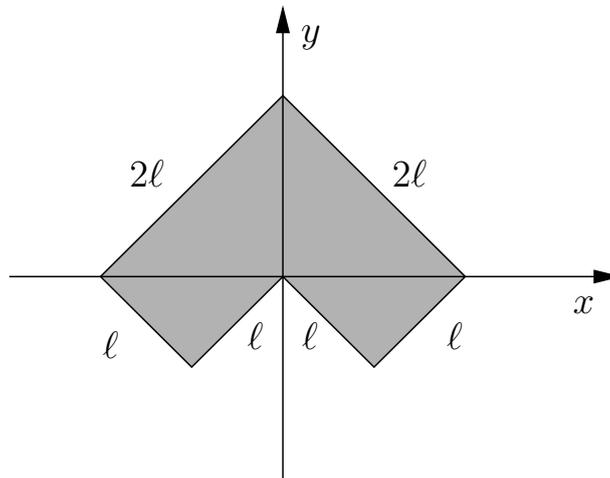
Sul punto P agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto D sull'asse y di coordinate $(0, \ell, 0)$. Inoltre il corpo rigido è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci.

Si denotino con φ l'angolo tra il semiasse delle x positive e il lato OP , e con ϑ l'angolo tra il semipiano verticale discendente passante per OP e il semipiano della lamina. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. scrivere l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato. La massa della lamina è $3m$ e la lamina è omogenea.



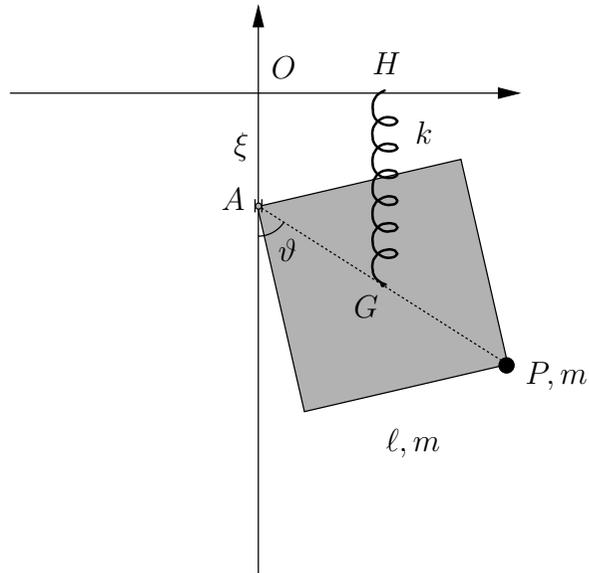
Prova scritta di Meccanica Analitica - 4 febbraio 2022

I) Un corpo rigido piano è formato da una lamina quadrata di massa m e lato ℓ a cui è saldato su un vertice un punto materiale P di massa m .

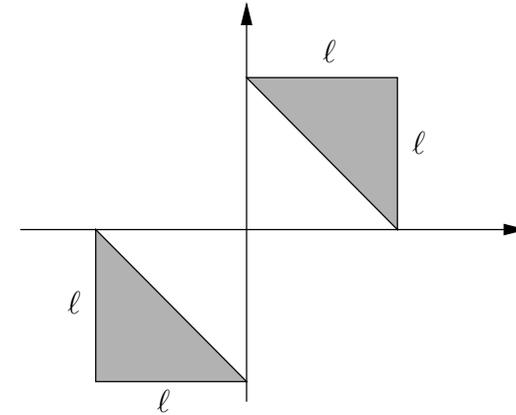
Il corpo rigido si muove in un piano verticale, in modo che il vertice della lamina opposto a P possa scorrere sull'asse verticale di un sistema di riferimento Oxy e la lamina possa ruotare attorno ad esso.

Una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse orizzontale agisce sul centro G della lamina, mantenendosi sempre verticale. Tutto il sistema è sottoposto alla forza peso. Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del corpo rigido al variare di λ ;
2. studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di λ ;
3. determinare l'energia cinetica del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana composta da due triangoli rettangoli isosceli, con cateti ℓ , disposti come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al piano del foglio). La massa di ogni triangolo è m .



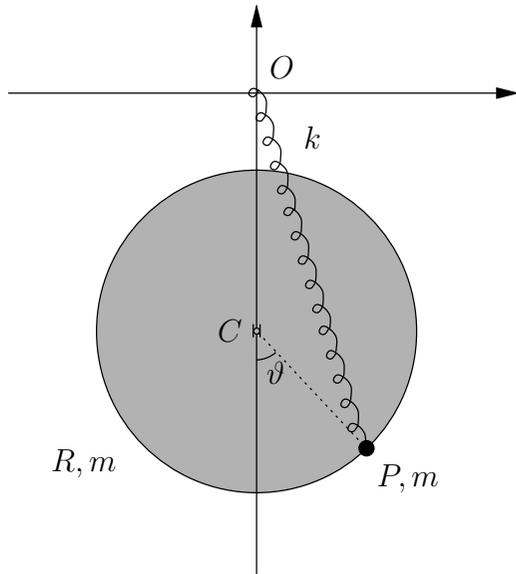
Prova scritta di Meccanica Analitica - 14 gennaio 2022

I) Un corpo rigido piano è formato da un disco di massa m e raggio R a cui è saldato sul bordo un punto materiale P di massa m .

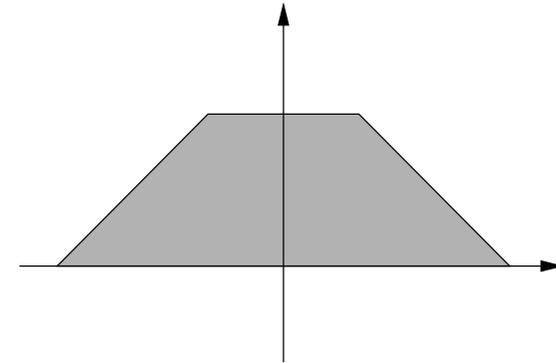
Il corpo rigido si muove in un piano verticale, in modo che il centro C del disco possa scorrere sull'asse verticale di un sistema di riferimento Oxy e il disco possa ruotare attorno ad esso.

