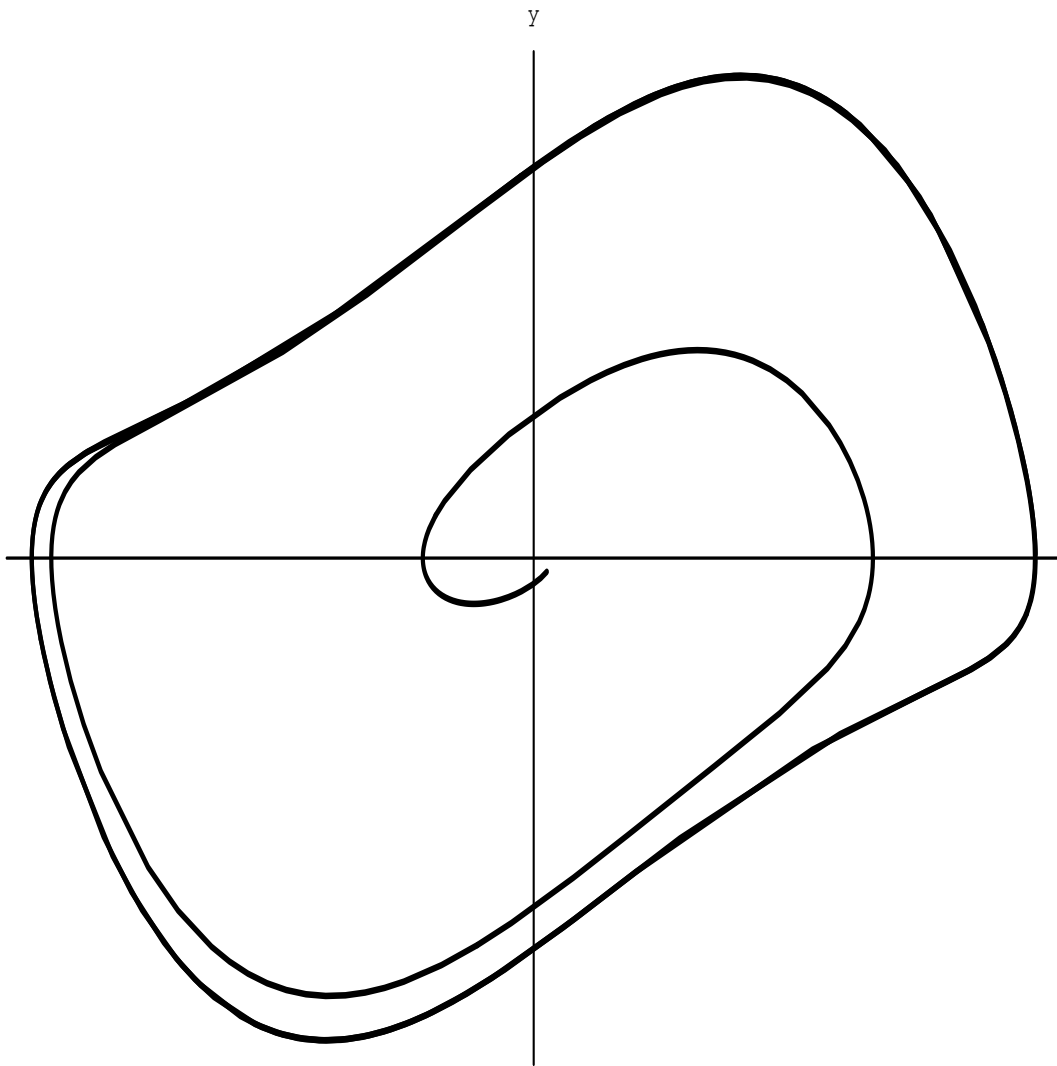


ALFREDO MARZOCCHI

METODI MATEMATICI  
PER  
MODELLI DETERMINISTICI



Cartolibreria *Snoopy*

Autore: Alfredo Marzocchi

Casa Editrice

Copyright 1999 Cartolibreria Snoopy s.n.c. - via Bligny, 27, 25133 Brescia

Tel. e fax 0302006331

E-mail [cartolibrieriasnoopy@numerica.it](mailto:cartolibrieriasnoopy@numerica.it)

Prima edizione: anno 1999

Finito di stampare nel mese di febbraio 1999

È vietata la riproduzione, anche parziale,  
con qualsiasi mezzo effettuata, compresa la fotocopia,  
anche a uso didattico,  
se non autorizzata da parte dell'editore e autori.

## CAPITOLO QUINTO

# Comportamento qualitativo dei sistemi non lineari

In quest'ultimo capitolo dedicato ai modelli deterministici affronteremo alcune tecniche e alcuni esempi di sistemi non lineari di particolare importanza.

### 5.1. La mappa logistica

Molti esempi di sistemi non lineari che presentano un comportamento complesso sono sistemi dinamici discreti, del tipo di quelli studiati nel secondo capitolo. In questo contesto i concetti di stabilità restano quasi inalterati: per esempio, un punto di equilibrio  $\bar{x}$  è stabile se per ogni intorno  $V$  di  $\bar{x}$  esiste un intorno  $U$  di  $\bar{x}$  tale che per ogni successione avente  $x_0 = u \in U$ , si ha  $|x_n| \in V$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . In modo analogo si ritrova la stabilità asintotica.

