

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

*Approfondimenti di  
Geometria 1*

Proff. Silvia Pianta, Elena Zizioli

Anno Accademico 2009/2010



# Indice

<b>I</b>	<b>Approfondimenti di Algebra Lineare (S. Pianta)</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Spazi proiettivi</b>	<b>9</b>
1	Alcune nozioni sui reticoli . . . . .	9
1.1	Sottoinsiemi ordinati e sottoreticoli. Diagrammi . . . . .	11
1.2	Omomorfismi ed isomorfismi di reticoli . . . . .	15
2	Prime definizioni negli spazi proiettivi . . . . .	18
3	Proprietà dei sottospazi . . . . .	19
4	Riferimenti e coordinate proiettive . . . . .	21
5	Equazioni dei sottospazi . . . . .	23
6	Cambiamenti di riferimento . . . . .	26
7	Proiettività . . . . .	26
7.1	Applicazioni semilineari bigettive . . . . .	29
7.2	Isomorfismi geometrici tra spazi proiettivi . . . . .	31
8	Esercizi . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Spazi duali e dualità</b>	<b>39</b>
1	Spazio vettoriale duale . . . . .	39
2	Spazio vettoriale biduale . . . . .	43
3	Spazio proiettivo duale . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Spazi proiettivi e spazi affini</b>	<b>55</b>
1	Prime definizioni . . . . .	55
2	Situazione in dimensioni ordinarie (1, 2, 3) . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Spazi vettoriali metrici reali e complessi</b>	<b>63</b>
1	Spazi vettoriali metrici reali. Prodotti scalari simmetrici . . . . .	63
2	Forme hermitiane su $V(\mathbb{C})$ . . . . .	64

3	Prodotti scalari hermitiani . . . . .	68
4	Matrici hermitiane e matrici unitarie . . . . .	71
5	Operatori hermitiani su $V_n(\mathbb{C})$ . . . . .	73
6	Operatori unitari su $(V_n(\mathbb{C}), *)$ . . . . .	75
7	Riduzione a forma canonica di una conica . . . . .	76
<b>II Approfondimenti di Geometria (E. Zizioli)</b>		<b>83</b>
<b>5</b>	<b>Spazi proiettivi come ampliamenti di spazi affini</b>	<b>85</b>
1	Alcuni richiami circa gli spazi affini . . . . .	85
2	Ampliamento proiettivo di $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ . . . . .	87
3	Ampliamento proiettivo di $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ . . . . .	89
4	Rappresentazione dei piani in $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$ . . . . .	90
5	Rappresentazione delle rette di $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$ . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Superfici algebriche reali</b>	<b>97</b>
1	Lo spazio proiettivo complesso . . . . .	97
2	Quadriche . . . . .	108
3	Sfere generalizzate . . . . .	112
4	Intersezione di due sfere . . . . .	116
5	Superfici di rotazione . . . . .	121
6	Punti semplici e punti singolari . . . . .	125
7	Applicazione alle quadriche . . . . .	129
8	Caratterizzazione geometrica del piano tangente . . . . .	134
9	Classificazione affine delle quadriche generali . . . . .	143
10	Conica impropria per coni e cilindri . . . . .	146
11	Quadriche in forma canonica . . . . .	148
<b>Bibliografia</b>		<b>157</b>

*Un ringraziamento particolare al dott. Simone Alghisi, che ha permesso la stesura di questi appunti curandone con impegno e intelligenza la prima edizione nell'anno accademico 2006/07.*



Parte I

# Approfondimenti di Algebra Lineare

Prof. Silvia Pianta





# Capitolo 1

## Spazi proiettivi

### 1 Alcune nozioni sui reticoli

(1.1.1) **Definizione** Siano  $S$  un insieme e  $\leq$  una relazione d'ordine<sup>1</sup> su  $S$ : diciamo che la coppia  $(S, \leq)$  è un insieme ordinato.

Dato un ordinamento  $\leq$  di un insieme  $S$ , la relazione  $\geq$  definita da:

$$a \geq b \quad \text{se, e solo se,} \quad b \leq a$$

è anch'essa un ordinamento su  $S$ , che chiameremo *opposto* a  $\leq$ . L'opposto dell'opposto è ovviamente l'ordinamento di partenza (lasciamo come esercizio le facili verifiche).

Consideriamo ora un insieme ordinato  $(S, \leq)$  e sia  $a \in S$ . Indichiamo rispettivamente con  $m(a) := \{x \in S : x \leq a\}$  l'insieme di tutti i *minoranti*, e con  $M(a) := \{x \in S : a \leq x\}$  l'insieme di tutti i *maggioranti* di  $a$ .

Se ora consideriamo due elementi  $a, b \in S$ , sia:

$$m(a, b) := m(a) \cap m(b),$$

l'insieme di tutti i *minoranti comuni* di  $a$  e  $b$ , e sia

$$M(a, b) := M(a) \cap M(b),$$

l'insieme di tutti i *maggioranti comuni* di  $a$  e  $b$ .

Se  $m(a, b)$  ammette *massimo*, cioè se esiste  $z \in m(a, b)$  tale che  $\forall x \in m(a, b) \quad x \leq z$ , allora  $z$  si dice *massimo comun minorante* di  $a$  e  $b$ , e si indicherà con  $a \cap b$ .

---

<sup>1</sup>Ricordiamo che una relazione d'ordine è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva; una relazione di ordine è detta *totale*, o *lineare* quando  $\forall x, y \in S$  si verifica  $x \leq y$  oppure  $y \leq x$ , viene detta *parziale* se e solo se *non* è totale.

Se  $M(a, b)$  ammette *minimo*, cioè se esiste  $z \in M(a, b)$  tale che  $\forall x \in M(a, b) \ z \leq x$ , allora  $z$  si dice *minimo comun maggiorante* di  $a$  e  $b$ , e si indicherà con  $a \cup b$ .

Utilizzando la definizione di  $a \cap b$  (o di  $a \cup b$ ) e la proprietà antisimmetrica della relazione d'ordine, si dimostra immediatamente che, se esiste  $a \cap b$  (o  $a \cup b$ ) esso è unico.

Si noti che se due elementi  $a, b \in S$  sono *confrontabili*, cioè si verifica che  $a \leq b$  oppure  $b \leq a$ , esiste sia il loro massimo comun minorante che il minimo comun maggiorante: precisamente, se  $a \leq b$ , ogni minorante di  $a$  è minorante anche di  $b$  per la proprietà transitiva, perciò  $m(a, b) = m(a)$  ed  $a$  è il massimo dei suoi minoranti, quindi  $a = a \cap b$ ; analogamente risulta che  $b$  è il minimo comun maggiorante di  $a$  e  $b$ , cioè  $b = a \cup b$ .

**(1.1.2) Definizione** *Un insieme ordinato  $(\mathcal{R}, \leq)$  tale che dati comunque  $x, y \in \mathcal{R}$  esistano  $a \cap b$  ed  $a \cup b$  si chiama reticolo e si denota con  $(\mathcal{R}, \leq, \cap, \cup)$ .*

In base a quanto appena osservato, un insieme totalmente ordinato risulta essere automaticamente un reticolo in quanto due elementi qualsiasi sono sempre confrontabili.

