

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 6 giugno 2014

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \mu x(\mu - x)(\mu^2 - x^2 - 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Discutere la stabilità di tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(\mu - 1)x \\ \dot{y} = \mu x - y + z \\ \dot{z} = x + (\mu - 1)y + \mu z \end{cases}$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

3. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale definito da

$$x_{h+1} = x_h^2 - k$$

se ne trovino i punti di equilibrio e si discuta la loro stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Nel caso $k = 2$ si trovi poi il ciclo di ordine 2 e si calcoli il valore di

$$\lim_{h \rightarrow \infty} x_h$$

per $x_0 = 3$.

4. In un modello competitivo di dinamica di due popolazioni x e y , il tasso di crescita della specie x segue la legge $5 - 6x - 6y$, mentre quello della specie y segue la legge $2 - 3x - 2y$.

Si chiede di:

- trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità;
- risolvere il sistema linearizzato attorno a una posizione di equilibrio stabile con condizioni iniziali $X(0) = 0$, $Y(0) = 2$.