Il primo e il secondo metodo di Ljapunov per la stabilità restano validi anche in questo contesto, cosicché per esempio vale il teorema sulla linearizzazione.

ESEMPIO. Consideriamo il sistema in  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n \\ x_0 = y. \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

Poiché chiaramente  $x_n = ya^n$ , si ha che  $\bar{x} = 0$  è asintoticamente stabile se  $a < 1$ , instabile se  $a > 1$  e stabile se  $a = 1$ .

L'esempio che studieremo ora non riveste grande importanza nel nostro discorso tanto per le sue applicazioni, quanto per il comportamento che presenta, riscontrabile in altri sistemi, usati tra l'altro in Economia.

Indichiamo con  $y_n$  il numero di individui di una popolazione all'“istante” discreto  $n \in \mathbb{N}$ . All'istante  $n+1$  essi saranno  $y_{n+1}$ , e il rapporto  $y_{n+1}/y_n$  si dirà *tasso relativo di crescita* della popolazione. L'andamento di questo rapporto è, in genere, oggetto di modellizzazione. La più semplice delle ipotesi è supporre

$$(1.1) \quad \frac{y_{n+1}}{y_n} = M = \text{cost.}$$

In questo caso si ottiene il sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} y_{n+1} = My_n \\ y_0 = c. \end{cases}$$

La sua soluzione, come abbiamo appena visto, è

$$y_n = y_0 M^n$$

per cui avremo crescita esponenziale se  $M > 1$ , popolazione costante se  $M = 1$  e decadimento esponenziale a zero se  $M < 1$ .

Questo modello è però, per certi versi, troppo semplificato. Infatti in molte situazioni il tasso relativo di crescita è dipendente dalla popolazione, in quanto le risorse disponibili sono maggiori con una popolazione più bassa, e crescono proporzionalmente al suo numero. Pertanto risulta più realistico supporre il tasso relativo di crescita dipendente dalla popolazione attuale nel seguente modo

$$M = \mu - y_n$$

dove  $\mu > 0$  è un parametro che rappresenta le risorse disponibili a popolazione nulla. Inserendo questa relazione nella (1.1), troviamo l'equazione

$$y_{n+1} = y_n(\mu - y_n).$$

Ponendo ora  $y_n = \mu x_n$ , si giunge all'equazione

$$(1.2) \quad x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

che è detta *mapa logistica*.

Iniziamo a studiare i punti di equilibrio. Essi verificano l'equazione  $x = \mu x(1 - x)$ , ossia si trovano all'intersezione fra la retta  $y = x$  e la parabola  $y = \mu(x - x^2)$ .

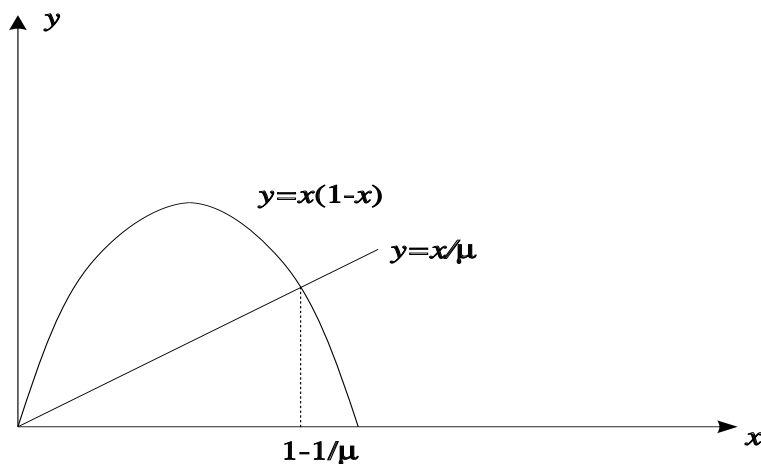


FIGURA 45

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{\mu}$$

Linearizzando l'equazione vicino a questi punti si trova

$$v_{n+1} = f'(x_i)v_n$$

con  $f'(x_1) = \mu$ ,  $f'(x_2) = 2 - \mu$ . Poiché si ha stabilità o instabilità se questi numeri sono in modulo minori di 1 o maggiori di 1, si trova che per  $0 < \mu < 1$   $x_1$  è stabile e  $x_2$  instabile. Per  $1 \leq \mu < 3$ ,  $x_1$  diviene instabile e  $x_2$  è stabile.

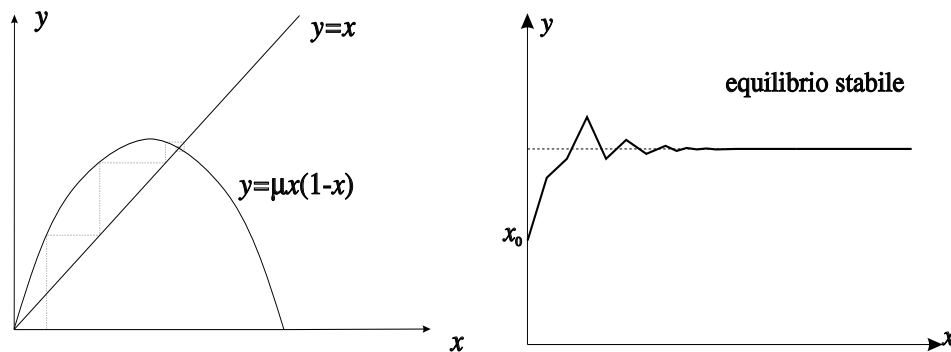


FIGURA 46

*La mappa logistica: il punto di equilibrio stabile.*

Per  $\mu > 3$ , nessuna delle due posizioni di equilibrio è stabile e si osserva la comparsa di un'oscillazione fra due punti, cioè un'“orbita periodica” (qui avviene dunque una biforcazione di Hopf).

