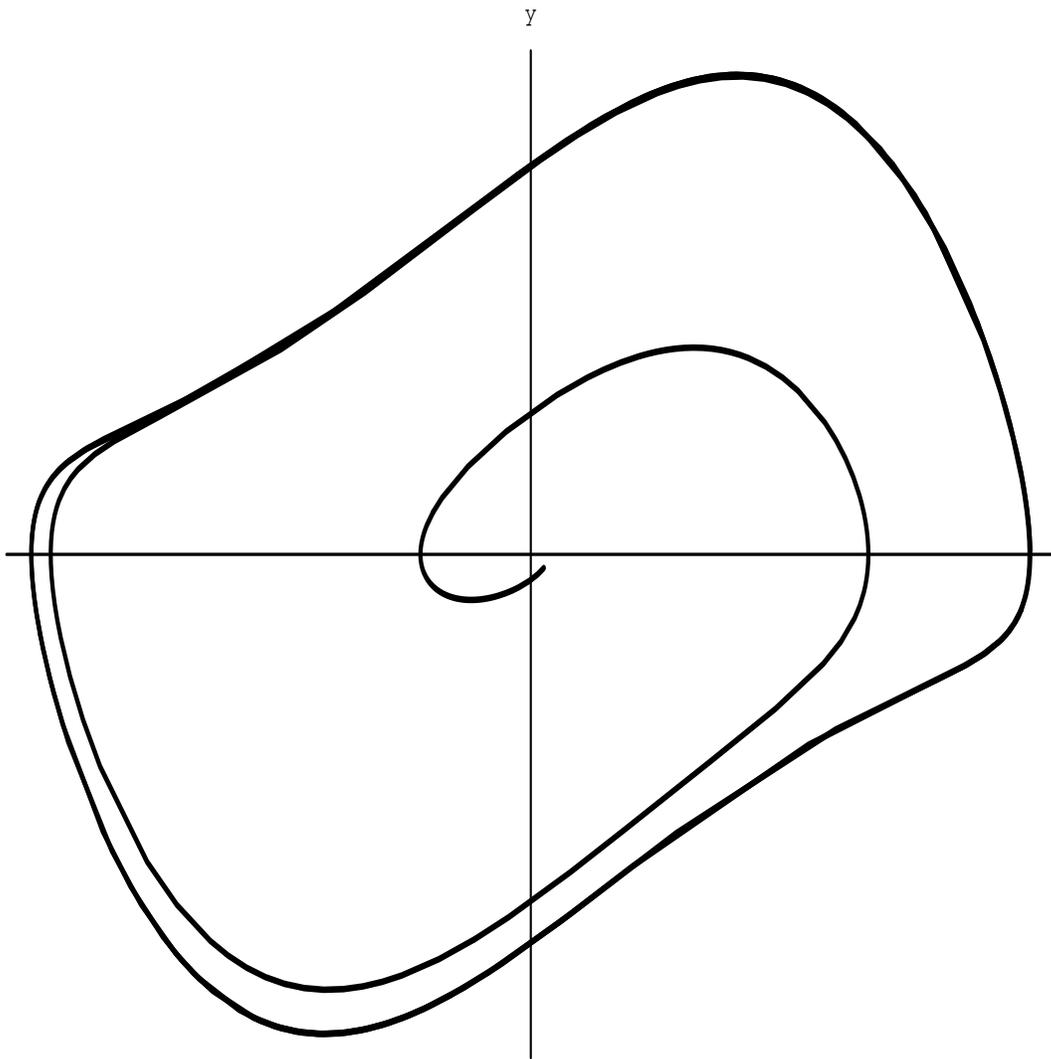


ALFREDO MARZOCCHI

METODI MATEMATICI  
PER  
MODELLI DETERMINISTICI



Cartolibreria *Snoopy*

Autore: Alfredo Marzocchi

Casa Editrice

Copyright 1999 Cartolibreria Snoopy s.n.c. - via Bligny, 27, 25133 Brescia

Tel. e fax 0302006331

E-mail [cartolibrieriasnoopy@numerica.it](mailto:cartolibrieriasnoopy@numerica.it)

Prima edizione: anno 1999

Finito di stampare nel mese di febbraio 1999

È vietata la riproduzione, anche parziale,  
con qualsiasi mezzo effettuata, compresa la fotocopia,  
anche a uso didattico,  
se non autorizzata da parte dell'editore e autori.

## CAPITOLO TERZO

# Teoria della stabilità

In questo capitolo esaminiamo un metodo matematico di grande importanza per la validazione dei modelli: la teoria della stabilità. In molti casi, infatti, la modellizzazione matematica prevede l'esistenza di particolari soluzioni che, nella pratica, è impossibile osservare. Ciò, però, non è dovuto a una carenza del modello, ma al fatto che la soluzione data è in qualche senso instabile, e che, poiché le condizioni reali del sistema non sono mai conosciute con precisione assoluta, l'evoluzione del tempo delle soluzioni si discosta molto dal dato previsto matematicamente.

La teoria che esponiamo è applicata essenzialmente al caso delle soluzioni di sistemi di equazioni differenziali ordinarie, che, come abbiamo visto, costituiscono uno degli strumenti matematici più usati nella modellizzazione dei fenomeni deterministici. Tuttavia, molto di ciò che verrà enunciato e dimostrato nel seguito vale semplicemente come conseguenza e nel caso più generale delle proprietà di semigruppato e di processo, quindi anche nel caso, per esempio, di equazioni alle differenze o equazioni evolutive alle derivate parziali, fatte le dovute modifiche. Nel seguito avremo comunque modo di puntualizzare eventuali differenze sostanziali fra le trattazioni.

### 3.1. Stabilità dell'equilibrio

Iniziamo con la definizione di stabilità per una posizione di equilibrio di un sistema di equazioni differenziali, del primo e del secondo ordine.

(1.1) DEFINIZIONE. *Una soluzione  $\bar{\mathbf{u}}$  di equilibrio di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine si dice stabile (secondo LJAPUNOV) se per ogni intorno  $V$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  esiste un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che*

$$\mathbf{u}_0 \in U \implies \forall t \geq t_0 : \mathbf{u}(t) \in V.$$

Per un sistema del secondo ordine, la definizione si modifica come segue.

DEFINIZIONE. Una soluzione  $\bar{u}$  di equilibrio di un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine si dice stabile (secondo LJAPUNOV) se per ogni intorno  $V$  di  $(\bar{u}, 0)$  esiste un intorno  $U$  di  $(\bar{u}, 0)$  tale che

$$(\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0) \in U \implies \forall t \geq t_0 : (\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \in V.$$

In ogni caso, diremo che  $\bar{u}$  è *instabile*, se non è stabile.

Da un punto di vista grafico, la stabilità significa che è possibile, a patto di prendere i dati iniziali abbastanza vicini a  $\bar{u}$ , restringere l'orbita in un arbitrario intorno di  $\bar{u}$  o, il che è equivalente, far stare tutta la traiettoria in un cilindro arbitrariamente sottile.

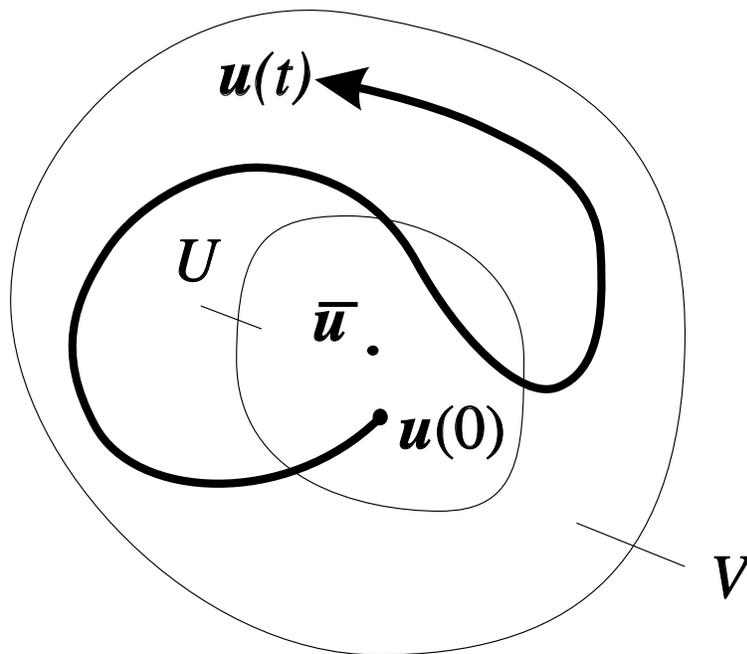


FIGURA 15

*Stabilità dell'equilibrio nello spazio degli stati.*

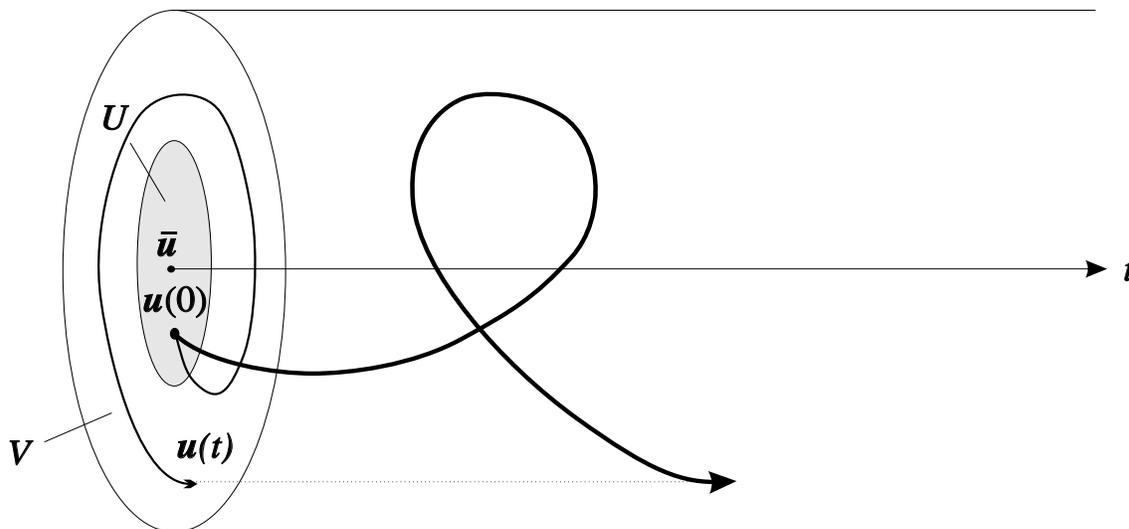


FIGURA 16

*Stabilità dell'equilibrio nello spazio esteso delle fasi.*

Chiaramente, per ottenere la definizione generale di stabilità applicata a un semigrupp, basterà sostituire la scrittura  $\mathbf{u}(t)$  (o  $(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t))$ ) con  $S(t)\mathbf{u}_0$  (o  $S(t)(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t))$ ).

Un primo problema che si pone nelle applicazioni consiste nell'individuare gli intorno di una posizione di equilibrio. A questo proposito richiamiamo brevemente alcune definizioni e risultati di Analisi.

DEFINIZIONE. *Sia  $X$  uno spazio vettoriale. Una funzione  $n : X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che*

- i)  $\forall x \in X : n(x) \geq 0$ ;*
- ii)  $n(x) = 0$  se e solo se  $x = 0$ ;*
- iii)  $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R} : n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$ ;*
- iv)  $\forall x, y \in X : n(x + y) \leq n(x) + n(y)$*

*si dirà norma su  $X$  e  $X$  si dirà spazio normato.*

D'ora in poi useremo la notazione più comune  $n(x) = \|x\|$ .

Nel caso di sistemi a valori in  $\mathbb{R}^n$ , come quelli di equazioni differenziali ordinarie, vale allora il seguente risultato.

(1.2) PROPOSIZIONE. *Sia  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Un insieme  $U$  è un intorno di  $\mathbf{x}$  se e solo se esistono una norma su  $\mathbb{R}^n$  e un numero  $r > 0$  tali che*

$$\{\mathbf{y} : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\} \subseteq U.$$

Quindi il problema è scaricato sulla ricerca di una norma in  $\mathbb{R}^n$ . Si può però osservare facilmente che le funzioni

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

verificano le proprietà delle norme e vengono dette, rispettivamente, *norma euclidea* (è la consueta lunghezza di un vettore), e *norma del sup*, comoda in certi calcoli. Gli intorni che queste norme generano sono tutti i sottoinsiemi che contengono rispettivamente un'ipersfera (un cerchio nel caso della dimensione 2) di raggio  $r$  e un ipercubo (un quadrato nel caso della dimensione 2) di semilato  $r$ . È inoltre chiaro che dati comunque  $n$  numeri  $a_1, \dots, a_n > 0$ , anche la funzione

$$\|x\| = a_1 |x_1| + \dots + a_n |x_n|$$

definisce una norma.

Un risultato meno evidente, ma pure utile, è il seguente.

(1.3) PROPOSIZIONE. *Sia  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trasformazione lineare. Allora la funzione*

$$\|x\|_A = \mathbf{A} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

*(detta forma quadratica associata ad  $A$ ) è una norma se e solo se la matrice  $A$  della forma quadratica è definita positiva.*

La dimostrazione di questo fatto si può trovare in un testo di Algebra lineare. Ne segue, come corollario, che in dimensione due, la funzione definita da

$$\|(x, y)\| = ax^2 + bxy + cy^2$$

è una norma se e solo se  $b^2 - 4ac < 0$ .

Nel seguito abbrevieremo con  $\|x\|$  la norma euclidea  $\|x\|_2$ .

Nel caso di modelli retti da equazioni a derivate parziali, invece, non vale una caratterizzazione degli intorni del tipo dato dalla proposizione (1.2). Infatti in quel caso norme diverse possono indurre intorni diversi, e quindi la

nozione di stabilità dipende dalla norma scelta per lo spazio di funzioni in questione.

Grazie ai risultati or ora richiamati, risulta facile dimostrare il seguente criterio di verifica della stabilità.

**PROPOSIZIONE.** *Una posizione di equilibrio  $\bar{\mathbf{u}}$  di un sistema di equazioni differenziali ordinarie è stabile se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che, se*

$$(1.4) \quad \|\mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{u}}\| < \delta \implies \forall t \geq t_0 : \quad \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| < \varepsilon$$

per una qualsiasi norma in  $\mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.* Fissiamo una qualsiasi norma in  $\mathbb{R}^n$  e supponiamo  $\bar{\mathbf{u}}$  stabile e sia  $\varepsilon > 0$ . Per la proposizione (1.2), l'insieme

$$V = \{\mathbf{v} : \|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}\| < \varepsilon\}$$

è un intorno di  $\bar{\mathbf{u}}$ . Quindi esiste un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che, se  $\mathbf{u}_0 \in U$ , allora per ogni  $t \geq t_0$  si ha  $\mathbf{u}(t) \in V$ , ossia

$$\|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| < \varepsilon.$$

Ma, sempre per la proposizione (1.2), esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\{\mathbf{v} : \|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}\| < \delta\} \subseteq U,$$

per cui se

$$\|\mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{u}}\| < \delta,$$

allora  $\mathbf{u}(t) \in V$ , cioè la (1.4).

Viceversa, ammessa la (1.4), sia  $V$  un qualsiasi intorno di  $\bar{\mathbf{u}}$ . Sempre per la proposizione (1.2), esiste  $\varepsilon > 0$  tale che

$$\{\mathbf{v} : \|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}\| < \varepsilon\} \subseteq V.$$

Pertanto esiste, in corrispondenza di  $\varepsilon$ , un numero  $\delta > 0$  tale che, se si ha che  $\|\mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{u}}\| < \delta$ , allora

$$\forall t \geq t_0 : \quad \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| < \varepsilon$$

e dunque  $\mathbf{u}(t) \in V$ . Ma poiché

$$U = \{\mathbf{v} : \|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}\| < \delta\}$$

è un intorno di  $\bar{\mathbf{u}}$ , si ha che  $\bar{\mathbf{u}}$  è stabile. ■

L'estensione al caso di sistemi del secondo ordine è ovvia.

Il precedente risultato è utile quando si debba controllare la stabilità mediante la definizione.

(1.5) ESEMPIO. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

e la sua posizione di equilibrio  $(0, 0)$ . Essa è stabile. Infatti sappiamo che la soluzione del problema ai valori iniziali associato, in cui si specificano i dati  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$  è

$$(x(t), y(t)) = (y_0 \sin t + x_0 \cos t, y_0 \cos t - x_0 \sin t).$$

Osserviamo che dalle precedenti espressioni segue

$$x^2(t) + y^2(t) = x_0^2 + y_0^2$$

cioè che  $x^2 + y^2$  è un integrale primo del moto. Pertanto, fissato  $\varepsilon > 0$ , poniamo  $\delta = \varepsilon$ . Si avrà che, posto  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$\|x_0^2 + y_0^2\| < \delta \implies \|x^2(t) + y^2(t)\| = \|x_0^2 + y_0^2\| < \varepsilon$$

che è equivalente alla definizione di stabilità.

OSSERVAZIONE. La definizione di stabilità ricorda quella di limite e quella di continuità, e può apparire come una sorta di continuità dell'applicazione  $\mathbf{u}_0 \mapsto \mathbf{u}(t)$  (cioè la continuità del semigrupp  $S(t)$ ). In effetti questo non è vero, in quanto l'ordine dei quantificatori nella definizione di stabilità è essenziale, come mostra la definizione seguente.

DEFINIZIONE. *Dato un sistema del primo ordine avente una posizione di equilibrio  $\bar{\mathbf{u}}$ , se per ogni intorno  $V$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  e per ogni  $t \geq t_0$  esiste un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che per ogni  $\mathbf{u}_0 \in U$  si abbia*

$$\mathbf{u}(t) \in V$$

*allora si dirà che  $\mathbf{u}$  dipende con continuità dai dati in  $\bar{\mathbf{u}}$ , ossia che  $S(t)$  è continua in  $\bar{\mathbf{u}}$ .*

OSSERVAZIONE. La definizione data è equivalente alla continuità per ogni  $t \geq t_0$  dell'applicazione  $S(t)$ . Infatti, basta osservare che essa è equivalente a

dire che, fissato  $t \geq t_0$ , per ogni intorno  $V$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  esiste un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che  $S(t)\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(t) \in V$ , ossia

$$S(t)U \subseteq V$$

che è proprio la definizione di continuità di una funzione.

Come già notato in precedenza, non bisogna confondere questa continuità con la continuità in  $t$  di  $\mathbf{u}(t)$  (che è implicita se si tratta di soluzioni di equazioni differenziali, perché sono addirittura funzioni derivabili).

ESEMPIO. Diamo un esempio di posizione di equilibrio dipendente con continuità dai dati.

Consideriamo l'equazione del primo ordine

$$\dot{x} = x$$

e la sua condizione iniziale  $x(0) = x_0$ . Sappiamo che la soluzione è  $x(t) = x_0 e^t$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $t \geq t_0$  poniamo  $\delta = \varepsilon e^{-t}$ . Pertanto si ha che se  $|x_0| < \delta$ , allora

$$|x(t)| = |x_0| e^t < \delta e^t = \varepsilon e^{-t} e^t = \varepsilon$$

che è appunto la (1.4).

La posizione di equilibrio  $\bar{x} = 0$  è tuttavia instabile. Infatti sia per esempio  $\varepsilon = 1$ . Fissato ad arbitrio  $\delta > 0$ , sia  $|x_0| < \delta$  e  $\bar{t} = -\log \delta$ . Allora per  $t \geq \bar{t}$  si ha

$$|x(t)| = |x_0| e^t > x_0 \exp(-\log \delta) \geq |x_0| \exp(-\log x_0) = 1 = \varepsilon$$

ossia l'instabilità.

L'esempio precedente mostra che si può avere instabilità in presenza di dipendenza continua. La stabilità di una posizione di equilibrio implica la continuità dell'applicazione  $S(t)$  in quella posizione, come mostra il seguente risultato.

PROPOSIZIONE. *Se un sistema del primo ordine ammette una posizione di equilibrio stabile  $\bar{\mathbf{u}}$ , allora la soluzione  $\mathbf{u}$  dipende con continuità dai dati in  $\bar{\mathbf{u}}$ .*

*Dimostrazione.* Siano dati  $\bar{t} \geq t_0$  e un intorno  $V$  di  $\bar{\mathbf{u}}$ . Per definizione di stabilità, esiste un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che per ogni  $\mathbf{u}_0 \in U$  si abbia per ogni  $t \geq t_0$ ,  $\mathbf{u}(t) \in V$ .

Evidentemente, poiché la relazione vale *per ogni*  $t \geq t_0$ , vale a maggior ragione per  $\bar{t}$ , e dunque la (1.4) è valida. ■

La stabilità dell'equilibrio implica che se i dati sono abbastanza “vicini” alla posizione di equilibrio, allora l'orbita si manterrà “vicina” alla posizione di equilibrio in tutti gli istanti successivi. Tuttavia non è detto che la soluzione tenda all'equilibrio, come si è visto nell'esempio (1.5). Tuttavia, può accadere che l'orbita del sistema tenda alla posizione di equilibrio, il che va specificato come segue.

**DEFINIZIONE.** *Sia  $\bar{\mathbf{u}}$  una soluzione di equilibrio di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Diremo che  $\bar{\mathbf{u}}$  attrae una soluzione  $\mathbf{u}$  se per ogni intorno  $V$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  esiste  $\tau \geq t_0$  tale che per ogni  $t \geq \tau$  si abbia  $\mathbf{u}(t) \in V$ .*

La precedente definizione non dice altro che il limite per  $t \rightarrow +\infty$  della soluzione  $\mathbf{u}(t)$  è  $\bar{\mathbf{u}}$ , come mostra il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE.**  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$  *attrae una soluzione  $\mathbf{u}$ , se e solo se*

$$(1.6) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| = 0$$

*in ogni norma.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\bar{\mathbf{u}}$  attragga  $\mathbf{u}$ ; scegliamo una norma e un numero  $\varepsilon > 0$  e poniamo

$$V = \{\mathbf{v} : \|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}\| < \varepsilon\}.$$

Per definizione, esiste  $\tau \geq t_0$  tale che per ogni  $t \geq \tau$  si abbia  $\mathbf{u}(t) \in V$ , ossia

$$\|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| < \varepsilon$$

e dunque, per definizione di limite, la (1.6).

Viceversa, supposta vera la (1.6), sia  $V$  un intorno di  $\bar{\mathbf{u}}$  e sia  $\varepsilon > 0$  tale che  $\{\mathbf{v} : \|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}\| < \varepsilon\} \subseteq V$ , che esiste per la proposizione (1.2). Dunque, per definizione di limite, esiste  $\tau \geq t_0$  tale che per ogni  $t \geq \tau$  si abbia

$$\|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| < \varepsilon$$

e dunque  $\mathbf{u}(t) \in V$ , ossia  $\bar{\mathbf{u}}$  attrae  $\mathbf{u}(t)$ .

OSSERVAZIONE. Questo risultato potrebbe essere falso in spazi di funzioni (ossia nell'applicazioni alle equazioni a derivate parziali), laddove le norme non sono equivalenti o, addirittura, non esistono.

DEFINIZIONE. Una soluzione  $\bar{\mathbf{u}}$  di equilibrio di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine attrae puntualmente un suo intorno  $U$  se  $\bar{\mathbf{u}}$  attrae ogni soluzione uscente da  $\mathbf{u}_0 \in U$ .

(1.7) DEFINIZIONE. Una soluzione  $\bar{\mathbf{u}}$  di equilibrio di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine si dice asintoticamente stabile (secondo LJAPUNOV) se è stabile e se attrae puntualmente un suo intorno.

OSSERVAZIONE. Per quanto appena visto, nel caso di sistemi di equazioni differenziali ordinarie, ossia in cui  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$ , avremo che la stabilità asintotica equivale alla stabilità e al fatto che esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\|\mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{u}}\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| = 0.$$

La richiesta di attrarre un intorno, non presente nella definizione di stabilità, si spiega in quanto la definizione di stabilità è automaticamente “locale”: se una soluzione di equilibrio è stabile, orbite uscenti da punti lontani da  $\bar{\mathbf{u}}$  possono anche allontanarsi da  $\bar{\mathbf{u}}$  senza compromettere la stabilità (basta che quelle uscenti da punti vicini non lo facciano), mentre nell'attrattività non si può pretendere che tutte le orbite tendano alla posizione di equilibrio, per cui si preferisce una definizione più debole.

Inoltre, una questione più sottile riguarda la necessità di richiedere la stabilità oltre all'attrattività nella definizione di stabilità asintotica. Infatti può sembrare intuitivamente che se le orbite tendono all'equilibrio, allora automaticamente devono mantenersi vicino ad esso, ossia che l'attrattività implichi la stabilità. Invece questo è falso, in quanto il fatto che le orbite tendano all'equilibrio non garantisce una uniformità nel modo in cui lo fanno (per esempio, possono “vagare a lungo” prima di assestarsi vicino a  $\bar{\mathbf{u}}$ ).

Infine, in modo assolutamente analogo a quanto fatto finora, si può dare la definizione di stabilità asintotica per un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine (sostituendo  $(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t))$  a  $\mathbf{u}(t)$ ) o di un semigrupp generico (sostituendo  $S(t)\mathbf{u}_0$ —o addirittura  $S(n)\mathbf{x}$  se si vuole un semigrupp discreto—a  $\mathbf{u}(t)$ ).

(1.8) ESEMPIO. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

La soluzione corrispondente ai dati iniziali  $(x_0, y_0)$  (per  $t = 0$ ) è

$$(x(t), y(t)) = (e^{-t}(y_0 \sin t + x_0 \cos t), e^{-t}(y_0 \cos t - x_0 \sin t))$$

e si verifica subito che

$$x^2(t) + y^2(t) = e^{-2t}(x_0^2 + y_0^2).$$

Pertanto è evidente che  $(0, 0)$  è stabile in quanto per ogni  $\varepsilon > 0$  basta porre anche qui  $\delta = \varepsilon$  e osservare che  $e^{-2t} < 1$ . Inoltre, la precedente relazione mostra anche che, posto  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$\|(x, y) - (0, 0)\| \leq e^{-t} \|(x_0, y_0)\|$$

per cui

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(x, y) - (0, 0)\| = 0.$$

ESEMPLI. Vediamo ora alcuni altri esempi di sistemi o equazioni provenienti dalla Meccanica.