**(1.1.3) Teorema** *Sia  $(\mathcal{R}, \leq, \cap, \cup)$  un reticolo. Allora la struttura  $(\mathcal{R}, \cap, \cup)$  soddisfa le seguenti proprietà:*

- |   |  |                     |
|---|--|---------------------|
| (a) $x \cap y = y \cap x$ ;                   | (a') $x \cup y = y \cup x$ ;                   | <i>commutativa</i>  |
| (b) $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$ ; | (b') $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ ; | <i>associativa</i>  |
| (c) $x \cap (x \cup y) = x$ ;                 | (c') $x \cup (x \cap y) = x$ ;                 | <i>assorbimento</i> |
| (d) $x \cap x = x$ ;                          | (d') $x \cup x = x$ .                          | <i>idempotenza</i>  |

*Dimostrazione.* Consideriamo per esempio le proprietà di sinistra (non accentate): si osservi che (a) è banale, (b) si dimostra applicando due volte la definizione di  $\cap$  e confrontando  $(x \cap y) \cap z$  ed  $(x \cap (y \cap z))$  mediante la proprietà antisimmetrica; infine (c) e (d) sono conseguenza delle proprietà riflessiva e antisimmetrica. Per le proprietà di destra, basta scambiare  $\cap$  con  $\cup$  ripetere gli stessi procedimenti. ■

Vale anche il viceversa:

**(1.1.4) Teorema** *Sia  $(\mathcal{R}, \cap, \cup)$  una struttura algebrica verificante le proprietà (a), ..., (d) e (a'), ..., (d'). Allora si può introdurre in  $\mathcal{R}$  una relazione d'ordine  $\leq$  definita da*

$$\forall x, y \in \mathcal{R} : \quad x \leq y \Leftrightarrow x \cap y = x,$$

oppure

$$\forall x, y \in \mathcal{R} : x \leq y \Leftrightarrow x \cup y = y,$$

in modo che  $(\mathcal{R}, \leq)$  risulti un insieme ordinato in cui si verifica che per ogni  $x, y \in \mathcal{R}$  esiste  $x \cap y$  ed  $x \cup y$ , sicchè  $(\mathcal{R}, \leq, \cap, \cup)$  è un reticolo.

Dunque la struttura di reticolo può essere caratterizzata per mezzo delle sole operazioni di unione ed intersezione dotate delle otto proprietà sopra elencate.

**(1.1.5) Osservazione** *Gli otto assiomi che caratterizzano algebricamente un reticolo non sono indipendenti: per esempio, per dimostrare  $(d')$  si possono utilizzare  $(c)$  e  $(c')$  nel seguente modo:*

$$x \cup x = x \cup (x \cap (x \cup y)) = x.$$

Se osserviamo gli otto assiomi, risulta immediatamente evidente una simmetria fra di essi, come messo in evidenza nella seguente osservazione:

**(1.1.6) Osservazione** *Quando negli assiomi che definiscono la struttura algebrica di reticolo si scambiano sistematicamente tra di loro i simboli di unione e di intersezione, ciascun assioma  $(a), \dots, (d)$  si muta nel corrispondente  $(a'), \dots, (d')$ . Ciò si può esprimere dicendo che la nozione di reticolo è definita assiomaticamente mediante un sistema di assiomi autoduale.*

Dall'interscambiabilità delle operazioni senza alterazione del sistema di assiomi discende il:

**(1.1.7) Teorema (Principio di dualità)** *Se una proposizione  $T = T(x, y, z, \dots, \leq, \cap, \cup)$  è conseguenza degli assiomi di reticolo (cioè è un teorema vero in ogni reticolo), di essi è conseguenza anche la proposizione  $\hat{T} = T(x, y, z, \dots, \geq, \cup, \cap)$ , duale di  $T$ , ottenuta dalla  $T$  scambiando  $\leq$  con  $\geq$  e  $\cap$  con  $\cup$ .*

In altre parole:

*Se nella teoria dei reticoli è vero un teorema, è vero anche il teorema duale.*

## 1.1 Sottoinsiemi ordinati e sottoreticoli. Diagrammi

Preso un sottoinsieme  $S \in \mathcal{R}$ , l'ordinamento  $\leq$  di  $\mathcal{R}$  è anche un ordinamento in  $S$ , dunque diremo che  $(S, \leq)$  è un *sottoinsieme ordinato* di  $(\mathcal{R}, \leq)$ .

**(1.1.8) Definizione** *Diremo che un sottoinsieme ordinato  $S \subseteq \mathcal{R}$  è un sottoreticolo del reticolo  $(\mathcal{R}, \leq, \cap, \cup)$ , se  $S$  costituisce a sua volta un reticolo rispetto alle operazioni  $\cap$  e  $\cup$ .*

Va subito osservato che può accadere che un sottoinsieme ordinato  $(S, \leq)$  di un reticolo  $(\mathcal{R}, \leq, \cap, \cup)$  non sia un sottoreticolo; per mostrare qualche esempio di questa eventualità, e per l'interesse che presenta la cosa in sè, introduciamo una rappresentazione grafica, mediante diagrammi, degli insiemi ordinati con un numero finito di elementi.

**(1.1.9) Definizione** *In un insieme ordinato  $(S, \leq)$  si dirà che un elemento  $b$  copre l'elemento  $a \neq b$  se non esiste alcun elemento  $x \in S$ , diverso da  $a$  o da  $b$ , tale che  $a \leq x \leq b$ , ovvero non ci sono elementi intermedi tra  $a$  e  $b$ .*

Ora rappresentiamo gli elementi di un insieme ordinato finito con punti (vertici), in modo che ogni  $a \leq b$  sia rappresentato da un vertice posto più in basso di quello rappresentante  $b$ , e colleghiamo mediante un tratto rettilineo (spigolo) il vertice rappresentativo di un elemento  $a$  con ogni vertice che rappresenta un elemento da esso coperto, dall'alto verso il basso. Alla fine della costruzione si avrà un reticolato: il *diagramma* dell'insieme ordinato.

Sul diagramma si vedono facilmente la relazione d'ordine e le sue caratteristiche. Così, per esempio,  $b$  segue  $a$  se il punto rappresentante  $a$  è collegato al punto rappresentante  $b$  da una spezzata ascendente. Diamo come esempi i diagrammi dei due seguenti insiemi ordinati:

a) Insieme  $S := \mathfrak{P}(E)$ , con  $E := \{1, 2, 3\}$ , quindi otteniamo un insieme di  $2^3 = 8$  elementi, e precisamente  $S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ , ordinato secondo l'inclusione:

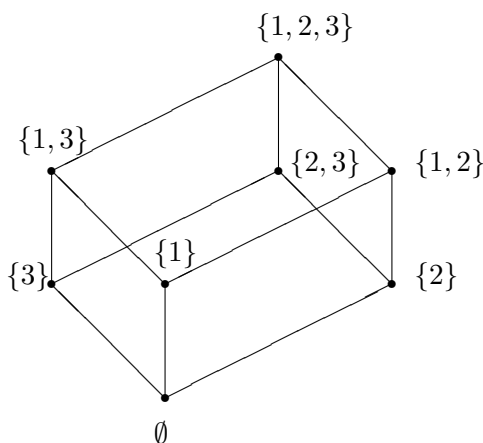


Figura 1. Il reticolato  $\mathfrak{P}(\{1, 2, 3\})$

Questo è il diagramma di un reticolo: è facile verificare direttamente che ogni coppia di elementi ammette massimo comun minorante  $\cap$  e minimo comun maggiorante  $\cup$ .

b) Insieme  $T$  dei divisori del numero 24, con l'ordinamento dei naturali secondo divisione: anche  $(T, \leq, \cap, \cup)$  è un reticolo:

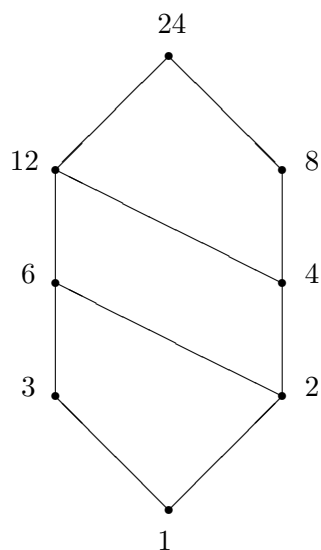


Figura 2. Il reticolo dei divisori di 24

a') Consideriamo ora il diagramma del sottoinsieme ordinato  $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$  di  $(S, \leq)$ :