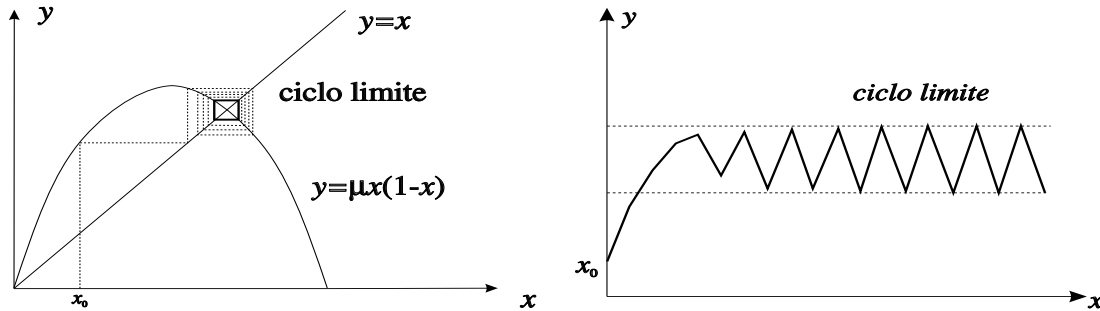


FIGURA 47

*La mappa logistica: il ciclo limite stabile.*

Per studiarne la stabilità si calcola

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= f(f(x_n)) = f(\mu x_n(1 - x_n)) = \\ &= \mu x_n(1 - x_n)(1 - \mu x_n(1 - x_n)) = \mu x_n(1 - x_n)(1 - \mu x_n + \mu x_n^2). \end{aligned}$$

Questo nuovo sistema dinamico fornisce la posizione di uno degli estremi delle oscillazioni. Le sue posizioni di equilibrio corrisponderanno a orbite periodiche. Un calcolo elaborato ma non difficile mostra che questo sistema ammette punti fissi stabili fino a un valore  $\mu_1 = 3.448\dots$ . Al di là di questo valore, compare un'orbita con periodo doppio (biforcazione di raddoppio del periodo) che oscilla fra quattro posizioni e che è stabile fino a  $\mu_2 = 3.53\dots$

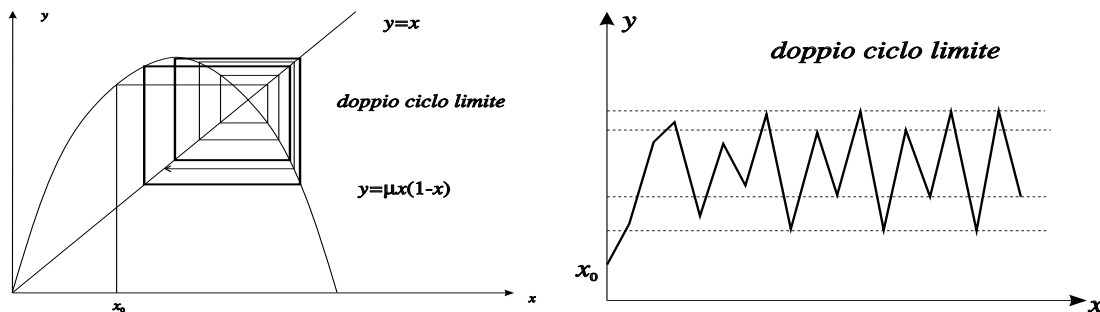


FIGURA 48

*La mappa logistica: il doppio ciclo limite stabile.*

Queste biforcazioni si succedono poi via via che aumenta il parametro fino raddoppiando il numero di punti fra i quali la successione oscilla fino al valore critico  $\mu_\infty = 3.569945\dots$ . Oltre questo valore nemmeno le orbite periodiche sono stabili e la successione presenta un comportamento caotico.

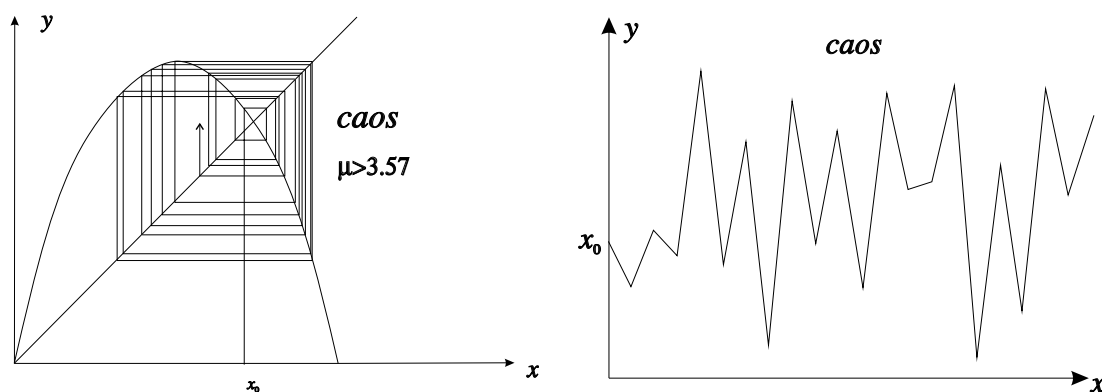


FIGURA 49

*La mappa logistica: il moto caotico.*

Il diagramma di biforcazione è illustrato nell'appendice e rende ragione della enorme complessità del sistema. Notiamo che esistono intervalli del parametro nei quali il sistema riprende un comportamento semplice, per poi ridegenerare nel caos, e che il diagramma di biforcazione possiede "copie" di se stesso al suo interno. È sorprendente che una mappa così semplice possa originare un comportamento tanto complesso.