*L'oscillatore smorzato*

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2py - \omega^2 x \end{cases} \quad (p > 0)$$

ha un comportamento simile a quello dell'esempio (1.8), ma più complesso da analizzare. Infatti l'unica posizione di equilibrio è  $x = 0$  e la soluzione si può calcolare esplicitamente facendo uso delle consuete tecniche delle equazioni

differenziali lineari. Posto  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y(0) = y_0$ , l'Analisi fornisce le soluzioni

$$x(t) = \begin{cases} e^{-pt} \left[ x_0 \cos \sqrt{\omega^2 - p^2}t + \frac{y_0 + px_0}{\sqrt{\omega^2 - p^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - p^2}t \right] & \text{se } \omega > p \\ (x_0 + (y_0 + px_0)t)e^{-pt} & \text{se } \omega = p \\ \frac{1}{2}e^{-pt} \left[ \left( x_0 + \frac{y_0 + px_0}{\sqrt{p^2 - \omega^2}} \right) e^{-\sqrt{p^2 - \omega^2}t} + \left( x_0 - \frac{y_0 + px_0}{\sqrt{p^2 - \omega^2}} \right) e^{\sqrt{p^2 - \omega^2}t} \right] & \text{se } \omega < p. \end{cases}$$

Poniamoci nel caso  $\omega > p$ . Si può allora constatare, dopo laboriosi calcoli, che

$$(1.9) \quad \omega^2 x^2(t) + 2px(t)y(t) + y^2(t) = e^{-2pt}(\omega^2 x_0^2 + 2px_0 y_0 + y_0^2).$$

Poiché  $\omega > p$ , il discriminante del polinomio  $\omega^2 x^2 + 2pxy + y^2$  è negativo e dunque, per la proposizione (1.3) la precedente espressione definisce una norma. La stabilità e l'attrattività sono allora immediata conseguenza della (1.9). Nel caso  $\omega = p$ , osserviamo che se  $y_0 + px_0 = 0$ , la stabilità asintotica segue facilmente. Altrimenti, posto  $z(t) = \dot{x}(t) + px(t)$ , con semplici passaggi si trova

$$z(t) = z_0 e^{-pt}$$

da cui, tenendo conto del fatto che  $|z|$  è una norma perché  $y(t) + px(t)$  si annulla solo in  $(0,0)$ , si trae nuovamente la stabilità asintotica. Infine, se  $\omega < p$ , conviene anche qui porre  $z = y + px$  e verificare che si ha

$$\frac{z(t)}{\sqrt{p^2 - \omega^2}} = \frac{1}{2} (x_0 + z_0) e^{-p - \sqrt{p^2 - \omega^2}t} + \frac{1}{2} (x_0 - z_0) e^{-p + \sqrt{p^2 - \omega^2}t}$$

per cui, essendo gli esponenti negativi, si avrà

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 - \omega^2} |x(t)| + |z(t)| &\leq \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - \omega^2} (|x_0 + z_0| + |x_0 - z_0|) \leq \\ &\leq \sqrt{p^2 - \omega^2} (x_0^2 + z_0^2) \end{aligned}$$

da cui si trae la stabilità, essendo  $\sqrt{p^2 - \omega^2} |x| + |z|$  una norma. L'attrattività segue dal fatto che ovviamente la soluzione tende a zero per  $t \rightarrow +\infty$ .

Il comportamento della soluzione è mostrato nella figura seguente.

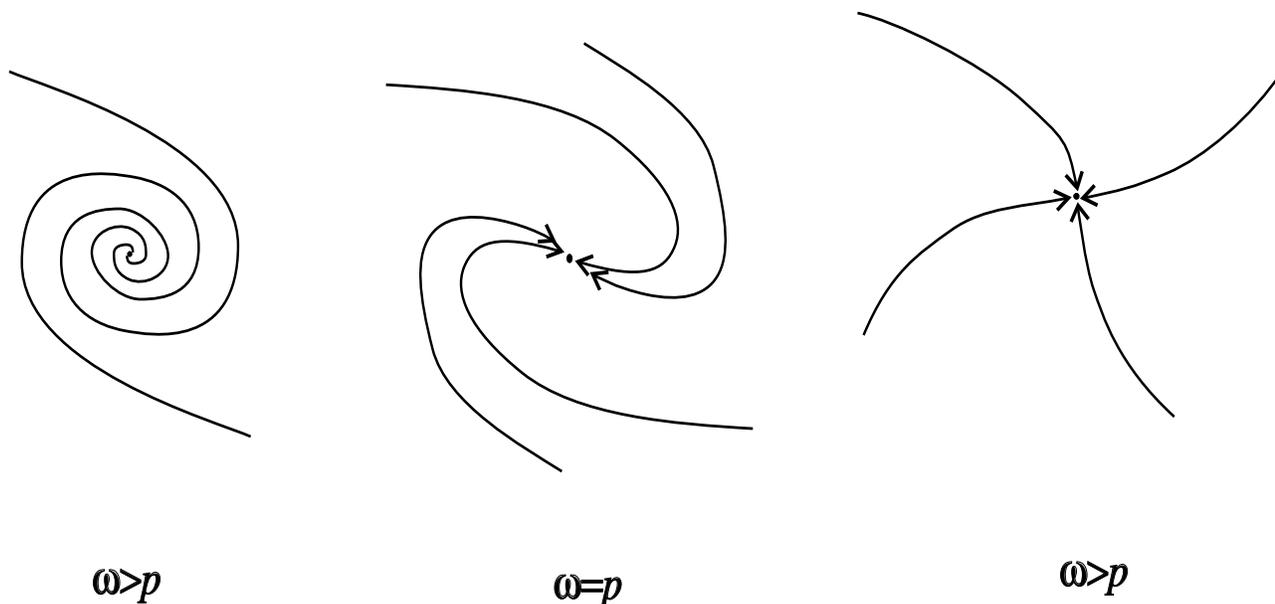


FIGURA 17  
*Orbite dell'oscillatore smorzato.*

Lo smorzatore lineare

$$\ddot{x} + \lambda^2 \dot{x} = 0 \quad \text{oppure}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = -\lambda^2 y \end{cases}$$

possiede infinite posizioni di equilibrio. Infatti ogni coppia  $(\bar{x}, 0)$  è di equilibrio. Inoltre dall'equazione sopra scritta si vede subito che

$$\dot{x} - \lambda^2 x = y - \lambda^2 x = \text{cost.}$$

e che dunque le orbite sono delle rette di equazione

$$y - y_0 = -\lambda^2(x - x_0).$$

Poiché inoltre la soluzione è data da

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{y_0}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda^2 t}) \\ y(t) = -y_0 e^{-\lambda^2 t} \end{cases}$$

si ha che  $y(t) \rightarrow 0$ , per cui le soluzioni tendono asintoticamente verso l'asse  $x$ .

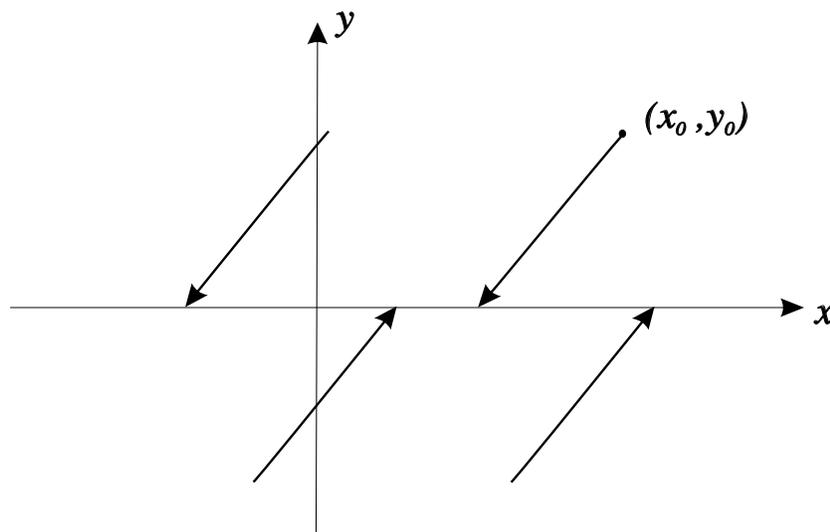


FIGURA 18

*Orbite dello smorzatore lineare.*

Da queste proprietà si vede anche abbastanza facilmente che ogni posizione di equilibrio è stabile. Preso infatti un intorno quadrato  $U$  centrato attorno a  $(\bar{x}, 0)$  di semilato  $\varepsilon$ , tutte le orbite uscenti dalla regione esagonale contenuta in  $U$  descritta in figura resteranno in  $U$ ; basterà prendere quindi per  $\delta$  un semilato di un quadrato contenuto in tale regione. Infine, è evidente anche che queste posizioni non sono asintoticamente stabili, in quanto orbite giacenti su rette diverse tendono a punti diversi.

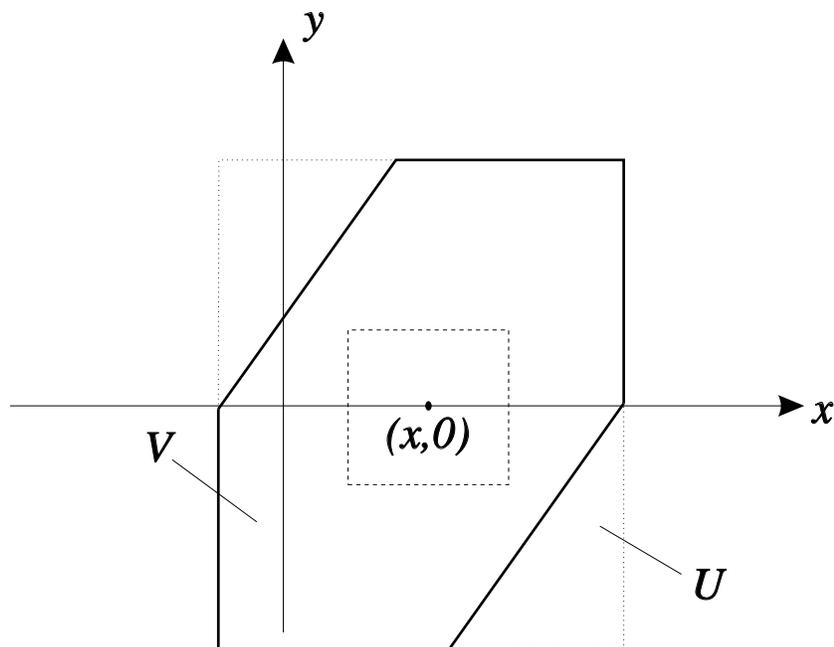


FIGURA 19

*Stabilità dell'equilibrio dello smorzatore lineare.*

### 3.2. Insiemi invarianti, attrattivi e attrattori

Grazie agli operatori  $S(t)$  e  $U(s, t)$  introdotti nel capitolo precedente possiamo definire alcune importanti nozioni. Dapprima osserviamo che per ogni  $t$  l'operatore  $S(t)$  ha il compito di “trasformare” il dato  $\mathbf{u}_0$  nella soluzione all'istante  $t$ . Se invece di un dato solo consideriamo contemporaneamente molti dati, l'operatore  $S(t)$  “deformerà” l'insieme dei dati iniziali in qualche modo. Pertanto sembra naturale estendere l'operazione di  $S(t)$  anche a insiemi. In questo caso, però, conviene tenere distinti il caso del primo da quello del secondo ordine. Inoltre, ci limitiamo per semplicità al caso di sistemi autonomi: per sistemi non autonomi le definizioni sono analoghe.

In questo paragrafo e nel successivo i risultati valgono essenzialmente per sistemi in  $\mathbb{R}^n$ , escludendo quindi le applicazioni a equazioni alle derivate parziali. Tuttavia, sotto opportune ipotesi di compattezza, qui sostituite da ipotesi di limitatezza, molti degli enunciati si rivelano validi anche in spazi funzionali molto generali.

**DEFINIZIONE.** *Sia  $X$  un sottoinsieme dello spazio degli stati di un sistema del*

primo ordine. Poniamo

$$S(t)X = \{\mathbf{u}(t) : \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 \in X\}$$

ossia l'insieme delle soluzioni uscenti dai punti di  $X$  calcolati all'istante  $t$ .

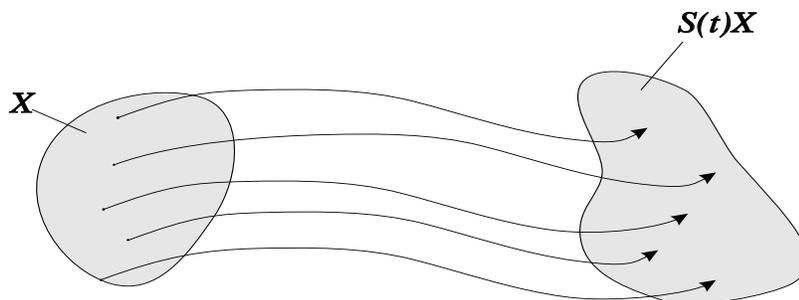


FIGURA 20

Trasformato di un insieme  $X$  da un semigruppato  $S(t)$ .

Ovviamente, se  $X = \{\mathbf{u}_0\}$ , si ha  $S(t)X = \{\mathbf{u}(t)\}$  e in questo caso scriveremo semplicemente  $S(t)X = \mathbf{u}(t) = S(t)\mathbf{u}_0$ .

ESEMPIO. Riprendiamo l'esempio ( $n = 1$ ) del semigruppato definito dall'equazione  $\dot{x} = x$ . Sappiamo che  $S(t)x_0 = x_0 e^t$ . Se per esempio  $X = [0, 1]$ , avremo  $S(t)X = \{x \in \mathbb{R} : x = a e^t, a \in [0, 1]\}$ , che non è altro che il segmento  $[0, e^t]$ .

Se invece consideriamo il semigruppato generato dal sistema dell'esempio (1.5), allora l'azione di  $S(t)$  su ogni insieme  $X$  non è altro che la rotazione di  $X$  di un angolo  $t$  attorno all'origine. Infatti abbiamo visto (vedi esempio (II, 4.2)) che l'azione di  $S(t)$  su  $\mathbf{x}$  è la moltiplicazione per la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

che è appunto la matrice della rotazione di un angolo  $t$ .

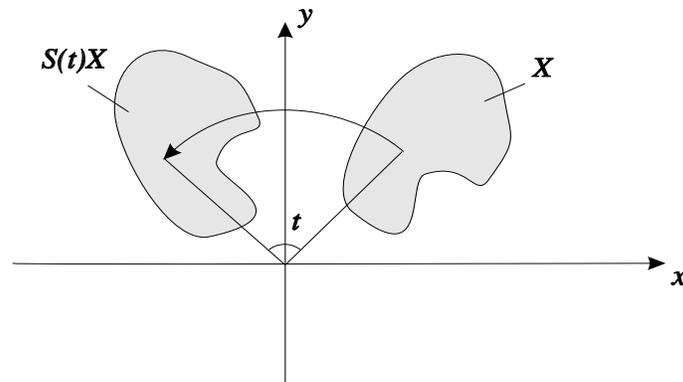


FIGURA 21

*Azione del semigruppò dell'esempio (II, 4.2).*

Se infine consideriamo il sistema dell'esempio (1.8), l'azione è più complessa in quanto si compone di una rotazione di angolo  $t$  attorno all'origine e di una "compressione" di fattore  $e^{-t}$ , in quanto stavolta

$$S(t)\mathbf{x} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

per cui, ad esempio, ogni circonferenza di centro l'origine e raggio  $R$  si trasforma nella circonferenza di centro l'origine e raggio  $Re^{-t}$ .

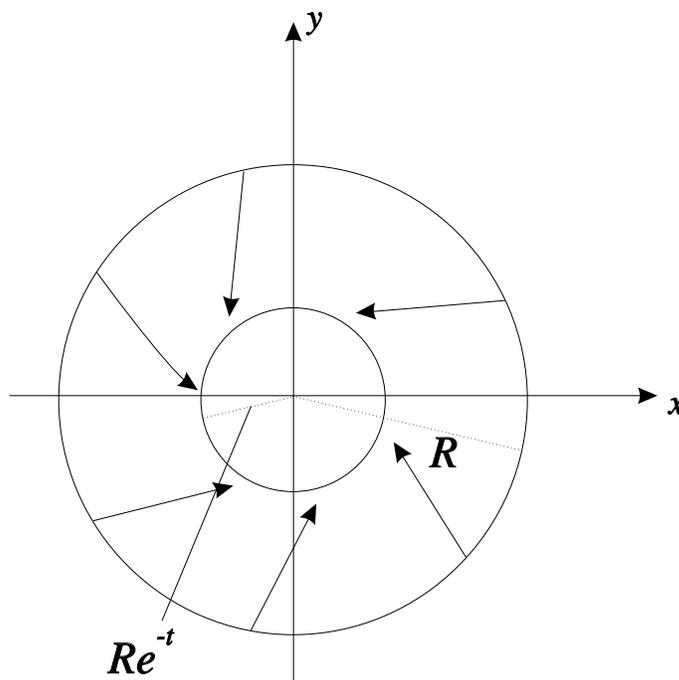


FIGURA 22

*Azione del semigruppò dell'esempio (II, 1.8).*

Per sistemi del secondo ordine la definizione si modifica in modo analogo.

DEFINIZIONE. *Sia  $X$  un sottoinsieme dello spazio delle fasi di un sistema del secondo ordine. Poniamo*

$$S(t)X = \{(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) : (\mathbf{u}(0), \dot{\mathbf{u}}(0)) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1), \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \in X\}$$

*ossia l'insieme delle coppie  $(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$  uscenti dai punti di  $X$  calcolati all'istante  $t$ .*

A questo punto possiamo dare una importante definizione, unificando i due casi precedenti.

DEFINIZIONE. *Un sottoinsieme  $X$  dello spazio degli stati di un sistema del primo ordine o dello spazio delle fasi di un sistema del secondo ordine si dice positivamente invariante se per ogni  $t \geq 0$  si ha*

$$S(t)X \subseteq X;$$

*Se invece per ogni  $t \geq 0$  si ha*

$$S(t)X \supseteq X,$$

allora  $X$  si dirà negativamente invariante. Infine, se  $X$  è sia positivamente che negativamente invariante, ossia se

$$S(t)X = X,$$

allora  $X$  si dirà invariante.

Ci si rende subito conto dalla definizione di  $S(t)X$  che  $X$  è positivamente invariante se e solo se per ogni  $\mathbf{x} \in X$  si ha  $\mathbf{u}(t; 0, \mathbf{x}) \in X$  per ogni  $t \geq 0$ .

ESEMPIO. L'insieme  $\{0\}$  per il sistema generato dall'equazione  $\dot{x} = x$  è invariante: infatti se  $x_0 = 0$ , allora  $x(t) = 0$  per ogni  $t$ , e questo è l'unico insieme invariante. Nel sistema dell'esempio (1.5), invece, tutte le circonferenze e i cerchi di centro l'origine (oppure loro unioni) sono invarianti, come è evidente dalla forma di  $S(t)$ .

PROPOSIZIONE. Se  $\bar{\mathbf{u}}$  è un punto di equilibrio di un sistema dinamico, allora l'insieme  $\{\bar{\mathbf{u}}\}$  è invariante.

*Dimostrazione.* Infatti si ha

$$S(t)\{\bar{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{u}(t)\} = \{\bar{\mathbf{u}}\}. \blacksquare$$

Quello che però non accade necessariamente è che ogni punto di un insieme invariante è a sua volta invariante, come mostreranno i prossimi esempi.

ESEMPIO. Esistono insiemi invarianti non formati da alcun punto di equilibrio, come gli insiemi  $\omega^2 x^2 + y^2 = C^2$  per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x. \end{cases}$$

Gli insiemi invarianti di un sistema possono essere molti, come mostra il seguente teorema.

TEOREMA. Supponiamo che un sistema abbia soluzioni definite per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Allora ogni orbita completa è invariante.

*Dimostrazione.* Poniamo

$$\gamma(\mathbf{u}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{esiste } t \in \mathbb{R} \text{ tale che } \mathbf{x} = \mathbf{u}(t) = S(t)\mathbf{u}_0\}.$$

Per ogni  $\mathbf{x} \in \gamma(\mathbf{u}_0)$ , sarà  $\mathbf{x} = S(\tau)\mathbf{u}_0$  per opportuno  $\tau \in \mathbb{R}$ . Allora  $S(t)\mathbf{x} = S(t + \tau)\mathbf{u}_0$  appartiene a  $\gamma(\mathbf{u}_0)$ , e questo implica che  $S(t)\gamma(\mathbf{u}_0) \subseteq \gamma(\mathbf{u}_0)$ . Viceversa, se  $\mathbf{x} \in \gamma(\mathbf{u}_0)$ , poniamo  $\mathbf{y} = S(-t)\mathbf{x}$ . Chiaramente  $\mathbf{y} \in \gamma(\mathbf{u}_0)$ , e  $S(t)\mathbf{y} = \mathbf{x} \in \gamma(\mathbf{u}_0)$ , e quindi  $\mathbf{x} \in S(t)\gamma(\mathbf{u}_0)$ . Pertanto  $\gamma(\mathbf{u}_0) \subseteq S(t)\gamma(\mathbf{u}_0)$ , e questo completa la dimostrazione. ■

Poniamo ora

$$\gamma^+(\mathbf{u}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{esiste } t \geq 0 \text{ tale che } \mathbf{x} = \mathbf{u}(t) = S(t)\mathbf{u}_0\}.$$

detto *orbita positiva uscente* da  $\mathbf{u}_0$ .

Vale la seguente proprietà.

(2.1) TEOREMA. *Se  $\mathbf{u}_1 \in \gamma^+(\mathbf{u}_0)$ , allora  $\gamma^+(\mathbf{u}_1) \subseteq \gamma^+(\mathbf{u}_0)$ . Inoltre, se il semigruppoo  $\{S(t)\}$  è invertibile, allora orbite uscenti da punti diversi non possono intersecarsi.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{x} \in \gamma^+(\mathbf{u}_1)$ . Allora esiste  $t_1 \geq 0$  tale che  $\mathbf{x} = S(t_1)\mathbf{u}_1$ . Ma poiché  $\mathbf{u}_1 \in \gamma^+(\mathbf{u}_0)$ , esiste  $t_0$  tale che  $\mathbf{u}_1 = S(t_0)\mathbf{u}_0$ . Ne segue, per la proprietà di semigruppoo, che

$$\mathbf{x} = (S(t_1) \circ S(t_0))\mathbf{u}_0 = S(t_1 + t_0)\mathbf{u}_0 \in \gamma^+(\mathbf{u}_0).$$

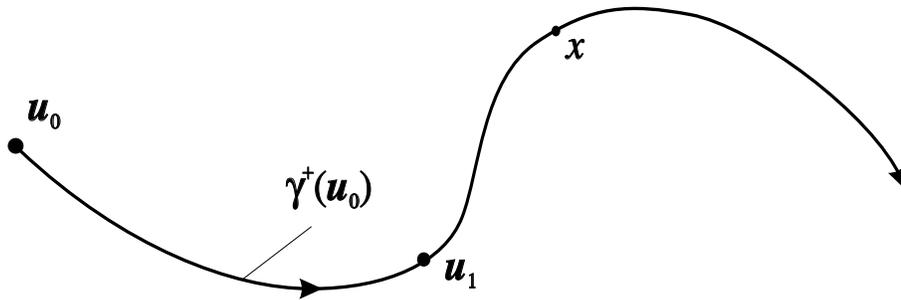


FIGURA 23

Per dimostrare la seconda affermazione supponiamo per assurdo che esista  $\mathbf{u} \in \gamma^+(\mathbf{u}_0) \cap \gamma^+(\mathbf{u}_1)$ . Allora esistono due istanti  $t_0, t_1$  tali che  $\mathbf{u} = S(t_0)\mathbf{u}_0$  e  $\mathbf{u} = S(t_1)\mathbf{u}_1$ . Ma questo significa che  $\mathbf{u}_0 = S(-t_0)\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}_1 = S(-t_1)\mathbf{u}$ , contro l'ipotesi che le  $S(t)$  siano invertibili. ■

Vogliamo ora studiare alcune proprietà generali delle soluzioni dei sistemi che ci interessano quando  $t \rightarrow +\infty$ . Uno dei concetti fondamentali in questo senso è quello di attrattività.

Prima di procedere oltre, dobbiamo però richiamare alcune definizioni.

DEFINIZIONE. Sia  $X$  un insieme. Una funzione  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- i)  $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$
- ii)  $\forall x \in X : d(x, x) = 0$
- iii)  $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
- iv)  $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

si dirà distanza su  $X$  e  $X$  si dirà spazio metrico.

Dato uno spazio normato, si constata immediatamente che la funzione data da

$$d(x, y) = n(x - y)$$

verifica le proprietà della distanza. Dunque uno spazio normato è anche metrico.

DEFINIZIONE. Supponiamo di avere uno spazio metrico  $X$  con distanza  $d$ . Per ogni  $x \in X$  e per ogni sottoinsieme  $Y \subseteq X$  poniamo

$$\text{dist}(x, Y) = \inf_{z \in Y} d(x, z).$$

In particolare, se lo spazio è normato, si avrà

$$\text{dist}(x, Y) = \inf_{z \in Y} \|x - z\|$$

Questa definizione traduce l'idea di "distanza di un punto da un insieme": notiamo che se  $x \in Y$ , allora  $\text{dist}(x, Y) = 0$ .

La seguente definizione non è altro che una generalizzazione della definizione di attrattività puntuale data nel paragrafo precedente.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme  $X$  dello spazio degli stati di un sistema del primo ordine o dello spazio delle fasi di un sistema del secondo ordine si dice puntualmente attrattivo se esiste un intorno  $U$  di  $X$  tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S(t)\mathbf{u}_0, X) = 0.$$

In altre parole, un insieme è puntualmente attrattivo se ogni orbita uscente da un suo opportuno intorno tende asintoticamente all'insieme stesso (si intende che può anche entrarvi, per cui la distanza si ridurrà a zero).

PROPOSIZIONE. *Un punto di equilibrio  $\bar{\mathbf{u}}$  asintoticamente stabile costituisce un insieme puntualmente attrattivo.*

*Dimostrazione.* In effetti si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| = 0$$

e dunque necessariamente

$$\inf_{\mathbf{x} \in \{\bar{\mathbf{u}}\}} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{x}\| = 0. \blacksquare$$

ESEMPLI. Il punto di equilibrio dell'oscillatore armonico non è puntualmente attrattivo. Questo sistema non possiede alcun insieme attrattivo.

