

# Riempimenti dello spazio

## periodici e aperiodici

Maurizio Paolini (paolini@dmf.unicatt.it)

Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccoló Tartaglia"  
Università Cattolica, Brescia

Passo Pramollo, agosto 2014

- Riempimenti periodici
- Il problema di Kelvin
- Riempimenti aperiodici (animazione)

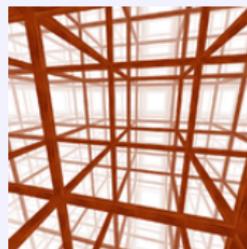
## Quiz

Quali dei cinque solidi platonici possono riempire lo spazio?

## Quiz

Quali dei cinque solidi platonici possono riempire lo spazio?

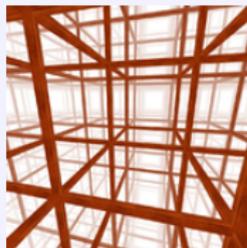
Solo il cubo!



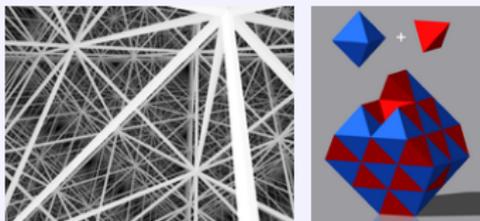
## Quiz

Quali dei cinque solidi platonici possono riempire lo spazio?

Solo il cubo!



Tetraedro e ottaedro insieme



# Riempimenti periodici: poliedri convessi

Solidi regolari: platonici, prismi, antiprismi, archimedei  
(vertex-transitive)

Solidi di Catalan (face-transitive)

# Riempimenti periodici: poliedri convessi

Solidi regolari: platonici, prismi, antiprismi, archimedei  
(vertex-transitive)

Solidi di Catalan (face-transitive)

- ① Prisma triangolare e prisma esagonale

# Riempimenti periodici: poliedri convessi

Solidi regolari: platonici, prismi, antiprismi, archimedei  
(vertex-transitive)

Solidi di Catalan (face-transitive)

- 1 Prisma triangolare e prisma esagonale
- 2 Ottaedro troncato (solido archimedeo)



# Riempimenti periodici: poliedri convessi

Solidi regolari: platonici, prismi, antiprismi, archimedei  
(vertex-transitive)

Solidi di Catalan (face-transitive)

- 1 Prisma triangolare e prisma esagonale
- 2 Ottaedro troncato (solido archimedeo)
- 3 Dodecaedro rombico (solido di Catalan)
- 4 Dodecaedro trapezo-rombico
- 5 ...



## Ottaedro troncato

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In *geometria solida* l'**ottaedro troncato** (o **tetracaidecaedro**) è uno dei tredici *poliedri archimedei*, ottenuto troncando le *cuspidi* dell'*ottaedro regolare*.

Ha 14 facce regolari, di cui 8 *esagonali* e 6 *quadrato*, dei suoi 36 spigoli 24 separano una faccia esagonale da una quadrata e 12 separano due facce esagonali, e in ciascuno dei suoi 24 vertici concorrono una faccia quadrata e due facce esagonali.

### Indice [nascondi]

- 1 Area e volume
- 2 Dualità
- 3 Simmetrie
- 4 Legami con cubo e ottaedro
- 5 Bibliografia
- 6 Voci correlate
- 7 Altri progetti

### Area e volume [modifica | modifica sorgente]

L'area  $A$  ed il volume  $V$  di un ottaedro troncato i cui spigoli hanno lunghezza  $a$  sono le seguenti:

$$A = (6 + 12\sqrt{3})a^2$$

$$V = 8\sqrt{2}a^3$$

### Ottaedro troncato



(Animazione)

**Tipo** Solido archimedeo

**Forma facce** Quadrati e esagoni

**N° facce** 14

**N° spigoli** 36

**N° vertici** 24

**Valenze vertici** 3

**Duale** Tetracisaedro

**Proprietà** non chirale

## Dodecaedro rombico

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In geometria solida, il **dodecaedro rombico** o **rombododecaedro** è uno dei tredici poliedri di Catalan.