Una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O agisce sul punto P e tutto il sistema è sottoposto alla forza peso. Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{kR}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del corpo rigido al variare di λ ;
2. studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di λ ;
3. determinare l'energia cinetica del sistema e la sua matrice di rappresentazione \mathbb{K} rispetto alle coordinate lagrangiane.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana in figura, a forma di trapezio isoscele, che ha gli angoli alla base di 45° e l'altezza congruente alla base minore, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al piano del foglio). La lunghezza della base minore è ℓ e la massa della lamina è $4m$.

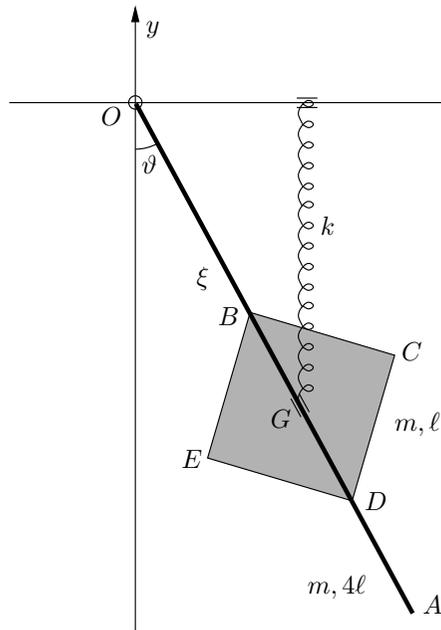


Prova scritta di Meccanica Analitica - 24 settembre 2021

I) In un piano verticale, un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza 4ℓ è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso O , origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy . Una lamina quadrata $BCDE$, di lato ℓ e massa m , ha la diagonale BD vincolata a scorrere sull'asta in modo che il centro G del quadrato non fuoriesca dall'asta.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e su G agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse x . Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne l'esistenza e la stabilità al variare di λ ;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. scrivere l'energia cinetica.



II) Il nuovo simbolo di Google Photo è formato da quattro semicerchi disposti come in figura (i colori non sono rappresentati). Se ne calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana omogenea corrispondente, supponendo che il raggio di ogni semicerchio sia R e la massa totale sia $4m$, rispetto a un sistema di riferimento centrato nel centro della figura con l'asse z ortogonale al piano del foglio.

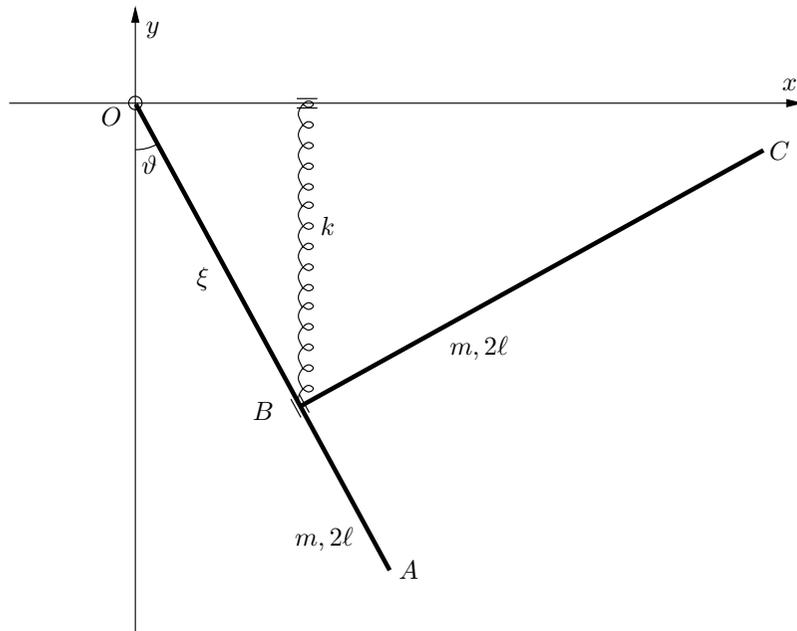


Prova scritta di Meccanica Analitica - 10 settembre 2021

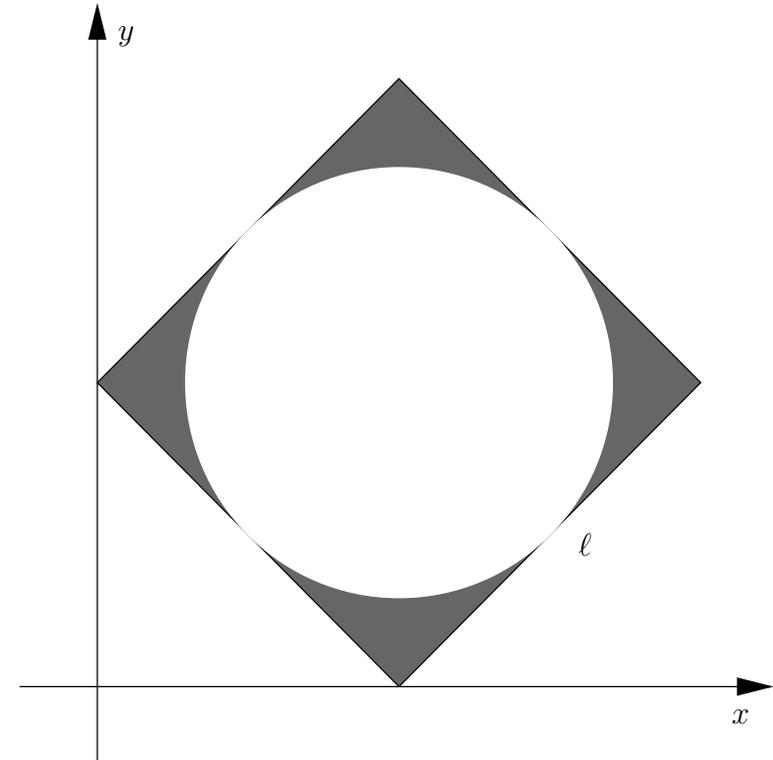
I) In un piano verticale, un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza 2ℓ è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso O , origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy . Una seconda asta BC , identica alla prima, ha l'estremo B vincolato a scorrere sulla prima asta e si mantiene sempre ortogonale ad essa.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto B agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse x . Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne l'esistenza al variare di λ ;
2. studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. scrivere l'energia cinetica.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana formata da un quadrato omogeneo di lato ℓ con un foro circolare centrato nel centro del quadrato e di diametro uguale al lato del quadrato, rappresentata in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al piano del foglio). La massa della lamina è m .