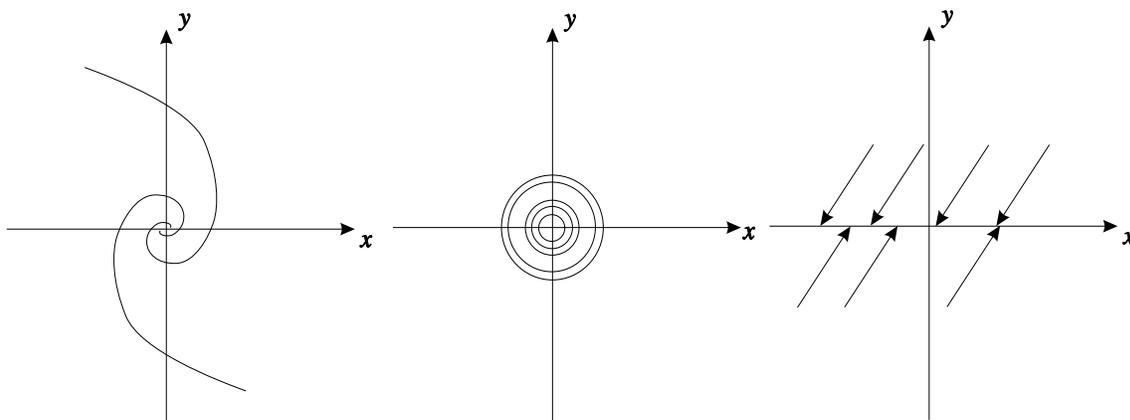


FIGURA 24  
*Attrattività.*

Per quanto riguarda l'oscillatore smorzato, il punto  $(0, 0)$  nello spazio delle fasi (o il punto  $0$  in quello degli stati) è puntualmente attrattivo, così come ogni insieme che contiene questo punto.

Lo smorzatore lineare possiede la retta delle posizioni di equilibrio che è invariante e puntualmente attrattivo. Ogni insieme che contiene questa retta è puntualmente attrattivo.

Un concetto fondamentale per studiare il comportamento dei semigruppri nel tempo sta nella seguente definizione, che spieghiamo preventivamente.

Dato un insieme  $B$ , e un istante  $t$ , consideriamo l'insieme  $\bigcup_{s>t} S(s)B$ , che sarebbe l'“orbita positiva” uscente da  $S(t)B$ . A tale orbita mancano però il punto o i punti ai quali essa eventualmente tende per  $t \rightarrow +\infty$ , per cui essi vengono aggiunti chiudendola (nel senso della chiusura di un insieme). Intersecando queste orbite chiuse al crescere di  $t$ , si eliminano via via tutti i pezzi di orbita raggiungibili in istanti finiti e si ottiene il limite di  $S(t)B$  per  $t \rightarrow +\infty$ .

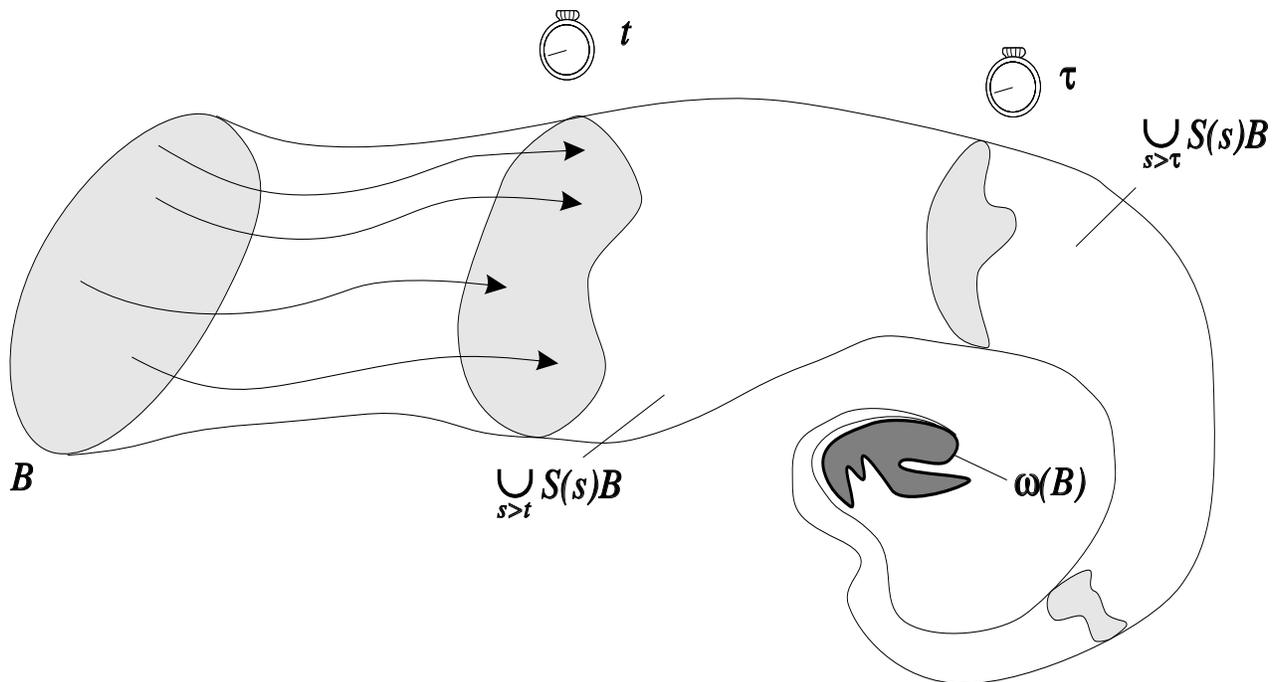


FIGURA 25

*L'insieme  $\omega$ -limite di un insieme  $B$ .*

DEFINIZIONE. Dato un sottoinsieme  $B$  dello spazio degli stati o delle fasi, consideriamo l'insieme

$$\omega(B) = \bigcap_{s>0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)B}.$$

*Questo insieme viene detto insieme  $\omega$ -limite di  $B$ .*

(Indichiamo con la barra in alto la chiusura di un insieme; ricordiamo che  $x \in \overline{X}$  se e solo se ogni intorno di  $x$  contiene punti di  $X$ .)

Analogamente a quanto fatto per l'orbita, scriveremo semplicemente  $\omega(\mathbf{u}_0)$  in luogo di  $\omega(\{\mathbf{u}_0\})$ .

(2.2) TEOREMA. *L'insieme  $\omega$ -limite di un punto  $\mathbf{u}_0$  coincide con l'insieme*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \rightarrow +\infty : \lim_{k \rightarrow +\infty} S(t_k)\mathbf{u}_0 = \mathbf{x}\},$$

*ossia con l'insieme dei punti limite di successioni prese a istanti divergenti sull'orbita uscente da  $\mathbf{u}_0$ .*

*Dimostrazione.* Poniamo per brevità

$$\Gamma_s = \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathbf{u}_0} = \overline{\gamma^+(\mathbf{u}(s))}.$$

Evidentemente  $\Gamma_s$  è chiuso per ogni  $s$  e si ha, per il teorema (2.1),

$$s_2 > s_1 \Rightarrow \Gamma_{s_2} \subseteq \Gamma_{s_1},$$

ossia i  $\Gamma$  decrescono al crescere di  $s$ . Prendiamo dapprima

$$\mathbf{x} \in \omega(\mathbf{u}_0) = \bigcap_{s > 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathbf{u}_0} = \bigcap_{s > 0} \Gamma_s.$$

Poiché  $\mathbf{x}$  appartiene all'intersezione, si ha per esempio che per ogni  $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{x} \in \Gamma_k = \overline{\bigcup_{t \geq k} S(t)\mathbf{u}_0}.$$

Ne segue, per definizione di chiusura, che per ogni intorno  $U$  di  $\mathbf{x}$  esiste  $\mathbf{x}_k \in \bigcup_{t \geq k} S(t)\mathbf{u}_0$  con  $\mathbf{x}_k \in U$ . Ma questo equivale a dire che esiste  $t_k \geq k$  tale che  $\mathbf{x}_k = S(t_k)\mathbf{u}_0$ . Dunque, per definizione di limite,  $t_k \rightarrow +\infty$  e  $\mathbf{x}_k = S(t_k)\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{x}$ .

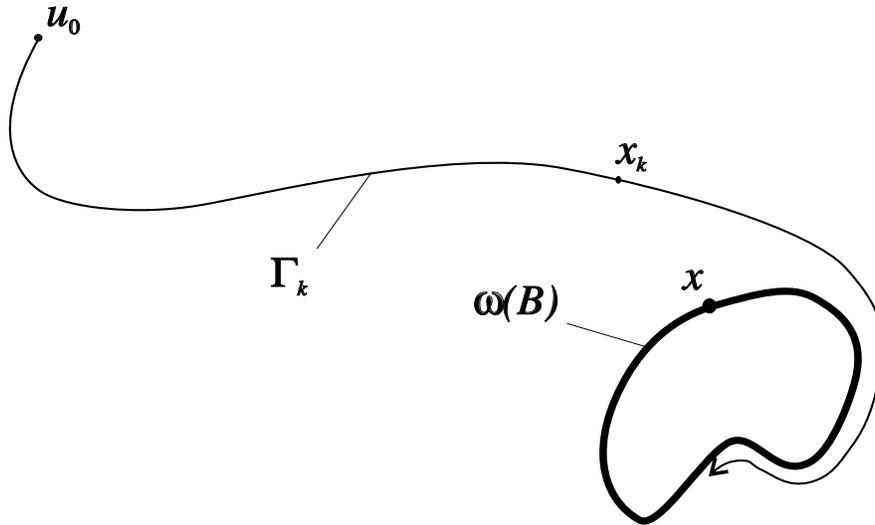


FIGURA 26

Viceversa, sia data una successione  $(t_k)$  positivamente divergente con  $t_0 = 0$  e sia

$$\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} S(t_k)\mathbf{u}_0.$$

Ne segue che per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x}$  è limite di una successione  $(\mathbf{x}_h)$  nell'insieme  $\bigcup_{t \geq t_k} S(t)\mathbf{u}_0$ , e dunque per ogni  $k \in \mathbb{N}$  si ha  $\mathbf{x} \in \Gamma_{t_k}$ .

Ma per il teorema (2.1), si ha

$$t_i > t_j \Rightarrow \Gamma_{t_i} \subseteq \Gamma_{t_j}$$

e dal fatto che  $t_0 = 0$  segue che  $\mathbf{x}$  appartiene a  $\Gamma_s$  per ogni  $s > 0$ , e dunque appartiene anche all'intersezione, cioè a  $\omega(\mathbf{u}_0)$ . ■

Dal teorema precedente seguono anche le principali proprietà dell'insieme  $\omega$ -limite.

(2.3) TEOREMA. *Supponiamo che l'applicazione  $(t, \mathbf{u}_0) \mapsto S(t)\mathbf{u}_0$  sia continua in  $t$  e in  $\mathbf{u}_0$ . Allora l'insieme  $\omega$ -limite  $\omega(\mathbf{u}_0)$  di un punto  $\mathbf{u}_0$  possiede le seguenti proprietà:*

- i)  $\omega(\mathbf{u}_0)$  è chiuso;
- ii)  $\omega(S(t)\mathbf{u}_0) = \omega(\mathbf{u}_0)$ ;
- iii)  $S(t)\omega(\mathbf{u}_0) \subseteq \omega(\mathbf{u}_0)$ ;
- iv) Se  $\gamma^+(\mathbf{u}_0)$  è un'orbita limitata, allora  $\omega(\mathbf{u}_0)$  è compatto, non vuoto, invariante, attrattivo e connesso.

*Dimostrazione.* *i)* Riprendiamo le notazioni del teorema precedente. Poiché

$$\omega(\mathbf{u}_0) = \bigcap_{s>0} \Gamma_s,$$

esso è un'intersezione di insiemi chiusi, ed è chiuso per un risultato generale di topologia. *ii)* Abbiamo, grazie alla proprietà di semigruppato,

$$\omega(S(\tau)\mathbf{u}_0) = \bigcap_{s>0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)(S(\tau)\mathbf{u}_0)} = \bigcap_{s>0} \overline{\bigcup_{t \geq s+\tau} S(t)\mathbf{u}_0} = \bigcap_{s>0} \Gamma_{\tau+s}.$$

D'altro canto, poiché i  $\Gamma$  sono decrescenti e  $\tau$  è fisso, abbiamo anche

$$\omega(S(\tau)\mathbf{u}_0) = \bigcap_{s+\tau>0} \Gamma_{s+\tau} = \bigcap_{\sigma>0} \Gamma_{\sigma} = \omega(\mathbf{u}_0).$$

*iii)* Sia  $\mathbf{x} \in \omega(\mathbf{u}_0)$ . Per il teorema precedente esiste una successione  $t_k \rightarrow +\infty$  tale che  $S(t_k)\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{x}$ . Se per ogni  $t \geq 0$  poniamo  $\tau_k = t + t_k$ , si ha allora che  $S(\tau_k)\mathbf{u}_0 = S(t)(S(t_k)\mathbf{u}_0) \rightarrow S(t)\mathbf{x}$  e dunque, sempre per il teorema precedente,  $S(t)\mathbf{x}$  è limite di una successione a istanti divergenti sull'orbita uscente da  $\mathbf{u}_0$ , e pertanto  $S(t)\mathbf{x} \in \omega(\mathbf{u}_0)$ .

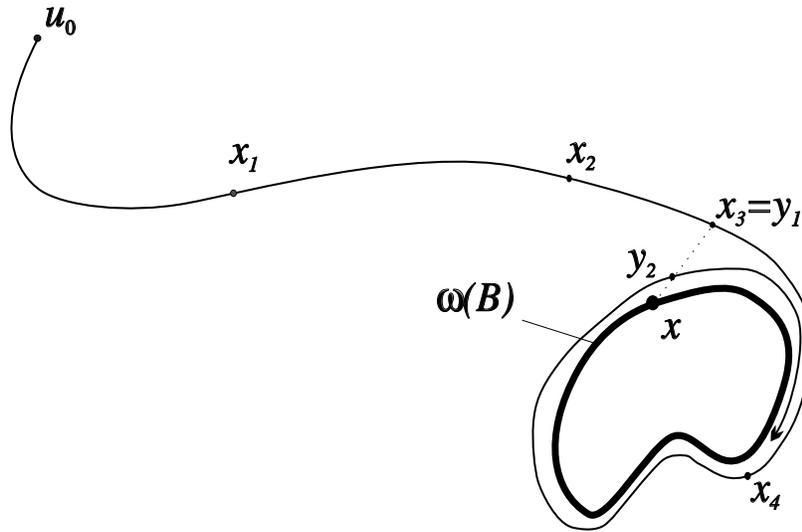


FIGURA 27

*iv)* Poiché, per il punto *ii)* l'insieme  $\omega$ -limite di una traiettoria e quella di un suo punto coincidono, basta dimostrare il risultato per un punto  $\mathbf{u}_0$ ,

sempre supponendo che  $\gamma = \gamma^+(\mathbf{u}_0)$  sia limitata. Dunque si ha che per ogni  $s > 0$   $\Gamma_s$  è un insieme chiuso e limitato, dunque compatto.

Fissato  $s > 0$  e presa una successione positivamente divergente  $t_k \rightarrow +\infty$ , dove  $t_k > s$ , poniamo  $\mathbf{x}_k = S(t_k)\mathbf{u}_0$ . Poiché  $\Gamma_s$  è compatto, esiste una sottosuccessione  $(\mathbf{x}_{k_h})$  convergente a un certo  $\mathbf{y}$ . Per definizione di sottosuccessione, si deve avere  $k_h \rightarrow +\infty$ , ed essendo

$$\mathbf{x}_{k_h} = S(t_{k_h})\mathbf{u}_0$$

si ha che  $(t_{k_h})$  è pure divergente. Dunque esiste una successione divergente  $(t_{k_h})$  tale che

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} S(t_{k_h})\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}$$

e da questo fatto segue che  $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{u}_0)$ , e che quindi  $\omega(\mathbf{u}_0)$  non è vuoto.

Per ogni  $s > 0$  l'insieme  $\Gamma_s$  è un insieme compatto e connesso, come abbiamo visto. Per definizione di insieme  $\omega$ -limite,  $\omega(\mathbf{u}_0)$  è dunque un'intersezione decrescente di insiemi connessi e compatti, ed è quindi, sempre per risultati generali di topologia, compatta e connessa. Resta quindi da dimostrare che  $\omega(\mathbf{u}_0)$  è attrattivo e invariante. Per quanto riguarda l'invarianza, per la proprietà *iii*) basta dimostrare che  $\omega(\mathbf{u}_0) \subseteq S(t)\omega(\mathbf{u}_0)$ . Siano allora  $\mathbf{x} \in \omega(\mathbf{u}_0)$  e  $t_k \rightarrow +\infty$  tali che  $S(t_k)\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{x}$ . Fissato  $t \geq 0$ , poniamo  $\tau_k = t_k - t$ ; chiaramente  $\tau_k - t \rightarrow +\infty$  e, sempre per la compattezza, esisterà una sottosuccessione  $(\tau_{k_h})$ , tale che  $S(\tau_{k_h})$  converga a un certo  $\mathbf{w} \in \omega(\mathbf{u}_0)$ , quindi, per la continuità dell'applicazione  $S(t)$ ,

$$S(t)\mathbf{w} = S(t)\left(\lim_{h \rightarrow +\infty} S(\tau_{k_h})\mathbf{u}_0\right) = \lim_{h \rightarrow +\infty} S(t_{k_h})\mathbf{u}_0 = \mathbf{x},$$

per cui  $\mathbf{x} \in \omega(\mathbf{u}_0)$ ; pertanto, combinando con la proprietà *ii*),

$$S(t)\omega(\mathbf{u}_0) = \omega(\mathbf{u}_0)$$

cioè l'invarianza. Infine vediamo l'attrattività. Supponiamo per assurdo che esistano una successione  $t_k \rightarrow +\infty$  e  $\delta > 0$  tali che  $\text{dist}(S(t_k)\mathbf{u}_0, \omega(\mathbf{u}_0)) \geq \delta$ .

D'altra parte,  $\overline{\gamma^+(\mathbf{u}_0)}$  è chiusa e limitata, dunque compatta, e pertanto, come sopra, esisterà una sottosuccessione  $(t_{k_h})$  tale che

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} S(t_{k_h})\mathbf{u}_0 = \mathbf{x}.$$

Per il teorema precedente,  $\mathbf{x} \in \omega(\mathbf{u}_0)$ . Ma allora

$$\text{dist}(S(t_{k_h})\mathbf{u}_0, \omega(\mathbf{u}_0)) = \inf_{\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{u}_0)} \|\mathbf{u}(t_{k_h}) - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{u}(t_{k_h}) - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$$

e questo è assurdo. ■

Introduciamo ora la nozione più completa di attrattività. Occorre però un'ulteriore definizione.

DEFINIZIONE. Supponiamo di avere uno spazio metrico  $X$  con distanza  $d$ . Dati due sottoinsiemi  $Y, Z \subseteq X$  poniamo

$$\text{dist}(Z, Y) = \sup_{z \in Z} d(z, Y)$$

In particolare, se lo spazio è normato, si avrà

$$\text{dist}(Z, Y) = \sup_{z \in Z} \inf_{y \in Y} \|y - z\|$$

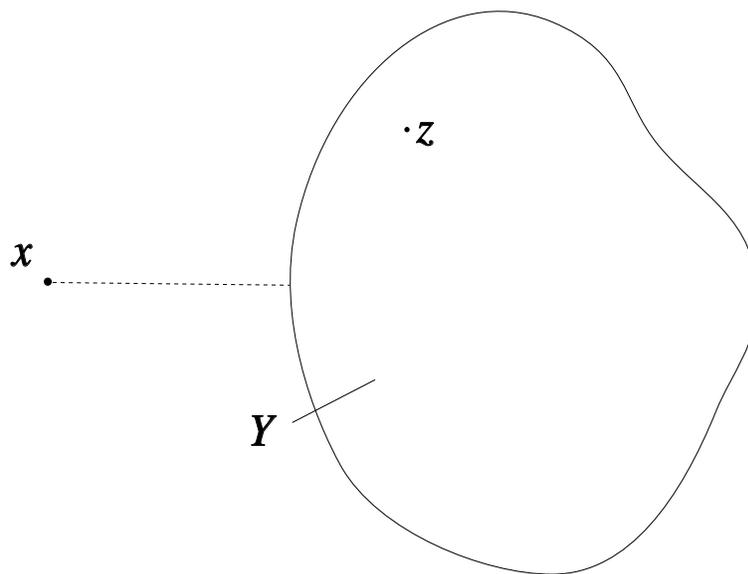


FIGURA 28

*Distanza di un punto da un insieme.*

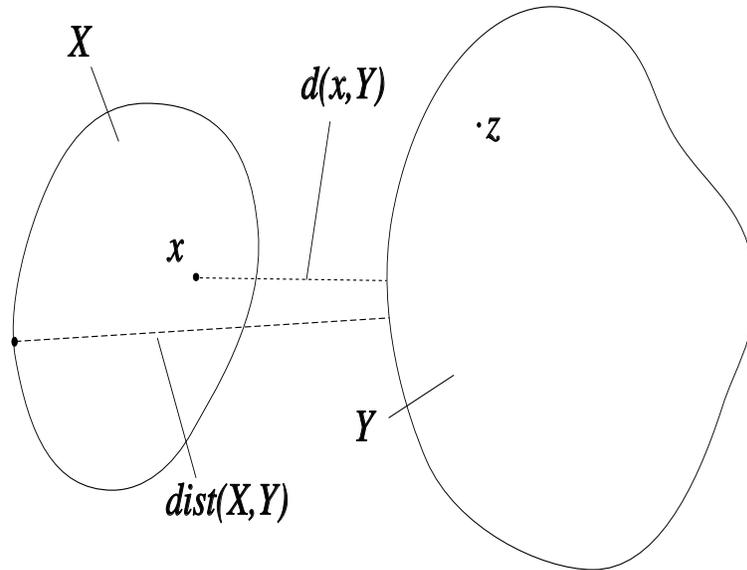


FIGURA 29

*Distanza fra due insiemi.*

**DEFINIZIONE.** Un sottoinsieme  $X$  dello spazio degli stati di un sistema del primo ordine o dello spazio delle fasi di un sistema del secondo ordine si dice *attraattivo* se esiste un intorno  $U$  di  $X$  tale che per ogni  $B \subseteq U$  si abbia  $S(t)B \in U$  per ogni  $t \geq 0$  e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S(t)B, X) = 0.$$

La differenza fondamentale rispetto alla definizione di attrattività puntuale è che la distanza viene calcolata su tutto  $S(t)B$ , e non su ciascuna orbita puntuale  $\mathbf{u}(t)$ . In questo modo non è possibile che punti diversi di  $S(t)B$  tendano ad  $X$  con modalità diverse (o, che è lo stesso, che  $B$  venga “stiracchiato” in modo strano da  $S(t)$  prima di entrare in  $X$ ).

In modo analogo a quanto fatto precedentemente, si può dimostrare il seguente risultato, analogo al teorema (2.2).

**TEOREMA.** L'insieme  $\omega$ -limite  $\omega(B)$  di un insieme  $B$  coincide con l'insieme

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \rightarrow +\infty, \mathbf{u}_k \in B : \lim_{k \rightarrow +\infty} S(t_k)\mathbf{u}_k = \mathbf{x}\},$$

ossia con l'insieme dei punti limite di successioni prese a istanti divergenti sull'orbita uscente dai punti di  $B$ .

Sussiste infine il seguente teorema, che generalizza il teorema (2.3).

**TEOREMA.** *Supponiamo che  $X$  sia un insieme non vuoto e che esista un insieme compatto che attrae  $X$ . Allora l'insieme  $\omega(X)$  è non vuoto, compatto, connesso, invariante, attrattivo, ed è il più grande insieme invariante che attrae  $X$ , e il più piccolo insieme che attrae  $X$ .*

*Dimostrazione (cenno).* Poiché esiste un compatto che attrae  $X$ , esso attrae tutte le orbite uscenti da punti di  $X$ . Dunque, per il teorema (2.3) e il teorema precedente, esso è non vuoto. La compattezza e le altre proprietà si dimostrano in modo analogo a quanto visto nel teorema (2.3). Vediamo l'ultima proprietà. Sia  $Y$  un insieme invariante che attrae  $X$ . Poiché  $Y$  attrae  $X$  e  $X$  è attratto da  $\omega(X)$ , si deduce che  $\omega(X)$  deve attrarre  $Y$ . Ma  $Y$  è invariante, dunque non può che essere  $Y \subseteq \omega(X)$ . Pertanto  $\omega(X)$  è il più grande insieme invariante che attrae  $X$ . Sia invece  $Z \subseteq \omega(X)$  un insieme che attrae  $X$ . Ne segue che  $Z$  attrae  $\omega(X)$ , ma poiché quest'ultimo è invariante, deve essere  $Z = \omega(X)$ . ■

Il concetto di insieme attrattivo prelude a quello di attrattore, che è molto importante per le applicazioni.

**DEFINIZIONE.** *Un sottoinsieme  $A$  dello spazio degli stati di un sistema del primo ordine o dello spazio delle fasi di un sistema del secondo ordine si dice attrattore se è invariante, compatto e se attrae ogni insieme limitato.*

Poiché un attrattore attrae tutti gli insiemi limitati, esso attrae in particolare tutte le orbite limitate, e pertanto è attrattivo. Viceversa, un insieme attrattivo non è necessariamente un attrattore.

**ESEMPIO.** L'oscillatore lineare non possiede insiemi attrattivi, dunque non possiede nemmeno attrattori. L'oscillatore smorzato possiede l'insieme  $(0, 0)$  che è un attrattore.

Il problema fondamentale di questa sezione è stabilire condizioni sufficienti per garantire l'esistenza di un attrattore. Per questo serve la seguente definizione.

**DEFINIZIONE.** *Un insieme limitato  $B$  dello spazio delle fasi o degli stati si dirà assorbente se per ogni  $\mathbf{u}_0 \in B$  esiste un istante  $t(\mathbf{u}_0)$  tale che per ogni  $t \geq t_0$  si ha  $\mathbf{u}(t) \in B$ .*

La principale differenza fra un insieme attrattivo e assorbente è che mentre in un assorbente la traiettoria entra definitivamente, a un insieme attrattivo

la traiettoria può tendere senza mai raggiungerlo. Pertanto è chiaro che un insieme assorbente è attrattivo. Per esempio, nel caso dell'oscillatore smorzato, l'insieme  $\{0\}$  è attrattivo ma non assorbente, mentre ogni insieme che contiene un intorno di  $0$  è assorbente. Vale infatti il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE.** *Supponiamo che un sistema dinamico ammetta un insieme attrattivo limitato. Allora ogni suo intorno è assorbente.*

*Dimostrazione.* Sia  $A$  l'attrattore e sia  $U$  un suo intorno, nel senso che esiste  $r > 0$  tale che l'insieme  $\{X : \text{dist}(X, A) < r\}$  è contenuto in  $U$ . Per definizione di attrattore, per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $B$  esiste  $T$  tale che  $\text{dist}(S(t)B, A) < \varepsilon$  per  $t > T$ . Dunque, quando  $\varepsilon < r$  si ha che  $S(t)B$  appartiene alla predetta sfera, e quindi a  $U$ , il che significa che  $U$  è assorbente. ■

Possiamo, per finire, dimostrare un importante risultato.