#### 5.4. L'equazione di Duffing

Consideriamo un primo esempio di equazione differenziale che presenta un comportamento non semplice da analizzare. Si tratta della cosiddetta *equazione di Duffing*

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - \beta x + x^3 = \gamma \cos \omega t. \quad (\gamma, \delta \geq 0)$$

Il modello nasce dall'analisi del comportamento non lineare di alcune molle in cui vengono considerati termini di tipo cubico nella forza (infatti, per  $\delta, \gamma = 0$  si ha il modello del moto di un punto soggetto a una forza  $\beta x - x^3$ ). Il termine  $\delta \dot{x}$  corrisponde a una dissipazione; infatti non è difficile vedere che la potenza

dissipata nel caso  $\gamma = 0$  è pari a  $\delta \dot{x}^2$ . Il termine  $\gamma \cos \omega t$  corrisponde a una sollecitazione esterna periodica.

Analizziamo il sistema imperturbato ( $\gamma = 0$ ). Si ha allora

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - \beta x + x^3 = 0.$$

Per  $\delta = 0$ , il sistema è di tipo conservativo e si possono usare le tecniche del paragrafo precedente. Gli zeri di  $f(x) = \beta x - x^3$  sono  $x = 0$  e  $x = \pm\sqrt{\beta}$  se  $\beta \geq 0$ . Una primitiva  $F$  di  $f$  è

$$F(x) = \frac{\beta}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$$

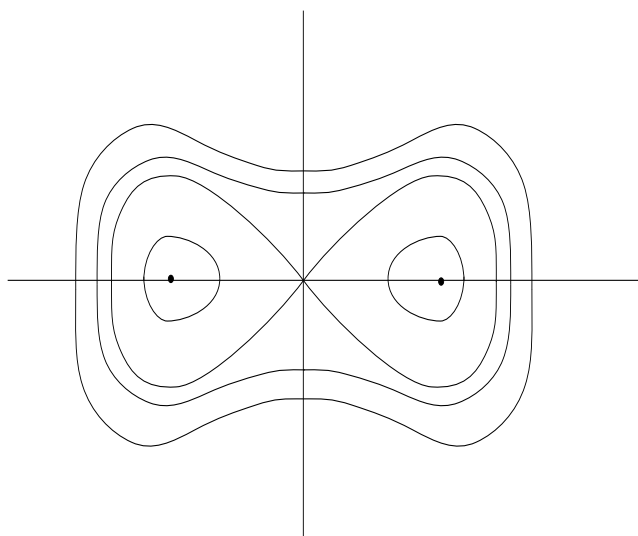


FIGURA 50

*Orbite dell'equazione di Duffing ( $\delta = 0$ ).*

e ha un minimo stretto in 0 se  $\beta \leq 0$ , che implica che in questo caso l'origine è stabile (per il teorema di Ljapunov). Se invece  $\beta > 0$ , si ha dalle (10.1) che le equazioni delle varietà instabili

$$y = \pm \sqrt{\beta x^2 - \frac{1}{2}x^4}$$

che hanno l'andamento di un otto centrato sull'origine. Le altre due posizioni di equilibrio sono stabili e corrispondono a minimi della funzione  $F$ .



Per  $\delta > 0$ , le posizioni che erano stabili divengono ora asintoticamente stabili, per il teorema di Ljapunov sulla stabilità asintotica; infatti, scrivendo l'equazione nella forma di sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \beta x - x^3 - \delta y \end{cases}$$

si constata subito che

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}y^2 - \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \right) = -\delta y^2 < 0$$

sulle posizioni non di equilibrio. Pertanto il diagramma diviene quello indicato nella fig. 51.

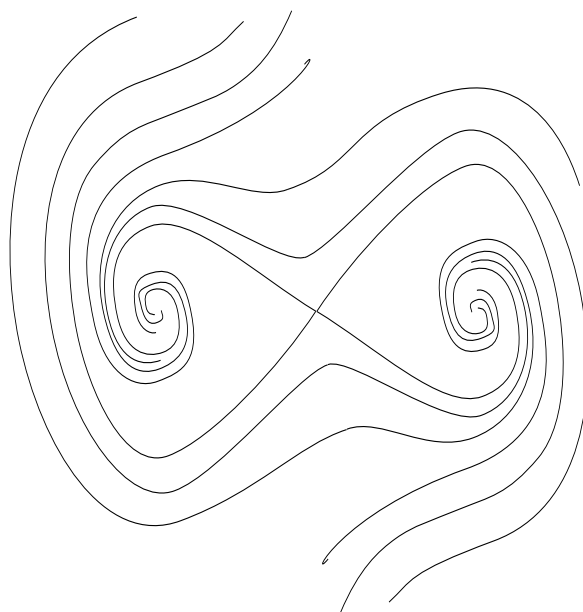


FIGURA 51

*Orbite dell'equazione di Duffing ( $\delta > 0$ ).*

Consideriamo ora il caso  $\gamma > 0$ , ponendo  $\beta = 1$  per semplicità. L'equazione contiene ancora i parametri  $\delta$  e  $\omega$  che considereremo fissi, facendo variare  $\gamma$ .

