Risoluzione della prova di Sistemi Dinamici del 9 giugno 2023

1. Si noti che il sistema è lineare. Le soluzioni di equilibrio si trovano ponendo $x_h = \overline{x}$, da cui

$$\overline{x} = k\overline{x} + (k-1)\overline{x} \quad \Rightarrow \quad \overline{x}(2k-2) = 0,$$

quindi si ha $\overline{x} = 0$ per ogni k, e nel caso $k = 1$ tutte le posizioni sono di equilibrio.

Il polinomio caratteristico è dato da

$$\lambda^2 - k\lambda + (1-k)$$

per cui l'equilibrio è asintoticamente stabile per

$$|k| < 2 - k < 2$$

da cui $0 < k < 1$. Nel caso in cui $k < 0$ o $k > 1$ l'equilibrio è instabile.

Per $k = 0$ si ha il sistema $x_{h+2} = -x_h$ che ha tutte soluzioni periodiche di periodo 4 (tranne l'equilibrio), che oscillano vicino alle condizioni iniziali, per cui 0 è stabile semplicemente.

Per $k = 1$ si ha il sistema $x_{h+1} = x_h$, per cui tutte le posizioni sono di equilibrio, e quindi sono tutte stabili semplicemente. □

2. Linearizzando attorno a $(0, 0)$ si ha la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

che ha autovalori $0, k$. Quindi se $k > 0$ l'equilibrio è instabile. Se invece k è negativo, la linearizzazione non funziona.

Cerchiamo quindi una funzione di Ljapunov della forma $W = f(x) + g(y)$, ricordando che $k < 0$: moltiplicando la prima equazione per x^3 otteniamo un termine che cambia segno del tipo $kx^3 \sin y$, quindi moltiplichiamo la seconda per $-k \sin y$ (che si comporta come y, dato il segno di k). Otteniamo la funzione

$$W(x, y) = \frac{x^4}{4} - k(1 - \cos y),$$

definita sull'intorno $U = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$, che ha minimo stretto in $(0, 0)$ e

$$\dot{W} = kx^6 - k^2 y \sin y \leq 0,$$

quindi la posizione è stabile. Inoltre $\dot{W} = 0$ solo sulla posizione di equilibrio (nell'intorno U), per cui $(0, 0)$ è asintoticamente stabile e attrae tutto U.

Nel caso $k = 0$ si ha il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = x^3 \end{cases}$$

che si risolve facilmente: $x(t) \equiv x_0$, $y(t) = (x_0)^3 t + y_0$. Essendoci in y un moto rettilineo uniforme, la posizione è instabile. □

3. Risolvendo l'equazione dei punti fissi

$$x + kx \sin x = x$$

si trova $x = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Per $k = 0$ si ha che ogni posizione è di equilibrio (e quindi è stabile semplicemente).

Per $k \neq 0$ calcoliamo $f'(x) = 1 + k \sin x + kx \cos x$, da cui

$$f'(2m\pi) = 1 + 2m\pi k, \quad f'((2m+1)\pi) = 1 - (2m+1)\pi k.$$

Nel caso $\overline{x} = 2m\pi$ si ha la stabilità asintotica per

$$-1 < 1 + 2m\pi k < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < m\pi k < 0$$

da cui $k \in (-1/(m\pi), 0)$ per $m \geq 1$ e $k \in (0, -1/(m\pi))$ per $m \leq -1$.

Nel caso $\overline{x} = (2m+1)\pi$ si ha la stabilità asintotica per

$$-1 < (2m+1)k - 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < (2m+1)\pi k < 2$$

da cui $k \in (0, 2/((2m+1)\pi))$ per $m \geq 0$ e $k \in (2/((2m+1)\pi), 0)$ per $m \leq -1$.

Veniamo ai casi limite, tenendo presente che siamo nel caso $k \neq 0$. Calcoliamo $f''(x) = 2k\cos x - kx\sin x$ e $f'''(x) = -3k\sin x - kx\cos x$, da cui

$$f''(2m\pi) = 2k, \quad f''((2m+1)\pi) = -2k, \qquad f'''(2m\pi) = -4mk\pi, \quad f'''((2m+1)\pi) = 2(2m+1)k\pi.$$

Si ha $f'(\overline{x}) = 1$ solo per $\overline{x} = 0$, ed essendo $f''(0) \neq 0$, la posizione è instabile per ogni $k \neq 0$.

Si ha invece $f'(2m\pi) = -1$ per $k = -1/(m\pi)$, $m \neq 0$, da cui

$$2f'''(2m\pi) + 3f''(2m\pi)^2 = 8 + 3(-2/(m\pi))^2 > 0,$$

quindi $\overline{x} = 2m\pi$ è stabile asintoticamente per $k = -1/(m\pi)$.

Si ha ancora $f'((2m+1)\pi) = -1$ per $k = 2/((2m+1)\pi)$, da cui

$$2f'''((2m+1)\pi) + 3f''((2m+1\pi)^2 = 8 + 3(2/((2m+1)\pi))^2 > 0,$$

quindi $\overline{x} = (2m+1)\pi$ è stabile asintoticamente per $k = 2/((2m+1)\pi)$. □

4. Distinguiamo i casi in funzione del segno del discriminante $\Delta = p^2 - q$.

Se $p^2 > q$ si ha $\lambda_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$ e dunque dobbiamo mostrare che

$$-1 < -p \pm \sqrt{p^2 - q} < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 + p < \pm\sqrt{p^2 - q} < 1 + p.$$

Sapendo che $|p| < 1$ (dall'ipotesi), resta solo da vedere che

$$-1 + p < -\sqrt{p^2 - q}, \quad \sqrt{p^2 - q} < 1 + p,$$

cioè che $\sqrt{p^2 - q} < 1 \pm p$. Elevando al quadrato si ha

$$p^2 - q < 1 \pm 2p + p^2 \quad \Rightarrow \quad \pm 2p < 1 + q,$$

che è vera, data la prima disuguaglianza dell'ipotesi.

Se $p^2 = q$, si ha $\lambda_{1,2} = -p$ e la disuguaglianza $|p| < 1$ è vera.

Infine, se $p^2 < q$ si ha $\lambda_{1,2} = -p \pm i\sqrt{q - p^2}$ e dunque

$$|\lambda_{1,2}|^2 = p^2 + q - p^2 = q,$$

e la disuguaglianza $q < 1$ è vera. □