**TEOREMA.** *Supponiamo che un sistema del primo o del secondo ordine possieda un insieme limitato assorbente. Allora l'insieme  $\omega$ -limite di questo assorbente è un attrattore per il sistema nello spazio delle fasi o degli stati rispettivamente, ed è l'insieme  $\omega$ -limite di un qualsiasi insieme limitato.*

*Dimostrazione.* Sia  $B$  un insieme limitato assorbente e  $X$  un insieme limitato. Innanzitutto è chiaro che, poiché  $B$  è assorbente,  $\omega(B) \subseteq B$  ed è compatto, non vuoto, invariante e attrae  $B$ . Poiché l'orbita di  $X$  entra in  $B$  dopo un tempo finito, è chiaro che  $\omega(B) = \omega(X)$  e attrae anche  $X$ . ■

### 3.3. Stabilità mediante linearizzazione

Uno dei principali problemi della teoria della stabilità è che in generale non è possibile calcolare con esattezza le soluzioni, per cui bisogna dimostrare l'esistenza o meno della stabilità mediante altri metodi. Vi è però una categoria di insiemi per i quali le soluzioni sono note esplicitamente, i sistemi lineari. Un sistema autonomo

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$$

si dirà *lineare* se  $\mathbf{F}$  è lineare. Ricordiamo che una funzione  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è lineare se e solo se esiste una matrice  $A$  di tipo  $n \times n$  tale che  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ . Per questo motivo un sistema lineare è un sistema della forma

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}.$$

Per questi sistemi vale il seguente teorema, che risolve completamente il problema della stabilità dell'equilibrio. Osserviamo anche che la posizione nulla  $\mathbf{0}$  è posizione di equilibrio di questi sistemi, anche se non l'unica (in ogni caso, è facile vedere che se esistono due posizioni di equilibrio distinte, allora ne esistono infinite e formano uno spazio vettoriale).

TEOREMA. *Sia dato un sistema lineare autonomo*

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}.$$

*Allora valgono i seguenti fatti:*

- i) se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale strettamente negativa,  $\mathbf{0}$  è asintoticamente stabile;*
- ii) se almeno un autovalore di  $A$  ha parte reale strettamente positiva,  $\mathbf{0}$  è instabile;*
- iii) se tutti gli autovalori di  $A$  sono distinti e hanno parte reale  $\leq 0$ ,  $\mathbf{0}$  è stabile;*
- iv) se esistono autovalori non nulli di  $A$  a parte reale nulla e non distinti,  $\mathbf{0}$  è instabile.*
- v) se alcuni autovalori di  $A$  sono nulli, allora esistono infinite posizioni di equilibrio con le stesse proprietà di stabilità della soluzione nulla.*

*Dimostrazione.* Siano  $\lambda_k$  gli autovalori di  $A$ . Posto

$$a_k = \operatorname{Re} \lambda_k \quad \text{e} \quad b_k = \operatorname{Im} \lambda_k,$$

è noto dall'Analisi che la soluzione si esprime come una combinazione lineare finita di funzioni del tipo

$$e^{a_k t} \cos(b_k t), \quad e^{a_k t} \sin(b_k t)$$

se gli autovalori sono distinti, e di funzioni del tipo

$$e^{a_k t} \cos(b_k t), \quad e^{a_k t} \sin(b_k t), \quad t^\nu e^{a_h t} \cos(b_h t), \quad t^\nu e^{a_h t} \sin(b_h t) \quad (\nu \leq \mu - 1)$$

se alcuni autovalori sono multipli con molteplicità  $\mu$ . Infine, i coefficienti delle combinazioni lineari sono funzioni lineari di  $\mathbf{u}(0)$  e tendono a zero se  $\|\mathbf{u}(0)\| \rightarrow 0$ . Pertanto, se le funzioni sopra scritte sono limitate, allora esiste una costante  $C > 0$  tale che

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq C \|\mathbf{u}(0)\|.$$

Per quanto riguarda la *i*), innanzitutto, se  $a_k < 0$  per ogni  $k$  le funzioni sopra scritte sono effettivamente limitate per  $t \geq 0$ . Pertanto, per ogni  $\varepsilon > 0$  basta scegliere  $\delta = \varepsilon/C$  e si avrà

$$\|\mathbf{u}(0) - \bar{\mathbf{u}}\| = \|\mathbf{u}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| = \|\mathbf{u}(t)\| \leq C \|\mathbf{u}(0)\| < C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

che è la stabilità. Poi basta osservare che se  $a_k < 0$  per ogni  $k$ ,  $\exp a_k t$  sono gli infinitesimi di ordine massimo per  $t \rightarrow +\infty$  nella soluzione e pertanto la soluzione tende a zero per  $t \rightarrow +\infty$ , anche se è moltiplicata per un polinomio in  $t$  se gli autovalori non sono distinti. Dunque  $\mathbf{0}$  è asintoticamente stabile. Per lo stesso motivo, se esiste  $k$  tale che  $a_k > 0$ , allora la soluzione tende a  $+\infty$ , col che si dimostra la *ii*). Vediamo la *iii*). Se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa, si ricade nel caso *i*). Resta da considerare il caso in cui  $m$  autovalori hanno parte reale nulla e gli altri hanno parte reale strettamente negativa. Allora la soluzione è data da

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

dove  $\mathbf{w}$  è la soluzione corrispondente agli autovalori a parte reale strettamente negativa, e pertanto tende a zero per  $t \rightarrow +\infty$ , mentre  $\mathbf{v}$  è data da combinazioni lineari di seni e coseni, che sono delle funzioni limitate. Pertanto, ragionando come al punto *i*), esisterà  $\delta_1 > 0$  tale che

$$\|\mathbf{u}(0)\| < \delta_1 \Rightarrow \|\mathbf{v}(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sempre per quanto visto al punto *i*), esisterà anche  $\delta_2 > 0$  tale che

$$\|\mathbf{u}(0)\| < \delta_2 \Rightarrow \|\mathbf{w}(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dunque infine, posto  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , si avrà

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq \|\mathbf{v}(t)\| + \|\mathbf{w}(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

che è la stabilità.

La *iv*) è evidente perché se un autovalore ha parte reale strettamente positiva si ricade nel caso *ii*), mentre se un autovalore a parte reale nulla è multiplo, la funzione  $\mathbf{v}(t)$  precedentemente introdotta si compone di polinomi di grado maggiore o uguale a 1 moltiplicati per seni e coseni, e la soluzione tende in modulo a  $+\infty$ , ossia  $\mathbf{0}$  è instabile.

Infine, la *v*) discende dal fatto che se un autovalore è nullo, allora per ogni autovettore  $\mathbf{z}$  relativo all'autovalore dato si deve avere  $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Dunque sono posizioni di equilibrio tutti i vettori dell'autospazio relativo ad  $A$ . Per studiare la stabilità di queste posizioni, poniamo  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{z}$ . Allora  $\mathbf{u} = \mathbf{z}$  se e solo se  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{w}$  verifica

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{z}) = \dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u} = A\mathbf{u} - A\mathbf{z} = A\mathbf{w}.$$

Dunque la stabilità di  $\mathbf{z}$  è ricondotta a quella di  $\mathbf{0}$ . ■

OSSERVAZIONE. Nel caso *v*) del teorema precedente, le proprietà di stabilità della soluzione nulla si possono ricavare dai punti *ii*), *iii*), *iv*). In particolare, se gli autovalori non nulli sono tutti a parte reale strettamente negativa, dal punto *iii*) segue la stabilità (non asintotica) della soluzione nulla.

ESEMPI. Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + z \\ \dot{y} = -y \\ \dot{z} = y + z \end{cases}$$

esso ha la matrice associata

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_{2,3} = 1$ . Pertanto la soluzione nulla del sistema è instabile.

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 3x + z \\ \dot{y} = -2y + z \\ \dot{z} = -x - y - 2z \end{cases}$$

i punti di equilibrio si ricavano risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} y + 3x + z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

che ha infinite soluzioni date da

$$x_1 = 5h, \quad x_2 = -h, \quad x_3 = -2h$$

con  $h \in \mathbb{R}$ . Infatti la matrice associata

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

ha autovalori  $0, -1, -2$ . Ne segue che  $(0, 0, 0)$  è stabile, in quanto gli autovalori hanno parte reale negativa o nulla, e tali sono anche tutte le altre posizioni di equilibrio.

Nel sistema associato all'oscillatore armonico (smorzato o no)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2py - \omega^2 x \end{cases} \quad (\omega \neq 0)$$

la matrice associata è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2p \end{bmatrix}$$

e il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + 2p\lambda + \omega^2 = 0.$$

Dunque

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \begin{cases} -p & \text{se } \omega \geq p \\ -p \pm \sqrt{p^2 - \omega^2} & \text{se } \omega < p \end{cases}$$

e dunque vi è stabilità asintotica se  $p > 0$  in quanto  $-p + \sqrt{p^2 - \omega^2} < 0$ , stabilità se  $p = 0$  in quanto gli autovalori  $\pm i\omega$  sono distinti, e instabilità se  $p < 0$ . Si ritrovano così i risultati già stabiliti in precedenza. Inoltre, se  $p = \omega = 0$  si hanno due autovalori nulli e si ha instabilità. Infatti in questo caso le soluzioni sono  $x(t) = y_0 t + x_0$ .

L'Analisi numerica fornisce dei potenti metodi per il calcolo degli autovalori di una matrice che si rivelano utili quando gli autovalori hanno parte reale diversa da zero. Nel caso in cui tutti gli autovalori abbiano parte reale nulla, i metodi approssimati non danno informazioni e il problema diventa più complicato.

Quando si ha a che fare con sistemi non lineari, una possibile strada da percorrere è sostituire il sistema originario con un sistema lineare, del quale sono note le proprietà di stabilità. Questa procedura è nota con il nome di *linearizzazione* o *primo metodo di Ljapunov*.

DEFINIZIONE. *Dato un sistema autonomo della forma*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

*che ammette  $\bar{\mathbf{u}}$  come soluzione di equilibrio diremo sistema linearizzato associato al sistema dato il sistema*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{0} \end{cases}$$

*dove abbiamo posto  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$  e*

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}\right)_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial u_k}.$$

In questo modo il sistema linearizzato risulta sempre un sistema lineare, in cui  $\mathbf{F}$  viene sostituito dal suo sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine.

È inoltre evidente che il sistema linearizzato associato ammette  $\mathbf{0}$  come posizione di equilibrio.

Resta naturalmente aperto il problema se la stabilità del sistema linearizzato si possa estendere anche al sistema di partenza. Questo non è sempre vero, come mostra il teorema seguente, sebbene esso fornisca anche molte indicazioni utili.

**TEOREMA (di linearizzazione).** *Se tutti gli autovalori della matrice  $A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}})$  hanno parte reale strettamente negativa o se ve n'è almeno uno a strettamente positiva, allora l'equilibrio del sistema linearizzato possiede le stesse proprietà di stabilità o instabilità dell'equilibrio del sistema di partenza.*

In pratica, se il sistema linearizzato ha equilibrio asintoticamente stabile (ossia tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa), la stessa cosa avviene per il sistema di partenza. Se l'equilibrio del sistema linearizzato è instabile per la presenza di autovalori a parte reale strettamente positiva, così sarà anche l'equilibrio del sistema originario. Nel caso in cui vi siano autovalori con parte reale nulla e non vi siano autovalori con parte reale strettamente positiva, il sistema linearizzato può comportarsi in modo diverso, ai fini della stabilità, dal sistema dato.

*Dimostrazione.* Fissato  $\varepsilon > 0$ , per il teorema del resto di Peano nello sviluppo di Taylor, esiste un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che per ogni  $\mathbf{u} \in U$  si abbia

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{u})\| = \left\| \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \right\| \leq \varepsilon \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|.$$

Poniamo  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$ . Chiaramente  $\mathbf{v}$  verifica il sistema

$$\dot{\mathbf{v}} = A\mathbf{v} + \mathbf{R}(\mathbf{u}).$$

Ora, dal momento che  $A$  ha tutti autovalori strettamente negativi, da un noto risultato di Algebra lineare si ha che

$$(3.1) \quad A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \leq \mu_M \|\mathbf{v}\|^2$$

dove  $\mu_M < 0$  è la massima parte reale degli autovalori.

D'altro canto si ha

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2$$

per cui dalla (3.1) si trae

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 \leq \mu_M \|\mathbf{v}\|^2 + \mathbf{R}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

e poiché

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \leq \|\mathbf{R}(\mathbf{u})\| \|\mathbf{v}\| \leq \varepsilon \|\mathbf{v}\|^2$$

si trova

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 \leq (\mu_M + \varepsilon) \|\mathbf{v}\|^2.$$

Prendendo  $\varepsilon = -\mu_M/2 > 0$ , dalla precedente relazione si ha, integrando ed estraendo la radice quadrata,

$$(3.2) \quad \|\mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{v}_0\| e^{\mu_M t/2}.$$

Da questa relazione si vede subito che se  $\|\mathbf{v}_0\| < \varepsilon$ , allora, essendo  $\mu_M < 0$ ,

$$\|\mathbf{v}(t)\| \leq \varepsilon e^{\mu_M t/2} \leq \varepsilon$$

ossia la stabilità. Poi dalla (3.2) segue anche che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{v}(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| = 0$$

ossia la stabilità asintotica.

Il secondo enunciato segue dal fatto che, per un teorema di Algebra lineare, esiste un sottospazio vettoriale invariante  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  (è lo spazio instabile di  $\bar{\mathbf{u}}$ , v. più avanti al n. 3.10) tale che, se  $\mathbf{w} \in E$ , allora

$$A\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \geq \mu_m \|\mathbf{w}\|^2$$

dove  $\mu_m > 0$  è la minima parte reale strettamente positiva degli autovalori. A questo punto si ha

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} \geq -\|\mathbf{R}(\mathbf{u})\| \|\mathbf{w}\| \geq -\varepsilon \|\mathbf{w}\|^2$$

per cui in questo caso

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|^2 \geq (\mu_m - \varepsilon) \|\mathbf{w}\|^2.$$

Da questa relazione, preso  $\varepsilon = \mu_m/2 > 0$ , si deduce

$$\|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{w}_0\| e^{\mu_m t}$$

che implica l'instabilità in quanto per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha che se  $\mathbf{w}_0 \in E$  e se  $\|\mathbf{w}_0\| = \varepsilon$ , allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{v}(t)\| \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{w}(t)\| = +\infty. \blacksquare$$

(3.3) ESEMPIO. Se il sistema linearizzato ha autovalori con parte reale nulla, non si può dire nulla sulla stabilità del sistema originario. Infatti si hanno esempi in cui quest'ultimo ha posizione di equilibrio stabile, asintoticamente stabile o instabile. Per esempio, consideriamo il sistema legato all'equazione

$$\ddot{x} + \alpha |\dot{x}| \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

che si scrive al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \alpha |y| y. \end{cases}$$

Si può dimostrare, con i metodi dei prossimi paragrafi, che la soluzione nulla del sistema soprascritto è asintoticamente stabile per  $\alpha > 0$  e instabile per  $\alpha < 0$ , benché entrambi ammettano il sistema

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = -\omega^2 v_1 \end{cases}$$

come sistema linearizzato (che ammette autovalori  $\lambda = \pm i\omega$ , ossia a parte reale nulla). Invece, la soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

è stabile, come vedremo nel prossimo paragrafo, e ammette lo stesso sistema linearizzato del precedente.

### 3.4. Stabilità con il secondo metodo di Ljapunov

In numerosi sistemi di equazioni differenziali in  $\mathbb{R}^n$ , che diremo più brevemente d'ora in poi "sistemi" la stabilità, che in generale non può essere analizzata mediante linearizzazione, si può stabilire se si riesce a determinare l'esistenza di una cosiddetta funzione di Ljapunov.

(4.1) DEFINIZIONE. *Sia dato un sistema ambientato in uno spazio degli stati (o delle fasi)  $X$  che ammetta la posizione  $\bar{\mathbf{u}}$  (o  $(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{0})$ ) come posizione di equilibrio. Una funzione  $W : X \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  che ammetta un minimo locale stretto in  $\bar{\mathbf{u}}$  e tale che esista un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  per cui*

(4.2) *se  $t \mapsto \mathbf{u}(t)$  è una soluzione del sistema in  $U$ , allora  $\frac{d}{dt}W(\mathbf{u}(t)) \leq 0$ ,*

*si dirà funzione di Ljapunov relativa a  $\bar{\mathbf{u}}$ .*

OSSERVAZIONE. Se  $W$  è una funzione di Ljapunov, essa è definita a meno di una costante additiva. Pertanto la definizione appena data implica che non è restrittivo supporre che  $W$  verifichi la seguente proprietà: esiste un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che

$$i) \forall \mathbf{x} \in U : W(\mathbf{x}) \geq 0;$$

$$ii) \forall \mathbf{x} \in U : W(\mathbf{x}) = 0 \text{ se e solo se } \mathbf{x} = \bar{\mathbf{u}};$$

$$iii) \text{ se } t \mapsto \mathbf{u}(t) \text{ è una soluzione del sistema in } U, \text{ allora } \frac{d}{dt}W(\mathbf{u}(t)) \leq 0,$$

Infatti, se  $W(\bar{\mathbf{u}}) < 0$ , basta sostituire  $W - W(\bar{\mathbf{u}})$  a  $W$  e si trova la *i*). Dal fatto che il minimo di  $W$  è stretto, vi è un solo punto in  $U$  in cui  $W$  deve annullarsi, che è la *ii*).

La definizione di funzione di Ljapunov è utile in quanto sussistono tre fondamentali teoremi.

**TEOREMA (di Ljapunov sulla stabilità).** *Una posizione di equilibrio  $\bar{\mathbf{u}}$  di un sistema per cui esiste una funzione di Ljapunov relativa a  $\bar{\mathbf{u}}$  è stabile.*

*Dimostrazione.* Per ipotesi esiste un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  su cui  $W$  ammette un minimo stretto. Fissiamo  $\varepsilon > 0$  in modo che la sfera piena di centro  $\bar{\mathbf{u}}$  e raggio  $\varepsilon$

$$B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) = \{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}\| < \varepsilon\} \subseteq U$$

e sia poi

$$S_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) = \{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}\| = \varepsilon\} = \partial B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$$

la superficie sferica di detta sfera.

Chiaramente  $\bar{\mathbf{u}} \notin S_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ , per cui  $W$  è strettamente positiva su  $S_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ . Poiché questo insieme è compatto e  $W$  è continua, per il teorema di Weierstrass si ha che

$$m_\varepsilon = \min_{S_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})} W > 0.$$

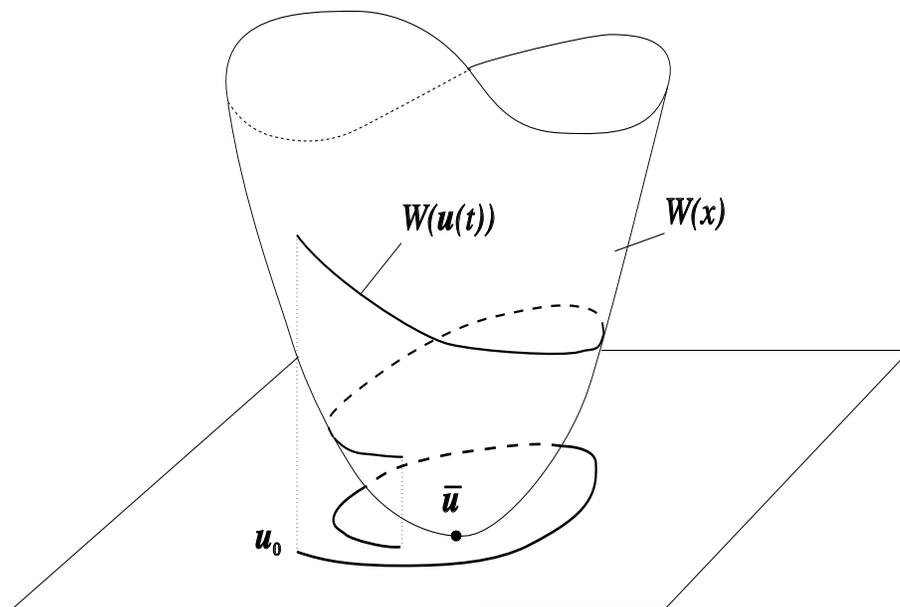


FIGURA 30

*Proprietà della funzione di Ljapunov.*

Poniamo ora

$$U_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in X : W(\mathbf{x}) < m_\varepsilon\}$$

che per la continuità di  $W$  è un intorno di  $\bar{\mathbf{u}}$  (infatti è la controimmagine dell'intervallo  $] -\infty, m_\varepsilon[$ , che è un intorno di 0). Dunque esiste  $\delta > 0$  tale che  $B_\delta(\bar{\mathbf{u}}) \subseteq U_\varepsilon$ , per cui

$$\forall \mathbf{x} \in B_\delta(\bar{\mathbf{u}}) : \quad W(\mathbf{x}) < m_\varepsilon.$$

Per l'ipotesi (4.2) fatta su  $W$ , si deve dunque avere

$$W(\mathbf{u}(t)) < m_\varepsilon$$

per ogni moto uscente da  $B_\delta(\bar{\mathbf{u}})$ . A questo punto la stabilità sarà dimostrata se per ogni  $t \geq t_0$  si ha  $\mathbf{u}(t) \in B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ .

Poiché la funzione  $t \mapsto \mathbf{u}(t)$  è continua, l'orbita è una linea continua, e se per assurdo  $\mathbf{u}(t)$  lasciasse la sfera  $B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ , dovrebbe esistere un istante  $t^* > t_0$  tale che  $\mathbf{u}(t) \in S_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ . Ma poiché  $m_\varepsilon$  è il minimo valore di  $W$  su  $S_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ , questo significa che

$$W(\mathbf{u}(t^*)) \geq m_\varepsilon$$

in contraddizione con quanto già ricavato. Questo dimostra il teorema. ■

Grazie a questo teorema è possibile ottenere risultati che con la linearizzazione non si potevano ricavare.

ESEMPIO. Consideriamo l'equazione del pendolo semplice

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0.$$

Sotto forma di sistema, questa equazione si scrive

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

e ammette le soluzioni di equilibrio  $(x = 0, y = 0)$ ,  $(x = \pi, y = 0)$ . Si ha poi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x & 0 \end{bmatrix}$$

per cui

$$A(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad A(\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di  $A(\pi, 0)$  sono  $\pm\omega$ , per cui questa posizione di equilibrio è instabile per il teorema sulla linearizzazione. Invece gli autovalori di  $A(0, 0)$  sono  $\pm i\omega$ , per cui la linearizzazione non dice nulla sulla stabilità. Osserviamo invece che la funzione

$$W(x, y) = \omega^2(1 - \cos x) + \frac{1}{2}y^2$$

è una funzione di Ljapunov per il sistema. Infatti essa è positiva, si annulla in  $(0, 0)$ , e inoltre

$$\frac{d}{dt}(\omega^2(1 - \cos x) + \frac{1}{2}y^2) = \omega^2 \sin x \dot{x} + y \dot{y} = \omega^2 y \sin x - y \omega^2 \sin x = 0$$

per cui  $(0, 0)$  è stabile.

Allo stesso modo il secondo sistema dell'esempio (3.3)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

ammette la funzione

$$W(x, y) = \omega^2 x^2 + \frac{x^4}{2} + y^2$$

come funzione di Ljapunov. Infatti

$$\frac{dW}{dt} = 2\omega^2 x \dot{x} + 2x^3 \dot{x} + 2y \dot{y} = 0$$

e chiaramente  $(x, y) = (0, 0)$  è un minimo locale per questa funzione. Dunque la posizione  $(0, 0)$  è di equilibrio stabile.

In realtà si può dimostrare un risultato più forte concernente la stabilità asintotica.

**TEOREMA (di Ljapunov sulla stabilità asintotica).** *Supponiamo che un sistema ammetta una posizione di equilibrio isolata e che esista una funzione di Ljapunov  $W$  relativa a questa posizione tale che inoltre su tutte le soluzioni non di equilibrio si abbia*

$$\frac{d}{dt}W(\mathbf{u}(t)) < 0.$$

Allora  $\bar{\mathbf{u}}$  è asintoticamente stabile.

*Dimostrazione.* Sappiamo già che  $\bar{\mathbf{u}}$  è stabile. Dunque, per  $\varepsilon > 0$  tale che  $B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$  non contenga altre posizioni di equilibrio, esiste  $\delta$  tale che se  $\|\mathbf{u}_0\| < \delta$ , allora  $\mathbf{u}(t) \in \overline{B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})}$  per ogni  $t \geq 0$ . Ma questo insieme è compatto, perché chiuso e limitato, dunque esistono  $\mathbf{u}^*$  e una successione  $t_k \rightarrow +\infty$  tale che  $\mathbf{u}(t_k) \rightarrow \mathbf{u}^*$ . D'altro canto, poiché se  $\mathbf{u}_0 \neq \bar{\mathbf{u}}$  (nel qual caso l'attrattività è banale) non si può mai avere  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$ , abbiamo che la funzione  $t \mapsto W(\mathbf{u}(t))$  è strettamente decrescente e, per la continuità, si deve avere

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} W(\mathbf{u}(t_k)) = W(\mathbf{u}^*).$$

Quindi, sempre per la decrescenza stretta, si ha

$$W(\mathbf{u}(t_k)) > W(\mathbf{u}^*)$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Supponiamo per assurdo  $\mathbf{u}^* \neq \bar{\mathbf{u}}$ , e indichiamo con  $\mathbf{u}^*(t)$  l'orbita uscente da  $\mathbf{u}^*$ . Chiaramente si deve avere  $W(\mathbf{u}^*(t)) < W(\mathbf{u}^*)$ , e dunque, sempre per la continuità di  $W$ , esisterà un intorno  $U$  di  $\mathbf{u}^*$  tale che per ogni  $\mathbf{x} \in U$  si abbia

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{u}^* \Rightarrow W(\mathbf{x}) > W(\mathbf{u}^*).$$

Poiché però  $\mathbf{u}(t_k)$  tende a  $\mathbf{u}^*$  per  $k \rightarrow +\infty$ , esisterà  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $\mathbf{u}(t_k) \in U$ , e dunque

$$W(\mathbf{u}(t_k)) < W(\mathbf{u}^*)$$

che è assurdo. ■

(4.3) ESEMPIO. Riprendiamo il primo sistema dell'esempio (3.3)

$$\ddot{x} + \alpha |\dot{x}| \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

che si scrive al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \alpha y |y|. \end{cases}$$

nel caso  $\alpha > 0$ . La funzione  $W(x, y) = \omega^2 x^2 + y^2$  è funzione di Ljapunov per il sistema; infatti

$$\frac{dW}{dt} = 2\omega^2 x \dot{x} + 2y \dot{y} = 2\omega^2 x y - 2\omega^2 x y - 2\alpha |y| y^2 = -2\alpha |y| y^2 < 0$$

sulle soluzioni non di equilibrio. Pertanto  $(0, 0)$  è asintoticamente stabile.