Il sistema generale può essere messo in forma autonoma introducendo l'angolo  $\vartheta$  come indicato sopra:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega \vartheta \\ \dot{\vartheta} = 1 \end{cases}$$

dove il sistema va ora pensato nel cilindro  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ . A questo punto è necessaria un'analisi numerica.

Consideriamo la sezione di Poincaré  $\vartheta = 0$  e la corrispondente mappa  $h_\gamma$  al variare di  $\gamma$ . Per  $\gamma = 0$  si ha un punto fisso corrispondente alle due posizioni stabili e a quella instabile. Se, per avere una migliore idea del movimento, si proiettano le orbite dal cilindro sulla sezione di Poincaré, si ritrova in questo caso il diagramma imperturbato. Studiamo ora questa proiezione al variare di  $\gamma > 0$ .

Per piccoli valori di  $\gamma$ , i punti di equilibrio (o i pozzi se  $\delta > 0$ ) divengono delle orbite periodiche stabili, mentre il punto sella diviene un'orbita instabile. Si ha pertanto biforcazione di Hopf. Il diagramma è il seguente:

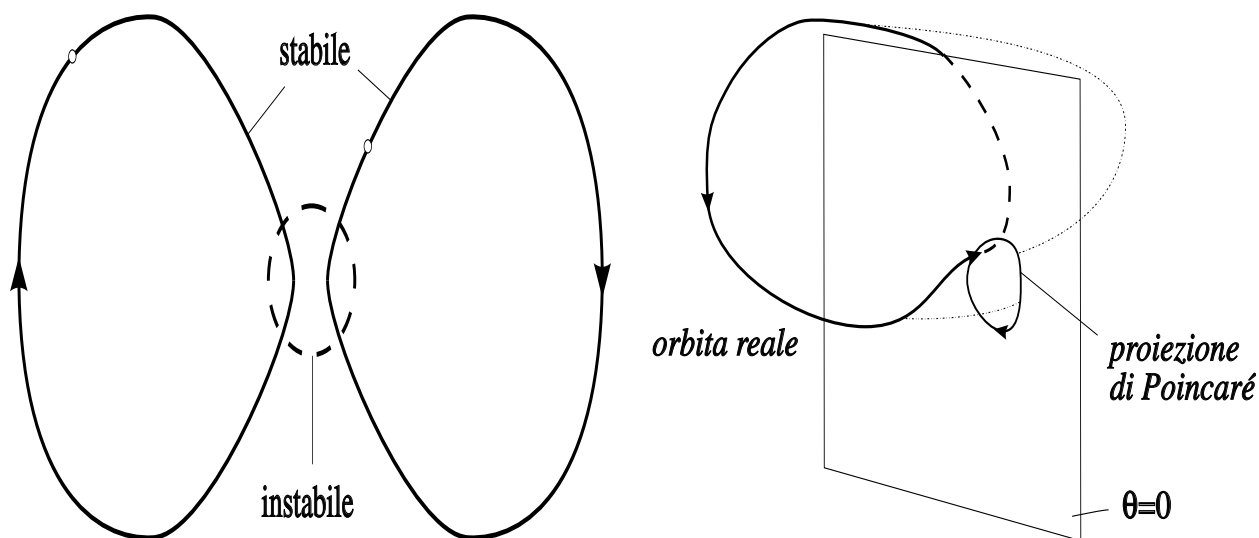


FIGURA 52

*Sezione di Poincaré delle orbite dell'equazione di Duffing.*

Al crescere di  $\gamma$ , l'ampiezza delle orbite stabili cresce fino ad un valore di biforcazione  $\gamma(\delta, \omega)$ . Si vede per esempio che per  $\omega = 1$  l'orbita piccola viene sostituita da un'orbita più grande dello stesso periodo. Il diagramma diviene quindi il seguente:

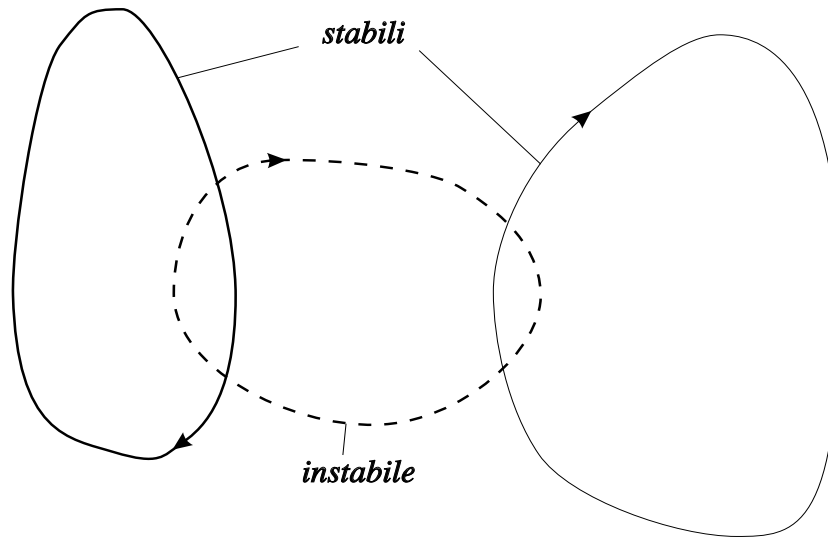


FIGURA 53

*Sezione di Poincaré delle orbite dell'equazione di Duffing.*

Limitiamoci ora al caso  $\omega = 1$ . Al crescere ulteriore di  $\gamma$ , l'orbita stabile aumenta il suo periodo, come mostrato in figura:

