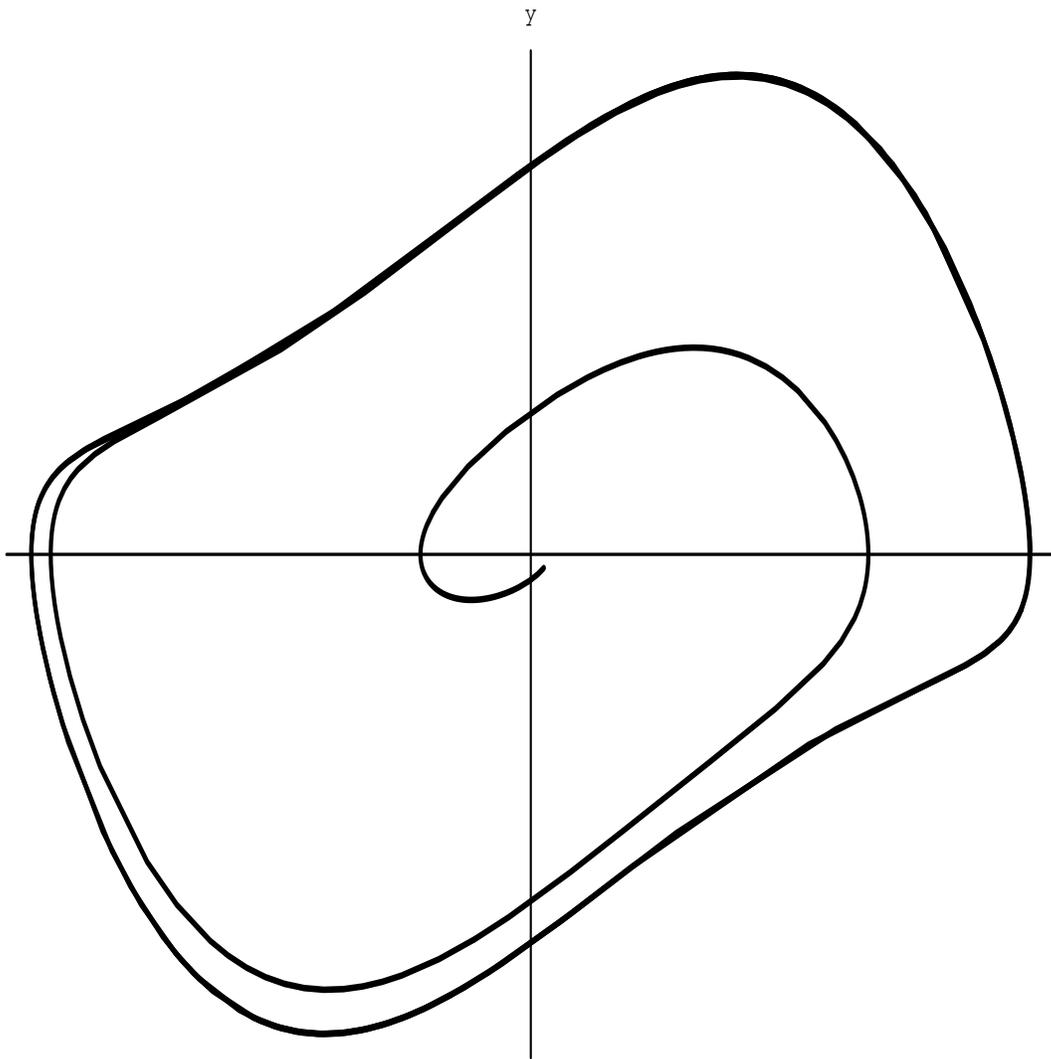


ALFREDO MARZOCCHI

METODI MATEMATICI  
PER  
MODELLI DETERMINISTICI



Cartolibreria *Snoopy*

Autore: Alfredo Marzocchi

Casa Editrice

Copyright 1999 Cartolibreria Snoopy s.n.c. - via Bligny, 27, 25133 Brescia

Tel. e fax 0302006331

E-mail [cartolibrieriasnoopy@numerica.it](mailto:cartolibrieriasnoopy@numerica.it)

Prima edizione: anno 1999

Finito di stampare nel mese di febbraio 1999

È vietata la riproduzione, anche parziale,  
con qualsiasi mezzo effettuata, compresa la fotocopia,  
anche a uso didattico,  
se non autorizzata da parte dell'editore e autori.

## CAPITOLO SECONDO

# Modelli retti da equazioni differenziali

Nello scorso capitolo abbiamo analizzato l'esempio dei sistemi lagrangiani (sistemi meccanici olonomi a vincoli lisci) come esempio di fenomeno che conduce ad un modello deterministico retto da equazioni differenziali ordinarie. In particolare, abbiamo visto che la modellizzazione matematica del fenomeno si traduce in un sistema di equazioni differenziali.

### 2.1. Modelli retti da equazioni differenziali ordinarie

DEFINIZIONE. Diremo sistema (di equazioni differenziali ordinarie) del primo ordine in forma normale un sistema del tipo

$$(1.1) \quad \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{F}(\mathbf{s}, t)$$

dove  $\mathbf{s}$  è una funzione (in generale incognita)  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I$  è un intervallo in  $\mathbb{R}$  (limitato o illimitato) e  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione nota.

ESEMPIO. Supponiamo  $I = [0, +\infty[$  e  $n = 2$ . Se per esempio la funzione  $\mathbf{F}$  è data da

$$\mathbf{F}(x, y, t) = (x - 2y + \cos t)\mathbf{e}_1 + (3x - y)\mathbf{e}_2$$

allora il sistema del primo ordine associato, posto  $\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t))$ , sarà

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + \cos t \\ \dot{y} = 3x - y \end{cases} \quad \text{per } t \geq 0.$$

In molti casi, per esempio quello dei sistemi lagrangiani, il sistema di equazioni differenziali si pone in modo naturale facendo intervenire le derivate seconde. Ciò motiva la seguente

DEFINIZIONE. Diremo sistema (di equazioni differenziali ordinarie) del secondo ordine in forma normale un sistema del tipo

$$(1.2) \quad \ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{G}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, t)$$

dove  $\mathbf{s}$  è una funzione (in generale incognita)  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I$  è un intervallo in  $\mathbb{R}$  (limitato o illimitato) e  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione nota.

ESEMPIO. Supponiamo  $I = \mathbb{R}$  e  $n = 2$ . Se per esempio la funzione  $\mathbf{G}$  è data da

$$\mathbf{G}(x, y, u, v, t) = (x + uy - t)\mathbf{e}_1 + (ve^x + y - \sin t)\mathbf{e}_2$$

allora il sistema del secondo ordine associato, posto  $\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t))$ , sarà

$$\begin{cases} \ddot{x} = x + \dot{x}y - t \\ \ddot{y} = \dot{y}e^x + y - \sin t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

OSSERVAZIONE. Ogni sistema del secondo ordine si può mettere nella forma di un sistema del primo ordine, e viceversa, pur di cambiare il numero di variabili indipendenti. Infatti, ponendo nella (1.2)  $\mathbf{r} = \dot{\mathbf{s}}$ , si ha  $\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{s}}$  e il sistema diviene

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{G}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) \\ \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{r} \end{cases}$$

per cui, ponendo  $\mathbf{u} = (\mathbf{r}, \mathbf{s})$  e  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, t) = (\mathbf{G}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t), \mathbf{r})$ , il sistema diviene

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t)$$

che è formalmente analogo al sistema (1.1), con la differenza che  $\mathbf{u}$  ha  $2n$  variabili e  $\mathbf{F}$   $2n$  componenti.

Viceversa, dato un sistema del primo ordine della forma (1.1), ogni sua soluzione derivabile due volte verifica, derivandola rispetto al tempo, il sistema

$$\ddot{\mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}} \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \mathbf{G}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, t)$$

che è del secondo ordine.

Per questo motivo sarebbe sufficiente trattare solo sistemi del primo ordine (oltretutto, si potrebbe dimostrare che ogni sistema di ordine  $N$  si può ridurre al primo). Tuttavia, grazie all'importanza dei sistemi lagrangiani, manterremo in alcuni casi le definizioni corrispondenti ai sistemi del secondo ordine. Manterremo d'ora in poi le notazioni

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) \quad \text{o rispettivamente} \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t).$$

Accanto ai sistemi or ora introdotti devono essere conosciute le *condizioni iniziali*, ossia delle informazioni sul valore dell'incognita  $\mathbf{u}$  in un dato istante  $t_0$ . Per un sistema del primo ordine, tale informazione è esattamente il valore della funzione  $\mathbf{u}$  all'istante  $t_0$ . Se indichiamo con  $\mathbf{u}_0$  tale valore, il sistema (1.1) diviene

$$(1.3) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0. \end{cases}$$

e prende il nome di *problema ai valori iniziali* per il sistema.

Per un sistema del secondo ordine, invece, tale informazione è il valore della funzione  $\mathbf{u}$  all'istante  $t_0$  insieme alla derivata rispetto al tempo della funzione  $\mathbf{u}$  valutata in  $t_0$ . Se indichiamo con  $\mathbf{u}_1$  tale valore, il sistema (1.2) diviene

$$(1.4) \quad \begin{cases} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}(t_0) = \mathbf{u}_1 \end{cases}$$

e prende ugualmente il nome di *problema ai valori iniziali* (o *problema di CAUCHY*) per il sistema.

Le condizioni iniziali qui richiamate si devono al fatto che in generale un sistema di equazioni differenziali ordinarie ammette infinite soluzioni, e che invece aggiungendo le condizioni iniziali si ha, sempre in generale, una unica soluzione. Ciò non toglie che si possano richiedere condizioni di tipo diverso (per esempio, la limitatezza delle soluzioni nel passato e nel futuro), che conducono a problemi diversi da quelli che tratteremo.

A proposito dei sistemi introdotti bisogna osservare che non solo i sistemi ologonici conducono a un problema matematico di questo tipo. Numerosi esempi di modelli tratti dall'Economia e dalla Biologia si basano su sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

## 2.2. Soluzioni

Sotto opportune condizioni sulla funzione  $\mathbf{F}$  (che, ricordiamo, è una funzione vettoriale, così come  $\mathbf{u}$ ), i sistemi (1.3)/(1.4) ammettono una unica *soluzione*  $\mathbf{u}$ , ossia una funzione  $t \mapsto \mathbf{u}(t)$  che soddisfa tutte le richieste dei sistemi e che traduce la previsione del modello sull'evoluzione nel tempo del fenomeno osservato. Senza entrare in dettaglio su queste condizioni, diciamo soltanto che se  $\mathbf{F}$  è una funzione derivabile dei suoi argomenti, allora la soluzione esiste in un intervallo di tempo (limitato o illimitato) che dipende dalla funzione  $\mathbf{F}$ .

Un'altra importante osservazione riguarda l'effettiva possibilità di risolvere sistemi del tipo (1.3)/(1.4). Sebbene il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie valga, tutto sommato, sotto ipotesi abbastanza generali sulla funzione  $\mathbf{F}$ , esso non dice in alcuna maniera come si possa operare per *calcolare* la soluzione. La verità è che, nella stragrande maggioranza dei casi, non si può esprimere la soluzione cercata per mezzo di funzioni elementari, il che si esprime talvolta dicendo che “non si conosce la soluzione”. Ciò non è esattamente corretto, in quanto la scelta delle funzioni elementari (combinazioni finite di polinomi, funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche) è arbitraria, e in effetti nella ristrettezza di questa classe risiede spesso la causa della “non calcolabilità” della soluzione.