(4.4) ESEMPIO. Consideriamo un'equazione scalare del primo ordine autonoma

$$\dot{x} = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

e sia  $\bar{x}$  una sua soluzione di equilibrio isolata, ossia una soluzione isolata di  $f(x) = 0$ . Se  $f$  è una funzione derivabile, allora la funzione  $W(x) = (f(x))^2$  ha un minimo isolato in  $\bar{x}$ . Ora, se  $f$  è decrescente in un intorno di  $\bar{x}$ ,

$$\frac{d}{dt}W(x(t)) = 2f(x(t))f'(x(t))\dot{x} = 2f(x(t))^2 f'(x(t)) \leq 0$$

e dunque si avrà stabilità di  $\bar{x}$ . Se poi  $f$  è strettamente decrescente, allora vi sarà anche stabilità asintotica, in quanto  $\dot{W} < 0$  per  $x \neq \bar{x}$ .

In effetti, questo accade perché la direzione del vettore “velocità”  $\dot{x}$  è diretto verso  $\bar{x}$  sia per  $x < \bar{x}$  (e dunque  $\dot{x} = f(x) > 0$ ) che per  $x > \bar{x}$  (e dunque  $\dot{x} = f(x) < 0$ ). Più avanti, nell’esempio (5.1) e nella proposizione (5.3), vedremo che  $f$  è crescente in un intorno di  $\bar{x}$  o se ammette massimo o minimo in  $\bar{x}$ , la posizione data è instabile.

Fin qui la teoria per sistemi in generale, ossia per sistemi del primo ordine. Tuttavia i teoremi che originariamente A.M. Ljapunov enunciò riguardavano sistemi lagrangiani, ossia sistemi del secondo ordine. Il teorema dal quale egli trasse l’idea di funzione di Ljapunov era il celebre teorema di Dirichlet-Lagrange, che ora possiamo dimostrare con le tecniche fin qui viste.

**TEOREMA (di Dirichlet-Lagrange).** *Sia dato un sistema lagrangiano soggetto a vincoli fissi e forze conservative con potenziale  $U$  e a eventuali forze dissipative o giroscopiche. Se la funzione  $U$  ha un massimo locale stretto in  $\bar{\mathbf{u}}$ , allora  $\bar{\mathbf{u}}$  è una posizione di equilibrio stabile.*

*Dimostrazione.* Poniamo  $V = -U$ , che dunque ha un minimo locale stretto in  $\bar{\mathbf{u}}$ . Mostriamo che la funzione

$$W(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + V(\mathbf{q})$$

è una funzione di Ljapunov per il sistema. Innanzitutto, dal momento che l’energia potenziale è definita a meno di una costante additiva, non è restrittivo supporre che  $V$  verifichi  $V(\bar{\mathbf{u}}) = 0$ . Poiché  $T$  è positiva, ne segue che  $W$  è positiva. Inoltre  $T = 0$  se e solo se  $\dot{\mathbf{q}} = 0$ , ossia il minimo di  $W$  può aversi solo su  $(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{0})$ . Inoltre, se  $\mathbf{u}(0) = \bar{\mathbf{u}}$ , si ha  $W = 0$  e, non potendo decrescere, deve rimanere  $W(\mathbf{u}(t)) = 0$ , il che implica  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$ , cioè  $\bar{\mathbf{u}}$  è posizione di equilibrio. Infine, per il teorema dell’energia, su un generico moto possibile si ha dalla (I, 7.3)

$$\frac{dW}{dt} = P_{\text{diss}} < 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{dW}{dt} = 0,$$

cioè  $W$  è funzione di Ljapunov. Dal teorema di Ljapunov si trae la tesi. ■

Possiamo ora dimostrare il teorema di Dirichlet-Lagrange sulla stabilità asintotica.

**TEOREMA (di Dirichlet-Lagrange sulla stabilità asintotica).** *Sia dato un sistema lagrangiano soggetto a vincoli fissi e forze conservative con potenziale  $U$  e a forze dissipative ed eventualmente giroscopiche. Se la funzione  $U$  ha un massimo locale stretto in  $\bar{\mathbf{u}}$ , allora  $\bar{\mathbf{u}}$  è una posizione di equilibrio asintoticamente stabile.*

*Dimostrazione.* Dal teorema di Dirichlet-Lagrange sappiamo che  $(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{0})$  è stabile. Abbiamo poi visto che  $W$  è una funzione di Ljapunov con minimo locale in  $(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{0})$ . Per definizione di forze dissipative si ha stavolta

$$\frac{dW}{dt} = P_{\text{diss}} < 0$$

sulle soluzioni non di equilibrio. Con il teorema di Ljapunov sulla stabilità asintotica si completa la dimostrazione. ■

**ESEMPIO.** Consideriamo un sistema unidimensionale soggetto a due forze, una del tipo  $-h|\dot{x}|\dot{x}$  e una del tipo  $-kx$ . La prima è chiaramente dissipativa in quanto

$$Q\dot{q} = -h|\dot{x}|\dot{x}^2 \leq 0$$

e si annulla solo se il punto è in equilibrio. L'altra ammette potenziale  $U = -kx^2/2$  che ha un massimo locale stretto in  $(0,0)$ . Dunque  $(0,0)$  è asintoticamente stabile.

La teoria delle funzioni di Ljapunov ha anche molti contatti col concetto di insieme  $\omega$ -limite introdotto al n. 3.2. Essi sono riassunti nel teorema che segue.

**TEOREMA (Principio di Invarianza di La Salle).** *Supponiamo che un sistema ammetta una funzione di Ljapunov  $W$  e sia  $\mathbf{u}_0$  tale che  $\gamma^+(\mathbf{u}_0)$  sia limitata. Allora si ha che*

- i) esiste  $\lim_{t \rightarrow +\infty} W(S(t)\mathbf{u}_0) = m$ ;*
- ii)  $\forall \mathbf{x} \in \omega(\mathbf{u}_0) : W(\mathbf{x}) = m$ ;*
- iii)  $\forall \mathbf{x} \in \omega(\mathbf{u}_0) : W(S(t)\mathbf{x}) = W(\mathbf{x})$ ;*

Se inoltre  $W$  è tale che  $W(S(t)\mathbf{x}) = W(\mathbf{x})$  solo sui punti di equilibrio di  $S(t)$ , allora, detto  $E$  l'insieme dei punti di equilibrio del sistema, si ha che  $E$  è chiuso e

$$iv) E = \omega(\mathbf{u}_0).$$

*Dimostrazione.* *i)* Per ipotesi, l'insieme  $\overline{\gamma^+(\mathbf{u}_0)}$  è chiuso e limitato, dunque compatto. Pertanto la funzione  $t \mapsto W(\mathbf{u}(t))$  è continua e definita su un compatto, dunque limitata. Essa è anche non decrescente, per cui esiste

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} W(S(t)\mathbf{u}_0) = m.$$

*ii)* Se  $\mathbf{x} \in \omega(\mathbf{u}_0)$  (che esiste per il teorema (2.3)), per il teorema (2.2) esiste una successione divergente  $(t_k)$  tale che  $S(t_k)\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(t_k) \rightarrow \mathbf{x}$ . Pertanto, per la continuità di  $W$

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} W(S(t_k)\mathbf{u}_0) = W(\mathbf{x}) = m.$$

*iii)* Sappiamo dal teorema (2.3) che  $\omega(\mathbf{u}_0)$  è invariante, per cui  $S(t)\mathbf{x} \in \omega(\mathbf{u}_0)$ . Quindi, poiché  $W$  è costante su  $\omega(\mathbf{u}_0)$  per il punto precedente, abbiamo

$$W(S(t)\mathbf{x}) = m = W(\mathbf{x}).$$

*iv)*  $E$  è chiuso perchè controimmagine dell'insieme chiuso  $\{0\}$  tramite l'applicazione continua  $S(t)$ . Per il punto *iii)*, se  $x \in \omega(\mathbf{u}_0)$ , abbiamo  $W(S(t)\mathbf{x}) = W(\mathbf{x})$  e dunque, per le ipotesi fatte su  $W$ ,  $\mathbf{x}$  è un punto di equilibrio, ossia  $x \in E$ , quindi  $\omega(\mathbf{u}_0) \subseteq E$ . Dal momento che  $E$  è ovviamente invariante, per il teorema (2.3), si deve avere  $E \subseteq \omega(\mathbf{u}_0)$ , e dunque la tesi. ■

**COROLLARIO.** *Nelle stesse ipotesi fatte per la iv) del teorema precedente, si ha che l'insieme dei punti di equilibrio di  $S(t)$  è non vuoto, compatto e attrattivo:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S(t)\mathbf{u}_0, E) = 0.$$

*Inoltre, tale proprietà è anche verificata dall'insieme*

$$E_m = \{\mathbf{x} \in E : W(\mathbf{x}) = m\}.$$

In particolare, se  $E_m$  è discreto, si ha che esiste  $\bar{\mathbf{u}} \in E_m$  tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)\mathbf{u}_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}.$$

*Dimostrazione.* Il primo gruppo di proprietà discende dalle proprietà dell'insieme  $\omega$ -limite.  $E_m = W^{-1}(\{m\})$  è chiuso perché  $W$  è continua. Per il punto *ii*) del teorema, per ogni  $\mathbf{x} \in \omega(\mathbf{u}_0)$  si ha  $W(\mathbf{x}) = m$ , ossia  $\mathbf{x} \in E_m$ . Come nel punto *iv*) del teorema troviamo allora che  $\omega(\mathbf{u}_0) = E_m$ , col che si ha compattezza e attrattività. Infine, se  $E_m$  è discreto, poiché deve essere connesso per le proprietà dell'insieme  $\omega$ -limite, deve ridursi a un punto  $\bar{\mathbf{u}}$ . ■

Càpita talvolta di avere sistemi con posizioni di equilibrio non isolate. In questo caso i teoremi di Ljapunov non sono applicabili, ma potrebbe esserlo quello di La Salle, in quanto non richiede ipotesi sull'insieme delle posizioni di equilibrio.

**OSSERVAZIONE.** Il precedente teorema si può applicare quando in un sistema lagrangiano non sono presenti forze conservative ma solo dissipative o giroscopiche. Infatti in quel caso  $T+U$  fa sempre la parte della funzione di Ljapunov, ma dipende solo da  $\dot{\mathbf{q}}$  e si annulla in tutto l'iperpiano  $\{\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}\}$ .

La precedente trattazione vale solo per sistemi in dimensione finita, ossia nel caso in cui  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ , ma con opportuni aggiustamenti, in particolare con opportune ipotesi di compattezza, si possono generalizzare al caso di spazi di funzioni.

### 3.5. Instabilità dell'equilibrio

Fin qui si è discusso della stabilità, semplice o asintotica, per fornire condizioni sufficienti affinché questa si verifichi. Spesso, però, serve anche sapere quando una certa posizione di equilibrio è instabile, e in questo senso i teoremi precedenti non dicono nulla in proposito. Vale però il terzo dei teoremi di Ljapunov.

**TEOREMA (di Ljapunov sull'instabilità).** *Supponiamo che un sistema ammetta una posizione di equilibrio isolata e che esista una funzione  $W$  che ammetta in questa posizione un minimo stretto e tale che esista un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  per cui*

$$\mathbf{u}(t) \neq \bar{\mathbf{u}} \quad \implies \quad \frac{d}{dt}W(\mathbf{u}(t)) > 0.$$

Allora  $\bar{\mathbf{u}}$  è instabile.

*Dimostrazione.* Sia  $\|\mathbf{u}_0\| = \delta > 0$ ; per ipotesi, si ha che in  $U$

$$W(\mathbf{u}(t)) > W(\mathbf{u}_0) > 0$$

in quanto  $W$  si annulla solo su  $\bar{\mathbf{u}}$ . Fissato  $\delta$ , si avrà anche

$$\inf_{t \geq 0} \frac{d}{dt} W(\mathbf{u}(t)) = m_\delta > 0.$$

Dunque per ogni  $t \geq 0$  si ha

$$\frac{d}{dt} W(\mathbf{u}(t)) \geq m_\delta$$

da cui, integrando, troviamo

$$W(\mathbf{u}(t)) - W(\mathbf{u}_0) \geq m_\delta t$$

per ogni  $t \geq 0$ , che implica

$$W(\mathbf{u}(t)) \geq m_\delta t + W(\mathbf{u}_0) > m_\delta t.$$

Pertanto, per ogni  $R > 0$  tale che  $B_R(\bar{\mathbf{u}}) \subseteq U$ , sia

$$M_R = \max_{\mathbf{x} \in B_R(\bar{\mathbf{u}})} W(\mathbf{x}),$$

ossia il massimo della funzione continua  $W$  sulla sfera piena di centro  $\bar{\mathbf{u}}$  e raggio  $R$  contenuta in  $U$ . Sia poi  $t$  tale che  $t > M_R/m_\delta$ . Per questo  $t$  si ha

$$W(\mathbf{u}(t)) > m_\delta t > M_R$$

ossia  $\mathbf{u}(t) \notin B_R(\bar{\mathbf{u}})$ . Ma questa è proprio la definizione di instabilità. ■

ESEMPIO. Un esempio generale abbastanza utile è quello nel quale in un sistema viene invertito il segno di  $t$ . Sia dato un sistema autonomo del tipo

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t))$$

e poniamo  $\tau = -t$ ,  $\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{u}(t)$ . Pertanto

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{v}(\tau) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = -\dot{\mathbf{u}}$$

e il sistema diviene, indicando con il punto la derivazione rispetto a  $\tau$ ,

$$\dot{\mathbf{v}}(\tau) = -\mathbf{F}(\mathbf{v}(\tau)).$$

Se supponiamo che esista una funzione di Ljapunov per la stabilità asintotica per il sistema nell'incognita  $\mathbf{v}$ , allora

$$\frac{\partial W(\mathbf{v}(\tau))}{\partial \mathbf{v}} (-\mathbf{F}(\mathbf{v}(\tau))) < 0,$$

e dunque

$$\frac{d}{dt} W(\mathbf{u}(t)) = \frac{\partial W(\mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{F}(\mathbf{u}(t)) > 0,$$

per cui applicando il precedente teorema si ha l'instabilità.

Possiamo applicare questo ragionamento al caso  $\alpha < 0$  dell'esempio (4.3), poniamo  $\tau = -t$  invertendo l'orientamento temporale. Pertanto

$$\frac{dx}{d\tau} = -\dot{x} \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} = \ddot{x}$$

e l'equazione diviene, indicando con il punto la derivazione rispetto a  $\tau$ ,

$$\ddot{x} - \alpha |\dot{x}| \dot{x} + \omega x = 0$$

ossia lo stesso sistema precedente con  $-\alpha$  al posto di  $\alpha$ . Poiché  $-\alpha > 0$ , questo sistema è asintoticamente stabile per quanto visto nell'esempio (4.3). Quindi, infine, il caso  $\alpha < 0$  per il sistema in  $t$  deve essere instabile.

(5.1) ESEMPIO. Riprendiamo l'esempio (4.4) dato dall'equazione scalare del primo ordine

$$(5.2) \quad \dot{x} = f(x)$$

dove  $f$  è una funzione derivabile e dove  $\bar{x}$  è una posizione di equilibrio, ossia tale che  $f(\bar{x}) = 0$ . Supponiamo dapprima che  $f$  sia crescente in un intorno di

$\bar{x}$ , per cui  $f' \geq 0$  in un intorno di  $\bar{x}$ . Abbiamo già osservato nell'esempio (4.4) che  $W(x) = (f(x))^2$  ha un minimo locale stretto in  $\bar{x}$  e che

$$\dot{W}(x(t)) = 2f(x(t))^2 f'(x(t)).$$

Pertanto stavolta avremo  $\dot{W} < 0$  se  $x \neq \bar{x}$ , per cui, per il teorema di Ljapunov sull'instabilità,  $\bar{x}$  è instabile.

Nel caso in cui invece  $f$  ammetta minimo locale stretto in  $\bar{x}$ , ragioniamo così: se  $U$  è un intorno di  $\bar{x}$  in cui  $f$  ammette minimo globale, per ogni  $\varepsilon$  sia  $x_\varepsilon(t)$  la soluzione dell'equazione (5.2) tale che  $x_\varepsilon(0) = \bar{x} + \varepsilon \in U$ . Poiché  $f$  ammette minimo e  $f(\bar{x}) = 0$ , si avrà  $\dot{x}(0) > 0$  e dunque  $x(t)$  è crescente. Pertanto per ogni  $\varepsilon$ , la soluzione  $x_\varepsilon(t)$  si allontanerà da  $\bar{x}$  verso destra. Se si prende  $\delta > \varepsilon$  in modo che  $\bar{x} + \delta \in U$  e  $f(\bar{x} + \delta) > 0$ , cosa senz'altro possibile, si ha che  $x_\varepsilon(t)$ , essendo crescente, sorpasserà  $\bar{x} + \delta$ , e dunque la posizione di equilibrio è instabile per definizione.

Nel caso in cui  $f$  ammetta massimo si ragiona in modo analogo, con  $-\varepsilon$  al posto di  $\varepsilon$ .

Abbiamo così dimostrato la

(5.3) PROPOSIZIONE. *Una posizione di equilibrio  $\bar{x}$  di un sistema unidimensionale*

$$\dot{x} = f(x)$$

*con  $f$  derivabile, è stabile se  $f$  è decrescente in un intorno di  $x$  e instabile se  $f$  è crescente in un intorno di  $x$ .*

Nel caso di sistemi lagrangiani, il problema di determinare delle condizioni sufficienti per l'instabilità è in generale abbastanza complesso: basti sapere che a tutt'oggi non è noto, per un sistema conservativo, che se l'energia potenziale non ammette un minimo, allora una posizione di equilibrio in tale punto deve essere instabile (in quanto l'energia cinetica è sempre definita positiva). Vi sono però delle risposte parziali che riassumiamo senza dimostrazione.

**TEOREMA (Primo teorema di instabilità).** *Supponiamo che l'energia potenziale di un sistema lagrangiano conservativo sia sviluppabile in serie fino al secondo ordine e che la forma quadratica (hessiano)*

$$V_2(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 V(\bar{\mathbf{u}})}{\partial q_i \partial q_j} \xi_i \xi_j$$

non abbia un segno definito (dunque non ammette un minimo). Allora la posizione di equilibrio  $\bar{u}$  è instabile.

ESEMPIO. Un punto materiale di massa  $m$  soggetto a una forza repulsiva di modulo  $F = k|x|$  ha un'energia potenziale  $V$  pari a  $-kx^2/2$ , che è una funzione che è massima in  $(0,0)$ . In particolare, la derivata seconda di  $V$  in  $(0,0)$  è  $-k$  e dunque  $V_2(\xi) = -k\xi^2$ . Questo basta per affermare che la posizione di equilibrio è instabile.

**TEOREMA (Secondo teorema di instabilità).** *Supponiamo che l'energia potenziale di un sistema lagrangiano conservativo sia sviluppabile in serie e che abbia un massimo stretto in  $\bar{u}$  rilevabile dall'analisi di un termine di grado  $2q$ . Supponiamo anche che non vi siano termini di grado  $2p$  con  $p < q$  che abbiano un massimo non stretto in un intorno della posizione di equilibrio. Allora la posizione di equilibrio è instabile.*

Ricordiamo che un termine di grado dispari in uno sviluppo di Taylor non può mai avere segno definito, il che spiega i numeri  $2p$  e  $2q$  nel precedente enunciato.

ESEMPIO. Un sistema bidimensionale con energia potenziale

$$V(x, y) = -(x^4 + y^4)$$

ha la matrice hessiana nulla nell'origine, per cui il primo teorema di instabilità non è applicabile. Però  $V$  non ha un minimo, questo fatto si rileva da termini di quarto ordine e non esistono altri termini di ordine più basso che hanno un massimo non stretto nell'origine. Pertanto il secondo teorema è applicabile e si ha instabilità.

ESEMPIO. Consideriamo invece un sistema bidimensionale con energia potenziale

$$V(x, y) = -(x + y)^2 - (x^4 + y^4).$$

La matrice hessiana in  $(0,0)$ , l'unica posizione di equilibrio, è

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

e ha autovalori 0 e  $-4$ , per cui la forma quadratica associata

$$V_2(\xi_1, \xi_2) = -4\xi_2^2$$

è solo semidefinita negativa.  $V$  ha un massimo in  $(0,0)$  ma questo fatto si rileva dai termini di quarto ordine e sono presenti termini del secondo ordine. Pertanto nessuno dei due teoremi sull'instabilità è applicabile.

**TEOREMA (di Četaev).** *Se l'energia potenziale di un sistema lagrangiano conservativo è una funzione omogenea delle coordinate e non ha un minimo in  $\bar{\mathbf{u}}$ , allora la posizione di equilibrio  $\bar{\mathbf{u}}$  è instabile.*

**ESEMPIO.** Un sistema tridimensionale con energia potenziale

$$V(x, y, z) = xyz.$$

Essendo di terzo grado, tutti i termini di secondo grado calcolati in  $(0,0,0)$  sono nulli. Inoltre la funzione non ha massimo in tale punto, col che i teoremi di instabilità sono inapplicabili. Per il teorema di Četaev, però, la posizione data è instabile.

### 3.6. Stabilità del movimento

Non sempre si può essere in presenza di sistemi che possiedono soluzioni di equilibrio. Spesso, specie nei sistemi non autonomi, si ha a che fare con soluzioni dipendenti dal tempo di cui è interessante studiare la stabilità. Per questo motivo mostriamo che la stabilità di una soluzione generica può essere sempre ricondotta a quella dell'equilibrio, a patto di cambiare la forma del sistema.

(6.1) **PROPOSIZIONE.** *Supponiamo che  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  sia una soluzione del sistema*

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), t)$$

Allora  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)$  verifica il sistema

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{v}(t) + \bar{\mathbf{u}}(t), t) - \dot{\bar{\mathbf{u}}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{v}(t), t)$$

e questo sistema ammette la posizione nulla come posizione di equilibrio.

*Dimostrazione.* È evidente in quanto

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\bar{\mathbf{u}}}(t) = \mathbf{F} - \dot{\bar{\mathbf{u}}}(t)$$

e in quanto per definizione di  $\bar{\mathbf{u}}$ ,

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}(t) - \mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}(t), t) = \mathbf{0}. \blacksquare$$

In questo modo è possibile studiare la stabilità di una soluzione generica con le stesse tecniche che abbiamo illustrato. L'unica novità è che se il sistema in esame è autonomo, in generale il sistema nell'incognita  $\mathbf{v}$  può essere non autonomo.

Le definizioni di stabilità e stabilità asintotica restano invariate, ma è opportuno introdurre un concetto ulteriore, legato al fatto che la forma del sistema dipende dal tempo. Per sistemi *autonomi*, abbiamo visto nel teorema (II, 3.2) che la scelta dell'origine dei tempi è arbitraria, e pertanto nella definizione di stabilità (1.1) e stabilità asintotica (1.7) non abbiamo dato rilievo al valore dell'istante iniziale  $t_0$ . Dal momento che avremo ora a che fare con sistemi *non autonomi*, specifichiamo meglio il suo ruolo.

**DEFINIZIONE.** *Una posizione di equilibrio  $\bar{\mathbf{u}}$  di un sistema non autonomo si dice uniformemente stabile se per ogni intorno  $V$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  esiste un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che per ogni  $t_0 \geq 0$  si abbia*

$$\mathbf{u}(t_0) \in U \Rightarrow \mathbf{u}(t) \in V$$

*in tutti gli istanti  $t \geq t_0$ .*

Anche se apparentemente non sembra cambiato nulla, di nuovo è l'ordine dei quantificatori a giocare un ruolo essenziale. Infatti qui *prima* si determina  $U$  tale che per ogni  $t_0 \geq 0$  valga l'usuale formula, per cui l'intorno  $U$  trovato va bene per tutti i  $t_0 \geq 0$ , mentre nella definizione (1.1) si diceva che per ogni  $V$  e per ogni  $t_0 \geq 0$  doveva esistere  $U$  per cui valeva la formula, e in quel caso si potevano avere  $U$  diversi per istanti iniziali diversi (sebbene allora ciò non giocasse alcun ruolo trattandosi di sistemi autonomi).

In modo analogo possiamo introdurre la nozione di uniformità anche per la stabilità asintotica.

**DEFINIZIONE.** *Una posizione di equilibrio  $\bar{\mathbf{u}}$  di un sistema non autonomo si dice uniformemente asintoticamente stabile se è uniformemente stabile e se esiste un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| = 0$$

per ogni orbita uscente da  $\mathbf{u}_0 \in U$  ad ogni  $t_0$ .

Il risultato che ci prefiggiamo di raggiungere è quello di estendere alcuni risultati validi per sistemi autonomi al caso non autonomo. Incominciamo pertanto dai sistemi lineari non autonomi.

DEFINIZIONE. *Dato un sistema lineare non autonomo*

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x},$$

*diremo che  $X(t)$  è una matrice fondamentale per il sistema se ogni sua colonna è una soluzione del sistema e se le sue colonne sono linearmente indipendenti.*

Segue da questa definizione che  $\det X(t) \neq 0$ .

TEOREMA. *La soluzione del problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

è data da

$$\mathbf{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$$

dove  $X(t)$  è una matrice fondamentale per il sistema.

*Dimostrazione.* Essendo il problema lineare, se  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$  sono soluzioni, anche le loro combinazioni lineari lo sono; dunque per ogni vettore  $\mathbf{c}$  si ha che  $X(t)\mathbf{c}$  è soluzione, in quanto vettore con combinazione lineare di soluzioni. Ponendo  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  si trova

$$X(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}_0$$

da cui  $\mathbf{c} = X^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$  e la tesi. ■

Poniamo infine per ogni matrice  $X$   $n \times n$

$$\|X\| = \left( \sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A questo punto possiamo enunciare il principale teorema di stabilità per sistemi lineari non autonomi.