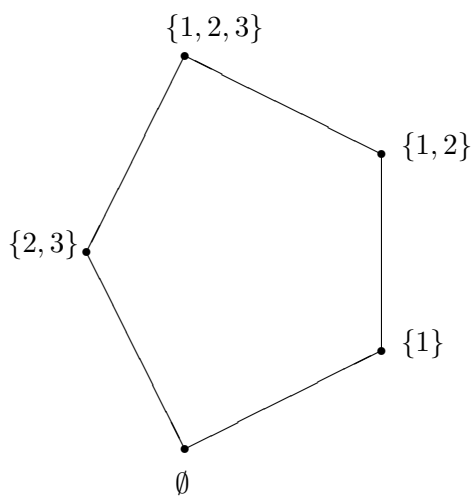


Figura 3. Sottoinsieme ordinato di  $\mathfrak{P}(\{1, 2, 3\})$

$b'$ ) e quello del sottoinsieme ordinato  $\{1, 2, 3, 4, 12, 24\}$  di  $(T, |)$ :

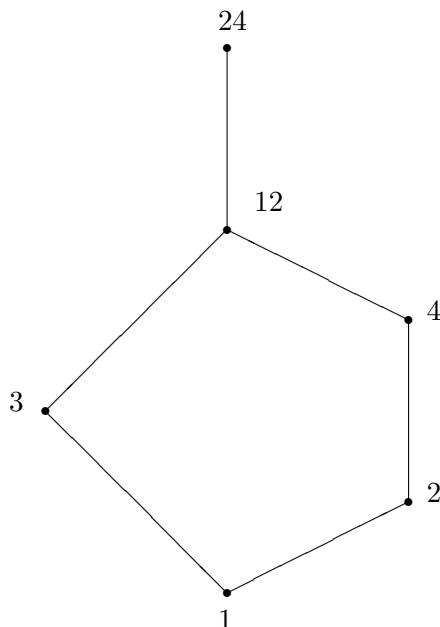


Figura 4. Sottoinsieme ordinato dei divisori di 24

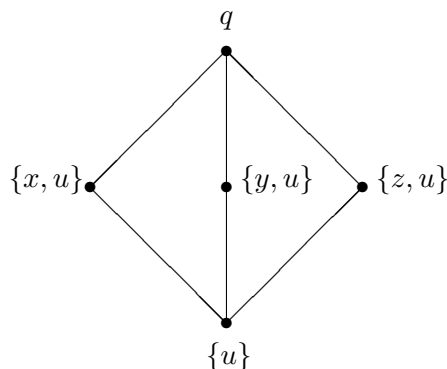
Si tratta di sottoinsiemi ordinati rispettivamente di  $S$  e di  $T$ , in quanto i diagrammi  $a'$ ) e  $b'$ ) si ottengono dai diagrammi precedenti,  $a$ ) e  $b$ ) rispettivamente sopprimendo alcuni punti (elementi) e i tratti (inclusioni) ad essi relativi, senza però alterare le inclusioni residue.

Si può notare che i sottoinsiemi ordinati così ottenuti sono insiemi ordinati con intersezione ed unione: la cosa si realizza subito visivamente perchè, presi due elementi non confrontabili, ci sono sempre due spezzate che li congiungono, quindi c'è sempre un massimo comun minorante (il punto più in alto, esclusi i punti rappresentanti i due elementi, della spezzata inferiore) e un minimo comun maggiorante (il punto più basso, esclusi i punti rappresentanti i due elementi, della spezzata superiore). Sono perciò reticoli. Ma *non sono sottoreticoli* degli esempi  $a$ ) e  $b$ ) rispettivamente. Infatti, per esempio:

in  $a'$ ),  $\{2, 3\} \cap \{1, 2\} = \emptyset$ , mentre in  $a$ ) tale intersezione è  $\{2\}$ ;

in  $b'$ ),  $3 \cup 2 = 12$ , mentre in  $b$ ) tale unione (minimo comune multiplo) è 6.

Un ulteriore esempio di diagramma è quello formato dalla famiglia dei sottogruppi del *gruppo trirettangolo*  $V := \{1, x, y, u : x^2 = 1 = y^2, xy = u\}$ :

Figura 5. Reticolo dei sottogruppi di  $V$ 

## 1.2 Omomorfismi ed isomorfismi di reticoli

**(1.1.10) Definizione** Siano  $(\mathcal{R}, \leq, \cap, \cup)$  e  $(\mathcal{R}', \leq', \cap', \cup')$  due reticoli. Un'applicazione  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  si dice

– omomorfismo di ordinamenti *quando*

$$\forall x, y \in \mathcal{R} : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq' f(y);$$

– omomorfismo di reticoli *quando*

$$\forall x, y \in \mathcal{R} : f(x \cap y) = f(x) \cap' f(y), \quad f(x \cup y) = f(x) \cup' f(y).$$

Denoteremo con  $\text{Hom}_{\text{Ord}}(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$  e  $\text{Hom}_{\text{Ret}}(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$  rispettivamente l'insieme degli omomorfismi di ordinamento e degli omomorfismi di reticolo, del reticolo  $\mathcal{R}$  nel reticolo  $\mathcal{R}'$ .

Poichè gli ordinamenti sono definiti a partire dalle operazioni dei due reticoli, risulta immediatamente:

$$\text{Hom}_{\text{Ret}}(\mathcal{R}, \mathcal{R}') \subseteq \text{Hom}_{\text{Ord}}(\mathcal{R}, \mathcal{R}'),$$

ove, in generale, sussiste l'inclusione in senso stretto (come si può vedere utilizzando l'esempio (1.2.6) di  $(\mathbb{N}, |, \cap, \cup)$  e l'esempio (1.2.5) con  $(\mathbb{N}, \leq, \min, \max)$  e, come omomorfismo di ordinamenti che non è però omomorfismo di reticoli, l'applicazione identica su  $\mathbb{N}$ :  $n|m \Rightarrow n \leq m$ , ma  $MCD(m, n) \leq \min\{n, m\}$ ).

Se però consideriamo l'insieme delle biiezioni che conservano gli ordinamenti nei due versi, cioè

$$\text{Iso}_{\text{Ord}}(\mathcal{R}, \mathcal{R}') := \{f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' \quad : \quad \forall x, y \in \mathcal{R}, \quad x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq' f(y)\},$$

possiamo allora dimostrare che  $\text{Iso}_{\text{Ret}}(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \text{Iso}_{\text{Ord}}(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ , come è espresso nel seguente

**(1.1.11) Teorema** *Siano  $(\mathcal{R}, \leq, \cap, \cup)$  ed  $(\mathcal{R}', \leq', \cap', \cup')$  due reticoli. Sia  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  una biiezione che conservi gli ordinamenti nei due versi (nel senso sopra precisato). Allora*

$$\forall x, y \in \mathcal{R} : \quad f(x \cap y) = f(x) \cap' f(y) \quad e \quad f(x \cup y) = f(x) \cup' f(y).$$