### Indice [nascondi]

- 1 Facce e dualità
- 2 Area e volume
- 3 Tassellatura
- 4 Altri solidi
  - 4.1 Dodecaedro trapezoidale
- 5 Altri solidi
- 6 Bibliografia
- 7 Voci correlate
- 8 Altri progetti

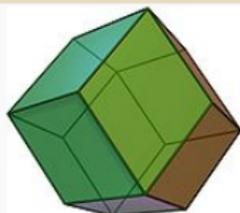
Facce e dualità [ [modifica](#) | [modifica sorgente](#) ]

Il dodecaedro rombico ha 12 facce a forma di *rombo*. Si tratta di un solido di Catalan, ovvero di un *poliedro duale* ad un *solido archimedeo*, il *cubottaedro*.

Come tutti i solidi di Catalan, il dodecaedro rombico è uniforme sulle facce: per ogni coppia di facce esiste una *simmetria* del poliedro che sposta la prima sulla seconda.

Il dodecaedro rombico è inoltre anche omogeneo sugli spigoli: per ogni coppia di questi esiste una simmetria che sposta il primo sul secondo.

### Dodecaedro rombico



(Animazione)

**Tipo** Solido di Catalan

**Forma facce** rombi

**N° facce** 12

**N° spigoli** 24

**N° vertici** 14

**Valenze vertici** 3,4

**Duale** Cubottaedro

**Proprietà** non chirale

## Trapezo-rhombic dodecahedron

From Wikipedia, the free encyclopedia

In *geometry*, the **trapezo-rhombic dodecahedron** is a *convex polyhedron* with 6 *rhombic* and 6 *trapezoidal* faces. It has  $D_{3h}$  symmetry.

### Contents [\[hide\]](#)

- 1 Construction
- 2 Space-filling tessellation
- 3 See also
- 4 References
- 5 External links

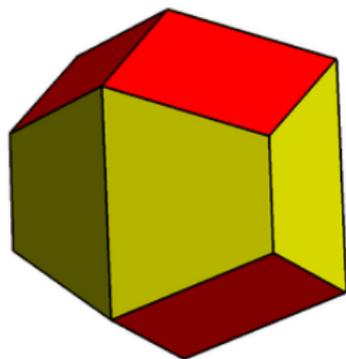
### Construction [\[edit\]](#)

This polyhedron could be constructed by taking a tall uniform *hexagonal prism*, and making 3 angled cuts on the top and bottom. The trapezoids represent what remains of the original prism sides, and the 6 rhombi a result of the top and bottom cuts.

### Space-filling tessellation [\[edit\]](#)

A *space-filling tessellation*, the *trapezo-rhombic dodecahedral honeycomb*, can be made by translated copies of this cell. Each "layer" is a *hexagonal tiling*, or a *rhombille tiling*, and alternate layers are connected by shifting their centers and rotating each polyhedron so the rhombic faces match up.

Trapezo-rhombic dodecahedron



|          |  |
|----------|--|
| Type     | <i>Johnson solid dual</i>                |
| Faces    | 6 <i>rhombus</i> ,<br>6 <i>trapezoid</i> |
| Edges    | 24                                       |
| Vertices | 14                                       |

# Il problema di Kelvin

In un alveare le celle sono prismi con sezione esagonale.  
L'esagono è la forma più vicina al cerchio che "tassella" il piano

## iper-api risparmiuose

Come ottimizzare la cera di un alveare 4-dimensionale?



Nel 1887, Lord Kelvin si chiese come si potesse partizionare lo spazio in celle di ugual volume minimizzando l'estensione delle superfici di separazione. In altre parole, qual è la "schiuma di bolle" più efficiente?

# Problema di Kelvin: primo tentativo

L'esagono si può ottenere "impaccando" tanti cerchi nel modo più compatto possibile e poi schiacciando tutto in modo da eliminare gli interstizi...

# Problema di Kelvin: primo tentativo

L'esagono si può ottenere "impaccando" tanti cerchi nel modo più compatto possibile e poi schiacciando tutto in modo da eliminare gli interstizi...

Impilando tante sfere come i mucchi di arance al mercato e poi schiacciandole si ottiene:



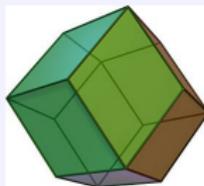
# Problema di Kelvin: primo tentativo

L'esagono si può ottenere "impaccando" tanti cerchi nel modo più compatto possibile e poi schiacciando tutto in modo da eliminare gli interstizi...

Impilando tante sfere come i mucchi di arance al mercato e poi schiacciandole si ottiene:



Il **dodecaedro rombico**



# Problema di Kelvin: primo tentativo

L'esagono si può ottenere "impaccando" tanti cerchi nel modo più compatto possibile e poi schiacciando tutto in modo da eliminare gli interstizi...