(6.2) TEOREMA. *Dato un sistema lineare non autonomo*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x},$$

*e indicata con  $\mathbf{X}(t)$  una matrice fondamentale per il sistema, valgono i seguenti risultati:*

1)  $\mathbf{0}$  è stabile se e solo se esiste  $M(t_0) > 0$  tale che

$$\|\mathbf{X}(t)\| \leq M \quad \text{per ogni } t \geq t_0;$$

2)  $\mathbf{0}$  è uniformemente stabile per  $t_0 \geq \tau$  se e solo se esiste  $M > 0$ , dipendente da  $\tau$ , tale che

$$\|\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s)\| \leq M \quad \text{per ogni } t, s \geq t_0;$$

3)  $\mathbf{0}$  è asintoticamente stabile se e solo se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{X}(t)\| = 0;$$

4)  $\mathbf{0}$  è uniformemente asintoticamente stabile per  $t \geq \tau$  se e solo se esistono  $M(\tau) > 0$  e  $\alpha(\tau) > 0$  tali che

$$\|\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s)\| \leq M e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{per ogni } s, t \geq \tau.$$

Veniamo ora al problema della linearizzazione. In questo caso, per poter affermare la stabilità della soluzione nulla del sistema originario

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t)$$

è necessaria la stabilità asintotica uniforme della soluzione nulla del problema linearizzato. Vale infatti il seguente teorema, che riportiamo senza dimostrazione.

TEOREMA. *Se la soluzione nulla del sistema linearizzato*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x},$$

*dove  $\mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}}, t)$  è uniformemente asintoticamente stabile, allora lo è anche la soluzione nulla del sistema originario.*

Per verificare in pratica, tramite il teorema (6.2), la stabilità asintotica uniforme, ci si può servire del seguente risultato di Algebra lineare:

TEOREMA. *Se la matrice  $A(t)$  ammette, per ogni  $t$ , autovalori a parte reale strettamente negativa, allora esiste una costante  $\alpha > 0$  tale che, per la matrice fondamentale del sistema lineare, si abbia*

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq e^{-\alpha(t-s)}.$$

Pertanto, per il teorema (6.2), si ha stabilità asintotica uniforme della soluzione nulla del sistema di partenza.

### 3.7. Piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile

In taluni casi anche un modello accurato come il sistema lagrangiano può condurre a problemi matematici considerevolmente complessi come i sistemi non lineari di equazioni differenziali. Per questo in alcuni casi si presenta il problema di *semplificare* il modello. Presentiamo qui il caso più importante, della linearizzazione attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Supponiamo di avere un sistema lagrangiano con uno stato di equilibrio isolato, per cui si abbia

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}(\bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

e supponiamo che  $V$  abbia in  $\bar{\mathbf{u}}$  un minimo stretto, cosicché la posizione di equilibrio corrispondente è stabile. A meno di una traslazione, si può sempre pensare che  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ , e aggiustando opportunamente la costante additiva dell'energia potenziale possiamo pensare di avere  $V(\mathbf{0}) = 0$ . Pertanto l'energia potenziale assume la forma

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{q} \cdot H\mathbf{q} + R_V(\mathbf{q})$$

dove il termine  $R_V(\mathbf{q})$  è un infinitesimo di ordine superiore a  $\|\mathbf{q}\|^2$  e dove la forma quadratica di matrice  $H$  è definita positiva, ossia

$$\frac{1}{2}\mathbf{q} \cdot H\mathbf{q} > 0 \text{ se } \mathbf{q} \neq \mathbf{0}.$$

L'idea fondamentale è ora di *sostituire* a  $V$  la sua espressione di secondo grado, trascurando il resto  $R$ ; sebbene questo equivalga a cambiare il modello,

ciò non introduce, come vedremo in seguito, variazioni di rilievo, grazie alla stabilità.

Naturalmente, poiché nelle equazioni differenziali entra l'intera funzione di Lagrange, sarà necessario linearizzare anche l'energia cinetica. Poiché  $T$  è di secondo ordine in  $\dot{\mathbf{q}}$ , si avrà

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot T(\mathbf{0}) \dot{\mathbf{q}} + R_T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

dove al solito, per la positività di  $T$  si avrà

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot T(\mathbf{0}) \dot{\mathbf{q}} > 0 \text{ se } \dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$$

e dove  $R_T$  è infinitesimo di ordine superiore al secondo in  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Fatte queste posizioni, la funzione di Lagrange diventa

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}} \cdot T \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q} \cdot H \mathbf{q}] + R_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

dove si è posto per brevità  $T = T(\mathbf{0})$  e  $R_L = R_T + R_V$ . La funzione di Lagrange linearizzata è perciò

$$L^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}} \cdot T \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q} \cdot H \mathbf{q}]$$

e si constata immediatamente che le equazioni di Lagrange associate sono

$$T \ddot{\mathbf{q}} + H \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

o anche in componenti

$$\sum_{j=1}^n [T_{ij} \ddot{q}_j + H_{ij} q_j] = 0.$$

Analizziamo ora questo sistema lineare.

Ponendo  $\mathbf{p} = T \dot{\mathbf{q}}$  si ottiene la forma hamiltoniana

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = T^{-1} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -H \mathbf{q} \end{cases}$$

che è un sistema lineare di dimensione  $2n$  con matrice

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & T^{-1} \\ -H & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

A questo punto un teorema di Algebra Lineare afferma che gli autovalori della matrice  $A$  sono tutti *immaginari puri* e distinti, a due a due coniugati. Pertanto la posizione di equilibrio è un centro, ed è stabile. In questo modo si vede che la caratteristica di stabilità non è andata persa nella linearizzazione.

Dunque le soluzioni dell'equazione linearizzata si esprimono come somme di seni e coseni di alcune particolari frequenze che possiamo calcolare. Ponendo  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{C} \exp(\alpha t)$ , dove  $\alpha$  è un autovalore di  $A$ , si trova

$$[\alpha^2 T + H] \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

da cui, per il teorema di Cramer, si hanno soluzioni non banali se e solo se

$$\det [\alpha^2 T + H] = 0.$$

Sapendo infine che  $\alpha = \pm i\omega$  dal teorema citato precedentemente, troviamo per le pulsazioni fondamentali l'equazione

$$\det [H - \omega^2 T] = 0.$$

Al sistema linearizzato è possibile dare una struttura più semplice di quella che abbiamo indicato. Esiste infatti un teorema di Algebra lineare (analogo a quello della diagonalizzazione delle forme quadratiche), che afferma che esiste un sistema di coordinate  $(\xi_i)_{i=1, \dots, n}$ , legato alle  $(q_i)$  da una trasformazione non singolare, ossia

$$\mathbf{q} = B \boldsymbol{\xi}, \quad \det B \neq 0$$

tale che la funzione di Lagrange del sistema linearizzato nelle coordinate  $\boldsymbol{\xi}$  si scriva nella forma

$$L^*(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{i=1}^n (\dot{\xi}_i^2 + \omega_i^2 \xi_i^2)$$

dove  $\omega_i$  sono proprio le pulsazioni fondamentali che abbiamo indicato prima.

In queste coordinate le equazioni linearizzate assumono la forma

$$\ddot{\xi}_i(t) + \omega_i^2 \xi_i(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

da cui si vede che le soluzioni sono moti armonici del tipo

$$\xi_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \delta_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

e che quindi le funzioni incognite  $q_i(t)$  si esprimono tramite le relazioni

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^n B_{ij} A_j \cos(\omega_j t + \delta_j)$$

ossia che le soluzioni del sistema linearizzato sono combinazioni lineari di moti armonici.

### 3.8. Cicli limite e soluzioni periodiche

Tra le soluzioni non di equilibrio che ricorrono spesso nelle applicazioni la più importante è senz'altro il *ciclo limite*. Si tratta di una soluzione periodica cui le traiettorie tendono (ciclo limite stabile) o da cui si allontanano (ciclo limite instabile). Più precisamente, si ha la seguente definizione.

**DEFINIZIONE.** *Un ciclo limite è un'orbita chiusa  $\gamma$  per la quale esiste  $\mathbf{x} \notin \gamma$  tale che  $\gamma \subseteq \omega(\mathbf{x})$ .*

**ESEMPIO.** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Si vede senza troppa difficoltà che la soluzione di equilibrio di questo sistema è  $(0, 0)$ . Il sistema linearizzato in  $(0, 0)$  ha matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che possiede autovalori  $1 \pm i$ , per cui l'origine è instabile. A questo punto poniamo  $W(x, y) = x^2 + y^2$  e osserviamo che

$$\frac{d}{dt} W(x(t), y(t)) = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2(x^2 + y^2)[1 - (x^2 + y^2)]$$

oppure, ponendo  $r^2 = x^2 + y^2$ , abbiamo l'equazione

$$\frac{d}{dt}r^2 = 2r^2(1 - r^2)$$

dalla quale segue

$$\dot{r} = r(1 - r^2).$$

Da questa equazione si vede innanzitutto che se  $r = 1$  in un certo istante, allora si ha  $r = 1$  in tutti gli istanti successivi. Quindi la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 è invariante. Inoltre è sempre evidente dall'equazione precedente che se in un certo istante si ha  $r < 1$ , allora  $r$  tende a crescere, mentre se  $r > 1$ , allora  $r$  tende a decrescere, per cui sembra che  $r = 1$  sia un ciclo limite stabile. Ad esso corrisponde la soluzione  $x = \cos t, y = \sin t$ , come è facile verificare. Poniamo allora  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = (x - \cos t, y - \sin t)$ . Per il teorema (6.1),  $\mathbf{v}$  verifica il sistema

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -(v_2 + \sin t) + (v_1 + \cos t)(1 - (v_1 + \cos t)^2 - (v_2 + \sin t)^2) + \sin t \\ \dot{v}_2 = (v_1 + \cos t) + (v_2 + \sin t)(1 - (v_1 + \cos t)^2 - (v_2 + \sin t)^2) - \cos t \end{cases}$$

ossia, dopo alcuni passaggi,

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -v_2 - (v_1 + \cos t)(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 \cos t + 2v_2 \sin t) \\ \dot{v}_2 = v_1 - (v_2 + \sin t)(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 \cos t + 2v_2 \sin t) \end{cases}$$

Si vede subito che ora  $(0,0)$  è posizione di equilibrio. La matrice del sistema linearizzato è

$$\begin{bmatrix} -2 \cos^2 t & -(1 + \sin 2t) \\ 1 - \sin 2t & -2 \sin^2 t \end{bmatrix}$$

che ammette due autovalori pari a  $-1$ . Pertanto, come ci si aspettava, il ciclo limite trovato è stabile.

Non sempre, come nell'esempio precedente, si riesce a calcolare esattamente l'equazione del ciclo limite. In generale, anzi, non è per niente semplice affermare che un ciclo limite esiste. Tuttavia, per sistemi *bidimensionali*, esiste un fondamentale teorema che permette in molti casi di affermare l'esistenza di un ciclo limite.

**TEOREMA (di Poincaré-Bendixson).** *Se un sistema bidimensionale ammette un insieme  $\omega$ -limite limitato, non vuoto e non contenente alcun punto di equilibrio, allora esso è un'orbita chiusa.*

Non daremo la dimostrazione di questo teorema, osservando solo che un'orbita chiusa non è necessariamente un ciclo limite, in quanto, per esempio, tutte le orbite periodiche dell'esempio (1.5) sono orbite chiuse, ma nessuna di esse è un ciclo limite. Un ciclo limite è invece un'orbita chiusa che è insieme  $\omega$ -limite di un punto che non gli appartiene. Per affermare l'esistenza di un ciclo limite ci si può servire del seguente corollario.

**COROLLARIO.** *Supponiamo che un sistema bidimensionale ammetta un insieme  $B$  non vuoto, chiuso, limitato e positivamente invariante. Allora in questo insieme esistono almeno un ciclo limite o un punto di equilibrio.*

*Dimostrazione.* Dato  $x \in B$ , per il teorema (2.3),  $\omega(x)$  non è vuoto e limitato. Per il teorema di Poincaré-Bendixson, questo insieme o contiene punti di equilibrio, oppure è un'orbita chiusa, che in questo caso è insieme  $\omega$ -limite di  $x$ , cioè è un ciclo limite. ■

**ESEMPIO.** Un esempio interessante di ciclo limite è fornito dalla cosiddetta equazione di Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

che presenta il comportamento indicato nella figura di copertina.

### 3.9. Orbite periodiche e sezione di Poincaré

Il legame fra sistemi dinamici continui e sistemi discreti è rappresentato dalla sezione di Poincaré. Supponiamo di avere un sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t)$$

(qui  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) e di avere un semispazio vettoriale  $S$  di dimensione  $n - 1$  (che chiameremo per brevità semipiano) tale da essere *trasversale* al campo vettoriale  $\mathbf{F}$ , ossia tale che per ogni  $\mathbf{x} \in S$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \neq 0$$

dove  $\mathbf{n}$  è il vettore normale all'iperpiano  $S$ . Data una traiettoria, per esempio uscente da un punto  $\mathbf{x}_0$  di  $S$ , consideriamo il punto  $\mathbf{x}_1$ , se esiste, in cui essa

interseca di nuovo l'semipiano  $S$ . Successivamente, partendo da  $\mathbf{x}_1$ , potrà esistere  $\mathbf{x}_2$  in cui l'orbita uscente da  $\mathbf{x}_1$  interseca  $S$ , e così via. In questo modo viene definita una mappa iterata sull'semipiano  $S$ , che viene detto *sezione di Poincaré*.

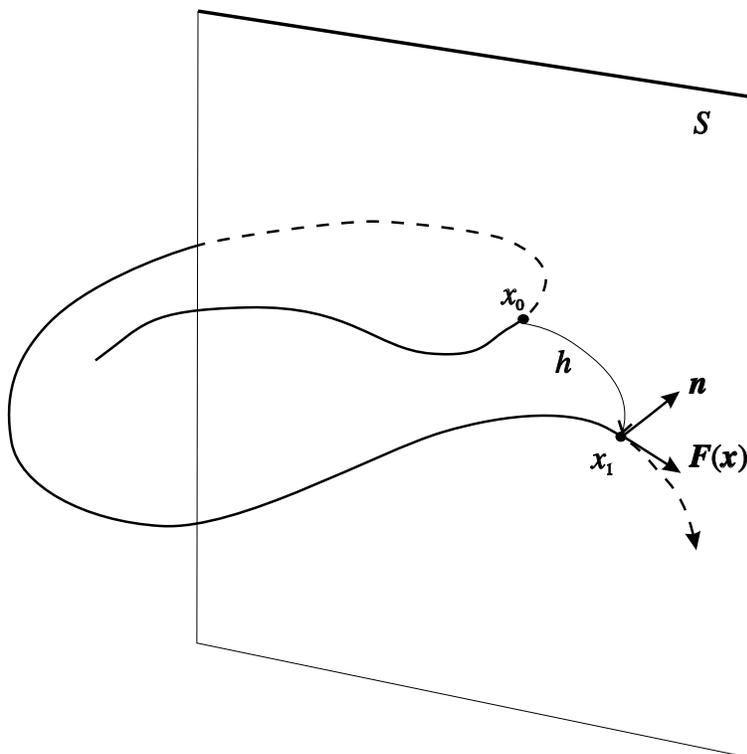


FIGURA 31

*Sezione di Poincaré.*

**DEFINIZIONE.** Dato un sistema di equazioni differenziali e dato un semipiano trasversale al campo  $\mathbf{F}$ , supponiamo che per ogni  $\mathbf{x} \in S$  esista  $\bar{t} \in \mathbb{R}$  tale che  $\mathbf{u}(t) \notin S$  per  $t < \bar{t}$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\bar{t}) \in S$ . L'applicazione  $\mathbf{h} : S \rightarrow S$  viene detta *mappa di Poincaré* per il sistema dato.

La mappa di Poincaré è molto utile per determinare eventuali orbite periodiche del sistema. Vale infatti la seguente proposizione.

**PROPOSIZIONE.** Supponiamo che un sistema dinamico ammetta una mappa di Poincaré. Se esiste un punto fisso della mappa di Poincaré, allora esiste un'orbita periodica per il sistema dato. Tale orbita è stabile o instabile a seconda se il punto fisso lo è.

*Dimostrazione.* Detto  $\bar{\mathbf{x}}$  il punto fisso, la relazione  $\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}$  implica che

l'orbita del sistema uscente da  $\bar{x}$  deve ripassare in  $\bar{x}$ , e ciò, per l'unicità delle soluzioni, implica che l'orbita è periodica.

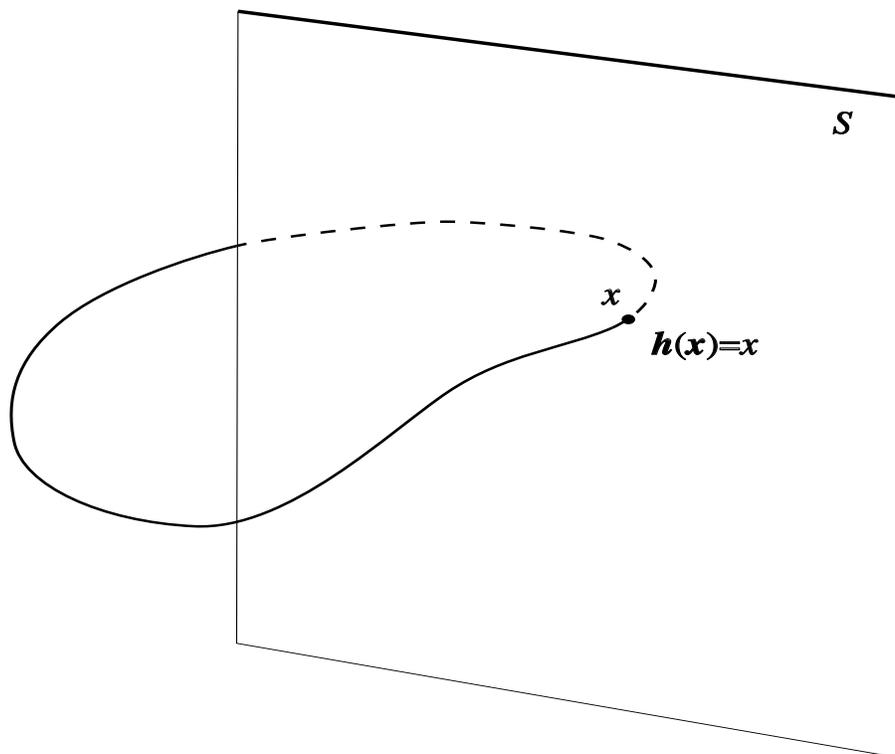


FIGURA 32

*Un ciclo limite è punto fisso della mappa di Poincaré.*

Se l'orbita è stabile, allora le traiettorie “vicine” all'orbita periodica si manterranno “vicine” ad essa, e quindi a maggior ragione lo saranno anche le intersezioni con  $S$ . Viceversa, se l'orbita è instabile, anche le intersezioni con il semipiano  $S$  non potranno restare “vicine” al punto  $\bar{x}$ . ■

Osserviamo che non è vero il viceversa: possono esistere orbite periodiche che non corrispondono a punti fissi della mappa di Poincaré.

Per esempio, a una mappa di Poincaré oscillante fra due valori corrisponde pure un'orbita periodica. In generale, vale un risultato più forte: se si decide di chiamare “orbita periodica” di un sistema discreto una successione di punti del sistema tale che il primo e l'ultimo coincidano, allora vi è perfetta equivalenza fra le orbite del sistema e quelle della mappa di Poincaré.

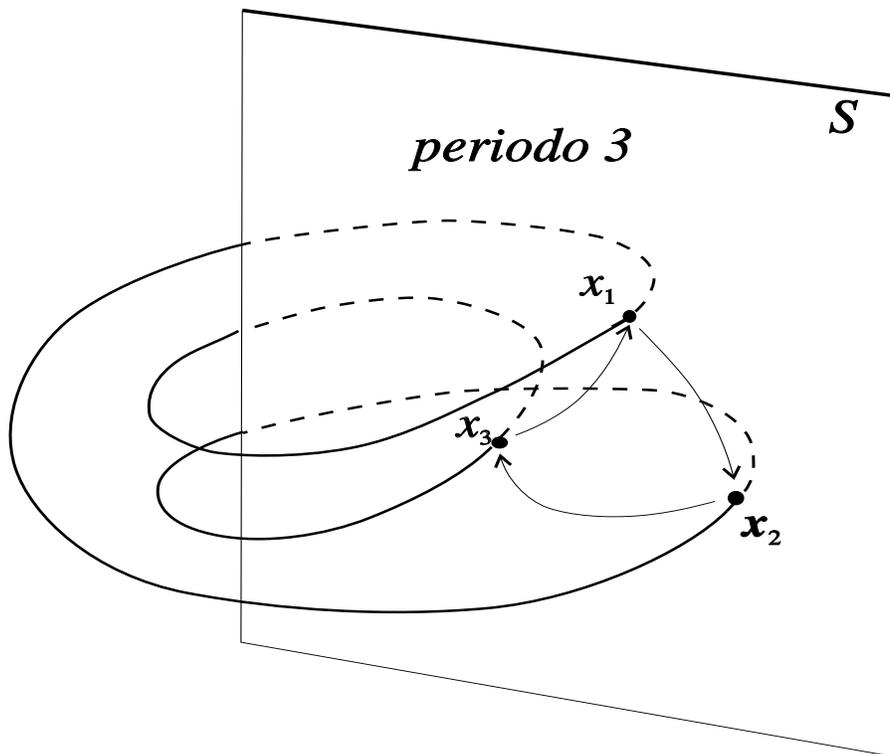


FIGURA 33

*Orbite periodiche non associate a punti fissi della mappa di Poincaré.*

Un caso interessante di applicazione di questa tecnica si ha nel caso in cui il sistema contiene termini dipendenti esplicitamente da  $t$  solo del tipo  $\cos \omega t$  o  $\sin \omega t$ :

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \cos \omega t)$$

(ovviamente ci si può sempre ricondurre alla sola dipendenza da  $\cos \omega t$ ). Allora è possibile porre  $\vartheta = t$  e riscrivere il sistema come segue:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \cos \omega \vartheta) \\ \dot{\vartheta} = 1 \end{cases}$$

che è un sistema *autonomo*. Chiaramente le orbite di questo sistema si avvolgono nel piano con velocità angolare costante pari a 1. Si può poi scegliere come semipiano  $S$  il piano  $\vartheta = \vartheta_0$ , e vedere la mappa di Poincaré su questo piano. Questo metodo, molto comodo, ha il solo inconveniente che il nuovo

sistema non è più definito su  $\mathbb{R}^n$  ma su  $\mathbb{R}^n \times S^1$ , dove  $S^1$  è la circonferenza unitaria (questo fatto segue dalla natura di angolo della variabile  $\vartheta$ ). Per esempio, un sistema su  $\mathbb{R}$  diviene un sistema definito sul cilindro  $\mathbb{R} \times S^1$ , e dunque si considerano uguali i valori di  $\vartheta$  a meno di multipli di  $2\pi$ .

ESEMPIO. Consideriamo il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \cos \omega t \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La soluzione generale di questo sistema è

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{1}{\omega^2 + 1} \right) e^{-t} + \frac{1}{\omega^2 + 1} (\cos \omega t + \omega \sin \omega t).$$

Posto  $\vartheta = \omega t$ , si ha che  $\vartheta = 0$  se  $t = 2k\pi/\omega$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Possiamo allora prendere  $\vartheta = 0$  come sezione di Poincaré e trovare quindi

$$x_k = x(2k\pi/\omega) = \left( x_0 - \frac{1}{\omega^2 + 1} \right) e^{-2k\pi/\omega} + \frac{1}{\omega^2 + 1}$$

che è l'orbita della mappa di Poincaré. Si vede subito che per  $k \rightarrow +\infty$  si ha  $x_k \rightarrow \bar{x} = 1/(\omega^2 + 1)$ . Per trovare la mappa, bisogna trovare il legame fra  $x_k$  e  $x_{k+1}$ . Con semplici calcoli si trova allora

$$x_{k+1} = e^{-2\pi/\omega} x_k + \frac{1}{\omega^2 + 1} [1 - e^{-2\pi/\omega}] = h(x_k).$$

L'unico punto fisso di questa mappa è  $\bar{x}$ , che è anche asintoticamente stabile in quanto

$$h'(1/(\omega^2 + 1)) = e^{-2\pi/\omega} < 1.$$

ESEMPIO. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\vartheta} = 1. \end{cases}$$

dove  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\vartheta = \operatorname{arctg}(y/x)$ , che si vede essere ideale per l'applicazione del metodo della sezione di Poincaré. Integrando l'equazione in  $r$  si trova, con facili passaggi,

$$r(t) = \sqrt{\frac{\mu e^{2\mu t}}{e^{2\mu t} - 1}}.$$

Pertanto la traiettoria della sezione di Poincaré è data da

$$r_k = \sqrt{\frac{\mu e^{4\mu k\pi}}{e^{4\mu k\pi} - 1}}.$$

Dopo alcuni calcoli semplici ma laboriosi si trova per la mappa l'espressione

$$r_{k+1} = \sqrt{\frac{\mu e^{4\pi} r_k^2}{r_k^2 (e^{4\pi} - 1) + \mu}} = h(r_k)$$

In entrambi questi esempi la mappa di Poincaré si è potuta calcolare in quanto si conosceva la soluzione del problema. Nei casi di interesse generale, essa viene calcolata numericamente; ciononostante la sua analisi fornisce informazioni utili sul sistema.

### 3.10. Varietà stabili e instabili

Punti di equilibrio e orbite periodiche non sono i soli insiemi invarianti che un sistema può possedere. In generale, anzi, le orbite periodiche sono rare, mentre molto più frequenti sono gli insiemi che andremo a ottenere. Per semplicità, incominciamo dal caso lineare.

DEFINIZIONE. *Dato il sistema lineare*

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A} \mathbf{u}$$

siano

$$\begin{aligned} \lambda_i^+ & \quad (i = 1, \dots, p) \text{ gli autovalori di } \mathbf{A} \text{ tali che } \operatorname{Re} \lambda_i^+ > 0 \\ \lambda_i^- & \quad (i = 1, \dots, q) \text{ gli autovalori di } \mathbf{A} \text{ tali che } \operatorname{Re} \lambda_i^- < 0 \\ \lambda_i^0 & \quad (i = 1, \dots, r) \text{ gli autovalori di } \mathbf{A} \text{ tali che } \operatorname{Re} \lambda_i^0 = 0 \end{aligned}$$

(chiaramente  $p + q + r = n$ ) e siano  $\{v_i^+\}$ ,  $\{v_i^-\}$ ,  $\{v_i^0\}$  i rispettivi sistemi di autovettori. Poniamo

$$\begin{aligned} E^+ &= \text{lo spazio vettoriale generato dai } v_i^+; \\ E^- &= \text{lo spazio vettoriale generato dai } v_i^-; \\ E^0 &= \text{lo spazio vettoriale generato dai } v_i^0. \end{aligned}$$

Gli spazi vettoriali  $E^+$ ,  $E^-$ ,  $E^0$  vengono detti rispettivamente spazio instabile, spazio stabile e spazio centro.