Come esempio possiamo considerare l'equazione (I, 1.5) che modella il moto del pendolo semplice visto nel n. 1.1. Posto  $\omega^2 = g/m$ , l'equazione si scrive

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \sin \vartheta = 0.$$

Ponendo  $\eta = \dot{\vartheta}$ , questa equazione equivale al sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \eta \\ \dot{\eta} = -\omega^2 \sin \vartheta. \end{cases}$$

Ebbene, la funzione  $\mathbf{F}(\vartheta, \eta) = (\eta, -\omega^2 \sin \vartheta)$  è molto regolare e per essa vale il teorema di esistenza e unicità. Eppure, non si può esprimere la soluzione  $\mathbf{u}(t) = (\vartheta(t), \eta(t))$  per mezzo di funzioni elementari di  $t$ . Tuttavia, la soluzione si può esprimere per mezzo di una serie di potenze convergente

$$\vartheta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad \eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

dove i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  dipendono solo dal valore iniziale della soluzione e si possono pertanto considerare noti. In questo senso, non si può dire che la soluzione del problema “non si conosca”.

In casi più complessi, però, anche l'esprimibilità tramite serie di potenze viene a cadere e si deve ricorrere a metodi approssimati per il calcolo della soluzione. Vale la pena di illustrare molto schematicamente il più semplice di questi metodi, per rendersi conto della procedura seguita. Scelto un “passo”  $h$  abbastanza piccolo, l'idea è di approssimare la derivata  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  con il rapporto incrementale, ossia porre

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h}$$

che, come è noto, non è esatto in quanto la derivata è il *limite* per  $h \rightarrow 0$  di tale rapporto. La bontà di questa approssimazione dipende da  $h$  e dal tipo di equazione, e su questo aspetto non ci soffermiamo. Sostituendo  $\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), t)$  nella precedente relazione, si può ricavare

$$(2.1) \quad \mathbf{u}(t+h) = \mathbf{u}(t) + h\mathbf{F}(\mathbf{u}(t), t).$$

Ora, nell'equazione precedente, il secondo membro dipende solo da  $t$  e dal valore di  $\mathbf{u}$  all'istante  $t$ , e permette di ricavare  $\mathbf{u}$  all'istante  $t+h$ . Pertanto, noto il valore iniziale  $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$ , si può calcolare  $\mathbf{u}(t_0+h)$ , e successivamente, iterando il procedimento,  $\mathbf{u}(t_0+2h)$ ,  $\mathbf{u}(t_0+3h)$ , ... Chiaramente ad ogni passo si commette un errore sostituendo alla derivata il rapporto incrementale, e questi errori possono accumularsi dando origine ad un “valore approssimato” della soluzione totalmente privo di significato. L'Analisi Numerica ha il compito di indicare, nei vari metodi seguiti, una stima del massimo errore compiuto, cosicché si possa conoscere *a priori* il passo da usare e il numero di iterazioni per rimanere all'interno di una tolleranza assegnata.

Un altro luogo comune è che la conoscenza del valore della soluzione in un determinato istante, anche quello iniziale, sia “esatta”. In effetti, ciò può essere vero da un punto di vista matematico, ma cessa di essere vero nel momento in cui tale valore va approssimato per effettuare dei calcoli o delle verifiche. Tra la conoscenza del “valore esatto” e la conoscenza tramite serie di potenze, metodi numerici o altro vi può essere solo un diverso grado di approssimazione o una maggiore quantità di informazioni.

Quanto detto serve a mostrare che una conoscenza molto dettagliata della soluzione non sempre è ottenibile facilmente. Per questo ed altri motivi sono stati sviluppati dei metodi, detti *qualitativi*, che si prefiggono di ricavare dal problema il maggior numero possibile di informazioni senza risolvere il sistema. In molti casi essi sono utili, ed in alcuni addirittura indispensabili perché contribuiscono alla validazione del modello. Nel seguito incontreremo ed approfondiremo alcuni di questi metodi.

### 2.3. Proprietà generali delle soluzioni

Prima di proseguire nello studio dei metodi qualitativi, introduciamo alcune definizioni ed esaminiamo alcuni semplici risultati di carattere generale che sono comuni a tutti i modelli retti da equazioni differenziali ordinarie del tipo (1.3)/(1.4).

DEFINIZIONE. *Un sistema di equazioni differenziali ordinarie della forma*

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), t)$$

dove  $\mathbf{u}$  è una funzione definita su un intervallo  $I$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{F}$  è una funzione a valori in  $\mathbb{R}^n$  si dice *autonomo* se  $\mathbf{F}$  non dipende da  $t$ , ossia se il sistema è della forma

$$(3.1) \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t)),$$

*altrimenti si dirà non autonomo.*

I sistemi autonomi, oltre a ricorrere frequentemente (per esempio, tutti i sistemi olonomi a vincoli lisci e fissi soggetti a forze non variabili nel tempo generano sistemi autonomi), possiedono una fondamentale proprietà di invarianza per traslazione dell'origine dei tempi. Questo si enuncia nel seguente

(3.2) TEOREMA. *Se  $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è soluzione del sistema autonomo (3.1) su un intervallo  $I$ , allora, per ogni  $t, \tau$  tali che  $t + \tau \in I$ , la funzione  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t + \tau)$  verifica ancora il sistema.*

*Dimostrazione.* Basta osservare che

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t + \tau) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t + \tau)) = \mathbf{F}(\mathbf{v}(t))$$

e che quindi  $\mathbf{v}$  verifica il sistema. ■

Il teorema precedente permette di scegliere liberamente l'origine dei tempi. Per esempio, supponiamo di avere il problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

Preso  $t_1 \in I$ , poniamo  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t + t_0 - t_1)$ , e troviamo

$$\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{v}(t_1)$$

e per il teorema precedente  $\mathbf{v}$  verifica il sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v}(t_1) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

che è formalmente equivalente al precedente problema, solo scritto per  $\mathbf{v}$  anziché  $\mathbf{u}$ , ma in cui l'“istante iniziale” è  $t_1$  anziché  $t_0$ . Spesso si sceglie  $t_1 = 0$ , per cui per sistemi autonomi si assegnano i dati all'istante  $t = 0$ .

Per sistemi non autonomi la traslazione temporale è naturalmente possibile, ma ciò cambia la forma del sistema. Infatti, con le notazioni appena usate, si trova

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{v}(t), t - (t_1 - t_0)) \\ \mathbf{v}(t_1) = \mathbf{u}_0. \end{cases}$$

Questo problema non è equivalente al precedente per la presenza del termine  $-(t_1 - t_0)$ . Tuttavia, può capitare che  $\mathbf{F}$  sia invariante per *certe* traslazioni; un esempio importante è quello in cui  $\mathbf{F}$  è *periodica* in  $t$  di periodo  $T > 0$ . Allora, se si esegue la traslazione con  $t_0 - t_1 = T$ , si trova

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{v}(t), t + T) = \mathbf{F}(\mathbf{v}(t), t)$$

e il problema ritorna equivalente a quello di partenza.

Un'altra definizione utile è la seguente.

DEFINIZIONE. *Data la soluzione di un problema del tipo*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, \end{cases}$$

*definita su un intervallo  $I$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , si indicano i suoi valori con*

$$\mathbf{u}(t; t_0, \mathbf{u}_0)$$

*o, quando non vi sia pericolo di confusione, con  $\mathbf{u}(t)$ . L'insieme  $\{\mathbf{u}(t; t_0, \mathbf{u}_0) : t \in I\}$  si dice orbita della soluzione uscente da  $\mathbf{u}_0$ . Chiameremo invece traiettoria uscente da  $\mathbf{u}_0$  l'insieme  $\{(\mathbf{u}(t), t) : t \in I\}$ . Se  $I$  è il più grande intervallo su cui la soluzione esiste, essa, l'orbita, la traiettoria e l'intervallo si diranno massimali. Infine, l'insieme  $\mathbb{R}^n$  che contiene la soluzione si dirà spazio degli stati, mentre l'insieme  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  che contiene la traiettoria si dirà spazio esteso delle fasi.*

ESEMPIO. Dato il problema ai valori iniziali in  $\mathbb{R}$  (quindi  $n = 1$ )

$$\begin{cases} \dot{u} = u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

si constata immediatamente che la soluzione è  $u : t \mapsto e^t$  e che è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Dunque l'intervallo massimale è  $\mathbb{R}$  e l'orbita è l'insieme  $\{u \in \mathbb{R} : u = e^t (t \in \mathbb{R})\} = ]0, +\infty[$ . La traiettoria è invece l'insieme  $\{(u, t) : u = e^t (t \in \mathbb{R})\}$ , che è in questo caso il grafico della funzione  $e^t$ . Lo spazio degli stati è  $\mathbb{R}$  e quello esteso è  $\mathbb{R}^2$ .

Il caso  $n = 1$  è particolare per il fatto che l'orbita è “rettilenea”, in quanto sottoinsieme dell'asse  $u$  (asse  $y$  della figura 9). Per avere una idea “fisica” del moto del punto rappresentativo della soluzione dell'equazione, si deve immaginare di muovere uniformemente l'ascissa del punto sulla traiettoria e osservare la proiezione dell'ordinata. Osserviamo anche che l'orbita non coincide con tutto l'insieme dei valori possibili della soluzione, cosa di per sé ovvia in dimensione più alta.

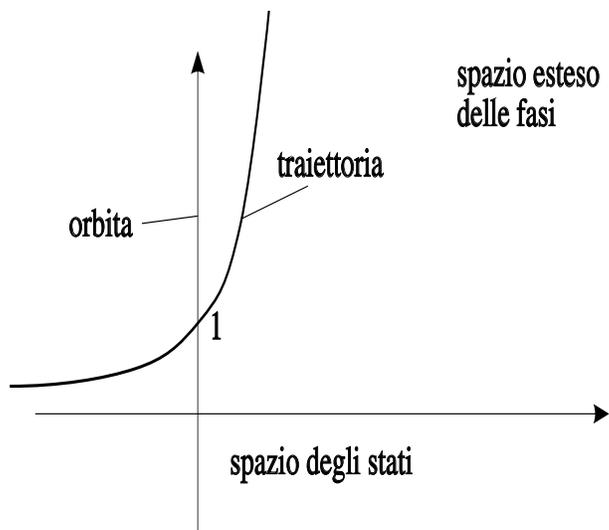


FIGURA 9

La soluzione di  $\dot{u} = u$ ,  $u(0) = 1$ .

ESEMPIO. Dato il problema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

si constata subito che la soluzione è  $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$  e che è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Quindi l'orbita è stavolta l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos t, y = \sin t \ (t \in \mathbb{R})\}$$

che altro non è che l'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ , ossia la circonferenza di centro l'origine e raggio 1. La traiettoria è invece l'insieme

$$\{(x, y, t) : x = \cos t, y = \sin t, t \in \mathbb{R}\}$$

che è un'elica cilindrica in  $\mathbb{R}^3$ .

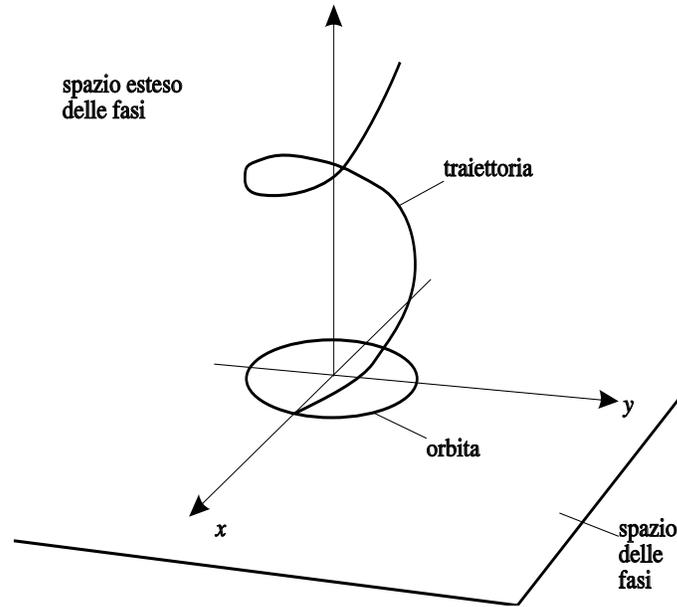


FIGURA 10

*Rappresentazione della soluzione del precedente esempio.*

La seguente definizione, analoga alla precedente, si applica al caso dei sistemi del secondo ordine.

