

**Prova scritta di Sistemi Dinamici**  
**6 settembre 2019**

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x^2 + \mu^2 - 2x - 1)(x^2 + \mu^2 + 2x - 1)(\mu - x + 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro  $\mu \in \mathbb{R}$  e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Si studi la stabilità delle soluzioni di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = kx + xy^2 \\ \dot{y} = -y^3 - x^2y \end{cases}$$

al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .

3. In un modello di dinamica di due popolazioni  $x$  e  $y$  di tipo Gomatam, il tasso di crescita della specie  $x$  segue la legge  $-\ln x + \ln y$ , mentre quello della specie  $y$  segue la legge  $4 \ln x - \ln y$ .

Si chiede di:

- trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità;
- risolvere il sistema con condizioni iniziali  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ .

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = \mu + x_h - \sin x_h, \quad h \in \mathbb{N}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di  $\mu \in \mathbb{R}$ .