

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 9 settembre 2014

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \mu(2x - \mu)(\mu^2 - x^2 - 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Studiare la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y^3 \\ \dot{y} = -x - \sin z \\ \dot{z} = -z + y^3. \end{cases}$$

3. Dato il sistema dinamico discreto bidimensionale lineare

$$\begin{cases} x_{h+1} = (a+1)x_h + y_h \\ y_{h+1} = ax_h + 2ay_h \end{cases}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Nel caso $a = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, si trovi poi

$$\lim_{h \rightarrow \infty} x_h, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} y_h.$$

4. In un modello economico il prodotto interno lordo segue la legge

$$\ddot{Y}(t) + (3-k)\dot{Y}(t) - 3kY(t) = 0.$$

Si studi al variare di $k \in \mathbb{R}$ la stabilità delle soluzioni del sistema del primo ordine corrispondente.

Si trovi poi la soluzione nel caso $k = -3$ imponendo $Y(0) = 1$ e $\dot{Y}(0) = 0$.