DEFINIZIONE. *Data la soluzione di un problema del tipo*

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}(t_0) = \mathbf{u}_1 \end{cases}$$

*definita su un intervallo  $I$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , si indicano i suoi valori con*

$$\mathbf{u}(t; t_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$$

*o, quando non vi sia pericolo di confusione, con  $\mathbf{u}(t)$ . L'insieme di tutte le coppie  $(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$  si chiama spazio delle fasi e l'insieme  $\{(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) : t \in I\}$  si dice orbita nello spazio delle fasi della soluzione uscente da  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ .*

ESEMPIO. Dato il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

si verifica subito che la soluzione è la funzione  $t \mapsto \cos t$ . Poiché  $\dot{x}(t) = -\sin t$ , l'orbita nello spazio delle fasi è l'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos t, y = -\sin t, t \in \mathbb{R}\}$  che è nuovamente la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 in  $\mathbb{R}^2$ . In effetti, ponendo  $\dot{x} = -y$ , si ottiene il sistema dell'esempio precedente. Questo mostra che l'orbita nello spazio delle fasi di un sistema del secondo ordine può coincidere con l'orbita del corrispondente sistema riportato al primo ordine.

ESEMPIO. Dato il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{y} + 1 \\ \dot{y} = x \\ x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1 \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$$

la soluzione è  $x(t) = e^t$ ,  $y(t) = e^t - t$ , come è facile verificare. In questo caso non è possibile visualizzare l'orbita nello spazio delle fasi in quanto è una linea in  $\mathbb{R}^4$ . L'orbita nello spazio  $\mathbb{R}^2$  è invece la curva di equazione  $y = x - \log x$ , come si vede eliminando  $t$  dalle espressioni della soluzione.

## 2.4. Semigruppì e processi

Le soluzioni dei problemi differenziali che abbiamo introdotto danno origine a delle strutture di notevole interesse. Consideriamo dapprima il caso autonomo e introduciamo ora una funzione di notevole importanza per il seguito. Per semplicità, supporremo che le soluzioni dei sistemi che considereremo esistano per ogni  $t \geq 0$  e per ogni dato iniziale  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Qualora i domini delle funzioni che introdurremo siano più piccoli, le modifiche da apportare sono ovvie

DEFINIZIONE. *Dato un sistema autonomo del primo ordine, indichiamo per ogni  $t \geq 0$  la funzione  $S(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  che opera sul generico  $\mathbf{x}$  come segue:*

$$S(t)\mathbf{x} = \mathbf{u}(t) = \text{la soluzione all'istante } t \text{ del sistema } \begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{x} \end{cases}$$

ossia il valore all'istante  $t$  della soluzione uscente da  $\mathbf{x}$ . La famiglia  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  si dirà semigruppoo continuo (o più brevemente semigruppoo) associato al sistema.

OSSERVAZIONE. Non bisogna confondere la  $S(t)$  con l'immagine di una funzione. Infatti, sebbene non paia dalla notazione,  $S(t)$  è una funzione, che associa a  $\mathbf{x}$  il vettore soluzione del sistema scritto all'istante  $t$ , mentre  $t$  è solo un parametro che individua la funzione.

(4.1) ESEMPIO. Supponiamo  $n = 1$  e di avere l'equazione

$$\dot{x} = x.$$

In questo caso la soluzione del problema che ammette  $x_0$  come dato all'istante  $t = 0$  è

$$x(t; x_0) = x_0 e^t.$$

Pertanto si ha  $S(t)x_0 = x_0 e^t$ , per cui per ogni  $t \in \mathbb{R}$  l'applicazione  $S(t)$  è la moltiplicazione per  $e^t$ .

(4.2) ESEMPIO. Riprendiamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema è

$$x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \quad y(t) = -x_0 \sin t + y_0 \cos t$$

per cui per ogni  $t$  l'applicazione  $S(t)$  è

$$(x_0, y_0) \mapsto (x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t).$$

Da un punto di vista vettoriale, osserviamo anche che

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

per cui  $S(t)$  si può pensare come la moltiplicazione del vettore dei dati per la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Osserviamo infine che  $S(t)$  può essere anche ottenuta moltiplicando  $x_0 + iy_0$  per  $e^{-it}$  e prendendo la parte immaginaria e reale.

Osserviamo che la definizione di  $S(t)$  non dipende da  $\mathbf{u}$ , in quanto l'uso di un simbolo o di un altro per l'incognita di un problema è arbitrario. Essa dipende invece da  $\mathbf{F}$ , che è la "forma" del sistema.

Le funzioni ora introdotte verificano una fondamentale proprietà, detta *proprietà di semigrupp*o:

**TEOREMA.** *Dato un semigrupp*o associato ad un sistema autonomo del primo ordine, si ha per ogni  $t, s \geq 0$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} a) & S(t+s) = S(t) \circ S(s); \\ b) & S(0) = \text{Id} \end{aligned}$$

dove  $\text{Id}$  indica l'identità.

*Dimostrazione.* Sia dato  $\mathbf{x}$  arbitrario. Allora per ogni  $s, t \geq 0$ ,  $S(t+s)\mathbf{x}$  è la soluzione all'istante  $t+s$  del problema

$$(4.4) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{x}, \end{cases}$$

ossia  $S(t+s)\mathbf{x} = \mathbf{u}(t+s)$ . D'altro canto essendo il sistema autonomo (v. teor.(3.2)), per ogni  $s \geq 0$  la funzione  $\mathbf{v} : t \mapsto \mathbf{u}(t+s)$  risolve il problema

$$(4.5) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{v}(t)) \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{u}(s), \end{cases}$$

e fra le due funzioni sussiste la relazione  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t+s)$ . Ma il problema (4.5) è formalmente identico al problema (4.4), e questo implica che  $\mathbf{v}(t) =$

$S(t)\mathbf{v}(0) = S(t)\mathbf{u}(s)$ . Ma dal sistema (4.4)  $\mathbf{u}(s) = S(s)\mathbf{u}(0) = S(s)\mathbf{x}$ , e dunque

$$S(t+s)\mathbf{x} = \mathbf{u}(t+s) = \mathbf{v}(t) = S(t)\mathbf{u}(s) = S(t)(S(s)\mathbf{x}) = (S(t) \circ S(s))\mathbf{x}$$

che è la *a*). La *b*) è evidente in quanto  $S(0)\mathbf{x} = \mathbf{x}$  per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . ■

Grazie a questa proprietà si vede che l'applicazione  $S(t)$  ha il senso di “spostare l'orologio avanti di  $t$ ” lungo l'orbita uscente da un vettore  $\mathbf{x}$ .

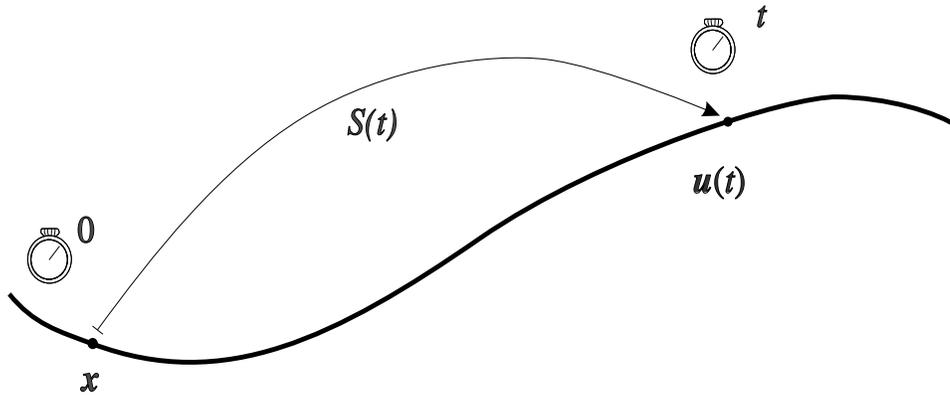


FIGURA 11  
L'applicazione  $S(t)$ .

ESEMPIO. Nel caso del semigruppò dell'esempio (4.1), osserviamo che la proprietà si traduce in

$$\begin{aligned} S(t+s)x_0 &= x_0 e^{t+s} = x_0 e^t e^s = \\ &= (x_0 e^s) \cdot e^t = S(t)(S(s)x_0) \end{aligned}$$

Nel caso del semigruppò dell'esempio (4.2), essa implica invece che si ha

$$\begin{bmatrix} \cos(t+s) & \sin(t+s) \\ -\sin(t+s) & \cos(t+s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{bmatrix}$$

come è possibile verificare applicando le proprietà delle funzioni goniometriche.

Se il problema (1.3) è invertibile, ossia se, nota la sua soluzione  $\mathbf{u}$  all'istante  $t$ , si riesce a trovare una condizione iniziale  $\mathbf{x}$  tale che  $S(t)\mathbf{x} = \mathbf{u}$ , è possibile introdurre le applicazioni  $S(t)$  anche per  $t$  negativo.

DEFINIZIONE. Sia  $s > 0$  e supponiamo esista un unico vettore  $\mathbf{x}$  tale che  $S(s)\mathbf{x} = \mathbf{u}(s)$ . allora poniamo

$$S(-s)\mathbf{u} = (S(s))^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{x}.$$

Il fatto importante è che la proprietà di semigrupp (4.3) si conserva anche in questo caso più esteso.

TEOREMA. Supponiamo che le applicazioni  $S(t)$  siano invertibili per ogni  $t > 0$ . Allora si ha

$$S(t+s) = S(t) \circ S(s) \quad \text{per ogni } t, s \in \mathbb{R}$$

e si dice allora che esse formano un gruppo.

*Dimostrazione.* La verifica va fatta esaminando i vari casi in cui il segno di  $t, s$  e  $t+s$  sia positivo o negativo. Vediamone uno per esempio, in quanto gli altri sono simili. Supponiamo  $t \leq 0, s \geq 0$  e  $s+t \geq 0$ . Sia  $\mathbf{y}$  un generico vettore e sia  $\mathbf{x} = S(t+s)\mathbf{y}$ . Ora, essendo  $t \leq 0$ , si ha  $s+t = s - |t|$ , per cui

$$\mathbf{x} = S(s - |t|)\mathbf{y}.$$

Dal momento che  $t \leq 0$ , applicando  $S(-t)$  ad ambo i membri di questa relazione, si ha che tutti i tempi entro parentesi sono positivi e vale la proprietà di semigrupp, per cui

$S(-t)\mathbf{x} = S(-t)S(s - |t|)\mathbf{y} = S(-t + s - |t|)\mathbf{y} = S(s - (t + |t|))\mathbf{y} = S(s)\mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}$   
essendo  $t + |t| = 0$ . Ma allora, per la definizione appena data,  $\mathbf{x} = S(t)\mathbf{z}$  per cui per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$S(t+s)\mathbf{y} = \mathbf{x} = S(t)\mathbf{z} = S(t)(S(s)\mathbf{y}) = S(t) \circ S(s)\mathbf{y}. \blacksquare$$

ESEMPIO. Nel caso dell'esempio (4.1), la moltiplicazione per  $e^t$  è invertibile ed è proprio la moltiplicazione per  $e^{-t}$ . Per quanto riguarda l'esempio (4.2), si ha che la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos(-t) & \text{sen}(-t) \\ -\text{sen}(-t) & \cos(-t) \end{bmatrix}$$

non è altro che l'inversa della matrice

$$\begin{bmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Nel caso più generale di sistemi non autonomi, la definizione di semigrupp va cambiata, e prende il nome di *processo*.

DEFINIZIONE. Dato un sistema non autonomo retto da un sistema del primo ordine, indichiamo per ogni  $s, t \geq 0$  la funzione  $U(s, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  che opera sul generico  $\mathbf{x}$  come segue:

$$U(s, t)\mathbf{x} = \text{la soluzione all'istante } s + t \text{ del sistema } \begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) \\ \mathbf{u}(s) = \mathbf{x} \end{cases}$$

ossia il valore all'istante  $s + t$  della soluzione uscente da  $\mathbf{x}$  all'istante  $s$ .