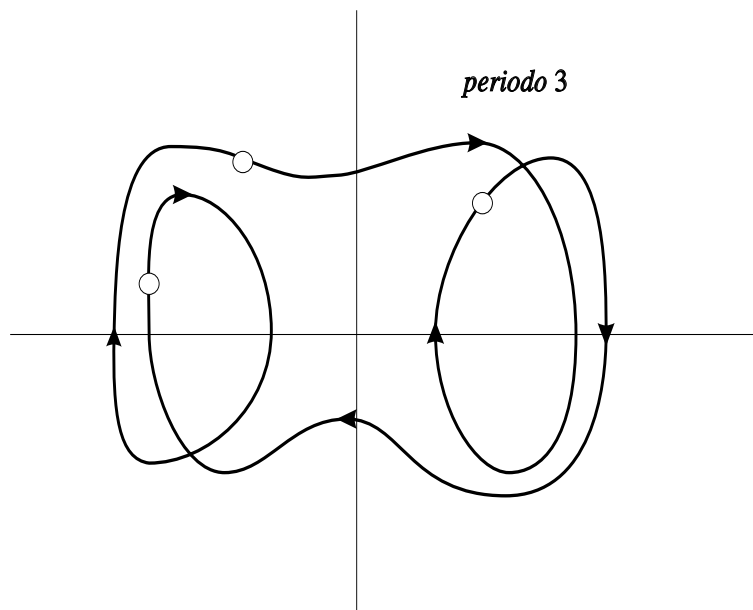


FIGURA 54

*Sezione di Poincaré delle orbite dell'equazione di Duffing.*

e queste continue moltiplicazioni del periodo si accumulano in modo analogo a quanto accade nella mappa logistica fino alla comparsa di un “attrattore stra-

no”, ossia di una struttura complessa che rende ragione di un comportamento caotico delle soluzioni:

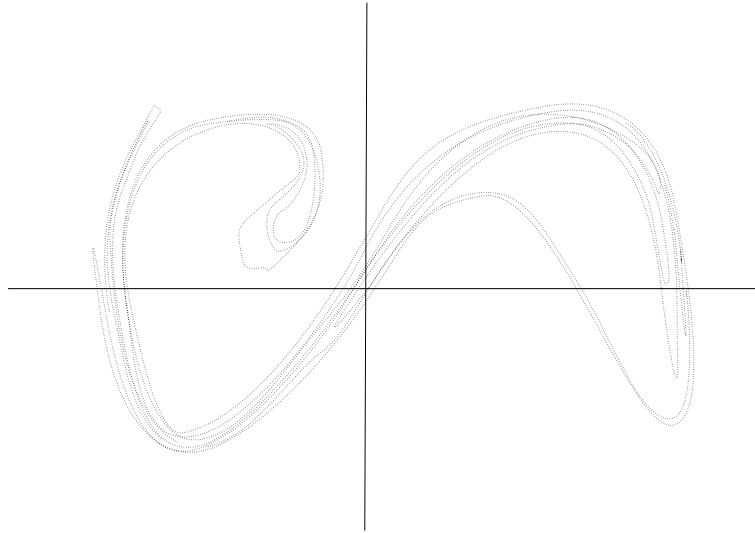


FIGURA 55

*Strano attrattore dell'equazione di Duffing.*

Per valori alti di  $\gamma$ , si può avere coesistenza dello strano attrattore e di grandi orbite stabili di periodo 1, come mostra l'ultima figura.

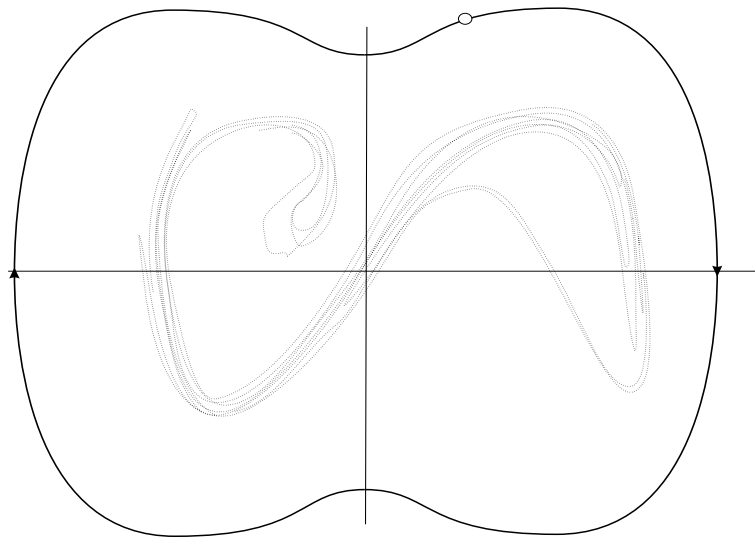


FIGURA 56

*Strano attrattore dell'equazione di Duffing e orbita periodica.*

### 5.5. Le equazioni di Lorenz

Un altro celebre, ma più difficile sistema non lineare venne introdotto da E. N. Lorenz nel 1963 nel contesto dello studio della dinamica dei fluidi. Si tratta forse del più semplice sistema autonomo a presentare un comportamento complesso. Il sistema è