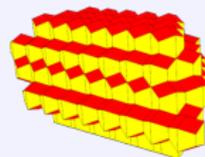
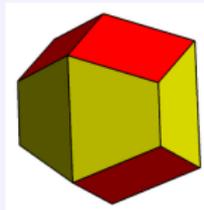
Impilando tante sfere come i mucchi di arance al mercato e poi schiacciandole si ottiene:



Il **dodecaedro rombico**



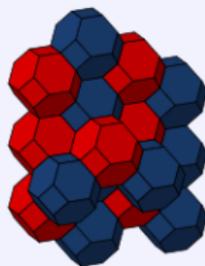
Ma anche il **dodecaedro trapezo-rombico**



Ma si può fare meglio!

Kelvin pensava che la soluzione del problema fosse

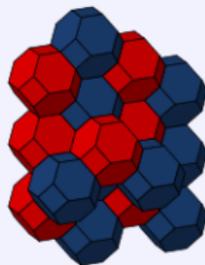
L'**ottaedro troncato** (un tetradecaedro) con le facce un po' incurvate



# Problema di Kelvin: secondo tentativo

Kelvin pensava che la soluzione del problema fosse

L'**ottaedro troncato** (un tetradecaedro) con le facce un po' incurvate



Per più di cento anni (fino al 1993) questa è stata ritenuta la soluzione del problema.

## Weaire-Phelan structure

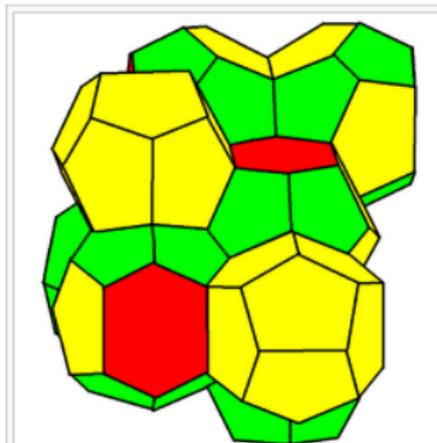
From Wikipedia, the free encyclopedia

(Redirected from [Kelvin problem](#))

In [geometry](#), the **Weaire-Phelan structure** is a complex 3-dimensional structure representing an idealised [foam](#) of equal-sized bubbles. In 1993, [Trinity College Dublin](#) physicist [Denis Weaire](#) and his student Robert Phelan found that in computer simulations of foam, this structure was a better solution of the "Kelvin problem" than the previous best-known solution, the Kelvin structure.<sup>[1]</sup>

### Contents [\[hide\]](#)

- 1 The Kelvin conjecture
- 2 Description of Weaire-Phelan structure
- 3 Polyhedral approximation
- 4 Applications
- 5 See also
- 6 References
- 7 External links

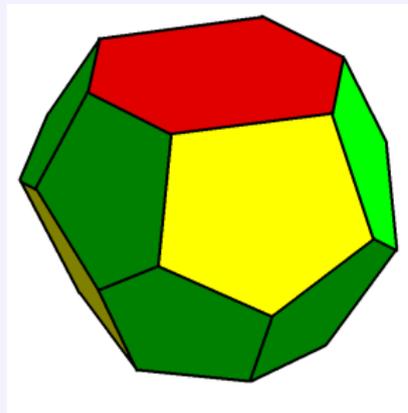
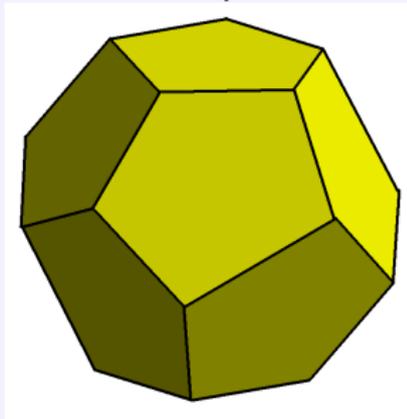


Weaire-Phelan structure (polyhedral cells) 

# Problema di Kelvin: struttura di Weaire-Phelan

E' formata da **due** forme diverse, ma con lo stesso volume (quindi rispetta la "lettera" della richiesta di Kelvin): un dodecaedro (non regolare) e un "tetrakaidecahedron" (due esagoni e 12 pentagoni). Le facce sono leggermente incurvate.

Il miglioramento rispetto alla struttura di Kelvin è dello 0,3%.