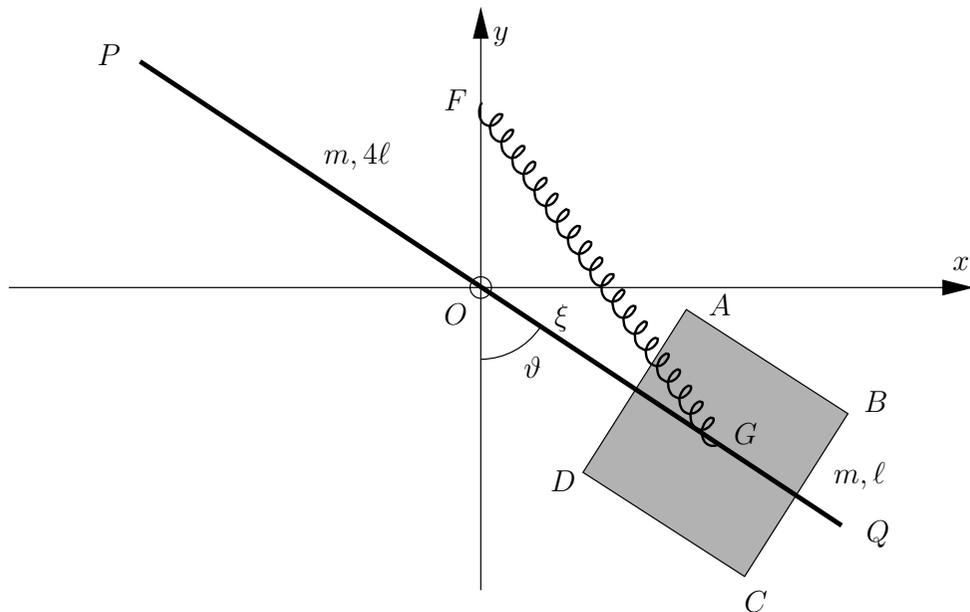


Prova scritta di Meccanica Analitica - 16 luglio 2021

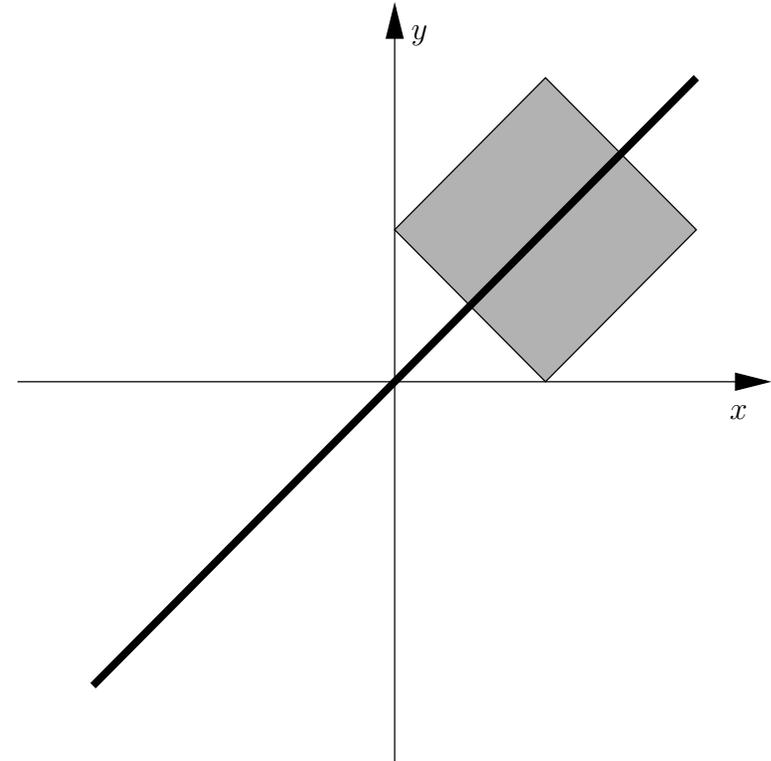
I) In un sistema piano, una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di massa m e lato ℓ si muove in modo che i punti medi dei lati AD e BC scorrono su un'asta omogenea PQ di massa m e lunghezza 4ℓ . L'asta PQ può ruotare attorno al suo punto medio O fissato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$. La lamina può muoversi in modo che il baricentro G non esca dall'asta.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e su G agisce una forza elastica di polo il punto F di coordinate $(0, \ell)$ e coefficiente $k > 0$. Supposti i vincoli lisci e $mg \neq k\ell$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ ($\lambda \neq 1$);
3. cercare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. determinare l'energia cinetica del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido in figura rispetto al sistema di riferimento indicato. Il corpo è formato da una lamina quadrata omogenea di lato ℓ e massa m e un'asta omogenea di lunghezza 4ℓ e massa m . Il terzo asse è ortogonale al foglio.