(4.6) ESEMPIO. Supponiamo  $n = 1$  e di avere l'equazione

$$\dot{x} = 2tx.$$

In questo caso la soluzione del problema che ammette  $x_s$  come dato all'istante  $s$  è, come si verifica facilmente,

$$x(t; x_s) = x_s \exp(t^2 - s^2).$$

Pertanto si ha

$$U(s, t)x_s = x_s \exp(t(t + 2s)).$$

Anche in questo caso, le funzioni  $U(s, t)$  dipendono dalla forma del sistema, ossia dall'espressione  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, t)$  dall'istante  $s$  in cui si conosce la soluzione e da tale valore, ma non dal simbolo usato per la soluzione stessa.

Il legame fra semigruppì e processi e le proprietà di questi ultimi sono riassunti nel seguente teorema.

(4.7) TEOREMA. Data una famiglia di processi associata ad un sistema del primo ordine, valgono i seguenti fatti per ogni  $s, t, \tau \geq 0$ :

- a)  $U(s, t + \tau) = U(s + t, \tau) \circ U(s, t)$ ;
- b)  $U(s, 0) = \text{Id}$ ;
- c) se  $\mathbf{F}$  non dipende da  $t$ , allora  $U$  non dipende da  $s$  e  $U(t)$  verifica la proprietà di semigruppì.

Dimostrazione. a) Sia dato  $\mathbf{x}$  arbitrario. Allora  $U(s, t + \tau)\mathbf{x}$  è la soluzione all'istante  $s + t + \tau$  del problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \cdot) \\ \mathbf{u}(s) = \mathbf{x}, \end{cases}$$

ossia  $U(s, t + \tau)\mathbf{x} = \mathbf{u}(s + t + \tau)$ . D'altro canto per definizione  $U(s, t)\mathbf{x} = \mathbf{u}(t + s)$ , mentre  $U(s + t, \tau)\mathbf{u}(t + s)$  è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = F(\mathbf{v}, \cdot) \\ \mathbf{v}(t + s) = \mathbf{u}(t + s) \end{cases}$$

che, per l'unicità della soluzione, coincide con  $\mathbf{u}$ , ed è pertanto  $\mathbf{u}(s + t + \tau)$ . Dunque

$$\begin{aligned} U(s, t + \tau)\mathbf{x} &= \mathbf{u}(s + t + \tau) = U(s + t, \tau)\mathbf{u}(t + s) = U(s + t, \tau)(U(s, t)\mathbf{x}) = \\ &= (U(s + t, \tau) \circ (U(s, t)))\mathbf{x}. \end{aligned}$$

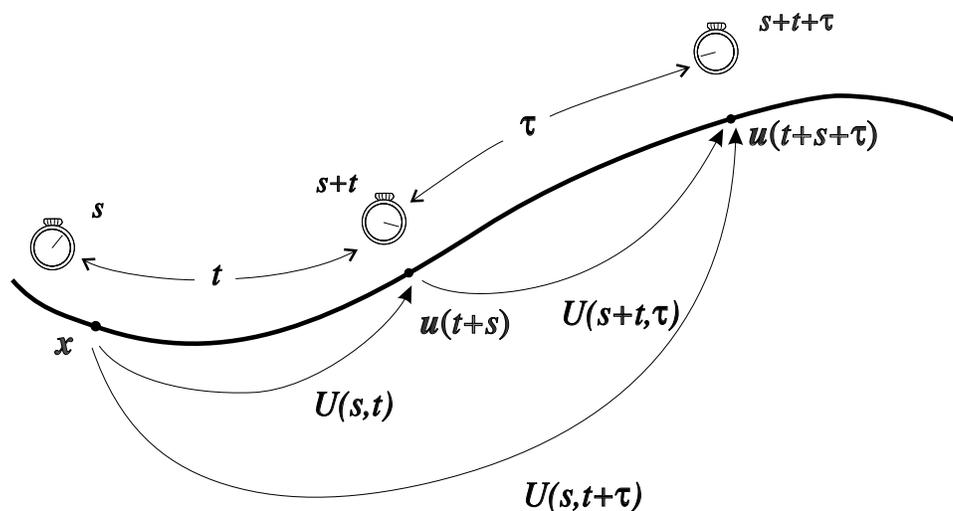


FIGURA 12  
Il processo  $U(s, t)$ .

La b) è evidente dalla definizione. Infine vediamo la c). Siano dati  $s_1$  e  $s_2$  arbitrari. Si avrà

$$U(s_1, t)\mathbf{x} = \mathbf{u}(s_1 + t) \quad \text{dove } \mathbf{u} \text{ verifica } \begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(s_1) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

e

$$U(s_2, t)\mathbf{x} = \mathbf{v}(s_2 + t) \quad \text{dove } \mathbf{v} \text{ verifica } \begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = F(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v}(s_2) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

Effettuando una traslazione temporale di  $s_2 - s_1$ , il secondo problema diviene, ponendo  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}(t + s_2 - s_1)$ ,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{w}(s_1) = \mathbf{x} \end{cases}$$

ossia identico al precedente. Per l'unicità della soluzione si ha che

$$U(s_1, t)\mathbf{x} = \mathbf{u}(s_1 + t) = \mathbf{w}(s_1 + t) = \mathbf{v}(s_2 + t) = U(s_2, t)\mathbf{x}$$

che equivale a dire che  $U(s, t)$  non dipende da  $s$ . Ponendo  $S(t) = U(0, t)$ , la  $a)$  ridiviene la (4.3),  $a)$ . ■

ESEMPIO. Nel caso dell'esempio (4.6), la proprietà ora dimostrata si riduce all'identità

$$\exp(2\tau(\tau + s + t)) \cdot \exp(2t(t + s)) = \exp(2(t + \tau)(t + \tau + s)).$$

## 2.5. Soluzioni di equilibrio

Di particolare interesse in tutti i problemi retti da equazioni differenziali sono le soluzioni *di equilibrio*. Esse sono soluzioni che hanno la particolarità di rimanere costanti nel tempo.

DEFINIZIONE. *Sia dato un sistema retto da un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Una soluzione di equilibrio è una soluzione del sistema tale che*

$$\forall t \geq 0 : \quad \mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}.$$

Vale la seguente proposizione, di facile dimostrazione.

PROPOSIZIONE. *Dato un sistema del tipo*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

con  $\mathbf{F}$  di classe  $C^1$ , si ha che  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$  è soluzione di equilibrio se e solo se  $\mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}$  e

$$\forall t \geq 0 : \quad \mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}, t) = \mathbf{0}$$

In particolare, se il sistema è autonomo, allora la precedente condizione diviene

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

*Dimostrazione.* Se  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$  è soluzione di equilibrio, allora  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0) = \bar{\mathbf{u}}$  e la sua derivata è zero, per cui

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}, t) = \mathbf{0}.$$

Viceversa, se  $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}, t) = \mathbf{0}$ , e  $\mathbf{u}(0) = \bar{\mathbf{u}}$ , allora  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$  è ovviamente soluzione. Poiché essa è unica per la regolarità di  $\mathbf{F}$ , si ha la tesi. ■

ESEMPIO. Dato il sistema associato all'equazione

$$\dot{x} = t \operatorname{sen} x$$

si ha che  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) sono tutte e sole le soluzioni di equilibrio del sistema.

ESEMPIO. Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - y^2 \\ \dot{y} = x^3 - y \end{cases}$$

si ha che le soluzioni di equilibrio sono

$$(x, y) = (0, 0), \quad (x, y) = (-1, -1), \quad (x, y) = (1, 1)$$

che sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} xy - y^2 = 0 \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. Nello spazio delle fasi la posizione di equilibrio sono le coppie  $(\bar{x}, 0)$ , mentre nello spazio esteso delle fasi le traiettorie delle soluzioni di equilibrio sono rappresentate dalle rette  $\{(\bar{x}, 0, t) : t \geq 0\}$ .

## 2.6. Sistemi dinamici discreti

Sebbene non paia a prima vista che questi sistemi possano giocare un ruolo nei modelli retti da equazioni differenziali, in realtà essi si rivelano preziosi per analizzare i comportamenti delle orbite periodiche, come vedremo fra breve. Inoltre va detto che numerosi modelli in Economia vengono considerati sistemi dinamici discreti (per esempio, i valori dei cambi alla fine della giornata).

Un *semigruppato discreto* (o anche *mappa iterata*) non è altro che l'iterazione di una funzione  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . In altre parole, consideriamo la successione  $(\mathbf{x}_h)_{h \in \mathbb{N}}$  definita da

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{h+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_h) \\ \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}. \end{cases}$$

Questa successione definisce un semigruppato discreto.

ESEMPIO. Consideriamo  $n = 1$  e il sistema

$$\begin{cases} x_{h+1} = (x_h)^2 \\ x_0 = a. \end{cases}$$

Le sue soluzioni sono, come si verifica facilmente,

$$x_h = a^{2^h}.$$

Infatti  $x_{h+1} = a^{2^{h+1}} = a^{2^h \cdot 2} = (a^{2^h})^2 = (x_h)^2$ .

Per capire la ragione di questo nome, osserviamo che vale la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE. *Introduciamo le applicazioni  $S(h) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tali che per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*

$$S(h)\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_h.$$

*Allora le applicazioni  $S(h)$  verificano le proprietà (di semigruppato discreto):*

$$(6.1) \quad \begin{aligned} a) & S(0) = \text{Id} \\ b) & S(h+k) = S(h) \circ S(k) \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* La prima è evidente. Per quanto riguarda la seconda, dimostriamo preliminarmente due semplici fatti. Dapprima si ha

$$S(h+1)\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{h+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_h) = (S(1) \circ S(h))\bar{\mathbf{x}}$$

per cui  $S(h+1) = S(1) \circ S(h)$ . Osserviamo poi che  $S(1) = \mathbf{f}$  in quanto

$$S(1)\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Dimostriamo ora la *b*) per induzione su  $h$ . Per  $h = 0$  la tesi è vera grazie al punto *a*). Supponiamo la *b*) vera per  $h$ . Allora, usando quanto appena ottenuto e l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned} S(h+1+k)\bar{\mathbf{x}} &= S(h+k+1)\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{h+k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{h+k}) = S(1)(S(h+k)\bar{\mathbf{x}}) = \\ &= [S(1) \circ (S(h) \circ S(k))]\bar{\mathbf{x}} = [(S(1) \circ S(h)) \circ S(k)]\bar{\mathbf{x}} = \\ &= (S(h+1) \circ S(k))\bar{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di  $\mathbf{x}$  si trae la validità della tesi per  $h+1$ , e quindi la *b*). ■

ESEMPIO. Continuando nell'esempio precedente, osserviamo che

$$a^{2^{h+k}} = a^{2^h \cdot 2^k} = \left(a^{2^k}\right)^{2^h}$$

che è proprio la proprietà di semigruppato.

La novità qui sta nel fatto che ogni semigruppato discreto è una mappa iterata.

**PROPOSIZIONE.** *Se  $S(h)$  è una famiglia di applicazioni verificante le proprietà di semigruppato discreto (6.1), allora  $S(h)$  è l'iterata  $h$ -esima di una funzione.*

*Dimostrazione.* Poniamo  $\mathbf{f} = S(1)$  e ricordiamo che l'iterata  $h$ -esima di  $\mathbf{f}$  verifica la relazione  $\mathbf{f}^{h+1} = \mathbf{f} \circ \mathbf{f}^h$ . Dimostriamo che  $S(h) = \mathbf{f}^h$ . Per  $h = 0$  si ha  $S(0) = \text{Id} = \mathbf{f}^0$ , per cui la relazione è vera. Supposta vera per  $h$ , si ha

$$S(h+1) = S(1) \circ S(h) = \mathbf{f} \circ \mathbf{f}^h = \mathbf{f}^{h+1}. \blacksquare$$

ESEMPIO. Nell'esempio precedente, abbiamo che  $f(x) = x^2$ . Infatti si ha  $S(h)a = a^{2^h}$  e dunque  $S(1)a = a^2$ . Dunque la successione di questo esempio si trova iterando l'elevamento al quadrato (come è chiaro anche dalla definizione).