*Dimostrazione.* Siano  $x, y \in \mathcal{R}$ . Da  $x \cap y \leq x$  e  $x \cap y \leq y$  segue

$$f(x \cap y) \leq' f(x) \quad e \quad f(x \cap y) \leq' f(y).$$

Sia  $z' \in \mathcal{R}'$  tale che  $z' \leq' f(x)$  e  $z' \leq' f(y)$ . Allora, posto  $z' = f(z)$  abbiamo  $z \leq x$  e  $z \leq y$ , quindi  $z \leq x \cap y$  il che implica  $f(z) \leq' f(x \cap y)$ , cioè  $z' \leq' f(x \cap y)$ . Quest'ultima condizione, combinata con le due disuguaglianze scritte sopra, comporta che  $f(x \cap y) = f(x) \cap' f(y)$  (per definizione). ■

In modo analogo si prova anche la seguente

**(1.1.12) Proposizione** *Siano  $(\mathcal{R}, \leq, \cap, \cup)$  ed  $(\mathcal{R}', \leq', \cap', \cup')$  due reticoli. Sia  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  una biiezione che scambia gli ordinamenti nei due versi, cioè tale che*

$$\forall x, y \in \mathcal{R} : \quad x \leq y \Leftrightarrow f(y) \leq' f(x).$$

*Allora*

$$\forall x, y \in \mathcal{R} : \quad f(x \cap y) = f(x) \cup' f(y) \quad e \quad f(x \cup y) = f(x) \cap' f(y),$$

*ossia  $f$  è un anti-isomorfismo di reticoli. Pertanto*

$$\text{Antiiso}_{\text{Ret}}(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \text{Antiiso}_{\text{Ord}}(\mathcal{R}, \mathcal{R}').$$

**(1.1.13) Esempio** *L'insieme  $\mathfrak{P}(E)$  delle parti di un insieme  $E$  risulta un reticolo  $(\mathfrak{P}(E), \subseteq, \cap, \cup)$  rispetto all'inclusione, all'intersezione ed all'unione insiemistiche.*



**(1.1.14) Esempio** Ogni insieme totalmente ordinato  $(S, \leq)$  risulta un reticolo. Basterà allora definire  $x \cap y := \min\{x, y\}$  e  $x \cup y := \max\{x, y\}$ .

**(1.1.15) Esempio** Nell'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali introduciamo la relazione  $|$ :

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \quad n|m \Leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{N} : m = nq).$$

Allora, definendo  $n \cap m := \text{MCD}(n, m)$  ed  $n \cup m := \text{mcm}(n, m)$ , si ottiene il reticolo  $(\mathbb{N}, |, \cap, \cup)$ . (Si noti che, mentre  $(\mathbb{N}, \leq)$  è totalmente ordinato,  $(\mathbb{N}, |)$  è parzialmente ordinato, cioè  $|$  non è totale).

**(1.1.16) Esempio** L'insieme  $\mathcal{H}$  dei sottogruppi di un gruppo  $(G, \cdot)$  è parzialmente ordinato dalla relazione  $\leq$  di inclusione gruppale ed è un reticolo rispetto alle operazioni di intersezione  $(A \cap B)$  di sottogruppi e di unione gruppale  $(\langle A \cup B \rangle)$  di due sottogruppi  $A$  e  $B$ .

**(1.1.17) Esempio** L'insieme  $\Sigma(V)$  dei sottospazi vettoriali di un fissato spazio vettoriale  $V(\mathbb{K})$  su un campo  $\mathbb{K}$  risulta essere un reticolo  $(\Sigma(V), \subseteq, \cap, +)$ , dove  $W_1 \cap W_2$  è il sottospazio intersezione di  $W_1$  e  $W_2$  e  $W_1 + W_2$  è lo spazio somma (generato da)  $W_1$  e  $W_2$ .

**(1.1.18) Teorema** Siano  $V(\mathbb{K}), \widehat{V}(\mathbb{K})$  due spazi vettoriali duali l'uno dell'altro e  $\Sigma(V), \Sigma(\widehat{V})$  i rispettivi reticoli dei sottospazi. L'applicazione 'annultrice'

$$\text{Ann} : \begin{cases} \Sigma(V) & \longrightarrow & \Sigma(\widehat{V}) \\ W & \longmapsto & \text{Ann}(W) := \left\{ f \in \widehat{V} : f(\mathbf{w}) = 0, \forall \mathbf{w} \in W \right\}, \end{cases}$$

è un anti-isomorfismo di ordinamenti. Pertanto avremo che per ogni  $W_1, W_2 \in \Sigma(V)$ :

$$\text{Ann}(W_1 + W_2) = \text{Ann}(W_1) \cap \text{Ann}(W_2),$$

$$\text{Ann}(W_1 \cap W_2) = \text{Ann}(W_1) + \text{Ann}(W_2).$$

*Dimostrazione.* È conseguenza immediata della Proposizione (1.1.12); si osservi che, banalmente, se  $W_1 \leq W_2$  tutti i funzionali che si annullano su  $W_2$  si annullano anche su  $W_1$ , cioè  $\text{Ann}(W_2) \leq \text{Ann}(W_1)$ . ■

## 2 Prime definizioni negli spazi proiettivi

Sia  $V(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$  e denotiamo con

$$\text{PG}(V) := \{\mathbb{K}\mathbf{v} : \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}\},$$

l'insieme dei *sottospazi unidimensionali di  $V$*  che chiameremo *punti* di  $\text{PG}(V)$ .

Se  $W \leq V$  denotiamo con  $[W]$  il *sottoinsieme di  $\text{PG}(V)$  costituito dai sottospazi unidimensionali di  $V$  contenuti in  $W$* . In simboli:

$$[W] := \{\mathbb{K}\mathbf{w} : \mathbf{w} \in W \setminus \{\mathbf{0}\}\} = \text{PG}(W).$$

Un insieme di questo tipo prende il nome di *sottospazio proiettivo*, o semplicemente, *sottospazio di  $\text{PG}(V)$* . Denotiamo con  $\Sigma_p$  l'insieme dei sottospazi di  $\text{PG}(V)$ . Dalla definizione di sottospazio risulta subito che  $[\mathbf{0}] = \emptyset$ .

**(1.2.1) Definizione** *Dato uno spazio vettoriale  $V(\mathbb{K})$ , considerati  $\text{PG}(V)$  e la famiglia  $\Sigma_p$  dei sottospazi proiettivi, la coppia  $\mathbb{P}(V) = (\text{PG}(V), \Sigma_p)$  si chiama spazio proiettivo associato a  $V$ . Tale spazio sarà denotato semplicemente con  $\mathbb{P}(V)$  o, con abuso di notazione, con  $\text{PG}(V)$ .*

**(1.2.2) Osservazione** *Ogni sottospazio proiettivo  $[W]$  di  $\text{PG}(V)$  può essere considerato a sua volta spazio proiettivo sul campo  $\mathbb{K}$  (cioè, associato allo spazio vettoriale  $W$  su  $\mathbb{K}$ ).*

Se  $W$  è finitamente generato e  $\dim(W) = h+1 \in \mathbb{N}$ , diremo che  $[W]$  è un *sottospazio proiettivo di dimensione  $h$*  ( $h \geq -1$ ). In questo caso scriviamo  $[W] = S_h$ . In particolare,  $S_{-1} = \emptyset$  è l'unico sottospazio di dimensione  $-1$ . I sottospazi di  $\text{PG}(V)$  di dimensione zero verranno identificati con i punti di  $\text{PG}(V)$ ; quelli di dimensione 1 e 2 prendono, rispettivamente, il nome di *rette* e *piani*.

Se poi  $V$  stesso è finitamente generato, cioè  $V = V_{n+1}(\mathbb{K})$ , allora l'intero  $n = \dim(V) - 1$  si chiama *dimensione di  $\text{PG}(V)$* :  $\mathbb{P}_n(V)$ .