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma y - \sigma x \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy. \end{cases} \quad (\sigma, \rho, \beta \geq 0)$$

Esamineremo in breve il comportamento del sistema per  $\sigma, \beta$  fissati al variare di  $\rho$ . Si vede facilmente che per  $\rho \leq 1$  si ha il solo punto di equilibrio  $(0, 0, 0)$ , mentre per  $\rho > 1$  si hanno i due punti

$$(\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1).$$

La matrice linearizzata nell'origine è

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

e ammette autovalori

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(\sigma + 1 \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\rho\sigma}), \quad \lambda_3 = -\beta.$$

Pertanto da una semplice disequazione si vede che l'origine diviene linearmente instabile per  $\rho > 1$ , con una semplice biforcazione a forca in  $\rho = 1$ . Un'analisi simile mostra che le due posizioni di equilibrio sono stabili per

$$1 \leq \rho < \rho_H = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1}.$$

Per  $\rho = \rho_H$  si osserva una biforcazione di Hopf. In questo caso, però, le orbite biforcute si rivelano instabili, mentre appare un insieme attrattivo molto più complicato. Il diagramma mostrato in Appendice evidenzia le orbite per

$\sigma = 10, \beta = 8/3$  e  $\rho = 28$  (qui  $\rho_H \approx 24.74$ ). Esse giacciono apparentemente su di un piano per poi passare improvvisamente nell'altro "lobo", e così di seguito. Un'analisi accurata mostra che le orbite non tendono in realtà a un singolo piano, ma piuttosto a una specie di "libro con infinite pagine" che è chiamato *attrattore di Lorenz*.

## 5.6. Applicazioni all'ecologia

Numerose applicazioni di questa teoria vanno anche alla Biologia, e in particolare allo studio dell'incremento demografico delle specie. Sia  $x(t)$  la popolazione di una certa specie all'istante  $t$ . Il *tasso relativo di crescita* della popolazione è definito da

$$M(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}.$$

Un modello molto semplice suppone tasso di crescita *costante*. In questo caso si ha l'equazione

$$\dot{x} = Mx \quad (M \in \mathbb{R})$$

che ammette ovviamente come soluzione  $x(t) = x_0 e^{Mt}$ . Il tasso di crescita dipende in generale da molti fattori, quali la disponibilità di cibo, e può essere supposto positivo o negativo a seconda della situazione, ossia  $M = (\sigma - \bar{\sigma})$ . In questo modo è evidente che se  $\sigma > \bar{\sigma}$  si avrà crescita esponenziale della popolazione, mentre per  $\sigma < \bar{\sigma}$  si avrà estinzione (in un tempo finito, giacché  $x$  deve assumere valori interi).

Naturalmente questo modello non è realistico. Un modello più interessante prevede che  $M$  dipenda da  $x$ , e che diventi negativo dopo che  $x$  ha raggiunto una soglia  $\xi$ , detta *popolazione limite*. La più semplice scelta è

$$M(x) = c(\xi - x)$$

corrispondente all'equazione

$$\dot{x} = cx(\xi - x).$$

(Si noti l'analogia con la mappa logistica (1.2)). Integrando questa equazione a variabili separabili con le condizioni iniziali  $x(0) = x_0$  si trova

$$x(t) = \frac{\xi x_0 e^{c\xi t}}{x_0 e^{c\xi t} + \xi - x_0}$$

Da qui si vede subito che se  $c < 0$ , allora si ha estinzione, mentre se  $c > 0$  la popolazione tende a  $x = \xi$ . Tale posizione di equilibrio è pertanto asintoticamente stabile.

Fin qui il discorso per *una sola* specie. Se esse sono anche solo due, la situazione cambia molto. Infatti siano  $x$  il numero di predatori e  $y$  quello delle prede. Supponiamo anche che il numero di incontri predatore-preda che si risolvono con la fine del secondo sia proporzionale a  $xy$ . Dunque il cibo *pro capite* del predatore è proporzionale a  $y$ , e supponiamo che vi sia estinzione se non vi sono prede, cosicché l'equazione precedente diviene

$$\dot{x} = a(y - \sigma_0)x = (Ay - B)x.$$

Ragioniamo ora sulle prede. Supponendo una disponibilità costante di cibo per esse in assenza di predatori, abbiamo l'equazione

$$\dot{y} = Cy - f(x, y)$$

dove  $f(x, y)$  è il numero di prede mangiate nell'unità di tempo. È ragionevole supporre che  $f$  sia proporzionale al numero di predatori, e supponiamo che sia anche proporzionale a  $y$ , cosicché se vi è un numero doppio di prede, vi sarà un numero doppio di predazioni. In definitiva si ottiene per  $y$  l'equazione

$$\dot{y} = Cy - Dxy = (C - Dx)y.$$

Il sistema che si trova è dunque

$$\begin{cases} \dot{x} = (Ay - B)x \\ \dot{y} = (C - Dx)y \end{cases}$$

che è noto col nome di *sistema di Volterra-Lotka*. Esso ha due soluzioni di equilibrio,  $(0, 0)$  e  $(C/D, B/A)$ . La prima è instabile, avendosi

$$A(0, 0) = \begin{bmatrix} -B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -B, \quad \lambda_2 = C.$$

La seconda, invece, ha

$$A(C/D, B/A) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{AC}{D} \\ -\frac{DB}{A} & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{CB}$$

che non fornisce informazioni sulla stabilità.