## Gyrobifastigium

From Wikipedia, the free encyclopedia

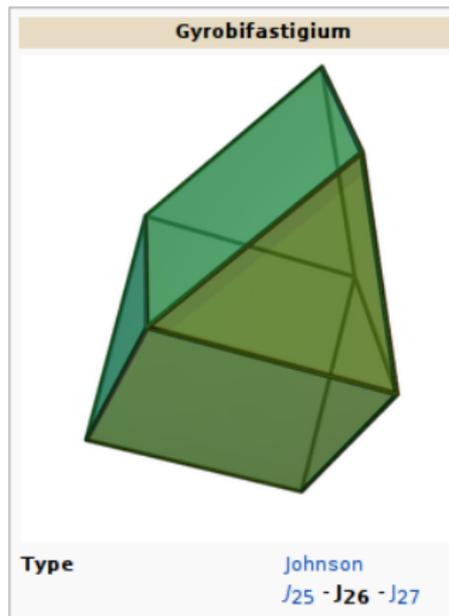
In [geometry](#), the **gyrobifastigium** is the 26th [Johnson solid](#) ( $J_{26}$ ). It can be constructed by joining two face-regular [triangular prisms](#) along corresponding square faces, giving a quarter-turn to one prism.

A [Johnson solid](#) is one of 92 strictly [convex regular-faced polyhedra](#), but which is not [uniform](#), i.e., not a [Platonic solid](#), [Archimedean solid](#), [prism](#) or [antiprism](#). They are named by [Norman Johnson](#) who first enumerated the set in 1966.

The name comes from the Latin *fastigium*, meaning a sloping roof.<sup>[1]</sup> In the standard naming convention of the Johnson solids, *bi-* means two solids connected at their bases, and *gyro-* means the two halves are twisted with respect to each other.

The gyrobifastigium's place in the list of Johnson solids, immediately before the [bicupolas](#), is explained by viewing it as a *digonal gyrobicupola*. Just as the other regular cupolas have an alternating sequence of squares and triangles surrounding a single polygon at the top ([triangle](#), [square](#) or [pentagon](#)), each half of the gyrobifastigium consists of just alternating squares and triangles, connected at the top only by a ridge.

The gyrobifastigium is one of five convex polyhedra with regular faces capable of [space-filling](#) (the others being the [cube](#), [truncated octahedron](#), [triangular](#) and [hexagonal prism](#)) and it is the only Johnson solid capable of doing so.<sup>[2][3][4]</sup> The 92 Johnson solids were named and described by [Norman Johnson](#) in 1966.



# Riempimenti periodici: verso i riempimenti aperiodici

Il “biprisma” di Conway ha la struttura del “gyrobifastigium”, ma deformato in modo da impedire una tassellazione periodica (Conway, 1993)

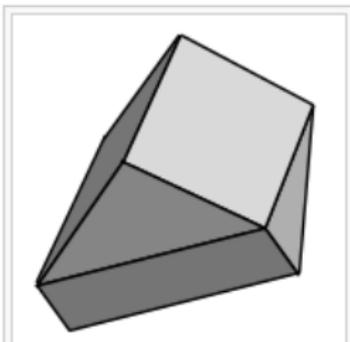


Illustration of a Schmitt-Conway biprism, also called a Schmitt-Conway-Danzer tile.

Tessellation can be extended to three or more dimensions. Certain polyhedra can be stacked in a regular crystal pattern to fill (or tile) three-dimensional space, including the cube (the only regular polyhedron to do so); the rhombic dodecahedron; and the truncated octahedron.<sup>[28]</sup> Some crystals including Andradite (a kind of Garnet) and Fluorite can take the form of rhombic dodecahedra.<sup>[29][30]</sup>

The Schmitt-Conway biprism is a convex polyhedron which has the property of tiling space only aperiodically. John Horton Conway discovered it in 1993.<sup>[31]</sup>

Tessellations in three or more dimensions are called honeycombs. In three dimensions there is just one regular honeycomb, which has eight cubes at each polyhedron vertex. Similarly, in three dimensions there is just one quasiregular<sup>[b]</sup> honeycomb, which has eight tetrahedra and six octahedra at each polyhedron vertex. However there are many possible

semiregular honeycombs in three dimensions.<sup>[32]</sup>



## Quiz

Trovare tetraedri (non regolari) i cui angoli diedri siano tutti razionali con  $\pi$

Il tetraedro regolare non va bene, l'angolo è  $\arccos(1/3) \approx 70,53^\circ$  che non è razionale.

## Quiz

Trovare tetraedri (non regolari) i cui angoli diedri siano tutti razionali con  $\pi$

Il tetraedro regolare non va bene, l'angolo è  $\arccos(1/3) \approx 70,53^\circ$  che non è razionale.

