## Risoluzione della prova di Sistemi Dinamici del 17 luglio 2020

1. Cerchiamo le soluzioni di equilibrio risolvendo

$$\begin{cases} a + x^2 y - bx - x = 0 \\ bx - x^2 y = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda abbiamo $x^2 y = bx$ che sostituito nella prima dà

$$a + bx - bx - x = 0 \quad \Rightarrow \quad a - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a$$

che è accettabile per $a > 0$. Risostituito nella seconda, viene

$$b = ay \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}$$

che è accettabile per $b > 0$. Quindi per $a, b > 0$ esiste una sola posizione di equilibrio $(a, b/a)$. Per la stabilità calcoliamo il gradiente del secondo membro:

$$\nabla F(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy - b - 1 & x^2 \\ b - 2xy & -x^2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla F(a, b/a) = \begin{bmatrix} b - 1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix}.$$

Il determinante è $a^2$, quindi sempre positivo, e la traccia è $b - 1 - a^2$. Quindi per $b < 1 + a^2$ la posizione è esponenzialmente stabile, mentre per $b > 1 + a^2$ la posizione è instabile. Essendo il sistema del secondo ordine, possiamo anche classificare la posizione mediante il Teorema $\tau - \delta$ quando la posizione è iperbolica:

- si ha un nodo per $\tau^2 \geqslant 4\delta$, ovvero

$$(b - 1 - a^2)^2 \geqslant 4a^2 \quad \Rightarrow \quad |b - 1 - a^2| \geqslant 2a \quad \Rightarrow \quad b \leqslant (1 - a)^2 \ \vee \ b \geqslant (1 + a)^2;$$

- si ha un fuoco per $\tau^2 \geqslant 4\delta$, ovvero

$$(1 - a)^2 < b < (1 + a)^2.$$

2. La matrice del sistema lineare è data da

$$\begin{bmatrix} k + 5 & 6 \\ -3 & k - 4 \end{bmatrix}$$

e gli autovalori sono $k - 1, k + 2$. Quindi per $k \neq -2, 1$ c'è solo la posizione nulla e:

- per $k < -2$ è un nodo stabile;
- per $-2 < k < 1$ è una sella (quindi instabile);
- per $k > 1$ è un nodo instabile.

Per $k = 1$ ci sono infinite posizioni di equilibrio, tutte instabili, mentre per $k = -2$ ci sono infinite posizioni di equilibrio, tutte stabili semplicemente.

3. Per trovare i punti di equilibrio risolvo l'equazione dei punti fissi

$$x + \frac{d}{e^x} - 2 = x \quad \Rightarrow \quad e^x = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \ln \frac{d}{2}$$

che è accettabile per $d > 0$. Quindi abbiamo una sola posizione di equilibrio nel caso $d > 0$ e nessuna per $d \leqslant 0$.
Ora calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 1 - \frac{d}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f'\Big(\ln\frac{d}{2}\Big) = 1 - 2 = -1$$

e quindi non si può usare la linearizzazione. Essendo il sistema unidimensionale, calcoliamo

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f''\Big(\ln\frac{d}{2}\Big) = 2, \\ f'''(x) &= -\frac{d}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f'''\Big(\ln\frac{d}{2}\Big) = -2, \end{aligned}$$

quindi

$$2f'''(\overline{x}) + 3f''(\overline{x})^2 = -4 + 12 > 0$$

e la posizione è asintoticamente stabile per ogni $d > 0$.
Nel caso $d = 0$ il sistema dinamico diventa semplicmente

$$x_{h+1} = x_h - 2$$

che non ha punti fissi. Cerchiamo i 2-cicli:

$$f^2(x) = x - 2 - 2 = x - 4 \quad \Rightarrow \quad x - 4 = x \quad \Rightarrow \quad \nexists x$$

quindi non esistono 2-cicli.