Per semigruppato discreti è possibile effettuare uno studio per molti versi simile a quello che si fa per sistemi dinamici continui. Vediamo alcuni dei punti più importanti.

PROPOSIZIONE. *Un punto  $\bar{x}$  è punto di equilibrio (o anche punto unito) di un semigruppato discreto se e solo se*

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

*Dimostrazione.* Se  $\bar{x}$  è punto di equilibrio, allora  $x_h = \bar{x}$  per ogni  $h \in \mathbb{N}$ . Dunque  $\bar{x} = x_{h+1} = f(x_h) = f(\bar{x})$ . Viceversa, se  $\bar{x}$  verifica la relazione data, allora  $x_h = \bar{x}$  in quanto il fatto è vero per  $h = 0$  e, supposto vero per  $h$ , si ha

$$x_{h+1} = f(x_h) = f(\bar{x}) = \bar{x}. \blacksquare$$

Pertanto, dall'equazione  $f(x) = x$  si possono ricavare i punti di equilibrio del sistema.

Un'altra proprietà dei semigruppato discreti è che possono essere generati da sistemi dinamici *autonomi* continui.

(6.2) TEOREMA. *Sia  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un semigruppato continuo e sia  $a > 0$ . Allora, posto*

$$S_a(m) = S(ma)$$

*si ha che  $S_a$  verifica le proprietà di semigruppato discreto (6.1).*

*Dimostrazione.* Innanzitutto  $S_a(0) = S(0) = \text{Id}$ . Poi si ha

$$S_a(h+k) = S((h+k)a) = S(ha+ka) = S(ha) \circ S(ka) = S_a(h) \circ S_a(k)$$

e dunque  $S_a$  verifica le proprietà (6.1).  $\blacksquare$

Per quanto riguarda i processi, un importante risultato si ha per i processi *periodici*.

DEFINIZIONE. *Un processo  $U(s, t)$  si dice periodico di periodo  $T > 0$  se*

$$\forall s, t \geq 0 : \quad U(s+T, t) = U(s, t).$$

TEOREMA. *Sia  $U(s, t)$  un processo periodico di periodo  $T$ . Allora, posto per ogni  $s \geq 0$  e per ogni  $h \in \mathbb{N}$*

$$S_s(h) = U(s, hT)$$

si ha che  $S_s(h)$  è un semigruppato discreto.

*Dimostrazione.* Abbiamo  $S_s(0) = U(s, 0) = \text{Id}$ . Dimostriamo per induzione che per ogni  $k \in \mathbb{N}$  si ha  $U(s + kT, \tau) = U(s, \tau)$ . Infatti per  $k = 0$  è evidentemente vero, mentre se lo supponiamo vero per  $k$  abbiamo

$$U(s + (k + 1)T, \tau) = U(s + T + kT, \tau) = U(s + T, \tau) = U(s, \tau)$$

e dunque il risultato è vero per  $k + 1$ . A questo punto

$$\begin{aligned} S_s(h + k) &= U(s, (h + k)T) = U(s, kT + hT) = \\ &= U(s + kT, hT) \circ U(s, kT) = U(s, hT) \circ U(s, kT) = \\ &= S_s(h) \circ S_s(k). \blacksquare \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $U$  sia un semigruppato, si ha il

**COROLLARIO.** *Sia  $S(t)$  un semigruppato periodico di periodo  $T$ . Allora, posto per ogni  $h \in \mathbb{N}$*

$$\Sigma(h) = S(hT)$$

*si ha che  $\Sigma$  è un semigruppato discreto.*

*Dimostrazione.* È un caso particolare della precedente, con  $U$  (e quindi  $\Sigma$ ) indipendente da  $s$ . ■

In modo analogo si possono introdurre i *processi discreti*, che sono retti da sistemi del tipo

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{h+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_h, h) \\ \mathbf{x}_j = \bar{\mathbf{x}}. \end{cases}$$

Per esempio, un processo discreto è quello legato all'equazione (2.1). Per essi si hanno proprietà corrispondenti a quelle dei processi continui.

## 2.7. Equazioni alle differenze

I semigruppato discreti sono definiti, come abbiamo visto, da relazioni ricorsive. Esse possiedono molte proprietà in comune con i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, sebbene per certi versi siano più semplici, e il teorema (6.2) rende ragione di questa parentela.

E, così come è possibile pensare a equazioni differenziali di ordine superiore al primo, si possono pensare relazioni ricorsive più complesse, come

$$\mathbf{x}_{h+2} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{h+1}, \mathbf{x}_h).$$

Accanto a questa relazione si capisce che si deve assegnare, oltre al valore  $\mathbf{x}_0$ , anche il valore  $\mathbf{x}_1$ , cosicché il problema diviene

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{h+2} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{h+1}, \mathbf{x}_h) \\ \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}^*. \end{cases}$$

Anche in questo caso, come accade per le equazioni differenziali, le relazioni di ordine più elevato si possono ricondurre al primo ordine, a patto di aumentare il numero di variabili indipendenti. Per esempio, nell'ultimo sistema, si ha, posto  $\mathbf{y}_h = \mathbf{x}_{h+1}$ ,  $\mathbf{y}_{h+1} = \mathbf{x}_{h+2} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_h, \mathbf{x}_h)$  e il sistema diviene

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{h+1} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_h, \mathbf{x}_h) \\ \mathbf{x}_{h+1} = \mathbf{y}_h \\ \mathbf{y}_0 = \mathbf{x}^* \\ \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

il quale, ponendo  $\mathbf{z}_h = (\mathbf{x}_h, \mathbf{y}_h)$ ,  $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*)$  e  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}))$ , si può scrivere

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{h+1} = \mathbf{F}(\mathbf{z}_h) \\ \mathbf{z}_0 = \bar{\mathbf{z}} \end{cases}$$

che è del primo ordine.

Vediamo qui di seguito alcune proprietà di equazioni alle differenze particolarmente semplici, quelle lineari.

Incominciamo dal primo ordine. Una generica equazione alle differenze lineare è del tipo

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{h+1} = A \mathbf{x}_h \\ \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

dove  $A$  è una matrice. In questo caso la soluzione formale è

$$\mathbf{x}_h = A^h \bar{\mathbf{x}},$$

sebbene non sia chiaro dalla formula come si calcolino le singole componenti di  $\mathbf{x}_h$ . Convienne allora limitarsi al caso scalare, ossia

$$\begin{cases} x_{h+1} = \lambda x_h \\ x_0 = a. \end{cases}$$

Questa equazione ha per soluzioni tutte e sole le successioni della forma

$$x_h = a\lambda^h.$$

Infatti  $x_{h+1} = a\lambda^{h+1} = \lambda \cdot a\lambda^h = \lambda x_h$ .

Sempre nel caso scalare, conviene affrontare anche il caso del secondo ordine, che ha per modello l'equazione

$$x_{h+2} = 2px_{h+1} - qx_h,$$

dove  $p$  e  $q$  sono opportuni coefficienti. Cerchiamo allora le soluzioni nella forma  $x_h = \lambda^h$ . Da qui segue  $x_{h+1} = \lambda^{h+1}$  e  $x_{h+2} = \lambda^{h+2}$ , per cui si vede che  $\lambda$  deve soddisfare l'equazione

$$(7.1) \quad \lambda^2 - 2p\lambda + q = 0.$$

Poiché l'equazione è lineare, la combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione, e dunque sono soluzioni le successioni

$$(7.2) \quad x_h = a\lambda_1^h + b\lambda_2^h$$

dove  $\lambda_1, \lambda_2$  sono le soluzioni dell'equazione caratteristica (7.1). Se esse sono reali (ossia se  $p^2 > q$ ), la formula (7.2) dà tutte le soluzioni dell'equazione. Imponendo che  $x_0$  e  $x_1$  assumano i valori dati, si trovano  $a$  e  $b$  e si risolve il problema. Se invece  $\lambda_1 = \lambda_2$ , (cioè se  $p^2 = q$ ) si può dimostrare che la soluzione del problema è data da

$$x_h = ah\lambda^h + b\lambda^h.$$

Infine, se  $p^2 < q$ , le radici dell'equazione (7.1) sono complesse coniugate e la soluzione si esprime mediante le formule

$$x_h = q^{h/2}(a \cos(\omega h) + b \sin(\omega h))$$

dove

$$\omega = \arctg \frac{p}{\sqrt{q - p^2}}.$$

Infine, nel caso lineare “non autonomo”, ossia del tipo

$$(7.3) \quad x_{h+2} = 2px_{h+1} - qx_h + f(h),$$

ricordiamo il risultato valido anche per equazioni differenziali lineari:

TEOREMA. Se è nota una soluzione  $y_h$  dell'equazione non omogenea (7.3), ossia se

$$y_{h+2} = 2py_{h+1} - qy_h + f(h),$$

allora tutte e sole le sue soluzioni sono della forma

$$x_h = z_h + y_h$$

dove  $z_h$  verifica l'equazione omogenea

$$z_{h+2} = 2pz_{h+1} - qz_h.$$

*Dimostrazione.* Se  $x_h$  è del tipo dato, allora

$$\begin{aligned} x_{h+1} &= z_{h+1} + y_{h+1} \\ x_{h+2} &= z_{h+2} + y_{h+2} \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} x_{h+2} &= 2pz_{h+1} - qz_h + 2py_{h+1} - qy_h + f(h) = \\ &= 2px_{h+1} - qx_h + f(h). \end{aligned}$$

Viceversa, se  $x_h$  verifica la (7.3), allora, posto  $z_h = x_h - y_h$ , si ha

$$\begin{aligned} z_{h+2} &= x_{h+2} - y_{h+2} = 2px_{h+1} - qx_h + f(h) + \\ &\quad - 2py_{h+1} + qy_h - f(h) = \\ &= 2pz_{h+1} - qz_h. \blacksquare \end{aligned}$$

ESEMPIO. Consideriamo l'equazione di FIBONACCI

$$\begin{cases} x_{h+2} = x_{h+1} + x_h \\ x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

La sua equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

e ammette due radici reali

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Pertanto si ha

$$x_h = a \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^h + b \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^h.$$

Dovendo essere  $x_0 = 0$ , si trova  $a + b = 0$ , mentre da  $x_1 = 1$  segue  $a = 1/\sqrt{5}$ , per cui infine si trova

$$x_h = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^h - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^h \right].$$

Questa espressione genera numeri interi per ogni valore di  $h$ , che si chiamano *numeri di Fibonacci*. I primi di essi sono

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

## 2.8. Modelli retti da equazioni differenziali alle derivate parziali

Accanto ai modelli retti da equazioni ordinarie e alle differenze, non si possono non menzionare, anche per una loro certa affinità con quanto già esposto, i modelli retti da equazioni differenziali alle derivate parziali.

In linea di principio, l'idea è semplice. Nel caso di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, la funzione incognita  $\mathbf{u}$  ha per immagine un vettore a  $n$  componenti. Per un vettore sono definite una operazione di somma e di moltiplicazione per uno scalare (cosicché, per esempio, è possibile formare il rapporto incrementale) e una operazione di passaggio al limite che consente di definire, quando esiste, la derivata rispetto al tempo.

Ora, delle operazioni di somma e prodotto per uno scalare sono definibili, in modo ovvio, anche per delle *funzioni*. Quello che è meno ovvio è l'operazione di passaggio al limite. Infatti, mentre nel caso di vettori ha un senso più o meno

univoco dire cosa significa che due vettori sono “vicini”, non è sempre chiaro (e in nessun caso univoco) cosa voglia dire che due funzioni sono “vicine”.