Si può a questo punto dimostrare che la funzione

$$H(x, y) = Dx - C \log x + Ay - B \log y$$

è costante sulle traiettorie del sistema e che  $(C/D, B/A)$  è un minimo stretto per essa. Dunque si ha equilibrio stabile con orbite periodiche descritte dalla figura.

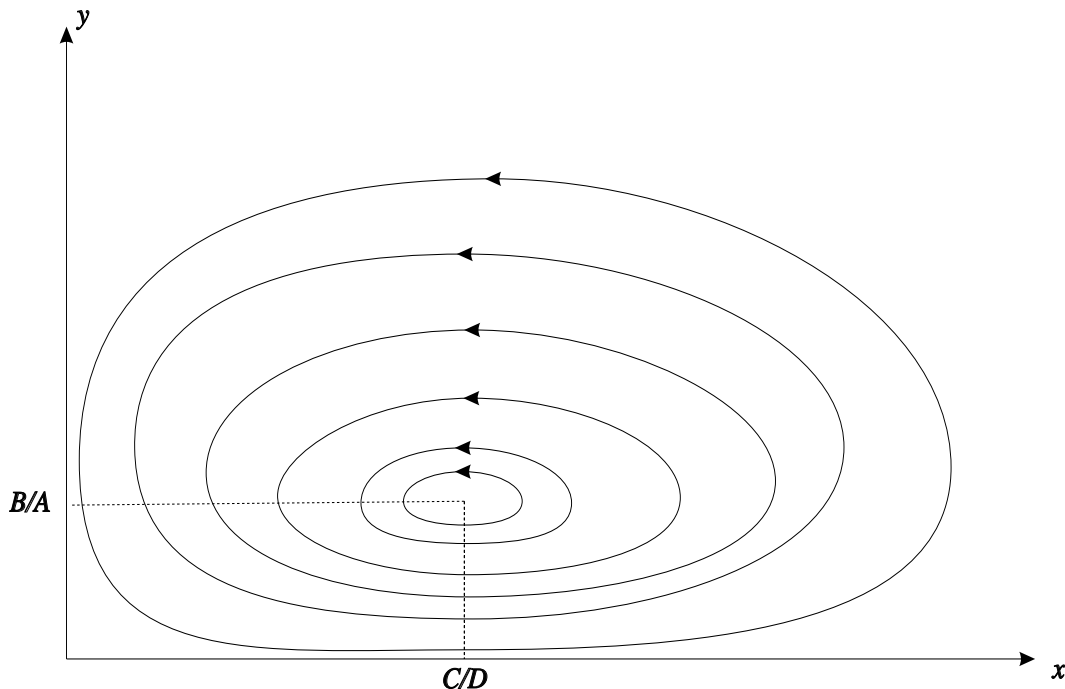


FIGURA 57

*Orbite del sistema di Lotka-Volterra.*

Infine, se si introducono nei fattori del sistema dei termini che rendono negativo il tasso di crescita per  $x, y$  grande, otteniamo il sistema di Volterra-Lotka modificato

$$\begin{cases} \dot{x} = (Ay - B - \lambda x)x \\ \dot{y} = (C - Dx - \mu y)y. \end{cases}$$

Questo sistema presenta due comportamenti a seconda se le rette  $Ay - B - \lambda x = 0$  e  $C - Dx - \mu y = 0$  si intersecano o meno nel primo quadrante. Se



esse non si intersecano, le possibili posizioni di equilibrio sono  $(0, 0)$ ,  $(0, C/\mu)$ ,  $(B/\lambda, 0)$ ; le prime due sono instabili e la terza è asintoticamente stabile.

Se invece si ha un equilibrio  $(\bar{x}, \bar{y})$  nel primo quadrante, la situazione è diversa e più complicata. Si può allora vedere che esistono  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  tali che il rettangolo di vertici

$$(0, 0), (\bar{p}, 0), (\bar{p}, \bar{q}), (0, \bar{q})$$

è positivamente invariante. Si può allora applicare il teorema di Poincaré-Bendixson e concludere che ogni orbita che entra nel rettangolo deve tendere a uno dei punti di equilibrio o a un ciclo limite. Poiché si vede che l'origine e i punti di intersezione con gli assi sono instabili, se ne conclude che ogni traiettoria deve o tendere al punto di equilibrio o a un ciclo limite.



# Appendice

FIGURA 58  
*Diagramma di biforcazione della mappa logistica.*

FIGURA 59  
*L'attrattore di Lorenz.*

# Bibliografia

- [1] L. ELSGOLTS, *Equazioni differenziali e calcolo delle variazioni*, Ed. Riuniti, 1985.
- [2] F. R. GANTMACHER, *Lezioni di Meccanica Analitica*, Ed. Riuniti, 1980.
- [3] J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1983.
- [4] A. HARAUX, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*, Masson, 1991.
- [5] M. W. HIRSCH, S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [6] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 1991.
- [7] A. VULPIANI, *Determinismo e Caos*, La Nuova Italia, 1994.
- [8] E.C. ZACHMANOGLU, D.W. THOE, *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*, Dover, 1986.