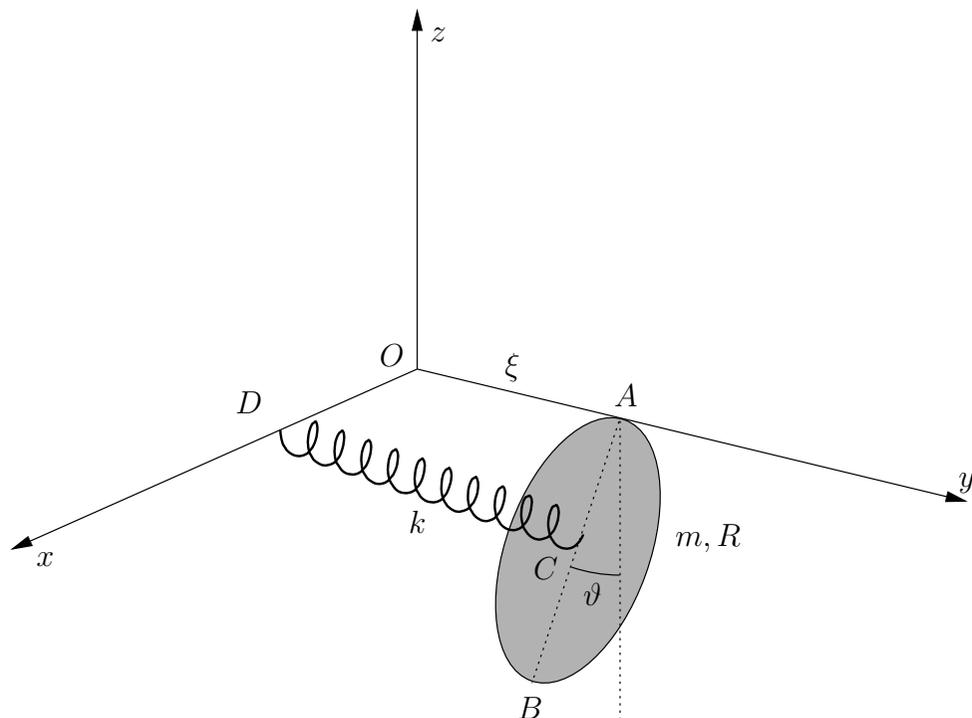


Prova scritta di Meccanica Analitica - 2 luglio 2021

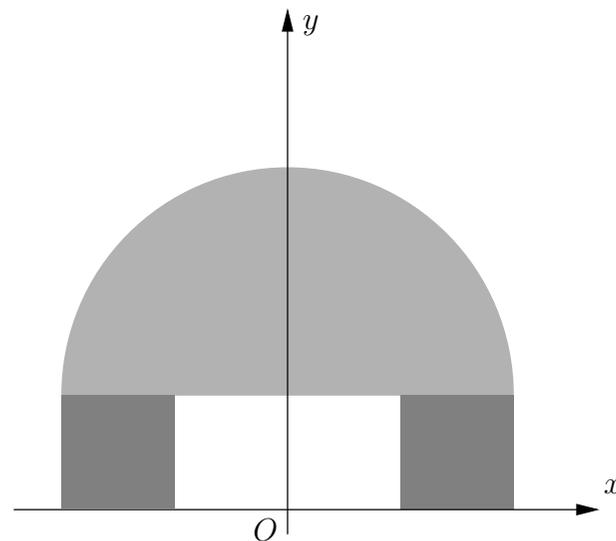
I) Un disco omogeneo di massa m e diametro $AB = 2R$ rotola senza strisciare sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ e resta sempre complanare a tale asse.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul centro C del disco agisce una forza elastica di polo il punto D di coordinate $(R, 0, 0)$ e coefficiente $k > 0$. Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{kR}{mg}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare la lagrangiana del sistema;
3. determinare la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina in figura rispetto al sistema di riferimento indicato. La lamina è formata da un semidisco omogeneo di massa m e raggio $2R$ e da due lamine quadrate omogenee, entrambe di massa m e lato R .

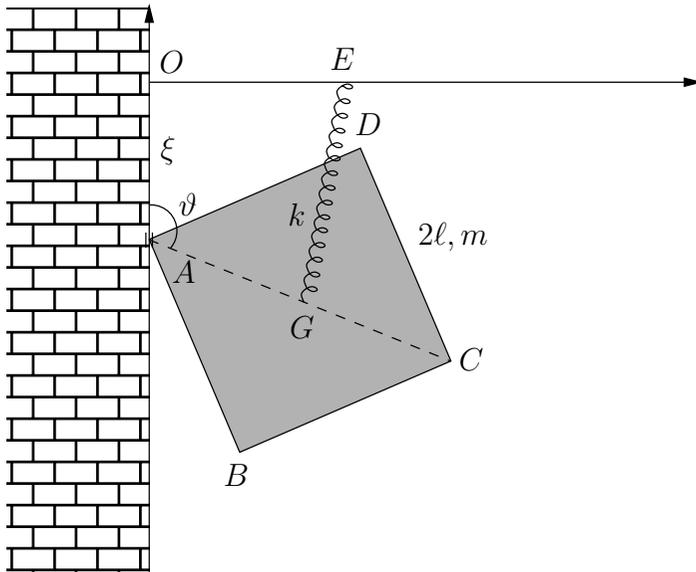


Prova scritta di Meccanica Analitica - 14 giugno 2021

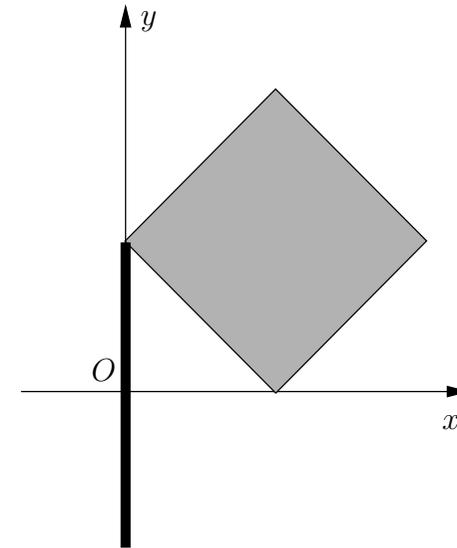
I) Una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di massa m e lato 2ℓ si muove in modo che il vertice A scorra sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ e la lamina possa stare solo nel semipiano $x \geq 0$.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul baricentro G della lamina agisce una forza elastica di polo il punto E di coordinate $(\ell\sqrt{2}, 0)$ e coefficiente $k > 0$. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema discuterne la stabilità;
2. trovare eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare la lagrangiana del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido in figura rispetto al sistema di riferimento indicato. Il corpo è formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2\sqrt{2}\ell$ e da una lamina quadrata omogenea di massa m e lato 2ℓ .