Lo spazio proiettivo associato allo spazio vettoriale  $\mathbb{K}^{n+1}$  si denota con  $\text{PG}(n, \mathbb{K})$  o  $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ , ed è lo *spazio proiettivo numerico di dimensione  $n$  su  $\mathbb{K}$* .

Se consideriamo due sottospazi proiettivi  $S = [U]$ ,  $T = [W] \in \Sigma_p$ , con  $U, W \leq V$ , risulta subito dalla definizione

$$S \cap T = [U] \cap [W] = [U \cap W].$$

Ne segue che *l'intersezione di sottospazi di  $\text{PG}(V)$  è ancora un sottospazio*. Sia ora  $X \subseteq \text{PG}(V)$ . Definiamo il *sottospazio generato da  $X$*

$$\langle X \rangle := \bigcap \{S \in \Sigma_p : X \subseteq S\}$$

come l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono  $X$ , ovvero 'il più piccolo' sottospazio proiettivo contenente  $X$ . Il sottospazio generato dall'unione di due sottospazi  $S, T \in \Sigma_p$  si denota con  $S + T$  e si chiama *somma di  $S$  e  $T$*  o *sottospazio congiungente  $S$  e  $T$* .

Se dunque  $S = [U]$ ,  $T = [W] \in \Sigma_p$ , con  $U, W \leq V$ , risulta subito dalla definizione

$$S + T = [U] + [W] = \langle S \cup T \rangle = [\langle U \cup W \rangle] = [U + W], .$$

In base alle definizioni introdotte, si verifica subito che l'insieme  $\Sigma_p$  dei sottospazi di  $\text{PG}(V)$ , ordinato parzialmente rispetto all'inclusione insiemistica ( $\subseteq$ ), forma un reticolo  $(\Sigma_p, \subseteq, \cap, +)$  rispetto alle operazioni di intersezione ( $\cap$ ) e somma ( $+$ ) di sottospazi.

Nel caso in cui  $S \cap T = \emptyset$ ,  $S$  e  $T$  si dicono *sghembi* e la somma  $S + T$  si chiama *somma diretta* e si denota con  $S \oplus T$ . Due spazi  $S, T \in \Sigma_p$  tali che  $S \oplus T = \text{PG}(V)$  si dicono *supplementari*.

Le dimensioni di due sottospazi di dimensione finita  $S$  e  $T$  sono legate fra di loro dalla *formula di Grassmann*:

$$\boxed{\dim(S) + \dim(T) = \dim(S \cap T) + \dim(S + T)}$$

### 3 Proprietà dei sottospazi

Come conseguenze immediate delle proprietà dei sottospazi di uno spazio vettoriale  $V(\mathbb{K})$ , diamo la seguente

**(1.3.1) Proposizione** *Valgono le seguenti proprietà:*

- (a) *per ogni  $X \subseteq \text{PG}(V)$  risulta  $X = \langle X \rangle$  se e solo se  $X$  è un sottospazio;*
- (b) *due punti distinti appartengono ad un'unica retta;*
- (c) *se  $S \in \Sigma_p$  e  $P \in \text{PG}(V)$  con  $P \notin S$ , risulta  $\dim(S + P) = \dim(S) + 1$ ;*
- (d) *se  $S \in \Sigma_p$  ed  $H \in \Sigma_p$  è un iperpiano con  $S \not\subseteq H$ , risulta che  $S \cap H$  è un iperpiano in  $S$ , considerato come spazio proiettivo<sup>2</sup>;*
- (e) *se  $S \oplus T = \text{PG}(V)$ , allora  $\dim(S) = n - \dim(T) - 1$ .*

<sup>2</sup>E dunque se  $S = S_h$  con  $h \in \mathbb{N}$  si ha  $\dim(S \cap H) = h - 1$ .

**(1.3.2) Esercizio** Siano  $X \in \Sigma_p$  e  $P, P' \in X$  con  $P \neq P'$ . Provare che la retta passante per  $P$  e  $P'$  è contenuta in  $X$ . (Suggerimento: la retta per  $P$  e  $P'$  è il sottospazio  $P + P'$  da essi generato).

**(1.3.3) Esercizio** Provare che due rette distinte di un piano di  $\text{PG}(V)$  si intersecano in esattamente un punto. (Suggerimento: usare la formula di Grassmann).

**(1.3.4) Definizione** Sia  $X \subseteq \text{PG}(V)$  con  $X \neq \emptyset$  e sia  $P \in \text{PG}(V)$ . Chiamiamo cono proiettante  $X$  da  $P$  o anche cono di vertice  $P$  e base  $X$  l'unione di tutte le rette che congiungono  $P$  con i punti di  $X \setminus \{P\}$ . In simboli:

$$\mathcal{C}_P(X) := \bigcup \{Q + P : Q \in X \setminus \{P\}\} .$$

**(1.3.5) Proposizione** Siano  $X \in \Sigma_p$  e  $P \in \text{PG}(V)$ . Allora il cono di vertice  $P$  e base  $X$  coincide con il sottospazio somma di  $X$  e  $P$  ovvero  $\mathcal{C}_P(X) = X + P$ .

*Dimostrazione.* La proposizione è valida anche se  $X$  non ha dimensione finita. Noi la dimostriamo supponendo  $\dim(X) \in \mathbb{N}$ .

Risulta chiaro che  $\mathcal{C}_P(X) \subseteq X + P$  (per la verifica, si confronti l'Esercizio (1.3.2)). Viceversa, per ogni  $Y \in (X + P) \setminus \{P\}$ , la retta  $Y + P$  interseca il sottospazio  $X$  almeno in un punto  $Q$ ; infatti la formula di Grassmann e la (c) della Proposizione (1.3.1) forniscono

$$1 + \dim(X) = \dim((Y + P) \cap X) + \dim(X + P) \leq \dim((Y + P) \cap X) + \dim(X) + 1 ,$$

da cui  $\dim((Y + P) \cap X) \geq 0$ , ovvero esiste  $Q \in (Y + P) \cap X$ . Pertanto  $Y \in Q + P \subseteq \mathcal{C}_P(X)$ , e finalmente  $Y + P \subseteq \mathcal{C}_P(X)$ , da cui la tesi. ■

**(1.3.6) Osservazione** Nella proposizione precedente non si distingue tra i due casi  $P \in X$  e  $P \notin X$ : naturalmente in entrambi i casi  $\mathcal{C}_P(X)$  sarà il sottospazio  $X + P$  con la differenza che, se  $P \in X$ , risulta  $X + P = X$  e se  $P \notin X$ , risulta  $X \subsetneq X + P$ , con  $\dim(X + P) = \dim(X) + 1$ .

**(1.3.7) Proposizione (caratterizzazione dei sottospazi)** Un sottoinsieme  $X$  di  $\text{PG}(V)$  è un sottospazio se, e solo se, per ogni due punti distinti di  $X$ , la retta che li congiunge è contenuta in  $X$ , o equivalentemente,

$$(1.3.8) \quad \forall P, P' \in X : P + P' \subseteq X .$$

## 4 Riferimenti e coordinate proiettive

**(1.4.1) Definizione** Diciamo che  $m$  punti  $P_1 = \mathbb{K}\mathbf{v}_1, \dots, P_m = \mathbb{K}\mathbf{v}_m$  sono indipendenti se i vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  sono linearmente indipendenti.

Diciamo inoltre che un punto  $P = \mathbb{K}\mathbf{v}$  dipende da  $P_1, \dots, P_m$  se il vettore  $\mathbf{v}$  dipende linearmente da  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ .

Notiamo che la Definizione (1.4.1) è ben posta, in quanto la dipendenza o la indipendenza di  $P_1, \dots, P_m$  non dipende dalla scelta di ciascun  $\mathbf{v}_j$  nel sottospazio  $\mathbb{K}\mathbf{v}_j$ .