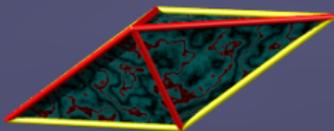


Il monolito aureo

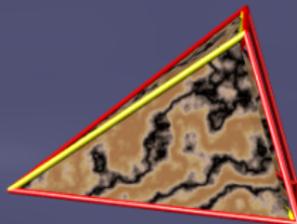
con dimensioni  $1, \tau, \tau^2$  con  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$  (sezione aurea)

Il tetraedro che si ottiene tagliando con un piano per tre vertici ha angoli diedri di  $90, 90, 90, 72, 60, 36$  gradi!

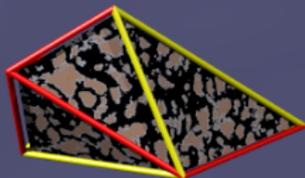
# I quattro strumenti ad arco



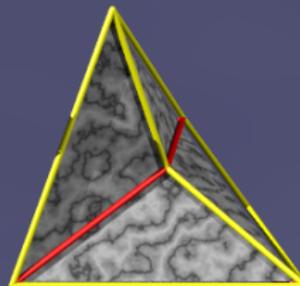
<K> violino



<B> viola

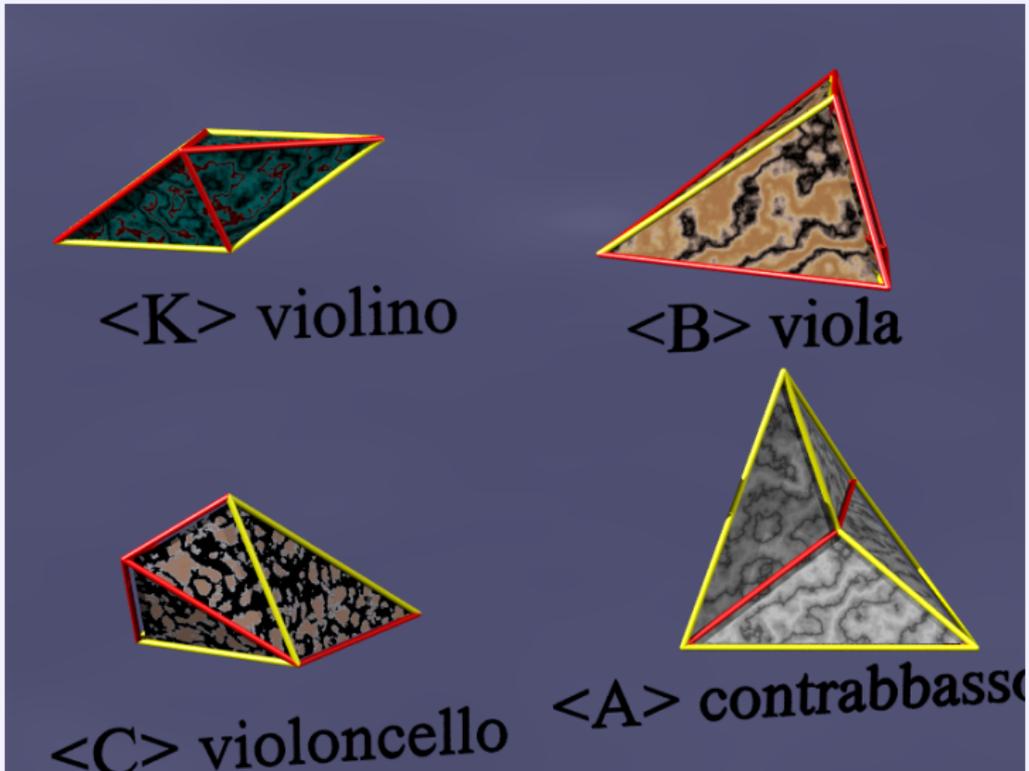


<C> violoncello



<A> contrabbasso

# I quattro strumenti ad arco



Questi “strumenti” insieme permettono di riempire lo spazio, e lo fanno in un modo molto particolare.

# Suoniamo gli strumenti uno alla volta

Proviamo a “suonare” questi strumenti, La loro forma permette  
molti spunti interessanti.