La spiegazione di questa scelta sta nel fatto che le soluzioni giacenti in  $E^+$  hanno un comportamento che si allontana esponenzialmente dall'origine, mentre le soluzioni giacenti in  $E^-$  hanno un comportamento che tende esponenzialmente a zero. Infine, le soluzioni in  $E^0$  non hanno alcuno di questi comportamenti.

Alcuni di questi spazi possono ovviamente essere ridotti al solo vettore nullo, quando non vi sono i corrispondenti autovalori. Vediamo alcuni esempi.

ESEMPIO. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

La matrice  $A$  è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e ha autovalori  $\lambda = \pm 1$ . Con semplici calcoli si trova che  $[1 \ -1]^T$  è autovettore relativo a  $\lambda = -1$ , mentre  $[1 \ 1]^T$  è autovettore relativo a  $\lambda = +1$ .

Pertanto

$$E^+ \{(x, y) : y = x\}, \quad E^- \{(x, y) : y = -x\}, \quad \text{mentre } E^0 = \{(0, 0)\}$$

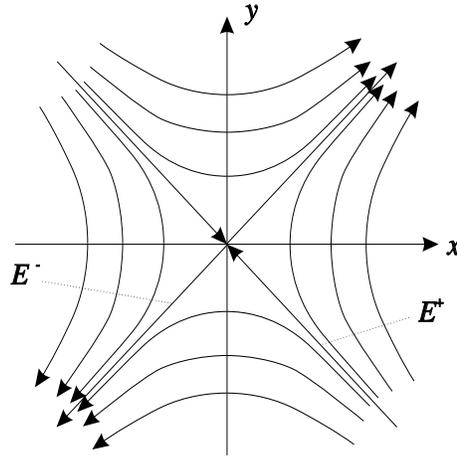


FIGURA 34

*Esempio di spazi stabili e instabili.*

Verifichiamo l'interpretazione di questi spazi. La soluzione del problema è

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}((x_0 + y_0)e^t + (x_0 - y_0)e^{-t}) \\ y(t) &= \frac{1}{2}((x_0 + y_0)e^t - (x_0 - y_0)e^{-t}) \end{aligned}$$

e se  $(x_0, y_0) \in E^-$ , allora  $x_0 + y_0 = 0$ , per cui l'orbita su  $E^-$  è

$$x(t) = -y(t) = x_0 e^{-t}$$

per cui questa orbita tende esponenzialmente a zero. Invece se  $(x_0, y_0) \in E^+$ , allora  $x_0 - y_0 = 0$  e l'orbita diviene

$$x(t) = y(t) = x_0 e^t.$$

Notiamo infine che l'origine è instabile, essendoci un autovalore a parte reale positiva (il che è come dire che  $E^+ \neq \{(0, 0)\}$ ).

ESEMPIO. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

La matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  ha autovalori  $-1$  e  $0$ , e autovettori associati rispettivamente  $[1 \ -1]^T$  e  $[1 \ 0]^T$ . Si ha dunque

$$E^- = \{(x, y) : y = -x\} \quad E^+ = \{(0, 0)\}, \quad E^0 = \{(x, y) : y = 0\}.$$

Le soluzioni sono

$$x(t) = -y_0 e^{-t} + x_0 + y_0 \quad y(t) = y_0 e^{-t}$$

e osserviamo che se  $(x_0, y_0) \in E^0$ , allora  $y_0 = 0$  e dunque  $x(t) = x_0$ ,  $y(t) = 0$  e non si ha né allontanamento né avvicinamento all'origine.

ESEMPIO. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

La matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  ha autovalori  $\pm i$ , e quindi

$$E^- = E^+ = \{(0, 0)\}, \quad E^0 = \mathbb{R}^2.$$

ESEMPIO. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 8x - 3y + z \\ \dot{z} = 12x - 6y + 2z. \end{cases}$$

Si hanno gli autovalori e corrispondenti autovettori:

$$\lambda_1 = 1, \quad [1 \ 2 \ 0]^T, \quad \lambda_2 = -1, \quad [0 \ 1 \ 2]^T, \quad \lambda_3 = 0, \quad [0 \ 1 \ 3]^T$$

per cui

$$E^+ = \{2x - y = 0\} \cap \{z = 0\}, \quad E^- = \{2y - z = 0\} \cap \{x = 0\}, \\ E^0 = \{3y - z = 0\} \cap \{x = 0\}.$$

La proprietà più notevole di questi sottospazi è che sono invarianti. Infatti

TEOREMA. *I sottospazi  $E^+, E^-, E^0$  sono invarianti.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{u} \in E^+$ . Poiché  $\mathbf{u}$  è combinazione lineare di autovettori di  $A$ , è anch'esso autovettore di  $A$  e si ha  $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \in E^+$ . Ne segue  $\dot{\mathbf{u}} \in E^+$ , e dunque la traiettoria non può mai lasciare  $E^+$ . Similmente si ragiona per gli altri spazi. ■

Infine, è evidente che vale anche la seguente proprietà:

TEOREMA. *Si ha*

$$E^- \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

$$E^+ \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow -\infty} S(t)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

*Dimostrazione.* Sappiamo che se  $\mathbf{x} \in E^-$ , allora l'orbita uscente da  $\mathbf{x}$  tende a zero esponenzialmente. Analogamente, se  $\mathbf{x} \in E^+$ , allora l'orbita uscente da  $\mathbf{x}$  si allontana esponenzialmente dall'origine. Dunque se  $t \rightarrow -\infty$  deve tendere a  $\mathbf{0}$ . ■

Osserviamo che non vi è uguaglianza in quanto se vi sono autovalori multipli, allora anche lo spazio centro possiede traiettorie che si allontanano dall'origine. Per questo non vi è una caratterizzazione così precisa di questo spazio.

Passiamo ora a sistemi non lineari. Qui la situazione si complica notevolmente, anche solo per la presenza di più punti di equilibrio. Pertanto è innanzitutto opportuno supporre che i punti di equilibrio siano isolati e limitarsi a un intorno contenente uno solo di essi.

DEFINIZIONE. *Sia dato un sistema non lineare che ammetta  $\bar{\mathbf{u}}$  come posizione di equilibrio isolata e sia  $U$  un intorno di  $\bar{\mathbf{u}}$  che contenga solo  $\bar{\mathbf{u}}$  come posizione di equilibrio. Definiamo allora*

$$W_U^+(\bar{\mathbf{u}}) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow -\infty} S(t)\mathbf{x} = \bar{\mathbf{u}} \text{ e } S(t)\mathbf{x} \in U\};$$

$$W_U^-(\bar{\mathbf{u}}) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)\mathbf{x} = \bar{\mathbf{u}} \text{ e } S(t)\mathbf{x} \in U\}.$$

*Esse si dicono rispettivamente varietà instabile locale e varietà stabile locale; se poi  $U = \mathbb{R}^n$ , allora si diranno globali.*

(Il nome “varietà” è qui da intendersi nel senso di “superficie” o “curva”)

Da questa definizione si vede un legame fra  $E^\pm$  e  $W^\pm$ . Infatti sussiste il seguente fondamentale teorema, enunciato dopo una definizione tecnica.

**DEFINIZIONE.** *Un punto di equilibrio di un sistema autonomo si dirà iperbolico se la matrice linearizzata in quel punto non ha autovalori con parte reale nulla.*

In altre parole, un punto di equilibrio iperbolico è sempre instabile o asintoticamente stabile, e ciò si deve vedere mediante linearizzazione.

**TEOREMA (della varietà stabile).** *Sia dato un sistema*

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$$

*che ammetta un punto fisso isolato iperbolico  $\bar{\mathbf{u}}$ . Allora esistono le varietà stabili e instabili locali, sono invarianti, hanno la stessa dimensione dei sottospazi invarianti  $E^\pm(\bar{\mathbf{u}})$  del sistema linearizzato e sono ad essi tangenti.*

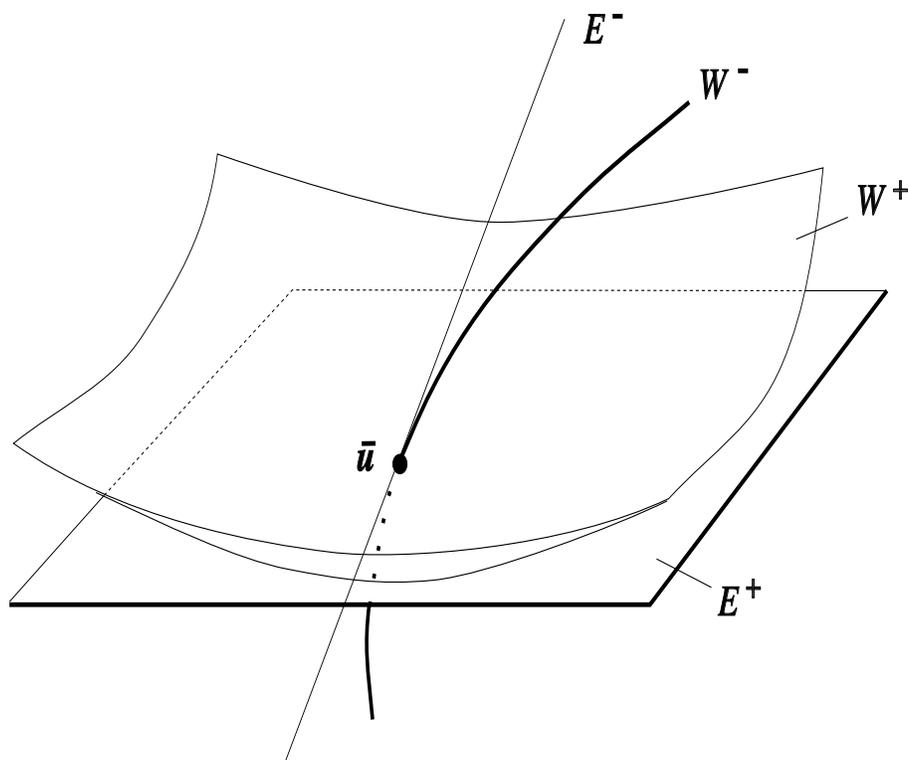


FIGURA 35

*Varietà stabili e instabili.*

**ESEMPIO.** Calcoliamo le varietà stabili e instabili di un sistema non lineare semplice:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2. \end{cases}$$

La linearizzazione conduce al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

che ammette autovalori  $\pm 1$  e

$$E^+ = \{y = 0\}, \quad E^- = \{x = 0\}.$$

Il sistema è facilmente integrabile e fornisce

$$x(t) = x_0 e^t, \quad y(t) = \left( y_0 - \frac{1}{3} x_0^2 \right) e^{-t} + \frac{1}{3} x_0^2 e^{2t}.$$

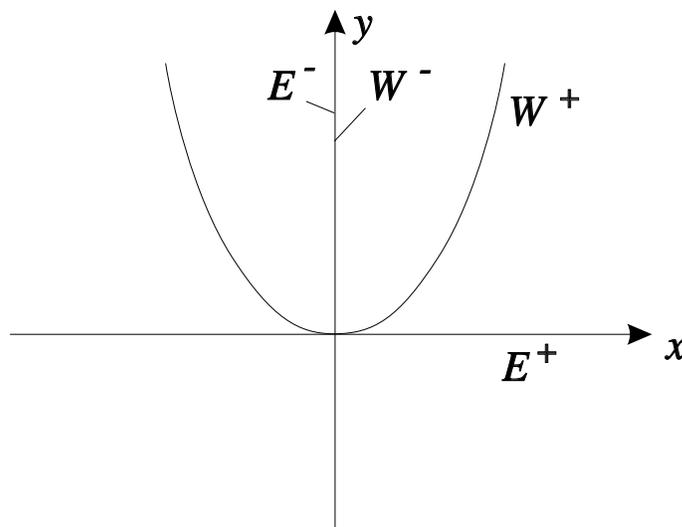


FIGURA 36

*Varietà stabili e instabili dell'esempio dato.*

A questo punto osserviamo che se  $x_0 = 0$ , allora la traiettoria diviene

$$x(t) = 0, \quad y(t) = y_0 e^{-t}$$

e quindi  $x = 0$  è anche varietà stabile. Se vogliamo invece che la traiettoria si allontani dall'origine dobbiamo prendere  $y_0 = x_0^2/3$ . Pertanto l'equazione della varietà instabile è

$$y = \frac{1}{3}x^2$$

che è anche globale. Anziché calcolare le soluzioni in modo esplicito, si poteva osservare che le varietà stabili possono essere funzioni del tipo  $y = f(x)$ . Eliminando  $t$  dal sistema si trova allora

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + x$$

che è un'equazione lineare che integrata dà

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x}$$

dove  $c$  è una costante. Poiché la varietà instabile deve essere tangente nell'origine a  $E^+$ , che è l'asse  $x$ , si deve avere  $c = 0$  e si ritrova il risultato precedente.

ESEMPIO. Esiste un caso molto interessante di sistema dinamico continuo in cui si possono sempre calcolare (o ridurre a un'integrazione) le varietà stabili e instabili. Si tratta del moto di un punto materiale su una retta liscia per effetto di una forza posizionale. L'equazione che ne deriva è del tipo

$$\ddot{x} = f(x)$$

oppure, in forma di sistema,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x). \end{cases}$$

Innanzitutto si deve supporre di avere una posizione di equilibrio, ossia un numero  $\bar{x}$  tale che  $f(\bar{x}) = 0$ . Successivamente, eliminando il tempo dal sistema, come fatto nell'esempio precedente, troviamo

$$\frac{dy}{dx} = f(x)/y$$

da cui

$$y \frac{dy}{dx} = f(x)$$

che implica

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}y^2 - F(x) \right) = 0$$

dove  $F(x)$  è una primitiva di  $f(x)$ . Integrando questa relazione si trova

$$\frac{1}{2}y^2 - F(x) = F(\bar{x})$$

essendo  $y = 0$  nella posizione di equilibrio. Si ottiene allora l'espressione

$$(10.1) \quad y^2 = 2(F(x) - F(\bar{x})) \quad \text{oppure} \quad y = \pm\sqrt{2(F(x) - F(\bar{x}))}.$$

Per vedere che questa equazione rappresenta effettivamente l'equazione delle varietà stabili o instabili, osserviamo innanzitutto che è invariante, perché è un'orbita del sistema. Se verificiamo che è tangente agli spazi corrispondenti, essa sarà la varietà stabile o instabile per il teorema della varietà stabile. Innanzitutto la linearizzazione del sistema fornisce

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f'(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix}$$

che ammette la seguente equazione per gli autovalori:

$$\lambda^2 - f'(\bar{x}) = 0.$$

Pertanto se  $f'(x) > 0$  (il che implica che  $F(x) - F(\bar{x})$  ha un massimo in  $\bar{x}$ ), allora si hanno due autovalori reali

$$\lambda = \pm\sqrt{f'(\bar{x})} \quad \text{con autovettori } [1 \pm \sqrt{f'(\bar{x})}]^T$$

e si ha

$$\begin{aligned} E^+ &= \{y = \sqrt{f'(\bar{x})}(x - \bar{x})\} \\ E^- &= \{y = -\sqrt{f'(\bar{x})}(x - \bar{x})\}. \end{aligned}$$

Ora, avendosi  $f(\bar{x}) = F'(\bar{x}) = 0$ , si ha che

$$F(x) - F(\bar{x}) = \frac{1}{2}f'(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + R_1(x - \bar{x})$$

dove  $R_1(x - \bar{x})$  è infinitesimo di ordine superiore al secondo rispetto a  $x - \bar{x}$ . Dunque

$$\sqrt{2(F(x) - F(\bar{x}))} = \sqrt{f'(\bar{x})} |x - \bar{x}| + R_2(x - \bar{x})$$

dove  $R_2$  è infinitesimo in  $x - \bar{x}$ . Questo prova l'asserto.

Se invece  $f'(x) = 0$ , allora si ha l'autovalore doppio

$$\lambda = 0 \quad \text{con autovettore} \quad [1 \ 0]^T$$

e si ha

$$E^0 = \{y = 0\}.$$

In questo caso si constata facilmente che la funzione  $\pm\sqrt{2(F(x) - F(\bar{x}))}$  è tangente all'asse  $x$ . Infine, nel caso in cui  $f'(\bar{x}) = 0$  si hanno due autovalori immaginari puri  $\pm i\sqrt{-f'(\bar{x})}$  e si ha

$$E^0 = \mathbb{R}^2.$$

In questo caso la funzione  $\pm\sqrt{2(F(x) - F(\bar{x}))}$  si riduce localmente al punto  $\bar{x}$  in quanto il radicando ha un massimo pari a zero in  $\bar{x}$ .

### 3.11. Cenni alla stabilità strutturale

Fino a questo punto ci si è limitati a studiare la stabilità delle soluzioni di un sistema del tipo

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t)$$

supponendo sempre di riferirci allo stesso sistema. In realtà, però, in alcuni casi può capitare che anche la forma del sistema non sia nota con precisione. Ci si chiede allora se la forma delle traiettorie possa o meno essere influenzata da eventuali piccole variazioni della forma del sistema. In questa sezione esamineremo le principali definizioni e daremo alcuni risultati. Per semplicità ci riferiremo solo al caso autonomo.

La prima cosa che serve è un metodo per valutare se due sistemi sono o meno "vicini". Per questo, come abbiamo sempre fatto, ci riferiremo a sistemi in cui il secondo membro  $\mathbf{F}$  è una funzione differenziabile con continuità. Detto  $D$  il dominio, supposto limitato di  $\mathbf{F}$ , Introduciamo allora il numero

$$\|\mathbf{F}\|_1 = \max_{\mathbf{u} \in D} |\mathbf{F}| + \max_{\mathbf{u} \in D} \left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right|.$$

Si può vedere facilmente che il numero  $\|\mathbf{F}\|_1$  è una norma per le funzioni derivabili con continuità (detti anche di classe  $C^1$ ). In questo modo potremo

dire che due sistemi con secondi membri  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  sono “vicini” se  $\|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_1$  è “piccola”.

Il primo teorema che esaminiamo riguarda le posizioni di equilibrio. Esso afferma che se si perturba un sistema con certe posizioni di equilibrio, allora si troverà sempre un sistema con lo stesso numero e tipo di posizioni di equilibrio, modificate di poco.

**TEOREMA.** *Sia  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  un sistema di classe  $C^1$  avente  $\bar{\mathbf{u}}$  come unica posizione di equilibrio iperbolica. Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che se  $\mathbf{G}$  è un sistema per cui*

$$\|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_1 < \delta$$

*allora il sistema  $\mathbf{G}$  ammette un unico punto di equilibrio pure iperbolico  $\bar{\mathbf{v}}$  tale che*

$$\|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}}\| < \varepsilon.$$

La restrizione sull’unicità del punto di equilibrio non è così forte come sembra, in quanto, se ve ne fossero molte (ma isolate), basterebbe applicare il teorema prendendo di volta in volta per  $D$  un intorno in cui la posizione di equilibrio è unica.

Il prossimo teorema riguarda invece eventuali orbite periodiche.

**TEOREMA.** *Sia  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  un sistema di classe  $C^1$  che ammetta  $\gamma$  come orbita periodica. Supponiamo che  $\bar{\mathbf{u}} \in \gamma$  e che la matrice linearizzata  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}})$  non ammetta nessun autovalore pari a 1. Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che se  $\mathbf{G}$  è un sistema per cui*

$$\|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_1 < \delta$$

*allora il sistema  $\mathbf{G}$  ammette un’unica orbita periodica  $\eta$  tale che*

$$\max_{t \geq 0} \text{dist}(\gamma, \eta) < \varepsilon.$$

Infine, analizziamo la situazione per orbite assolutamente generiche.

**DEFINIZIONE.** *Supponiamo che  $t \mapsto \mathbf{u}(t)$  e  $t \mapsto \mathbf{v}(t)$  siano due orbite di due sistemi, e che esista una trasformazione biunivoca, continua e con inversa*

*continua che trasformi un'orbita nell'altra. Allora le orbite si diranno topologicamente equivalenti.*

Per esempio, sono topologicamente equivalenti le orbite circolari del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

e quelle ellittiche del sistema (dell'oscillatore armonico)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = \omega^2 x \end{cases}$$

per ogni  $\omega \neq 0$ . Non sono invece topologicamente equivalenti una qualsiasi delle predette orbite ellittiche e le orbite a spirale dell'oscillatore armonico smorzato

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = \omega^2 x + \varepsilon y \end{cases}$$

dove  $\varepsilon > 0$ . Infatti le ellissi sono linee chiuse, mentre le spirali no.

**DEFINIZIONE.** *Sia  $\mathbf{F}$  un sistema di classe  $C^1$ . Diremo che  $\mathbf{F}$  è strutturalmente stabile se esiste  $\delta > 0$  tale che ogni sistema di classe  $C^1$  per cui*

$$\|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_1 < \delta$$

*ha traiettorie topologicamente equivalenti al sistema dato.*

Questa condizione è estremamente restrittiva; anche sistemi molto semplici possono non verificarla. Per esempio, poniamo  $D = [-1, 1]^2$  e riprendiamo il sistema lineare dell'oscillatore armonico

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = \omega^2 x \end{cases}$$

e consideriamo per ogni  $\varepsilon > 0$  la sua perturbazione

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = \omega^2 x + \varepsilon y \end{cases}$$

Calcoliamo la norma della differenza dei sistemi. Abbiamo

$$\mathbf{F} - \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ +\varepsilon y \end{bmatrix}$$

per cui

$$\|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_1 = \max_{[-1,1]} \varepsilon |y| + \varepsilon = 2\varepsilon$$

che significa che i due sistemi possono essere scelti arbitrariamente “vicini”. Però abbiamo appena visto che le orbite del sistema dell’oscillatore armonico non sono topologicamente equivalenti a quelle del sistema dell’oscillatore smorzato.

Di fatto, la teoria della stabilità strutturale fornisce risultati soddisfacenti solo per sistemi definiti su un insieme chiuso e limitato, che per semplicità possiamo considerare la sfera piena  $B_n(0, 1)$  in  $\mathbb{R}^n$ . Vale allora il seguente teorema:

**TEOREMA.** *Sia  $\mathbf{F} : B_n(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un sistema di classe  $C^1$  tale che*

- i) possieda un unico equilibrio e che sia un pozzo (la matrice linearizzata abbia tutti autovalori a parte reale strettamente negativa);*
- ii) il campo vettoriale  $\mathbf{F}|_{\partial B_n(0,1)}$  punti verso l’interno della sfera, ossia che  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} < 0$  per ogni  $\mathbf{u} \in \partial B_n(0, 1)$ ;*
- iii) tutte le orbite del sistema uscenti da  $B_n(0, 1)$  tendano all’equilibrio;*

*Allora  $\mathbf{F}$  è strutturalmente stabile su  $B_n(0, 1)$ .*

Per esempio, l’oscillatore armonico smorzato è un sistema strutturalmente stabile (se ristretto a  $B_2(0, 1)$ ).

Nel caso di sistemi bidimensionali, vale un risultato più forte.

**TEOREMA (di Pontryagin-Andronov).** *Sia  $\mathbf{F} : B_2(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  un sistema che verifichi la condizione ii) del teorema precedente. Allora  $\mathbf{F}$  è strutturalmente stabile se e solo se*

- i) tutti i punti di equilibrio di  $\mathbf{F}$  sono iperbolici;*
- ii) ogni orbita chiusa in  $B_2(0, 1)$  è un attrattore nel futuro o nel passato;*
- iii) non esistono traiettorie congiungenti punti di sella.*

Per esempio, il sistema di Van der Pol verifica queste tre proprietà e, se considerato su una sfera abbastanza grande, verifica anche la condizione di puntare verso l'interno della sfera. Pertanto è strutturalmente stabile.

Infine, sempre in dimensione 2, vale un risultato di notevole interesse, che mostra che i sistemi *non* strutturalmente stabili sono in qualche modo “eccezionali”.

**TEOREMA (di Peixoto).** *Sia  $\mathcal{X}$  l'insieme di tutti i sistemi di classe  $C^1$  su  $B_2(0,1)$ . Ogni sistema strutturalmente stabile possiede un intorno in  $\mathcal{X}$  costituito da soli sistemi strutturalmente stabili. Inoltre, ogni sottoinsieme aperto in  $\mathcal{X}$  (in particolare ogni intorno arbitrariamente piccolo) contiene sistemi strutturalmente stabili.*

## CAPITOLO QUARTO

# Cenni alla teoria della biforcazione

In questo capitolo esamineremo il comportamento di alcuni sistemi deterministici al variare di parametri presenti al loro interno. Spesso, infatti, in molte modellizzazioni non sono noti con esattezza (o non si vogliono specificare) i valori di alcuni parametri. Inoltre, il comportamento dei sistemi dinamici associati può subire variazioni inaspettate per certi valori dei parametri, il che rende interessante questo tipo di indagine. Nel seguito non daremo sempre definizioni precise; per esempio la definizione esatta di “biforcazione”, che è un concetto che può variare a seconda del contesto in cui lo si applica, non verrà data. Intenderemo perciò semplicemente *biforcazione* un cambiamento qualitativo delle soluzioni di un certo problema parametrizzato in corrispondenza di un preciso valore del parametro, che verrà detto *valore di biforcazione*. Un diagramma che mostri alcuni aspetti qualitativi delle soluzioni al variare del parametro si dirà *diagramma di biforcazione*.

### 4.1. Biforcazione per equazioni

Il più semplice esempio di biforcazione è forse quello legato al problema della soluzione di equazioni. Supponiamo di avere per esempio un polinomio  $P_\mu$  dipendente dal parametro  $\mu$ . Cerchiamo le soluzioni dell'equazione

$$P_\mu(x) = 0$$

che saranno funzioni del parametro  $\mu$ . Se per uno o più valori del parametro la natura delle radici (qui per esempio il loro numero) cambia, parleremo di biforcazione delle soluzioni. Nel seguito ammetteremo sempre che l'equazione non ammetta infinite soluzioni o che sia impossibile (vale a dire, scarteremo quei valori di  $\mu$  che dovessero condurre a questa situazione).

ESEMPIO. Consideriamo l'equazione

$$(\mu - 1)x + 2\mu = 0.$$

Essendo un'equazione di primo grado, questa equazione ha sempre (tranne che per  $\mu = 1$  in cui è impossibile) una soluzione. Ne segue che in questo caso non si ha biforcazione.