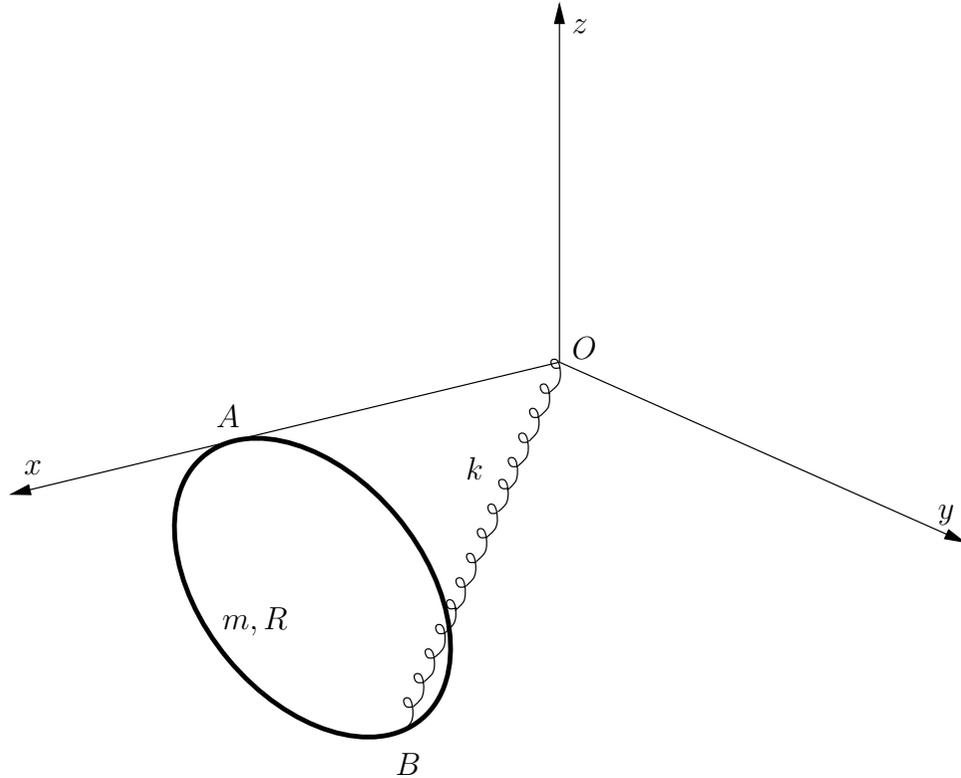


Prova scritta di Meccanica Analitica - 5 febbraio 2021

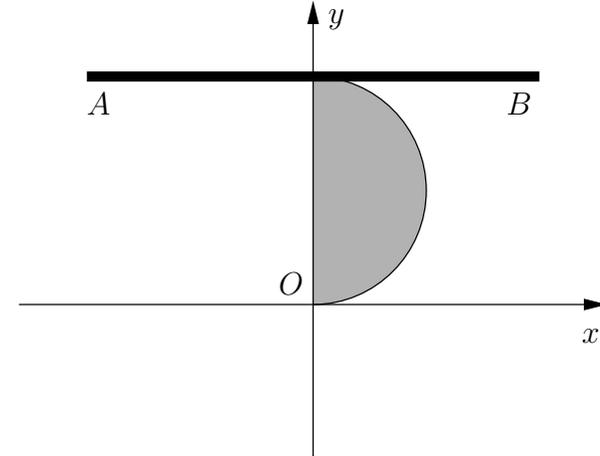
I) Una circonferenza materiale omogenea di massa m e raggio R si muove in modo che il punto A della circonferenza scorra sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$. Inoltre la circonferenza può ruotare attorno all'asse x .

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto B del diametro AB agisce una forza elastica di polo l'origine e coefficiente $k > 0$. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare la lagrangiana del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido in figura rispetto al sistema di riferimento indicato. Il corpo è formato da un'asta AB omogenea di massa m e lunghezza 4ℓ e da un semidisco omogeneo di massa m e raggio ℓ . Il punto di contatto tra il semidisco e l'asta è il baricentro dell'asta.

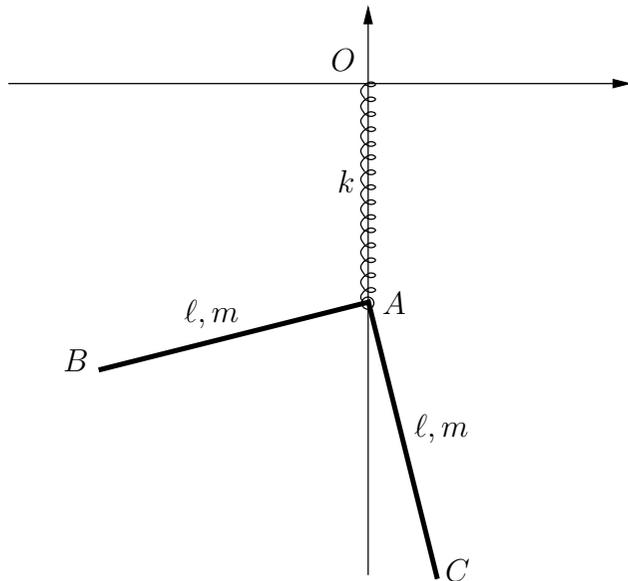


Prova scritta di Meccanica Analitica - 8 gennaio 2021

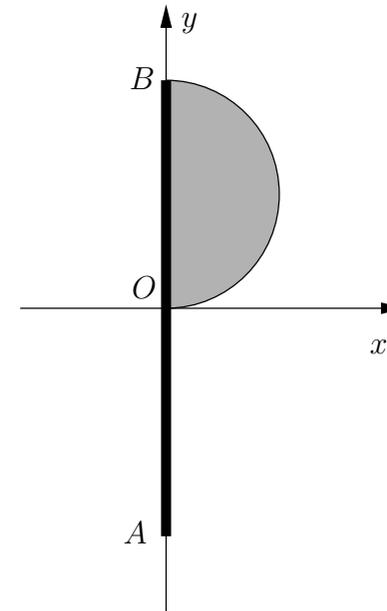
I) Un corpo rigido è formato da due aste omogenee AB , AC , ognuna di lunghezza ℓ e massa m , saldate ad angolo retto nell'estremo comune A . Il corpo è libero di ruotare in un piano verticale attorno al punto A , che può scorrere sull'asse verticale di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto A agisce una forza elastica verticale con polo nell'origine e coefficiente $k > 0$. Considerando tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema
2. discuterne la stabilità;
3. scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni differenziali del moto.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido in figura rispetto al sistema di riferimento indicato. Il corpo è formato da un'asta AB omogenea di massa m e lunghezza 4ℓ e da un semidisco omogeneo di massa m e raggio ℓ .