⇒ archi <CTRL-F2>

# Suoniamo gli strumenti uno alla volta

Proviamo a “suonare” questi strumenti, La loro forma permette  
molti spunti interessanti.  $\implies$  archi <CTRL-F2>

- Poliedri

# Suoniamo gli strumenti uno alla volta

Proviamo a “suonare” questi strumenti, La loro forma permette molti spunti interessanti.  $\implies$  archi <CTRL-F2>

- Poliedri
- Ottaedri (non regolari)

# Suoniamo gli strumenti uno alla volta

Proviamo a “suonare” questi strumenti, La loro forma permette molti spunti interessanti.  $\implies$  archi <CTRL-F2>

- Poliedri
- Ottaedri (non regolari)
- Gruppo delle simmetrie di ciascun tassello, il violino si distingue

# Suoniamo gli strumenti uno alla volta

Proviamo a “suonare” questi strumenti, La loro forma permette molti spunti interessanti.  $\implies$  archi <CTRL-F2>

- Poliedri
- Ottaedri (non regolari)
- Gruppo delle simmetrie di ciascun tassello, il violino si distingue
- Convessità - concavità

# Suoniamo gli strumenti uno alla volta

Proviamo a “suonare” questi strumenti, La loro forma permette molti spunti interessanti.  $\implies$  archi <CTRL-F2>

- Poliedri
- Ottaedri (non regolari)
- Gruppo delle simmetrie di ciascun tassello, il violino si distingue
- Convessità - concavità
- Le aste blu (che non si vedono)

# Suoniamo gli strumenti uno alla volta

Proviamo a “suonare” questi strumenti, La loro forma permette molti spunti interessanti.

⇒ archi <CTRL-F2>

- Poliedri
- Ottaedri (non regolari)
- Gruppo delle simmetrie di ciascun tassello, il violino si distingue
- Convessità - concavità
- Le aste blu (che non si vedono)
- Il codice dei colori (zometool)
  - Lunghezze

# Suoniamo gli strumenti uno alla volta

Proviamo a “suonare” questi strumenti, La loro forma permette molti spunti interessanti.

⇒ archi <CTRL-F2>

- Poliedri
- Ottaedri (non regolari)
- Gruppo delle simmetrie di ciascun tassello, il violino si distingue
- Convessità - concavità
- Le aste blu (che non si vedono)
- Il codice dei colori (zometool)
  - Lunghezze
  - Angoli diedri
- Perché si chiamano K, B, C, A?

# Suoniamo gli strumenti uno alla volta

Proviamo a “suonare” questi strumenti, La loro forma permette molti spunti interessanti.

⇒ archi <CTRL-F2>

- Poliedri
- Ottaedri (non regolari)
- Gruppo delle simmetrie di ciascun tassello, il violino si distingue
- Convessità - concavità
- Le aste blu (che non si vedono)
- Il codice dei colori (zometool)
  - Lunghezze
  - Angoli diedri
- Perché si chiamano K, B, C, A?
- I tre triangoli (le facce dei tasselli)

# Suoniamo gli strumenti uno alla volta

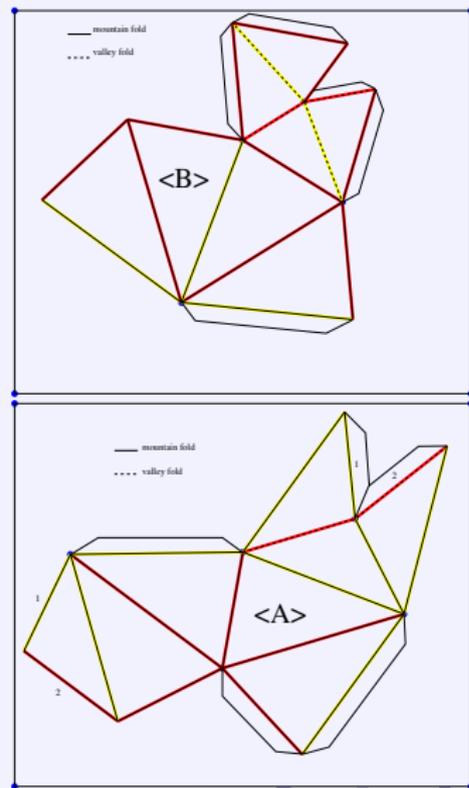
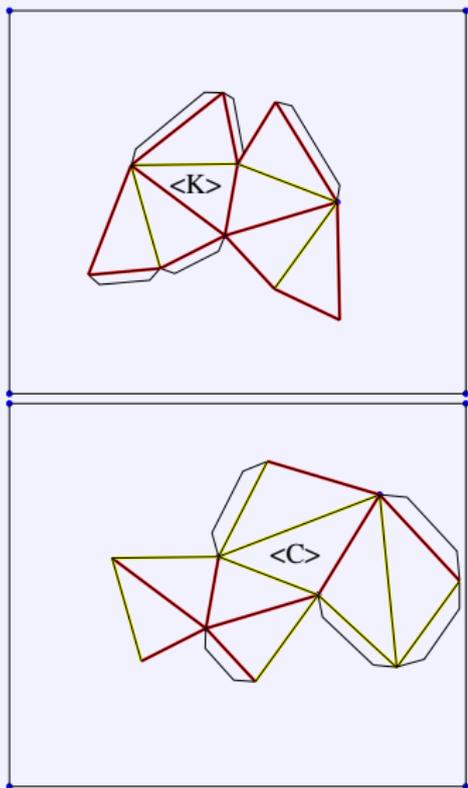
Proviamo a “suonare” questi strumenti, La loro forma permette molti spunti interessanti.  $\Rightarrow$  archi <CTRL-F2>