**(1.4.2) Definizione** Un insieme  $X$  di punti di  $\text{PG}(V)$  si chiama generatore se risulta  $\langle X \rangle = \text{PG}(V)$ . Un generatore formato da punti indipendenti si chiama base.

Naturalmente due basi di  $V$ ,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_i : i \in I\}$  e  $\mathcal{C} = \{\mathbf{w}_j, j \in J\}$ , individuano una stessa base di  $\text{PG}(V)$  se, e solo se, ogni  $\mathbf{v}_i$  è proporzionale a un  $\mathbf{w}_j$ . (Si osservi che qui ci si riferisce a basi *non* necessariamente ordinate).

D'ora in avanti, sia  $\text{PG}(V)$  uno spazio proiettivo  $n$ -dimensionale.

**(1.4.3) Definizione** Una  $(n+2)$ -upla (ordinata)  $\mathcal{R} = (A_1, \dots, A_{n+1}, A)$  di punti di  $\text{PG}(V)$ , a  $(n+1)$  a  $(n+1)$  indipendenti, si chiama riferimento proiettivo di  $\text{PG}(V)$ . I punti  $A_1, \dots, A_{n+1}$  si chiamano punti fondamentali e  $A$  si chiama punto unità del riferimento. Un sottospazio  $h$ -dimensionale di  $\text{PG}(V)$  contenente  $h+1$  punti di  $\mathcal{R}$  diversi da  $A$  si chiama sottospazio fondamentale del riferimento  $\mathcal{R}$ .

Se  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1})$  è una base ordinata di  $V$ , si ha subito che

$$\mathcal{R}(\mathcal{B}) = \left( E_1 = \mathbb{K}\mathbf{e}_1, E_2 = \mathbb{K}\mathbf{e}_2, \dots, E_{n+1} = \mathbb{K}\mathbf{e}_{n+1}, E = \mathbb{K} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{e}_i \right)$$

è un riferimento proiettivo di  $\text{PG}(V)$ , detto *associato* a  $\mathcal{B}$ .

Viceversa, ogni riferimento proiettivo si ottiene in questo modo.

Infatti, se  $\mathcal{R} = (A_1, \dots, A_{n+1}, A)$  è un riferimento proiettivo di  $\text{PG}(V)$ , risulta immediatamente che, posto  $A_i = \mathbb{K}\mathbf{a}_i$  per  $i = 1, \dots, n+1$  ed  $A = \mathbb{K}\mathbf{a}$ , i vettori  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+1}\}$  formano una base di  $V$  ed esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}^*$  tali che  $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathbf{a}_i$ .

Denotando allora con  $\mathbf{e}_i := \lambda_i \mathbf{a}_i$  per  $i = 1, \dots, n+1$ , abbiamo  $A_i = \mathbb{K}\mathbf{e}_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n+1$  ed  $A = \mathbb{K} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{e}_i$ .

Se chiamiamo  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1})$ , abbiamo quindi ottenuto che  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{B})$ , che è la nostra tesi.

Fissato dunque un riferimento proiettivo  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{B})$ , ad ogni punto

$$X = \mathbb{K}\mathbf{x} = \mathbb{K} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \mathbf{e}_i$$

resta associata una classe di proporzionalità di  $(n+1)$ -uple  $\mathbb{K}^*(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$  rappresentata dalle componenti di  $\mathbf{x}$  nella base  $\mathcal{B}$ , che vengono dette *coordinate proiettive (omogenee) del punto  $X$  nel riferimento  $\mathcal{R}$*  e sono definite a meno di un fattore comune non nullo di proporzionalità, in quanto dipendono dalla scelta di un vettore non nullo nel sottospazio  $\mathbb{K}\mathbf{x}$ . Si ottiene in questo modo la bijezione

$$\gamma_{\mathcal{R}} : \begin{cases} \text{PG}(V) & \longrightarrow \text{PG}(n, \mathbb{K}) \\ X = \mathbb{K} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \mathbf{e}_i & \longmapsto \mathbb{K}(x_1, \dots, x_{n+1}), \end{cases}$$

che identifica i punti di  $\text{PG}(V)$  con quelli dello spazio proiettivo numerico  $\text{PG}(n, \mathbb{K})$ .

Scrivendo  $X = [(x_1, \dots, x_{n+1})]$  intenderemo che  $x_1, \dots, x_{n+1}$  sono le coordinate proiettive del punto  $X$ . Ovviamente, per i punti fondamentali del riferimento si ha:

$$E_1 = [(1, 0, \dots, 0)], \quad E_2 = [(0, 1, 0, \dots, 0)], \quad \dots, \quad E_{n+1} = [(0, \dots, 0, 1)],$$

e

$$E = [(1, 1, \dots, 1)].$$

**(1.4.4) Esercizio** *Siano*

$$\mathcal{B} = (\mathbf{e}_i : i = 1, \dots, n+1) \quad e \quad \mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_i : i = 1, \dots, n+1)$$

*due basi ordinate di  $V$ . Provare che  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  individuano lo stesso riferimento proiettivo di  $\text{PG}(V)$  se, e solo se, sono basi proporzionali, ossia se, e solo se, esiste un  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tale che  $\mathbf{e}'_i = \lambda \mathbf{e}_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n+1$ .*

*Soluzione.* Se  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  sono proporzionali allora  $\mathbf{e}'_i = \lambda \mathbf{e}_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n+1$  e per un certo  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . Allora per  $i = 1, \dots, n+1$  abbiamo  $E'_i := \mathbb{K}\mathbf{e}'_i = \mathbb{K}\lambda \mathbf{e}_i = \mathbb{K}\mathbf{e}_i =: E_i$  ed  $E' := \mathbb{K} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{e}'_i = \mathbb{K}\lambda \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{e}_i = \mathbb{K} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{e}_i = E$ .

In conclusione, per ogni  $P \in \text{PG}(V)$  avremo

$$P = [(x_1, \dots, x_{n+1})] = [(\lambda x'_1, \dots, \lambda x'_{n+1})] = [(x'_1, \dots, x'_{n+1})].$$

Viceversa, considerando i punti fondamentali, per ipotesi esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}^*$  tali che  $e'_i = \lambda_i e_i$  e  $\sum_{i=1}^{n+1} e'_i = \lambda \sum_{i=1}^{n+1} e_i$  e, per l'indipendenza degli  $e'_i$ , si ottiene che  $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1}$  e cioè la proporzionalità fra le due basi. ♣

## 5 Equazioni dei sottospazi

Sia  $S_h = [W]$ , con  $W \leq V$ , un sottospazio proiettivo di dimensione  $h$  (quindi abbiamo  $\dim(W) = h + 1$ ) di  $\text{PG}(V)$ .