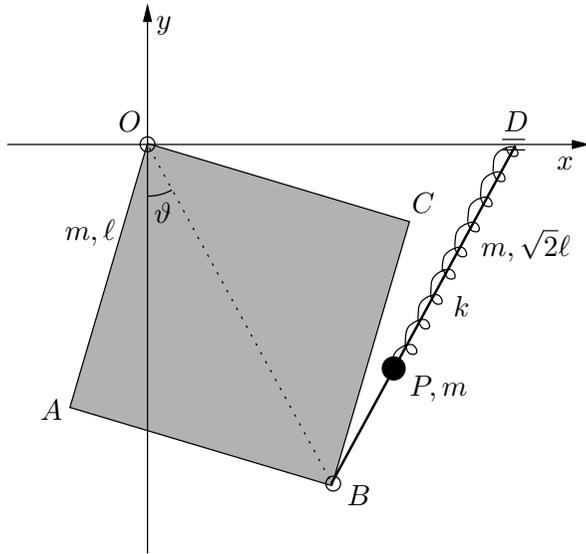


Prova scritta di Meccanica Analitica - 18 settembre 2020

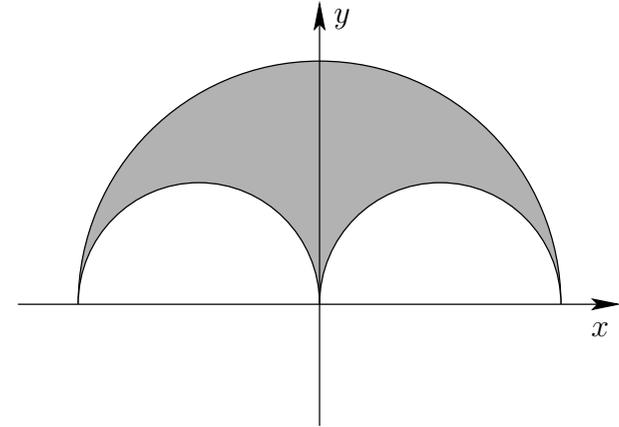
I) Una lamina quadrata omogenea $OABC$ di massa m e lato ℓ è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso O che è l'origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy . Al vertice B opposto ad O è agganciato l'estremo di un'asta omogenea BD di massa m e lunghezza $\sqrt{2}\ell$, che può ruotare attorno a B . L'estremo D dell'asta è vincolato a scorrere sull'asse x . Inoltre, sull'asta BD scorre un punto materiale P di massa m .

Su tutto il sistema agisce la forza peso e tra il punto P e l'estremo D dell'asta intercorre una forza elastica di coefficiente $k > 0$. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne l'esistenza e la stabilità in funzione del parametro meccanico $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$;
2. trovare le posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare l'energia cinetica del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana rappresentata in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al piano del foglio). La massa della lamina è $2m$ e il raggio del semicerchio grande misura $2R$ mentre quello dei semicerchi piccoli è la metà.



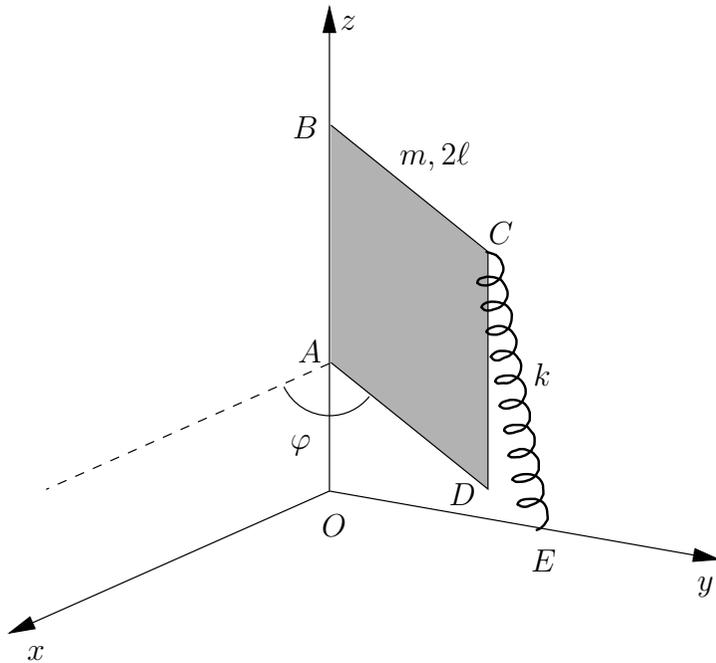
Prova scritta di Meccanica Analitica - 4 settembre 2020

I) Una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di massa m e lato 2ℓ è libera di ruotare attorno al lato AB , che scorre sull'asse verticale di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$.

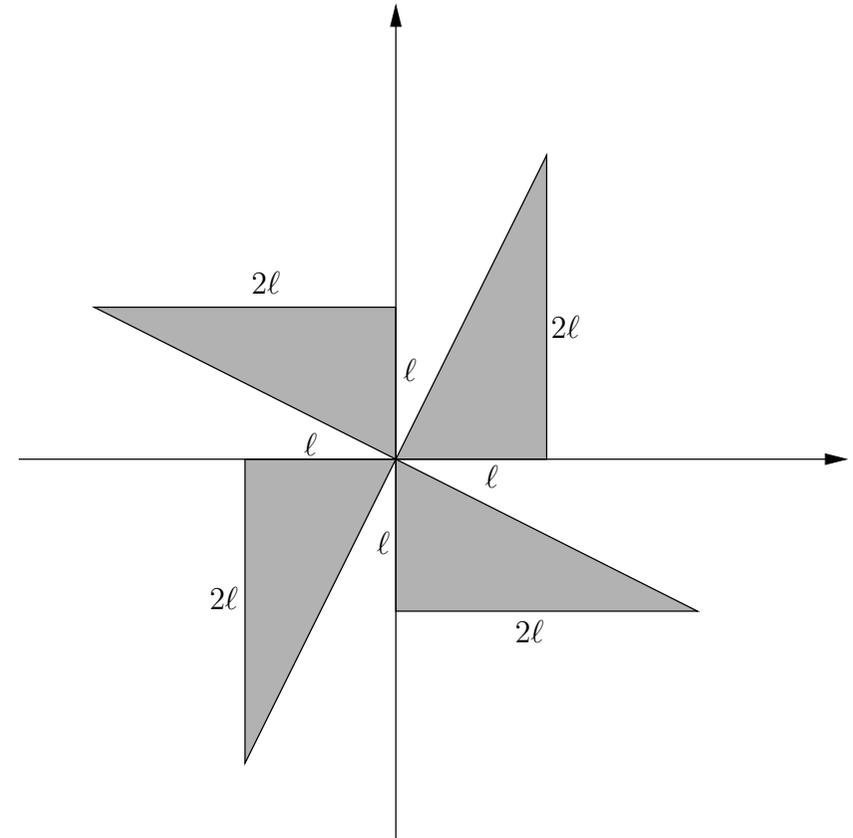
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto C agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto $E(0, 2\ell, 0)$.

Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



II) Una lamina piana omogenea di massa $4m$ è formata da quattro triangoli rettangoli di cateti ℓ , 2ℓ disposti come in figura. Se ne calcoli il **momento d'inerzia rispetto all'asse perpendicolare** al piano della lamina e passante per il vertice comune ai quattro triangoli.



Prova scritta di Meccanica Analitica - 17 luglio 2020

I) In un piano verticale, un'asta OA di massa m e lunghezza ℓ si muove ruotando attorno all'estremo O , fisso nell'origine di un sistema di riferimento Oxy . Una seconda asta AB identica alla prima, ha l'estremo A in comune con la prima asta e può ruotare attorno ad esso.

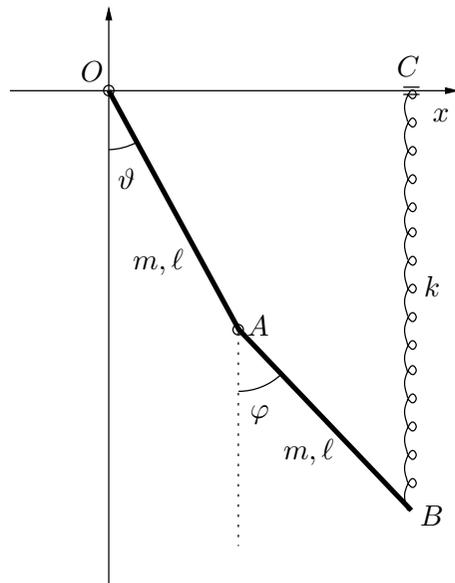
Sull'estremo B agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto C , proiezione di B sull'asse delle ascisse. Inoltre il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci.

Si chiede di:

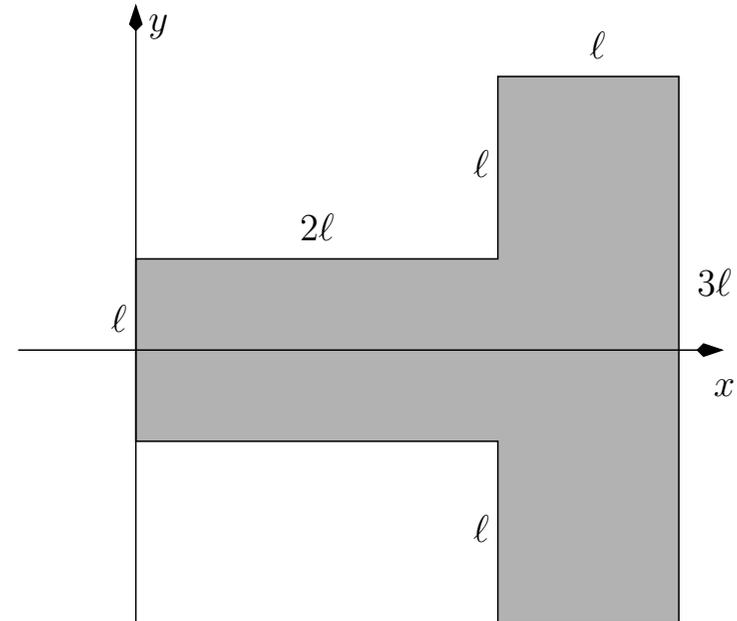
1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema in funzione del parametro

$$\lambda = \frac{mg}{k\ell};$$

2. discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio nel caso $\lambda > 4$;
3. scrivere l'energia cinetica del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al piano del foglio). La massa della lamina è $5m$.



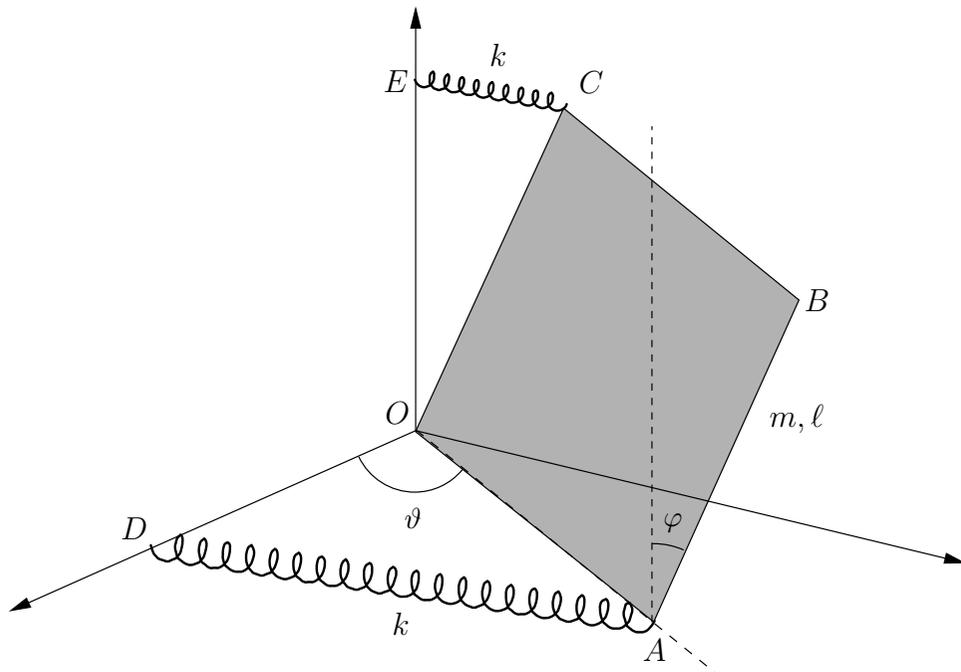
Prova scritta di Meccanica Analitica - 26 giugno 2020

I) Una lamina quadrata $OABC$ di massa m e lato ℓ si muove in modo che il lato OA stia nel piano orizzontale xy di un sistema di riferimento $Oxyz$ e il punto O sia fisso nell'origine.