- Poliedri
- Ottaedri (non regolari)
- Gruppo delle simmetrie di ciascun tassello, il violino si distingue
- Convessità - concavità
- Le aste blu (che non si vedono)
- Il codice dei colori (zometool)
  - Lunghezze
  - Angoli diedri
- Perché si chiamano K, B, C, A?
- I tre triangoli (le facce dei tasselli)
- Prototasselli aperiodici

$\Rightarrow$  animazione <CTRL-F3> (14 minuti)

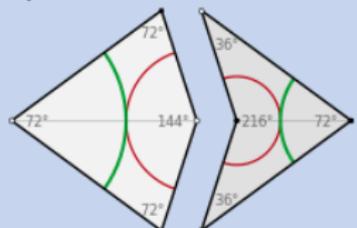
# Sviluppo dei 4 tasselli

<http://dmf.unicatt.it/~paolini/passopramollo/>



# Danzer vs Freccce/Aquiloni di Penrose

C'è una corrispondenza impressionante tra la tassellazione di Penrose del piano con frecce e aquiloni e la tassellazione di Danzer dello spazio.

| Danzer (3D)  | Penrose (2D)   |
|--|--|
| <p>tetraedri K,B,C,A e loro chiralità</p>                       | <p>triangoli aurei acuto e ottuso e loro simmetrici</p>  |
| <p>ottaedri<br/>&lt;K&gt;, &lt;B&gt;, &lt;C&gt;, &lt;A&gt;</p>  | <p>aquilone e freccia</p>                                |
| Fattore di deflazione $\tau$   | Fattore di deflazione $\tau$   |

# Danzer vs Frecce/Aquiloni di Penrose (2)

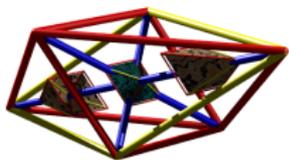
| <b>Danzer (3D)</b>  | <b>Penrose (2D)</b>  |
|---|--|
| Deflazione dei tetraedri autosimilare                       | Deflazione dei triangoli autosimilare                                    |
| Deflazione ottaedri non autosimilare<br>→ tasselli frattali | Deflazione di aquilone e freccia non<br>autosimilare → tasselli frattali |
| Non richiede vincoli di accostamento                        | Necessari vincoli di accostamento  |

# Danzer vs Freccce/Aquiloni di Penrose (2)

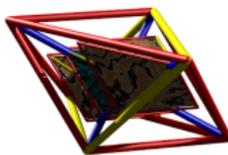
| Danzer (3D)   | Penrose (2D)   |
|---|--|
| Deflazione dei tetraedri autosimilare                       | Deflazione dei triangoli autosimilare                                    |
| Deflazione ottaedri non autosimilare<br>→ tasselli frattali | Deflazione di aquilone e freccia non<br>autosimilare → tasselli frattali |
| Non richiede vincoli di accostamento                        | Necessari vincoli di accostamento  |

- In entrambi i casi è definito il processo di “inflazione”, inverso di quello di “deflazione” → non periodicità.
- In entrambi i casi si possono costruire una infinità più che numerabile di “riempimenti” diversi, ma tutti localmente indistinguibili.
- Utilizzando l’inflazione si può costruire la “firma” di una tassellazione.