ESEMPIO. Consideriamo l'equazione

$$x^2 - 2\mu x + \mu + 2 = 0.$$

Questa equazione ammette due soluzioni reali e distinte se  $\mu < -1$  o  $\mu > 2$ , e due soluzioni coincidenti per  $\mu$  pari a  $-1$  o  $2$ . Non si hanno invece soluzioni reali se  $-1 < \mu < 2$ . Dunque possiamo dire che si ha biforcazione per  $\mu = -1$  e  $\mu = 2$ . Il diagramma di biforcazione è il seguente:

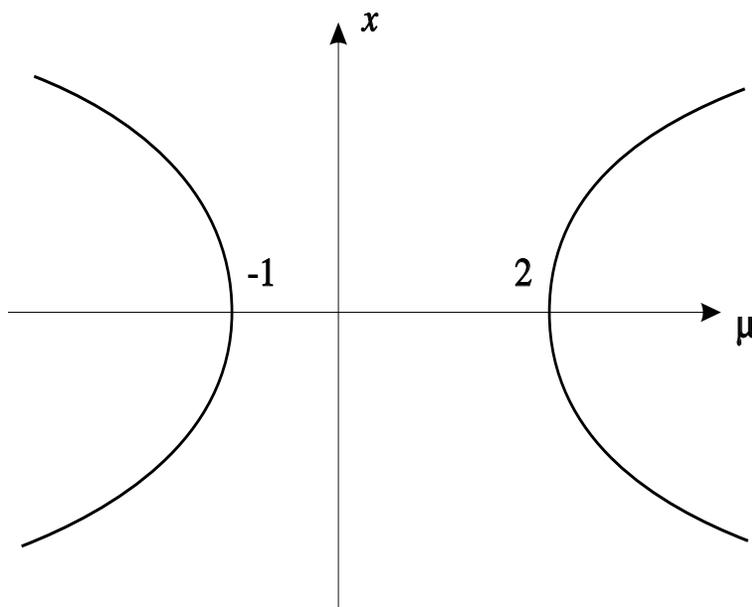


FIGURA 37

*Biforcazione di soluzioni di equazioni di secondo grado.*

(osserviamo che non si è interessati al valore esatto della soluzione, ma solo al modo in cui si biforca.)

ESEMPIO. Un esempio più tipico si ha per l'equazione di terzo grado

$$x^3 - \mu x = 0.$$

Qui si ha la soluzione  $x = 0$  per ogni valore di  $\mu$ , mentre per  $\mu > 0$  compaiono le soluzioni biforcate  $\pm\sqrt{\mu}$ . Il diagramma è il seguente:

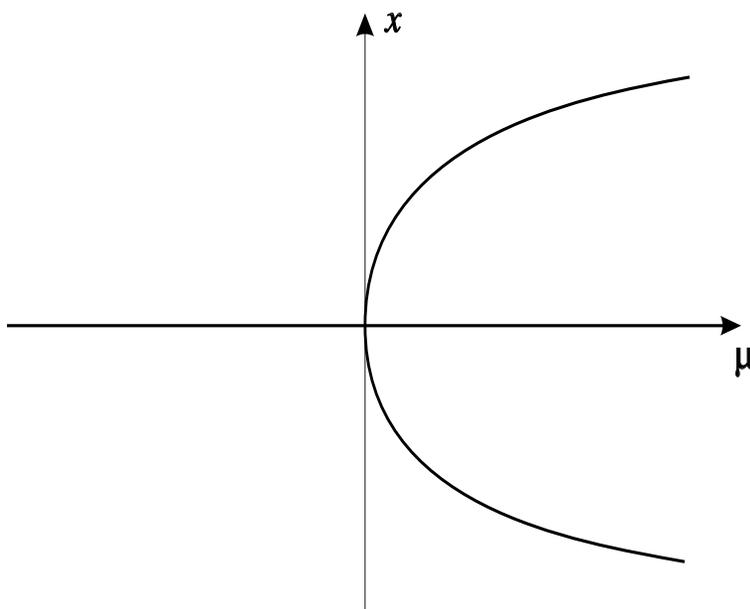


FIGURA 38

*Biforcazione di soluzioni di equazioni di terzo grado.*

In alcuni casi la biforcazione avviene relativamente a equazioni non algebriche, per esempio trigonometriche. In questi casi si procede come al solito.

ESEMPIO. Data l'equazione  $2 \operatorname{sen} x + \mu \operatorname{sen} 2x = 0$ , che equivale a

$$\operatorname{sen} x(1 + \mu \cos x) = 0 \quad \text{in } [-\pi, \pi]$$

si ha  $x = 0, \pm\pi$  per ogni  $\mu$  e  $x = \pm \arccos(-1/\mu)$  se  $|\mu| \geq 1$ . Pertanto si ha

biforcazione per  $\mu = 1$ . Il diagramma corrispondente è il seguente:

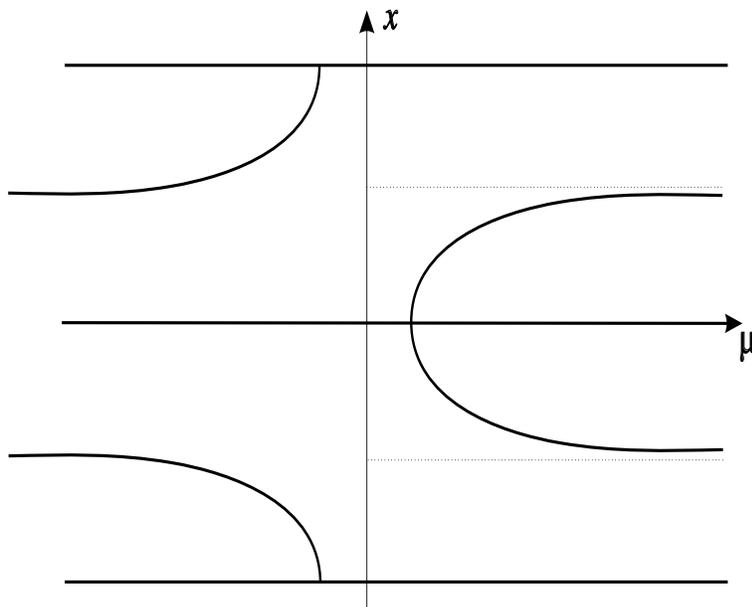


FIGURA 39

*Biforcazione di soluzioni di equazioni trigonometriche.*

#### 4.2. Biforcazione dell'equilibrio

Nel caso di sistemi retti da equazioni differenziali, il più semplice problema relativo alla biforcazione è quello della biforcazione dell'equilibrio. In altre parole, è dato un sistema del tipo

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t, \mu)$$

che ammette al variare di  $\mu$  una o più posizioni di equilibrio. Il problema consiste nello studiare le posizioni di equilibrio e la loro stabilità.

Per quanto riguarda il numero delle possibili soluzioni di equilibrio, si deve risolvere l'equazione

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, t, \mu) = 0$$

con  $\mathbf{u}$  indipendente da  $t$ . Si tratta quindi di un problema di biforcazione legato a equazioni.

Per quanto riguarda invece la stabilità, la casistica è più complicata: in corrispondenza a vari casi si hanno delle denominazioni tipiche. Vediamo per semplicità degli esempi relativi al caso unidimensionale.

ESEMPIO. Data l'equazione

$$\dot{x} = \mu - x^2,$$

le posizioni di equilibrio esistono se e solo se  $\mu \geq 0$ , e si hanno due soluzioni  $\pm\sqrt{\mu}$ . Linearizzando l'equazione si trova

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -2\sqrt{\mu}v && \text{per la posizione } x_1 = \sqrt{\mu} \\ \dot{v} &= +2\sqrt{\mu}v && \text{per la posizione } x_2 = -\sqrt{\mu} \end{aligned}$$

Pertanto la posizione  $\sqrt{\mu}$  è stabile per ogni  $\mu > 0$  e l'altra instabile. Chiaramente per  $\mu = 0$  si ha biforcazione. In questo caso si parla di *biforcazione a sella*. Osserviamo anche che per  $\mu = 0$  si ha l'equazione

$$\dot{x} = -x^2$$

che ammette  $x = 0$  come posizione di equilibrio *instabile*. Infatti in questo caso le soluzioni tali che  $x(0) = x_0$  sono

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0 t}$$

e divergono a  $+\infty$  per  $t \rightarrow -1/x_0$  se  $x_0 < 0$ . Il diagramma relativo è

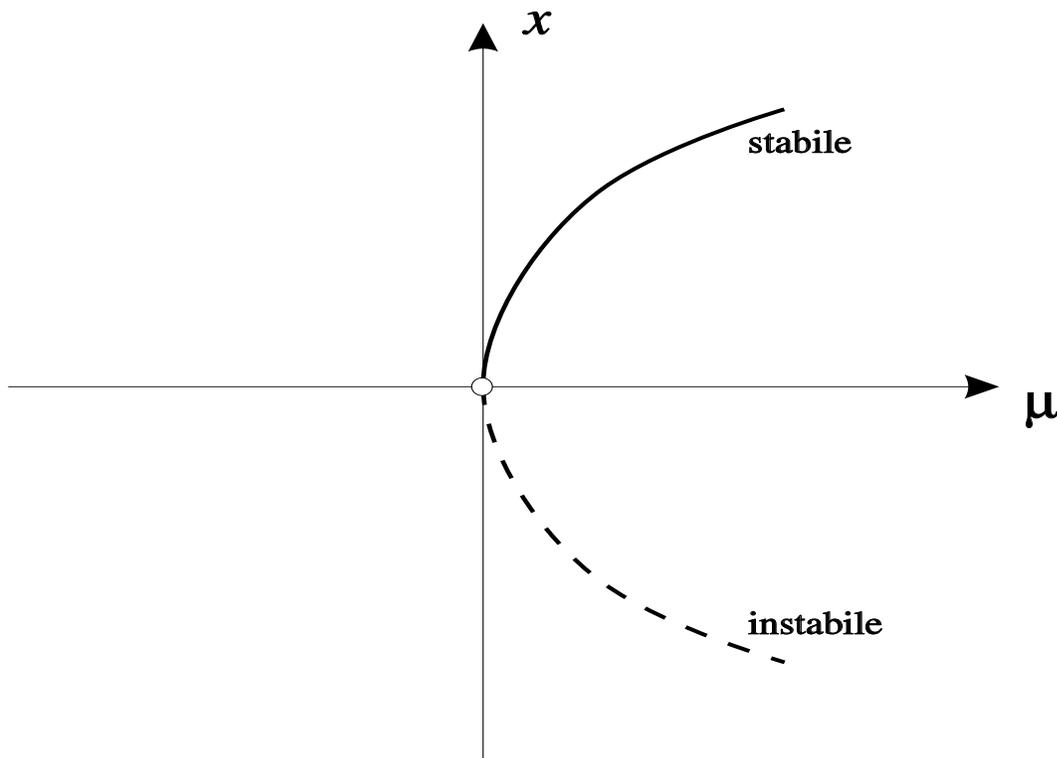


FIGURA 40  
*Biforcazione a sella.*

ESEMPIO. Data l'equazione

$$\dot{x} = \mu x - x^2,$$

le posizioni di equilibrio sono  $x = 0$  e  $x = \mu$ . Vediamo la linearizzazione.

$$\dot{v} = \mu v \quad \text{per la posizione } x_1 = 0$$

$$\dot{v} = -\mu v \quad \text{per la posizione } x_2 = \mu$$

Pertanto per  $\mu < 0$  si ha che  $x = 0$  è stabile e  $x = \mu$  instabile, mentre per  $\mu > 0$  si ha  $x = 0$  instabile e  $x = \mu$  stabile. Per  $\mu = 0$  si ricade nel caso dell'esempio precedente. Il diagramma relativo è il seguente:

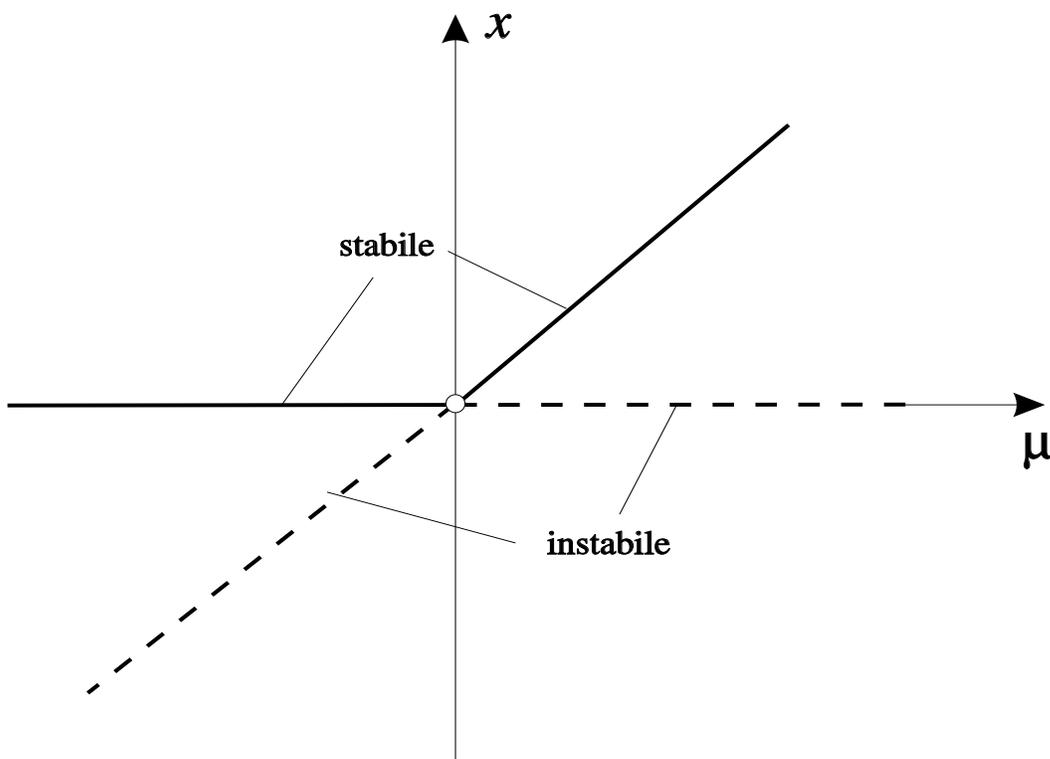


FIGURA 41

*Biforcazione trascritta.*

e in questo caso si parla di biforcazione *trascritta*. Osserviamo che le due posizioni di equilibrio si scambiano la stabilità.

ESEMPIO. Data l'equazione

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

si ha la posizione di equilibrio  $x = 0$  per ogni  $\mu$  e le posizioni  $x = \pm\sqrt{\mu}$  per  $\mu > 0$ . Anche in questo caso la linearizzazione è sufficiente e fornisce

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \mu v && \text{per la posizione } x_1 = 0 \\ \dot{v} &= -2\mu v && \text{per le posizioni } x_2 = \pm\sqrt{\mu}.\end{aligned}$$

Quindi la posizione  $x = 0$  è stabile per  $\mu < 0$  e instabile per  $\mu > 0$ ; le posizioni biforcute sono stabili, quando esistono. In altre parole, la posizione  $x = 0$  cede la propria stabilità alle soluzioni biforcute. Per  $\mu = 0$  la soluzione è

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}}$$

e quindi la posizione di equilibrio è stabile, come discendeva anche dai risultati dell'esempio (3, 4.4). Il diagramma è il seguente

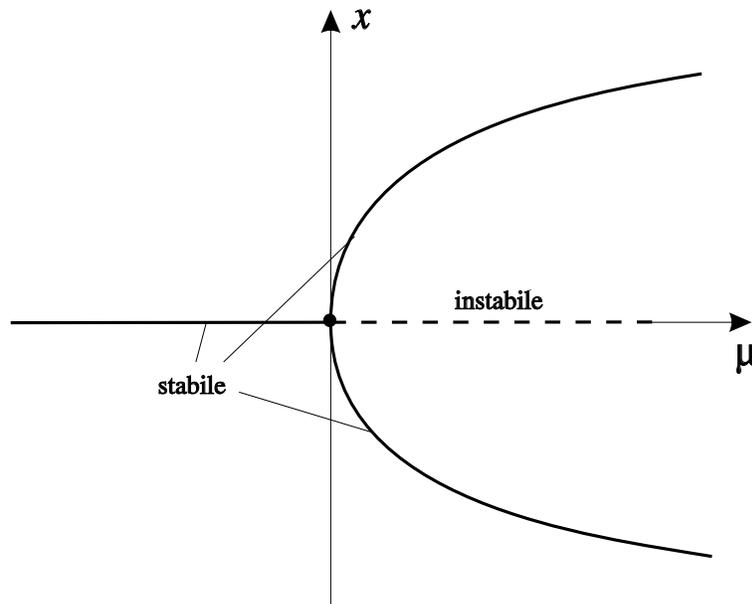


FIGURA 42  
*Biforcazione a forza.*

e corrisponde alla cosiddetta biforcazione a *forca*.

Nel caso generale, citiamo il seguente teorema per trovare i punti di biforcazione nel caso autonomo.

TEOREMA. Se  $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mu})$  è punto di biforcazione per un sistema

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mu),$$

allora necessariamente lo jacobiano  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mu})$  non è invertibile (ha almeno un autovalore nullo).

Osserviamo che nei nostri casi questa condizione equivale all'annullarsi della derivata del secondo membro dell'equazione.

### 4.3. Biforcazione di Hopf

Un tipo di biforcazione diverso da quelli fin qui visti è tipico di certi sistemi di equazioni differenziali. Si tratta di un punto di equilibrio stabile che si biforca in un equilibrio instabile e un'orbita periodica stabile.

Il tipico diagramma di biforcazione di Hopf è il seguente:

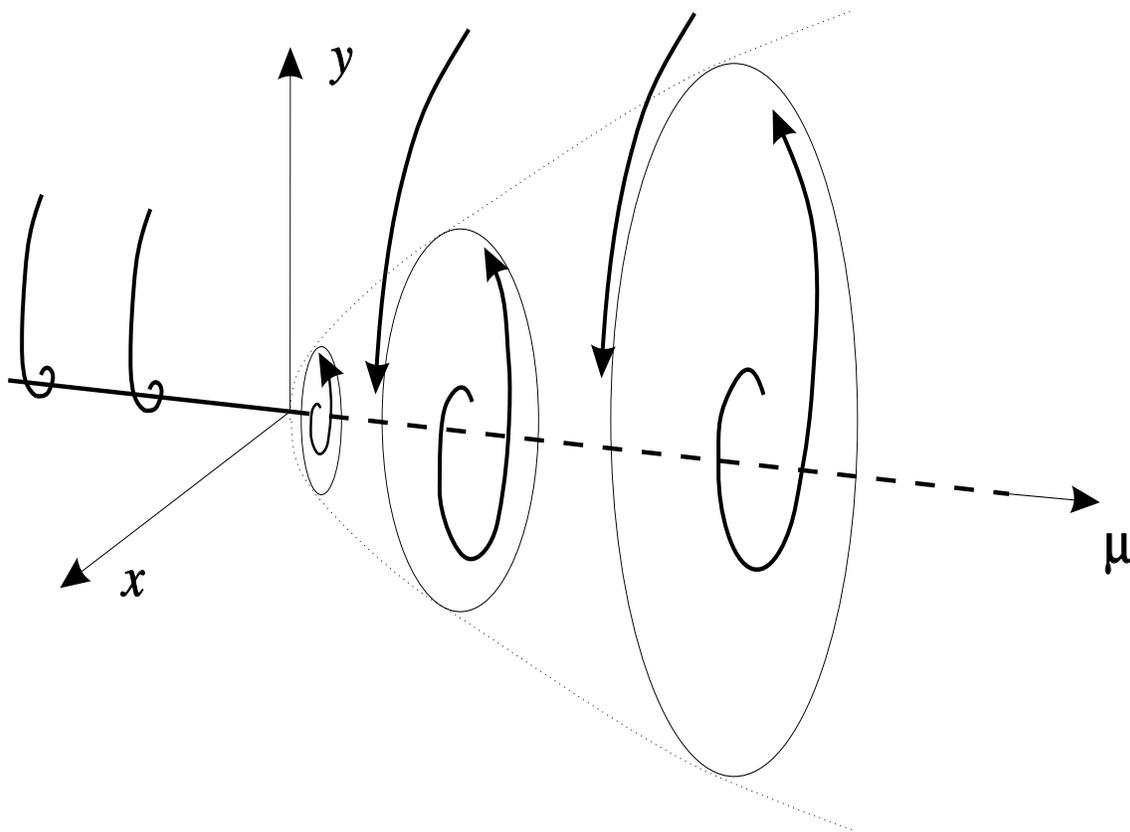


FIGURA 43  
Biforcazione di Hopf.

La biforcazione di Hopf avviene in sistemi della forma

$$\dot{\mathbf{u}} = A(\mu)\mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mu)$$

dove  $\mathbf{f}$  è di classe  $C^1$  ed è, per  $|\mu|$  abbastanza piccolo, un infinitesimo di ordine superiore a  $\|\mathbf{u}\|$ . Sussiste allora il

**TEOREMA (di Hopf).** *Supponiamo che  $\mathbf{0}$  sia l'unico equilibrio del sistema e che sia asintoticamente stabile per  $\mu < 0$ . Se  $\lambda(\mu) = \lambda_1(\mu) + i\lambda_2(\mu)$  sono gli autovalori di  $A(\mu)$  e valgono le condizioni*

$$\lambda_1(0) = 0, \quad \lambda_2(0) \neq 0, \quad \left. \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right|_{\mu=0} > 0,$$

*allora esiste  $\bar{\mu} > 0$  tale che per ogni  $\mu \in ]0, \bar{\mu}]$  esiste un ciclo limite  $\gamma_\mu$  la cui ampiezza cresce all'aumentare di  $\mu$ .*

**ESEMPIO.** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Si vede subito che  $(0, 0)$  è posizione di equilibrio per ogni  $\mu$ . La matrice linearizzata

$$\begin{bmatrix} \mu & -1 \\ +1 & \mu \end{bmatrix}$$

ha autovalori  $\lambda(\mu) = \mu \pm i$  e pertanto sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Hopf se  $(0, 0)$  è asintoticamente stabile. Ma questo è vero per il teorema di linearizzazione, per cui esiste un ciclo limite biforcuto dal valore  $\mu = 0$ .

Nel nostro caso è anche possibile calcolare esattamente l'equazione del ciclo limite. Infatti, posto  $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$  e  $\vartheta(t) = \arctg(y(t)/x(t))$ , si ha facilmente

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) = \frac{1}{r}r^2(\mu - r^2) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2} = \frac{1}{r^2}(x^2 + y^2) = 1 \end{aligned}$$

per cui in coordinate polari il sistema si scrive

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\vartheta} = 1. \end{cases}$$

Questo mostra che le orbite si avvolgono con velocità costante attorno all'origine e che la loro distanza da quest'ultima segue l'equazione unidimensionale per  $r$ . Da qui si vede subito che i cicli limite biforcati sono dati da  $r = \sqrt{\mu}$  e che la loro ampiezza cresce al crescere di  $\mu$ .

Da questo esempio è possibile anche trarre molti sistemi “di tipo Hopf”: data  $f(s, \mu)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ), si può porre

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x f(x^2 + y^2, \mu) \\ \dot{y} = x + y f(x^2 + y^2, \mu) \end{cases}$$

(il caso precedente corrispondeva a  $f(s, \mu) = \mu - s$ ), che diviene, in coordinate polari,

$$\begin{cases} \dot{r} = r f(r^2, \mu) \\ \dot{\vartheta} = 1 \end{cases}$$

e che può essere studiato con i metodi visti nella sezione precedente (nel caso di Hopf si trova la biforcazione a forca).

#### 4.4. Altri tipi di biforcazione

Al crescere della dimensione del sistema e della complessità del secondo membro, è possibile che appaiano altri tipi di biforcazione fin qui non introdotti. Senza entrare in argomenti complessi, segnaliamo un ultimo tipo di biforcazione che spesso gioca un ruolo decisivo per la dinamica caotica dei sistemi non lineari: il cosiddetto *raddoppio del periodo*. Si tratta di una biforcazione nella quale un'orbita periodica stabile perde la sua stabilità a favore di un'orbita periodica di periodo doppio. Chiaramente, affinché l'orbita non

si autointersechi, la dimensione del sistema deve essere almeno tre.

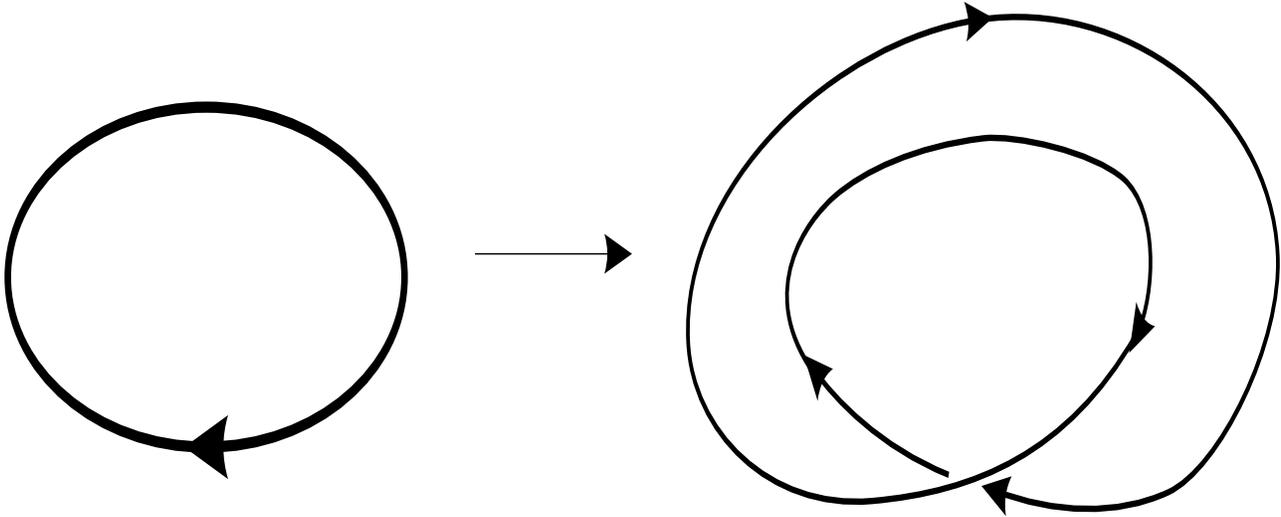


FIGURA 44  
*Raddoppio del periodo.*

Nel prossimo capitolo avremo modo di incontrare questo tipo di biforcazione.