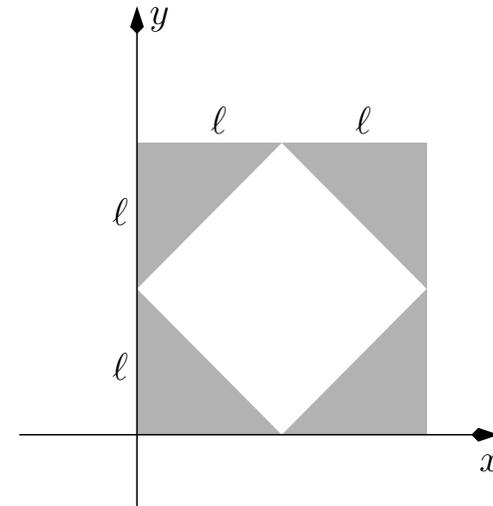
Sul vertice A della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto D di coordinate $(\ell, 0, 0)$; sul vertice C agisce un'altra forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto E di coordinate $(0, 0, \ell)$. Inoltre il corpo rigido è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci.

Si denotino con ϑ l'angolo tra il semiasse delle x positive e il lato OA , e con φ l'angolo tra il semipiano verticale ascendente passante per OA e il semipiano della lamina. Si chiede di:

1. scrivere l'energia cinetica del sistema;
2. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
3. discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana formata da quattro triangoli rettangoli isosceli disposti come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al piano del foglio). Il cateto di ogni triangolo misura ℓ e la massa della lamina è $4m$.



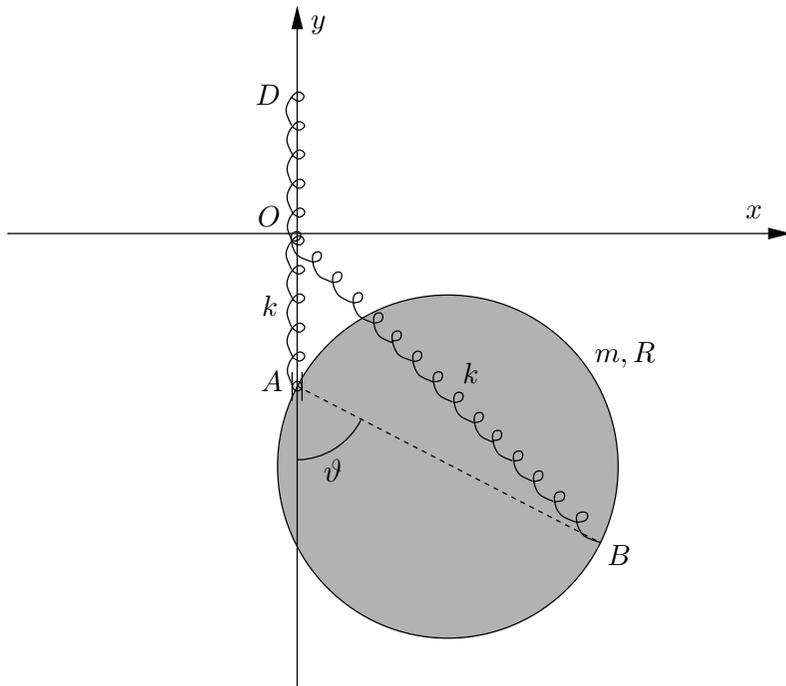
Prova scritta di Meccanica Analitica - 12 giugno 2020

I) In un piano verticale, un disco omogeneo di massa m e raggio R è libero di ruotare attorno a un suo punto A del bordo. Tale punto A scorre sull'asse verticale di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy .

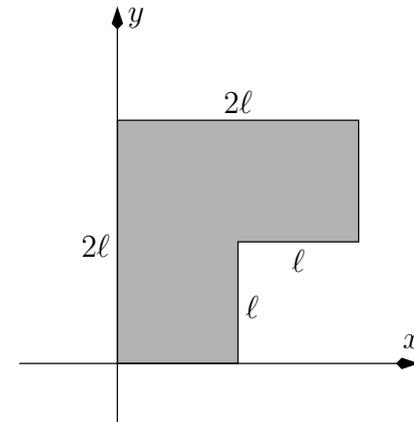
Sul punto A agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto D di coordinate $(0; R)$; sul punto B , diametralmente opposto ad A , agisce un'altra forza elastica, sempre di coefficiente $k > 0$, con polo l'origine O . Inoltre su tutto il sistema agisce la forza peso.

Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. scrivere la lagrangiana del sistema.



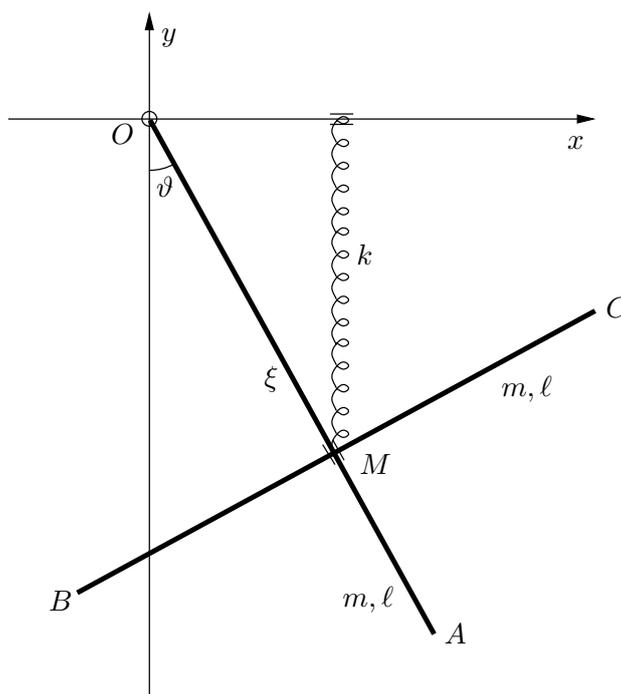
II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana rappresentata in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al piano del foglio). La massa della lamina è $3m$.



Prova scritta di Meccanica Analitica
17 gennaio 2020

1) In un piano verticale, un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza ℓ è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso O , origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy . Una seconda asta BC , identica alla prima, ha il punto medio M vincolato a scorrere sulla prima asta e si mantiene sempre ortogonale ad essa. Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto M agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse x . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. trovare le posizioni di equilibrio di confine;
4. scrivere le equazioni del moto.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana rappresentata in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al piano del foglio). La massa della lamina è $2m$.