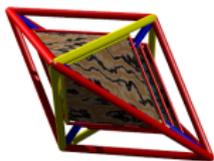
# Deflazione dell'ottaedro $\langle K \rangle$



$\langle K \rangle$



$\langle K \rangle$

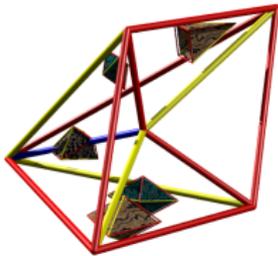


$\langle K \rangle$

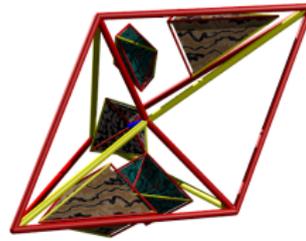


$\langle K \rangle$

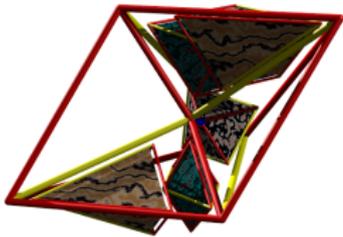
# Deflazione dell'ottaedro $\langle B \rangle$



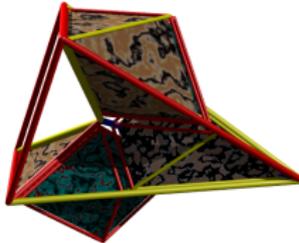
$\langle B \rangle$



$\langle B \rangle$

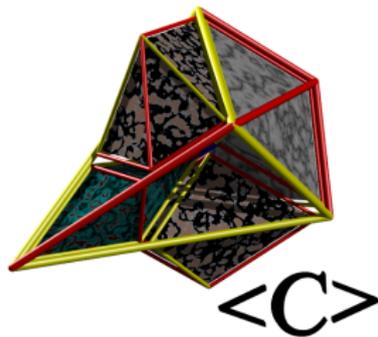
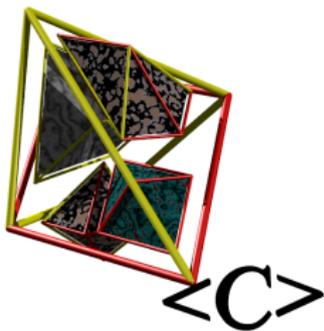
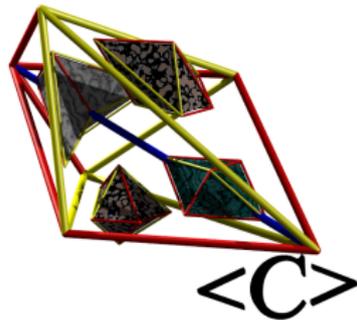
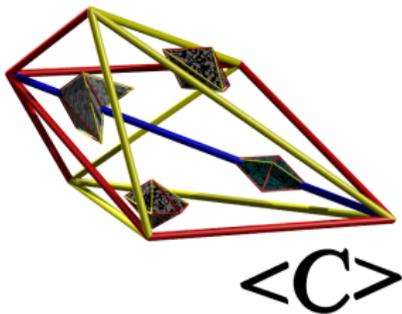


$\langle B \rangle$

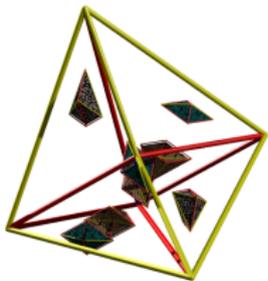


$\langle B \rangle$

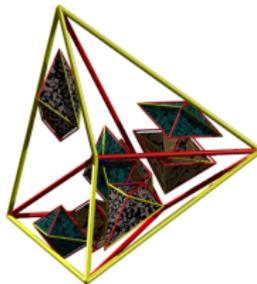
# Deflazione dell'ottaedro $\langle C \rangle$



# Deflazione dell'ottaedro $\langle A \rangle$



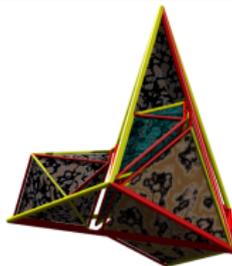
$\langle A \rangle$



$\langle A \rangle$



$\langle A \rangle$



$\langle A \rangle$

- <http://dmf.unicatt.it/~paolini/passopramollo/>  
Sviluppo piano dei 4 ottaedri, animazione e slides della conferenza
- <http://danzer.dmf.unicatt.it/>  
Animazione sui tasselli di Danzer.
- <http://www.zometool.com/>  
Set di costruzione con aste colorate.

- 
- L. Danzer, "Three-Dimensional Analogs of the Planar Penrose Tilings and Quasicrystals", 1989

---

GRAZIE PER L'ATTENZIONE