Senza voler entrare in un discorso generale, possiamo però esemplificare la situazione ricorrendo a un caso semplice, quello di una funzione scalare  $u$  dipendente da una variabile “spaziale”  $x$  e una variabile “temporale”  $t$ . Indichiamo con  $u(t, x)$  questa funzione. Osserviamo che per ogni  $t$ , la funzione  $x \mapsto u(t, x)$  è una funzione (della sola  $x$ ), esattamente come ci eravamo ripromessi di studiare. Indichiamo per un momento con  $u(t)$  questa funzione, “dimenticando” la dipendenza da  $x$ . Il rapporto incrementale di questa funzione è ovviamente

$$(8.1) \quad \frac{u(t+h) - u(t)}{h},$$

dove però non dobbiamo dimenticare che si tratta di una funzione di  $x$ , ossia, volendo essere pignoli, la funzione

$$x \mapsto \frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h} = R(t, x).$$

Come si può ora effettuare un “passaggio al limite per  $h \rightarrow 0$ ” nella formula (8.1) a una funzione  $u'(t)$  (sempre dipendente da  $x$ )? A questo punto la risposta non è chiara, in quanto esistono numerosi differenti modi di confrontare delle funzioni. Il più semplice di tutti è però probabilmente il seguente: considerare, *per ogni*  $x$ , il limite (se esiste) del rapporto incrementale  $R(t, x)$ , ossia la funzione

$$u'(t) : x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} R(t, x).$$

Questo significa che per ogni  $x$  si costruisce il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t, x+h) - u(t, x)}{h} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

che, come scritto, non è altro che la derivata parziale della funzione  $u$  di partenza rispetto a  $t$ . Dunque la generalizzazione del concetto di modello deterministico a funzioni, anziché quantità vettoriali, porta con sé il problema delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Accanto a queste equazioni, verranno prescritti dei “dati iniziali” sotto forma di una funzione nota  $u_0(x)$  di  $x$  tale che

$$u(0, x) = u_0(x).$$

A questo punto, da un punto di vista matematico, la strada da percorrere è perfettamente analoga a quella vista prima: si possono introdurre equazioni alle derivate parziali di ordine superiore, ridurle a sistemi del primo ordine, e così via. Si intende che il secondo membro dell'equazione potrà dipendere, oltre che dal tempo, anche dalla funzione incognita  $u$  e, come prima, dalle sue derivate, ma, ciò che invece è nuovo, anche parziali (rispetto a  $x$ ). Per esempio, un'equazione del primo ordine in forma normale sarà del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, t\right).$$

Inoltre, quindi, in generale la funzione incognita dipenderà da  $n$  variabili, oltre che dal tempo.

Chiaramente, anche per questi tipi di problemi si potranno definire semigruppì e processi, soltanto che essi agiranno non più da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$  ma fra opportuni spazi funzionali. Per esempio, per definire un semigruppò, basterà porre

$$S(t)u_0 = u(t),$$

(dove naturalmente  $u(t)$  è la soluzione del problema avente valore iniziale  $u_0$ ), con la differenza che  $u(t)$  e  $u_0$  non saranno vettori ma funzioni (per esempio di  $x$ ). In questo caso, però, potrebbe capitare che lo spazio funzionale che contiene il dato iniziale  $u_0$  non sia quello che contiene  $u(s)$  per un certo  $s$ : per esempio, se il dato iniziale è una funzione di classe  $C^2$ , potrebbe capitare, in certi problemi, che la soluzione in un dato istante sia solo di classe  $C^1$ . È chiaro allora che la proprietà di semigruppò perde di senso, in quanto  $S(s)u_0$  appartiene a uno spazio sul quale  $S(t)$  non è definito. Tuttavia, se ciò non succede, la proprietà di semigruppò continua ovviamente a valere.

Infine, l'equivalente delle posizioni di equilibrio è una funzione, non dipendente da  $t$ , soluzione del problema, per la quale quindi  $\partial u / \partial t = 0$ .

A dispetto di queste analogie va detto, anche solo dal punto di vista dell'esistenza e dell'unicità delle soluzioni, che la situazione è enormemente più difficile di quanto non lo sia per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Infatti i teoremi che garantiscono esistenza e unicìtà della soluzione di un problema ai valori iniziali richiedono ipotesi molto pesanti sulla forma del sistema, che spesso nelle applicazioni non si possono o non si vogliono fare, e la stessa cosa accade per i metodi numerici che consentono di trovare soluzioni approssimate. Per questo motivo ci occuperemo brevemente nel seguito di

alcune equazioni alle derivate parziali di tipo particolare, e precisamente del primo ordine quasilineari.

Numerosi sono i fenomeni che possono essere modellizzati con equazioni alle derivate parziali. I più importanti sono quelli che derivano dalla fisica dei mezzi continui. In un fluido, per esempio, l'incognita fondamentale è il campo di velocità delle particelle in ogni punto, che è una funzione variabile nel tempo, nella teoria dell'elasticità è invece lo spostamento in ogni punto rispetto a una configurazione fissa la funzione incognita, e così via. Ma anche in numerosi campi non strettamente connessi alla Fisica si fa uso di equazioni alle derivate parziali. Nel Calcolo delle Probabilità, per esempio, esistono problemi nei quali l'incognita è una distribuzione di probabilità (e dunque una funzione) variabile nel tempo, di grande uso nelle applicazioni in Economia. Più avanti vedremo alcuni semplici esempi tratti da varie discipline.

## 2.9. Equazioni del primo ordine quasilineari

Sebbene il nostro interesse sia più rivolto verso quei problemi nei quali la variabile temporale assume un ruolo particolare, la teoria delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine si tratta in modo più chiaro se le variabili non sono fra loro distinte. Per questo, in questo paragrafo enunciamo e dimostriamo i principali teoremi concernenti le soluzioni di queste equazioni nelle quali le variabili  $x_1, \dots, x_n$  sono generiche.

**DEFINIZIONE.** Sia  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione vettoriale di classe  $C^1$  non identicamente nulla in alcun punto e  $X_0 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^1$ . Diremo che una funzione  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è soluzione dell'equazione quasilineare del primo ordine di coefficiente  $\mathbf{X}$  e dato  $X_0$  se  $u$  è di classe  $C^1$  e se

$$\mathbf{X}(x, u(x)) \cdot \text{grad } u(x) = X_0(x, u(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

o, in componenti,

$$(9.1) \quad X_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + X_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = X_0(x, u).$$

Nel caso in cui  $\mathbf{X}$  non dipenda da  $u$  e  $X_0 \equiv 0$ , l'equazione si dice lineare omogenea. In questo caso si constata immediatamente che le soluzioni generano uno spazio vettoriale.

Introducendo il campo vettoriale

$$\mathbf{X}^* = (X_0, X_1, \dots, X_n)$$

e osservando che la normale alla ipersuperficie  $z - u(x) = 0$  ha direzione data da  $\mathbf{e}_0 - \text{grad } u$  si vede che l'equazione (9.1) si riscrive

$$\mathbf{X}^* \cdot \mathbf{n} = 0.$$

che mostra che la ipersuperficie cercata deve avere normale ortogonale in ogni punto al campo  $\mathbf{X}^*$  o, che è lo stesso, avere punto per punto piano tangente contenente il vettore  $\mathbf{X}^*$ .

Anche il caso lineare e omogeneo ammette una semplice interpretazione. Infatti l'equazione si scrive

$$\mathbf{X} \cdot \text{grad } u = 0$$

e quindi  $u$  è soluzione se e solo se le superfici  $u(x) = C$  sono, per ogni  $C$ , tangenti al campo vettoriale  $\mathbf{X}$ .

Per la soluzione dell'equazione (9.1) hanno quindi particolare importanza le curve integrali del campo vettoriale  $\mathbf{X}^*$ .

DEFINIZIONE. Posto  $\mathbf{x}^* = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ , chiameremo curve caratteristiche le curve parametrizzate da soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$(9.2) \quad \dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{X}^*.$$

Dal teorema di esistenza ed unicità per sistemi di equazioni differenziali ordinarie si ricava che per ogni punto dello spazio  $\mathbb{R}^{n+1}$  passa una e una sola curva caratteristica.

Scritto in componenti, il sistema (9.2) diviene

$$(9.3) \quad \begin{cases} \dot{x}_0 = X_0(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_1 = X_1(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = X_n(x_0, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Come apparirà presto chiaro, la condizione che  $u$  sia individuata dal grafico di una funzione introduce delle asimmetrie nel problema. Conviene infatti cercare  $u$  definita implicitamente da una equazione del tipo

$$F(u(x), x) = 0$$

e introdurre un'equazione per  $F$ , anziché per  $u$ , che si rivela essere più semplice della (9.1).

PROPOSIZIONE. Se  $u$  verifica l'equazione (9.1) e se è definita implicitamente da una relazione del tipo  $F(u, x) = 0$ , dove  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  è di classe  $C^1$ , allora, nei punti in cui  $\partial F / \partial x_0 \neq 0$ ,  $F$  verifica l'equazione omogenea

$$(9.4) \quad \mathbf{X}^* \cdot \text{grad } F = X_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Viceversa, se esiste  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $F(x_0, x) = x_0 - u(x)$  e  $F$  verifica la (9.4), allora  $u$  verifica la (9.1).

*Dimostrazione.* Dalla relazione  $F(u(x), x) = 0$  si ricava, derivando rispetto a  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Nei punti in cui  $\partial F / \partial x_0 \neq 0$  si ricava allora

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{\partial F}{\partial x_i} / \frac{\partial F}{\partial x_0}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

da cui, sostituendo nell'equazione (9.1), si trova subito la (9.4). La restante parte della dimostrazione è semplice, infatti se  $F(x_0, x) = x_0 - u(x)$ , allora evidentemente

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = - \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

per cui  $F$  verifica la (9.1). ■

OSSERVAZIONE. Osserviamo che il teorema non asserisce che l'equazione non omogenea e quella omogenea hanno le stesse soluzioni. Infatti è possibile che una relazione  $G(x, u(x)) = 0$  sia soddisfatta da una funzione  $u$ , soluzione dell'equazione (9.1), senza che  $G$  verifichi la (9.4). Tali soluzioni, se esistono, si dicono *speciali*. Si può dimostrare (si veda [1]) che le soluzioni speciali sono “poche”, nel senso che non possono formare una famiglia infinita dipendente da un parametro reale (ricordiamo che le soluzioni della (9.1) dipendono in generale da una *funzione* arbitraria). Nel seguito non considereremo queste soluzioni.

Il passo successivo è quello di formulare in termini geometrici il problema di trovare  $F$  verificante la (9.4).

DEFINIZIONE. Sia  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  una ipersuperficie regolare. Diremo che  $\mathcal{S}$  è generata da caratteristiche di un'equazione quasilineare del primo ordine se per ogni punto di  $\mathcal{S}$  passa una e una sola curva caratteristica dell'equazione, tutta contenuta in  $\mathcal{S}$ .

(9.5) TEOREMA. Data una equazione alle derivate parziali quasilineare del primo ordine omogenea

$$\mathbf{X}^* \cdot \text{grad } F = 0,$$

si ha che  $F$  di classe  $C^1$  ne è soluzione se e solo se la superficie  $\mathcal{S}$  di equazione  $F(x_0, x) = 0$  è generata da curve caratteristiche.

*Dimostrazione.* Presa per  $P \in \mathcal{S}$  la caratteristica  $\gamma$ , si ha che, poiché  $\gamma \in \mathcal{S}$ , il vettore  $\mathbf{t}$  tangente ad essa è anche tangente ad  $\mathcal{S}$ . Ma questo vettore ha componenti proporzionali a

$$(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = \dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{X}^*.$$

Ora, la normale  $\mathbf{n}$  a  $\mathcal{S}$  ha la direzione di  $\text{grad } F$  e quindi, essendo  $\mathbf{t}$  perpendicolare a  $\mathbf{n}$ ,

$$0 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{X}^*(x_0, x) \cdot \text{grad } F(x_0, x).$$

Viceversa, se  $F$  è soluzione dell'equazione (9.4), allora, per ogni  $P \in \mathcal{S}$  sia  $\gamma$  la caratteristica per  $P$  tale che  $P = \gamma(t_0)$  e sia

$$U(t) = F(x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) = F(\mathbf{x}^*(t)).$$

Derivando si ha

$$\frac{dU}{dt} = \text{grad } F \cdot \dot{\mathbf{x}}^* = \text{grad } F(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{X}^*(\mathbf{x}^*) = (\text{grad } F \cdot \mathbf{X}^*)|_{F^{-1}(U)}.$$

Ricordando che  $F$  è soluzione dell'equazione (9.4) (e quindi di classe  $C^1$ ) e che  $U(t_0) = 0$ , ne segue che  $U \equiv 0$  è l'unica possibile soluzione dell'equazione precedente, e questo dice proprio che  $F(x_0, x) = 0$ , ossia  $\gamma \in \mathcal{S}$ . ■

Per esempio, se le curve caratteristiche sono rette parallele, allora ogni ipersuperficie cilindrica che le ammette come generatrici rappresenterà una soluzione dell'equazione.

Il teorema che segue permetterà di risolvere in modo concreto numerose equazioni alle derivate parziali. Ricordiamo innanzitutto che, per il teorema

di inversione locale, data una funzione  $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  in un intorno di  $x \in \mathbb{R}^m$ , la condizione che la matrice jacobiana  $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}}\right)$  non sia di rango massimo è necessaria e sufficiente affinché esista una relazione funzionale  $\mathbf{G}(\psi_1, \dots, \psi_n) = 0$  tra le variabili in un intorno di  $\psi(x)$ .

Ciò premesso, dimostriamo il seguente risultato.

(9.6) TEOREMA. *Sia  $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un integrale primo vettoriale del sistema caratteristico  $\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{X}^*$  tale che la matrice jacobiana  $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}^*}\right)$  sia a rango pieno. Allora sono soluzioni dell'equazione quasilineare omogenea*

$$\mathbf{X}^* \cdot \text{grad } F = 0$$

tutte e sole le funzioni definite da

$$F = (\Phi \circ \psi)(x_0, x_1, \dots, x_n) = \Phi(\psi_1(x_0, x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(x_0, x_1, \dots, x_n))$$

essendo  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione arbitraria di classe  $C^1$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo preliminarmente che se  $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione costante sulle caratteristiche dell'equazione (9.4), allora  $F = \varphi$  è soluzione di (9.4); infatti se  $\varphi(\mathbf{x}^*(t)) = C$ , dove  $\mathbf{x}^*$  è la rappresentazione parametrica di una caratteristica, si ha

$$0 = \frac{d}{dt}(\varphi(\mathbf{x}^*(t))) = \text{grad } \varphi \cdot \dot{\mathbf{x}}^* = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{X}^* = 0.$$

Ora, se  $\Phi$  è una arbitraria funzione  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , essendo per definizione di integrale primo ogni  $\psi_i$  costante sulle caratteristiche dell'equazione, si ha che anche  $\Phi \circ \psi$ , sarà un integrale primo, essendo costante sulle caratteristiche, dunque soluzione dell'equazione (9.4).

Viceversa, sia  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  una soluzione di (9.4). Poiché ogni  $\psi_i$  è costante sulle caratteristiche, per quanto appena visto si ha

$$\text{grad } \psi_i \cdot \mathbf{X}^* = 0$$

e, dal momento che  $F$  è soluzione dell'equazione,

$$\text{grad } F \cdot \mathbf{X}^* = 0.$$

Le due ultime relazioni scritte si possono interpretare dicendo che il vettore  $\bar{\psi} = (F, \psi)$  verifica la relazione vettoriale

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{x}^*} \end{pmatrix} \mathbf{X}^* = \mathbf{0},$$

da cui discende, essendo questo un sistema lineare omogeneo nelle  $X_i^*$  non avente per ipotesi in alcun punto la sola soluzione nulla, che

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{x}^*} \end{pmatrix} = 0.$$

Dunque esiste una funzione  $\Lambda : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\Lambda(\bar{\psi}) = \Lambda(F, \psi_1, \dots, \psi_n) = 0$$

Essendo però le  $\psi_i$  funzionalmente indipendenti, deve esistere una relazione funzionale  $F = \Phi(\psi)$  fra  $F$  e  $\psi$ . ■

Pertanto, una volta trovata  $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , sarà possibile, almeno localmente, ricavare  $u(x_1, \dots, x_n)$  dalla relazione

$$F(u(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) = 0.$$

## 2.10. Problemi ai valori iniziali

Grazie ai teoremi precedenti è possibile risolvere in modo soddisfacente l'importantissimo *problema di Cauchy*, che, in termini geometrici, consiste nel trovare la funzione  $u$  tale che la superficie  $\mathcal{S}$  di equazione  $z = u(x)$  passi per una curva  $c$  data. Il contesto in cui la  $u$  è una funzione, però, si rivela qui restrittivo, in quanto è possibile che una superficie definita da una relazione verifichi l'equazione  $\mathbf{X}^* \cdot \mathbf{n} = 0$ , come è pure possibile che la curva di cui parla il problema di Cauchy non sia rappresentabile come restrizione di una funzione  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Chiaramente i risultati che andremo ad enunciare sono validi anche nel sottocaso in cui la superficie  $\mathcal{S}$  sia grafico di una funzione e la curva  $c$  sia sezione di una tale superficie.

Il teorema (9.5) implica il seguente risultato:

TEOREMA. *Sia  $c$  una curva di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Se  $c$  è non tangente in alcun punto ad una curva caratteristica per l'equazione*

$$\mathbf{X} \cdot \text{grad } u = X_0,$$

*allora esiste una ed una sola superficie  $\mathcal{S}$ , soluzione dell'equazione e passante per  $c$ , definita in un opportuno intorno di  $c$ .*

*Dimostrazione.* Per ogni punto  $P$  di  $c$  consideriamo la caratteristica  $\gamma$  passante per  $P$ , parametrizzata in modo che  $\gamma(0) = P$ ; poiché essa è non tangente a  $c$ , deve esistere  $\delta > 0$  tale che  $c \cap \gamma([0, \delta]) = \emptyset$ . Pur di prendere  $\delta$  abbastanza piccolo, è possibile ripetere questo ragionamento per ogni  $P$  e trovare così una superficie di classe  $C^1$  passante per  $c$ . Poiché questa superficie è chiaramente unione di caratteristiche, essa è anche soluzione dell'equazione per il teorema (9.5). ■

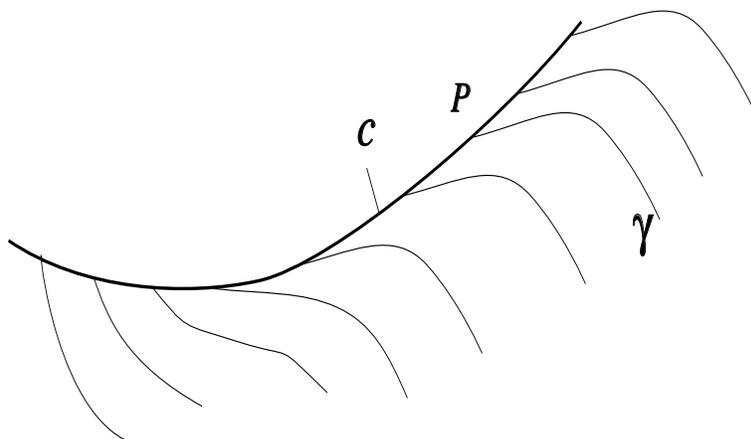


FIGURA 13

*Costruzione della soluzione per mezzo di caratteristiche.*

La restrizione che  $c$  non sia tangente in alcun punto ad una caratteristica può in effetti essere indebolita; quello che conta è che  $c$  non sia tangente in “troppi” punti ad una caratteristica, per evitare che le caratteristiche uscenti dai punti di  $c$  non riescano a generare una superficie.

In pratica, si può procedere in due differenti modi. Il primo consiste nell'individuare quelle relazioni  $\Phi$  che soddisfano identicamente la curva  $c$  data come intersezione di superfici. Sia quindi  $c$  data da



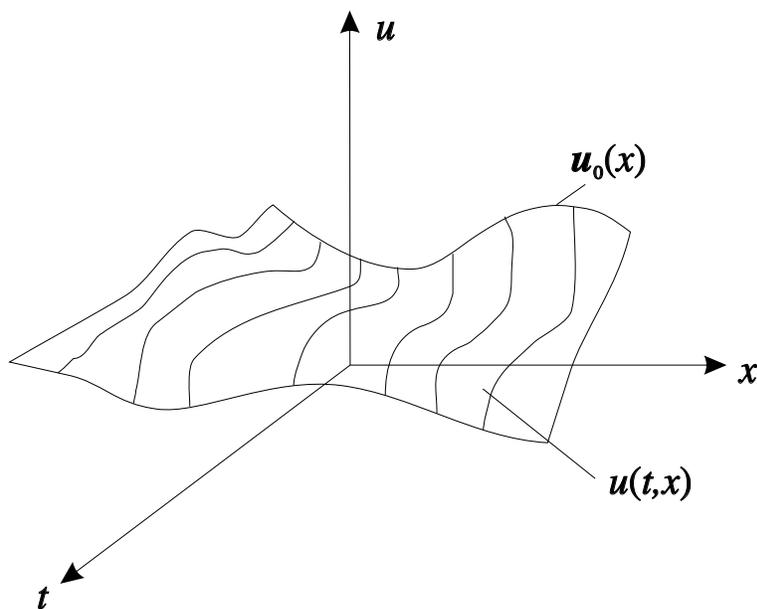


FIGURA 14

*Soluzione del problema ai valori iniziali.*

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, i problemi di maggior interesse sono quelli in forma normale, cioè dove la derivata temporale si può ricavare dall'equazione. Nel caso in esame, questo si riduce a porre  $x_1 = t$  e  $X_1 \equiv 1$ . Pertanto abbiamo un'equazione della forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + X_2(t, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(t, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = X_0(t, x, u)$$

La possibilità di ricavare la derivata temporale permette una semplificazione rispetto al caso generale. Infatti il sistema caratteristico si scrive

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = X_0(x_0, t, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{t} = 1 \\ \dot{x}_2 = X_2(t, x_2, \dots, x_n, z) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = X_n(t, x_2, \dots, x_n, z) \end{cases}$$

e nel quale va inteso che il punto indica la derivazione rispetto a un parametro  $s$ . Dalla prima equazione, però, possiamo pensare che la derivazione sia fatta

rispetto a  $t$ , in quanto per  $k = 0, 2, \dots, n$

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{ds} = \frac{dx_k}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dx_k}{dt} \dot{t} = \frac{dx_k}{dt}.$$

Quindi la seconda equazione diventa automaticamente verificata e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = X_0(x_0, t, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = X_2(x_0, t, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = X_n(x_0, t, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

che è un sistema di equazioni differenziali ordinarie non autonomo in  $n - 1$  incognite. Ammesso di averlo risolto, e trovato le funzioni

$$x_0 = f_0(t), \quad x_2 = f_2(t), \dots, \quad x_n = f_n(t),$$

esse saranno gli integrali primi cercati, dopodiché la soluzione  $u$  verificherà, grazie al teorema (9.6) una relazione del tipo

$$\Phi(u - f_0(t), x_2 - f_2(t), \dots, x_n - f_n(t)) = 0.$$

## 2.11. Applicazioni di equazioni a derivate parziali del primo ordine

Concludiamo il discorso sulle equazioni quasilineari con un esempio di una certa generalità: il caso quasilineare omogeneo in cui i coefficienti dipendono solo da  $u$  (che tratteremo sempre, per semplicità, in due variabili indipendenti).

L'equazione è dunque

$$a(u) \frac{\partial u}{\partial t} + b(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Il sistema caratteristico è

$$\begin{cases} \dot{t} = a(z) \\ \dot{x} = b(z) \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

che ammette evidentemente l'integrale primo  $\psi_1^*(z) = z$ . Moltiplicando poi la prima equazione per  $b$  e la seconda per  $a$  e ricordando che  $z$  è costante, si trova subito

$$\psi_2^* = a(z)x - b(z)t.$$

Con facili passaggi si vede anche che la matrice jacobiana  $\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{x}^*}\right)$  è di rango massimo se  $a(u) \neq 0$ . In questa ipotesi, e poiché  $z$  è costante, possiamo anche porre

$$\psi_2^* = x - \frac{b(z)}{a(z)}t.$$

Pertanto la soluzione generale dell'equazione si ricava dalla relazione implicita

$$\Phi\left(x - \frac{b(u)}{a(u)}t, u\right) = 0.$$

Nel caso esplicito poniamo  $\Phi(\xi, \eta) = \varphi(\xi) - \eta$ , ossia

$$u = \varphi\left(x - \frac{b(u)}{a(u)}t\right).$$

Supponiamo ora che sia assegnato il dato iniziale

$$u(x, 0) = f(x).$$

Dalla relazione precedente troviamo allora immediatamente  $\varphi(\xi) = f(\xi)$ , per cui la soluzione finale è data da

$$(11.1) \quad u = f\left(x - \frac{b(u)}{a(u)}t\right).$$

Rientra in questa classe un esempio di interesse fisico, la cosiddetta *equazione di Burgers*

$$(11.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Essa costituisce il modello del moto unidimensionale per inerzia di un fluido perfetto comprimibile. Assieme alla (11.2), si prescrive il campo di velocità iniziale  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

Da quanto detto precedentemente questo problema ha per soluzione la funzione definita implicitamente da

$$(11.3) \quad u(x, t) = u_0(x - u(x, t)t).$$

Benché non possiamo ricavare da questa relazione un'espressione per  $u$ , è possibile fare alcune interessanti considerazioni. Derivando la (11.3) rispetto ad  $x$  si trova, con facili passaggi,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u'_0}{1 + u'_0 t}$$

Quindi, se esiste  $\bar{x}$  con  $u'_0(\bar{x}) < 0$ , allora la derivata di  $u$  rispetto ad  $x$  diverge se  $t$  tende al valore positivo

$$\tau_1 = \frac{-1}{u'_0(\bar{x})}.$$

Questo fatto ha una semplice interpretazione fisica. La condizione  $u'_0(\bar{x}) < 0$  implica che esiste una regione di spazio in cui la velocità delle particelle del fluido, all'istante iniziale, decresce muovendosi nella direzione di movimento. Poiché il moto avviene per inerzia e non vi sono attriti, le particelle retrostanti finiranno col raggiungere quelle più lente antistanti, creando un profilo di velocità sempre più ripido.

Anche dal punto di vista geometrico questo fatto è semplicemente interpretabile. Consideriamo le proiezioni delle caratteristiche sul piano  $(x, t)$ . Esse sono delle rette di equazioni  $x - x_0 = u_0(x_0)t$ , come si verifica facilmente. Considerati  $x_1$  e  $x_2 \in \mathbb{R}$ , le corrispondenti caratteristiche si incontreranno all'istante

$$\tau_2 = -\frac{x_2 - x_1}{u_0(x_2) - u_0(x_1)}.$$

Ma sappiamo che su una caratteristica la soluzione  $u$  è costante, per cui all'istante  $\tau_2$  essa dovrebbe assumere i valori distinti  $u_0(x_1)$  e  $u_0(x_2)$ , il che è impossibile. L'istante  $\tau_1$  è il limite di  $\tau_2$  quando i punti sono "infinitamente vicini". Chiaramente l'istante  $\tau_2$  sarà positivo se e solo se la funzione  $u_0$  è localmente decrescente.

Il secondo esempio si applica ai flussi di traffico. Essi vengono modellizzati con un fluido comprimibile continuo costretto a muoversi in una direzione. Le incognite del problema sono la velocità locale  $q$  del flusso, dipendente

dalla posizione  $x$  e dal tempo  $t$ , e la densità locale di traffico  $\rho$ , dipendente dalle stesse variabili. Poiché si suppone che non vi siano afflussi o efflussi di traffico, la variazione di densità è legata alla velocità da una relazione del tipo dell'equazione di continuità per un fluido, ossia

$$(11.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Accanto a questa si aggiunge una relazione che lega la velocità del flusso alla densità di traffico della forma

$$q = g(\rho).$$

In generale si prende  $g$  della forma

$$(11.5) \quad g(\rho) = c\rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

dove  $c$  e  $\rho_0$  sono due costanti dette rispettivamente *libera velocità media* e *densità massima consentita*. Sostituendo la (11.5) nella (11.4) e ponendo  $d = \rho/\rho_0$  giungiamo all'equazione

$$\frac{\partial d}{\partial t} + c(1 - 2d) \frac{\partial d}{\partial x} = 0$$

che rientra nel tipo studiato sopra con  $a(u) = 1, b(u) = c(1 - 2u)$ . Dunque, assegnate le condizioni iniziali

$$d(x, 0) = d_0(x),$$

per la (11.1), si deve avere

$$d(x, t) = d_0(x - ct(1 - 2d(x, t))).$$

Derivando questa relazione si trova, analogamente a quanto visto prima, il tempo massimo di esistenza della soluzione classica

$$t_{\max} = \frac{1}{2cd'_0(\bar{x})} \quad \text{se esiste } \bar{x} \text{ tale che } d'_0(\bar{x}) > 0.$$

Un terzo esempio proviene dalla Meccanica Statistica, e più precisamente è legato alla cosiddetta *equazione di Boltzmann*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f + \frac{\mathbf{F}(x, \mathbf{v}, t)}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = Q(f, f)$$

nella quale l'incognita  $f$  è la distribuzione di probabilità delle particelle di un gas, dipendente dalla posizione  $x$ , dalla velocità  $\mathbf{v}$  e dal tempo, mentre  $\mathbf{F}$  è un campo esterno,  $m$  è una costante e  $Q$  è una funzione, detta *operatore di collisione*, che dipende dallo stato del gas. L'esempio in questione si ottiene per  $Q = 0$ , che può corrispondere al gas rarefatto, nel caso bidimensionale stazionario, con

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{v}) = \frac{e}{c}(v_y \eta'(x) - \varphi'(x))\mathbf{e}_1 - \frac{e}{c}v_x \eta'(x)\mathbf{e}_2 \quad (e, c = \text{cost.})$$

( $\eta$  e  $\varphi$  sono funzioni note) e nel quale infine si trascurano i termini contenenti  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $v_y$  nel termine  $\mathbf{v} \cdot \text{grad } f$ . L'equazione che ne risulta è

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{mc}(v_y \eta'(x) - \varphi'(x)) \frac{\partial f}{\partial v_x} - \frac{e}{mc}v_x \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial v_y} = 0$$

ed è detta *equazione di Longmire*.

Il sistema caratteristico ad essa associato è quindi

$$\begin{cases} \dot{x} = mv_x \\ \dot{v}_x = \frac{e}{c}(v_y \eta'(x) - \varphi'(x)) \\ \dot{v}_y = -\frac{e}{c}v_x \eta'(x). \end{cases}$$

Poiché

$$m\dot{v}_y + \frac{e}{c}\eta'(x)\dot{x} = \frac{d}{dt} \left( mv_y + \frac{e}{c}\eta(x) \right)$$

dalla prima e dalla terza relazione si trova

$$mv_y + \frac{e}{c}\eta(x) = \text{cost.}$$

per cui un primo integrale primo è

$$\psi_1(x, v_x, v_y) = mv_y + \frac{e}{c}\eta(x).$$

Moltiplicando la seconda relazione per  $v_x$ , la terza per  $v_y$  e sommando le due relazioni si trova invece

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{e}{c} \varphi(x) \right) = 0$$

da cui segue il secondo integrale primo

$$\psi_2(x, v_x, v_y) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{e}{c} \varphi(x)$$

che è l'energia di una particella di massa  $m$  e carica  $e$  sottoposta all'azione del campo di potenziale  $-\varphi(x)$ . Dunque, essendo stavolta l'equazione a coefficienti indipendenti dall'incognita, la sua soluzione si può scrivere esplicitamente

$$f(x, \mathbf{v}) = \Phi \left( mv_y + \frac{e}{c}\eta(x), \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{e}{c} \varphi(x) \right)$$

dove  $\Phi$  è una funzione arbitraria di classe  $C^1$ .

## 2.12. Equazioni differenziali lineari alle differenze

Un ultimo esempio di modellizzazione mediante strumenti di tipo deterministico sono le equazioni differenziali alle differenze. In questi problemi si hanno infinite funzioni incognite scalari  $u_n(t)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) e si specifica una relazione ricorsiva del tipo

$$u'_n(t) = F(u_n(t), u_{n-1}(t))$$

assieme a una “equazione iniziale” della forma

$$u'_0(t) = f(u_0(t), t)$$

e delle condizioni iniziali della forma

$$u_n(0) = u_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Intuitivamente, la relazione differenziale di tipo ricorsivo permette di calcolare, partendo dall'equazione iniziale e usando le condizioni iniziali, tutte le funzioni fino ad  $u_n(t)$ . Questi modelli sono frequenti nella teoria dei processi stocastici.

Ci occuperemo in particolare di equazioni lineari, nelle quali cioè la dipendenza da  $u_n$  e  $u_{n-1}$  è di primo grado in questi argomenti. Per queste equazioni esiste un metodo di soluzione che passa attraverso una funzione di due variabili che soddisfa una equazione quasilineare del primo ordine a derivate parziali, detta *funzione generatrice*. Per semplicità, affrontiamo un caso concreto del tipo

$$\begin{cases} u'_n(t) = a u_n(t) + b u_{n-1}(t) \\ u'_0(t) = a u_0(t) \\ u_n(0) = u_n \end{cases}$$

dove  $a, b \in \mathbb{R}$ . Supponiamo allora esista una funzione del tipo

$$G(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) s^n$$

nel senso che la serie sia uniformemente convergente in un opportuno intervallo di  $s$ . Poiché, se esistono, le funzioni  $u_n$  sono derivabili, per il teorema di derivazione per serie si ha che  $G$  è derivabile e che

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(t) s^n = u'_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) s^n = a u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) s^n$$

per cui, sostituendo dall'equazione troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= a u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [a u_n(t) + b u_{n-1}(t)] s^n = a \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) s^n + \\ &+ b \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1}(t) s^n = a \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) s^n + b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) s^{n+1}. \end{aligned}$$

Ma poiché

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) s^n = G(t, s)$$

troviamo l'equazione

$$\frac{\partial G}{\partial t} = aG + bsG$$

che è un'equazione quasilineare del primo ordine alle derivate parziali.

Vediamo ora le condizioni iniziali. Ponendo  $t = 0$  nella definizione di  $G$ , troviamo

$$G(0, s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0)s^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n = g(s)$$

dove  $g(s)$  è un'opportuna funzione (qui si intende che la successione  $(u_n)$  deve essere tale che la precedente serie sia convergente in un intervallo di ampiezza positiva). In definitiva troviamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} - (a + bs)G = 0 \\ G(0, s) = g(s). \end{cases}$$

Non è difficile vedere che la soluzione di questo problema è data da

$$G(t, s) = g(s)e^{(a+bs)t}.$$

Infine, sempre dalla definizione di  $G$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)s^n = G(t, s),$$

troviamo

$$u_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n G(t, s)}{\partial s^n} (t, 0)$$

(che giustifica il nome di “funzione generatrice”). Derivando l'espressione trovata di  $G$  si ricavano le funzioni cercate.

Per esempio, se  $u_0 = 1, u_k = 0$  per  $k \geq 1$ , abbiamo  $g(s) = 1$  e

$$G(t, s) = e^{at} e^{tbs}$$

per cui

$$u_n(t) = \frac{1}{n!} e^{at} (bt)^n e^{tbs}|_{s=0} = \frac{b^n}{n!} t^n e^{at}.$$

Lo stesso procedimento funziona se, al posto delle costanti  $a$  e  $b$ , si hanno delle funzioni note di  $t$  e anche se l'equazione differenziale alle differenze dipende da  $u_{n+1}, \dots, u_{n+k}$  e  $u_{n-2}, \dots, u_{n-h}$ , purché in modo lineare.