### Equazioni cartesiane di $S_h$

Ricordiamo che ogni sottospazio vettoriale  $W$  di dimensione  $h + 1$  di  $V$ , rispetto ad una base ordinata  $\mathcal{B} = (e_i : i = 1, \dots, n + 1)$ , si rappresenta (come nucleo di un omomorfismo di  $V$  in  $\mathbb{K}^{n-h}$ ) mediante un sistema di  $r = n - h$  equazioni omogenee indipendenti del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1(n+1)}x_{n+1} & = & 0, \\ & \vdots & \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{r(n+1)}x_{n+1} & = & 0. \end{cases}$$

Si ha allora facilmente che ogni sottospazio proiettivo  $h$ -dimensionale di  $\text{PG}(V)$ , nel riferimento  $\mathcal{R}(\mathcal{B})$  si rappresenta con un sistema di questo tipo e, viceversa, un qualunque sistema lineare omogeneo nelle  $n + 1$  incognite  $x_1, \dots, x_{n+1}$ , di rango  $r$ , rappresenta un sottospazio  $S_h$  di  $\text{PG}(V)$ , con  $h = n - r$ . Notiamo che il sottospazio fondamentale di dimensione  $h$  contenente i punti fondamentali del riferimento  $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_{h+1}}$  è rappresentato dal sistema:

$$\{x_j = 0 : j \neq i_1, i_2, \dots, i_{h+1}\}.$$

In particolare, ogni *iperpiano*  $S_{n-1}$  di  $\text{PG}(V)$  si rappresenta con *una equazione lineare omogenea*

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_{n+1}x_{n+1} = 0$$

che, in forma matriciale, si può scrivere<sup>3</sup>

$$(u_1, \dots, u_{n+1}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = 0, \quad \text{o, in forma compatta, } \mathbf{u}^t \mathbf{x} = 0.$$

<sup>3</sup>In queste notazioni, gli  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{x}$  si intendono sempre come vettori colonna. Inoltre ricordiamo che se  $M \in \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$  è una matrice della forma  $M = (m_{ij})$  indichiamo con  $M^t$  la matrice trasposta di  $M$ , ovvero  $M^t = (m_{ji}) \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ .

**(1.5.1) Osservazione** Rappresentare in forma cartesiana il sottospazio vettoriale  $(h+1)$ -dimensionale  $W \leq V$  equivale a considerare tale sottospazio come nucleo di un omomorfismo di  $V$  in  $\mathbb{K}^{n-h}$ , e precisamente l'omomorfismo avente come matrice associata rispetto alla base  $\mathcal{B}$  di  $V$  la matrice  $(a_{ij}) \in \text{Mat}_{r,n+1}(\mathbb{K})$  di rango  $r = (n+1) - (h+1) = n-h$ .

**(1.5.2) Osservazione** Poichè ciascuna delle equazioni che compaiono nel sistema lineare associato al sottospazio  $S_h$  rappresenta (come luogo delle soluzioni) un iperpiano di  $\text{PG}(V)$ , possiamo concludere che rappresentare analiticamente un sottospazio proiettivo  $S_h$  in forma cartesiana mediante un sistema lineare omogeneo di  $n-h$  equazioni indipendenti, equivale, dal punto di vista geometrico, ad individuare l' $S_h$  come intersezione di  $n-h$  iperpiani indipendenti, cioè tali che le rispettive equazioni siano indipendenti:

$$S_h = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-h}.$$

**(1.5.3) Osservazione** Ogni iperpiano individua i coefficienti della sua equazione a meno di un fattore di proporzionalità  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ : per questa ragione, se indichiamo con  $H$  l'iperpiano di equazione  $u_1x_1 + \cdots + u_{n+1}x_{n+1} = 0$ , possiamo scrivere

$$H = [(u_1, \dots, u_{n+1})] \quad \text{coordinate plückeriane di iperpiano.}$$

Se denotiamo con  $\mathcal{S}_{n-1}$  l'insieme di tutti gli iperpiani di  $\text{PG}(V)$ , si può quindi stabilire, rispetto al sistema di riferimento fissato  $\mathcal{R}$ , la bijezione

$$\delta_{\mathcal{R}} : \begin{cases} \mathcal{S}_{n-1} & \longrightarrow & \text{PG}(n, \mathbb{K}) \\ H & \longmapsto & \mathbb{K}(u_1, \dots, u_{n+1}), \end{cases}$$

che identifica gli iperpiani di  $\text{PG}(V)$  con i punti dello spazio proiettivo numerico  $\text{PG}(n, \mathbb{K})$ .

### Equazioni parametriche di $S_h$

D'altra parte, il sottospazio  $S_h$  è generato da  $h+1$  punti indipendenti

$$W_1 = \mathbb{K}\mathbf{w}_1, \dots, W_{h+1} = \mathbb{K}\mathbf{w}_{h+1},$$

dove i  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{h+1}$  formano una base per il sottospazio  $W \leq V$  tale che  $S_h = [W]$ .

Per ogni  $X = \mathbb{K}\mathbf{x} \in S_h$ , abbiamo  $\mathbf{x} \in W$  e dunque esistono  $t_1, \dots, t_{h+1} \in \mathbb{K}$  tali che

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{h+1} t_i \mathbf{w}_i.$$



Rispetto ad un fissato riferimento  $\mathcal{R}$  di  $\text{PG}(V)$ , i punti  $W_1, \dots, W_{h+1}$  hanno rispettivamente coordinate proiettive omogenee

$$W_i = [(w_{i1}, \dots, w_{i(n+1)})] \quad \forall i = 1, \dots, h+1,$$

cosicchè:

$$\begin{cases} \rho x_1 &= t_1 w_{11} + t_2 w_{21} + \dots + t_{h+1} w_{(h+1)1}, \\ \rho x_2 &= t_1 w_{12} + t_2 w_{22} + \dots + t_{h+1} w_{(h+1)2}, \\ \vdots &\vdots \\ \rho x_{n+1} &= t_1 w_{1(n+1)} + t_2 w_{2(n+1)} + \dots + t_{h+1} w_{(h+1)(n+1)}, \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche del sottospazio  $S_h$ .

Notiamo che tali equazioni differiscono dalle equazioni parametriche del sottospazio vettoriale  $W \leq V$  per due fatti: (a) la presenza del fattore di proporzionalità  $\rho$  nel caso proiettivo, che nel caso vettoriale naturalmente non c'è; (b) l'esclusione, nel caso proiettivo, della  $(h+1)$ -upla di parametri tutti nulli  $t_1 = 0, \dots, t_{h+1} = 0$ , che è quella a cui corrisponde il vettore nullo di  $W$ , il quale non genera alcun sottospazio unidimensionale (punto di  $S_h$ ).

**(1.5.4) Osservazione** *Rappresentare in forma parametrica il sottospazio vettoriale  $W \leq V$ , di dimensione  $h+1$ , equivale a considerare il sottospazio come l'immagine in un monomorfismo di  $\mathbb{K}^{h+1}$  in  $V$  e precisamente il monomorfismo avente come matrice associata in una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  corrispondente al riferimento  $\mathcal{R}$ , la matrice  $(w_{ij})^t \in \text{Mat}_{h+1, n+1}(\mathbb{K})$ ; infatti, poichè le coordinate di un generico vettore di  $W$  sono date da:*

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) = (t_1, \dots, t_{h+1}) \cdot (w_{ij}),$$

trasponendo risulta:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = (w_{ij})^t \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{h+1} \end{pmatrix}.$$

**(1.5.5) Osservazione** *Rappresentare analiticamente un sottospazio proiettivo  $S_h$  in forma parametrica equivale, dal punto di vista geometrico, ad individuare l' $S_h$  come il sottospazio generato da  $h+1$  punti indipendenti:*

$$S_h = \bigoplus_{i=1}^{h+1} W_i.$$

## 6 Cambiamenti di riferimento

Siano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  due basi di  $V(\mathbb{K})$  corrispondenti a due riferimenti proiettivi  $\mathcal{R}(\mathcal{B})$  e  $\mathcal{R}'(\mathcal{B}')$  di  $\text{PG}(V)$ .

Un cambiamento di riferimento proiettivo in  $\text{PG}(V)$  corrisponde ovviamente ad un cambiamento di basi di  $V$ . Se  $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  è la matrice del cambiamento di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  (quella, cioè, che ha sulle colonne le componenti degli elementi di  $\mathcal{B}'$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ ) allora, posto  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1})^t$  e  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_{n+1})^t$ , avremo che

$$\mathbf{x} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \mathbf{x}'$$

esprime il cambiamento di base in  $V(\mathbb{K})$ , per cui

$$\boxed{\rho \mathbf{x} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \mathbf{x}'}$$

esprime il cambiamento di riferimento proiettivo in  $\text{PG}(V)$ , con  $\rho \in \mathbb{K}^*$ ,  $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ .

**(1.6.1) Osservazione** *La matrice  $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$  è individuata dal cambiamento di riferimento proiettivo a meno di un fattore di proporzionalità non nullo perchè le basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  sono a loro volta individuate dai riferimenti  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  ciascuna a meno di un fattore di proporzionalità.*

**(1.6.2) Proposizione** *Un cambiamento di coordinate proiettive omogenee  $\rho \mathbf{x} = M \mathbf{x}'$  si riflette in un cambiamento di coordinate plückeriane di iperpiano  $\rho \mathbf{u} = (M^t)^{-1} \mathbf{u}'$ .*

*Dimostrazione.* Risulta

$$\mathbf{u}^t \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}^t M \mathbf{x}' = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}^t = \mathbf{u}^t M \Leftrightarrow \mathbf{u}' = M^t \mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{u} = (M^t)^{-1} \mathbf{u}',$$

da cui la tesi. ■

## 7 Proiettività

Ricordiamo che nello spazio vettoriale  $V = V_{n+1}(\mathbb{K})$  la nozione di *cambiamento di base* non esprime altro che il punto di vista geometrico opposto rispetto alla nozione di *automorfismo* (o trasformazione lineare bijectiva) dello spazio vettoriale; ma da un punto di vista algebrico, entrambe le nozioni danno luogo allo stesso effetto: *la moltiplicazione delle componenti di ciascun vettore per una data matrice invertibile.*

Anche nello spazio proiettivo  $\mathbb{P}_n(V)$  si verifica una situazione analoga: un cambiamento di riferimento o un particolare tipo di permutazione sui punti, analiticamente portano ancora a considerare la moltiplicazione delle coordinate proiettive per una matrice invertibile (stavolta definita a meno di un fattore di proporzionalità).

Qual è questo “particolare tipo” di permutazioni?

**(1.7.1) Definizione** Se  $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V(\mathbb{K})$  è un'applicazione lineare, diciamo che l'applicazione

$$\pi : \begin{cases} PG(V) & \longrightarrow & PG(V) \\ P = \mathbb{K}\mathbf{v} & \longmapsto & \pi(P) := \mathbb{K}f(\mathbf{v}) \end{cases}$$

è l'applicazione indotta da  $f$  nello spazio proiettivo.

Si osservi che  $\pi$  è ben definita, poichè se si sostituisce il vettore  $\mathbf{v}$ , che rappresenta (o genera) il punto  $P = \mathbb{K}\mathbf{v}$ , con un vettore  $k\mathbf{v}$  ( $k \in \mathbb{K}^*$ ), si ottiene

$$\pi(P) = \mathbb{K}f(k\mathbf{v}) = \mathbb{K}kf(\mathbf{v}) = \mathbb{K}f(\mathbf{v})$$

. D'altra parte, se si considera, per ogni  $k \in \mathbb{K}^*$ , l'applicazione lineare

$$kf : \begin{cases} V(\mathbb{K}) & \longrightarrow & V(\mathbb{K}) \\ \mathbf{v} & \longmapsto & kf(\mathbf{v}) \end{cases}$$

risulta immediatamente che  $kf$  induce in  $PG(V)$  la stessa applicazione  $\pi$  che viene indotta dalla  $f$ .

Notiamo poi che l'applicazione  $kf$  si può anche ottenere come composizione successiva (non importa in che ordine, poichè commutano) dell'applicazione  $f$  e dell'*omotetia vettoriale*

$$\omega_k : \begin{cases} V(\mathbb{K}) & \longrightarrow & V(\mathbb{K}) \\ \mathbf{v} & \longmapsto & k\mathbf{v} \end{cases}$$

**(1.7.2) Definizione** Chiamiamo proiettività  $\pi$  di  $\mathbb{P}(V)$  una permutazione dell'insieme dei punti indotta in  $PG(V)$  da un automorfismo del corrispondente spazio vettoriale  $V(\mathbb{K})$ .

Ricordiamo che gli automorfismi dello spazio vettoriale  $V(\mathbb{K})$  formano un gruppo, che si denota con  $GL(V)$  e si chiama *gruppo generale lineare su  $V$* .

Se  $V = V_{n+1}(\mathbb{K})$  è di dimensione finita, per ogni scelta di una base  $\mathcal{B}$  in  $V$  resta determinato un isomorfismo di  $GL(V)$  nel gruppo  $GL_{n+1}(\mathbb{K})$  delle matrici quadrate invertibili di ordine  $n + 1$  a coefficienti nel campo  $\mathbb{K}$ , dunque possiamo scrivere  $GL(V_{n+1}(\mathbb{K})) \cong GL_{n+1}(\mathbb{K})$ .

Al variare della base in  $V$  la matrice della rappresentazione scalare di un dato automorfismo  $f$  di  $V$  descrive in  $GL_{n+1}(\mathbb{K})$  una classe completa di coniugio di matrici *simili* (aventi, ricordiamo, tutte lo stesso determinante e la stessa traccia, che quindi non dipendono dalla base scelta ma solo dall'automorfismo  $f$ : essi si chiamano rispettivamente *determinante* e *traccia* di  $f$ ).

Se dunque in  $V = V_{n+1}(\mathbb{K})$  si fissa una base  $\mathcal{B}$ , corrispondente ad un riferimento proiettivo  $\mathcal{R}(\mathcal{B})$  di  $\mathbb{P}_n(V)$ , ad ogni automorfismo  $f$  dello spazio vettoriale  $V$  viene associata una matrice invertibile  $A \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$  in modo tale che, se  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1})^t$  indica le componenti di un generico vettore e  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_{n+1})^t$  quelle del suo corrispondente rispetto alla base fissata, l'equazione

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

esprime la rappresentazione scalare dell'automorfismo  $f$ , per cui

$$\boxed{k\mathbf{x}' = A\mathbf{x}}$$

esprime analiticamente l'azione della proiettività indotta  $\pi$  in  $\text{PG}(V)$ , con  $k \in \mathbb{K}^*$ ,  $A \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ .

**(1.7.3) Osservazione** *La matrice  $A \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$  è individuata dalla proiettività a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, ovvero a meno della moltiplicazione per una matrice scalare non nulla. Ciò si può motivare in due modi equivalenti: da un lato le coordinate proiettive di ogni punto sono a loro volta individuate a meno di un fattore di proporzionalità non nullo; dall'altro lato l'automorfismo  $f$  di  $V$  (e quindi la matrice che lo rappresenta) che induce la proiettività  $\pi$  è individuato, come abbiamo visto, a meno di un fattore di proporzionalità non nullo  $k \in \mathbb{K}^*$ , ovvero a meno di un'omotetia vettoriale  $\omega_k$  (rappresentata da una matrice scalare).*

Dunque, nella rappresentazione analitica di una proiettività in un riferimento dato, più che la matrice  $A \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$  occorre considerare l'intera classe di proporzionalità determinata da tale matrice, ovvero l'intera classe laterale individuata da  $A$  rispetto al sottogruppo moltiplicativo delle matrici scalari, che è normale in  $GL_{n+1}(\mathbb{K})$ : si può provare (esercizio) che tale sottogruppo è proprio il centro  $Z(GL_{n+1}(\mathbb{K}))$  di  $GL_{n+1}(\mathbb{K})$ . Le classi di proporzionalità di matrici invertibili formano così il gruppo quoziente

$$PGL_{n+1}(\mathbb{K}) = GL_{n+1}(\mathbb{K})/Z(GL_{n+1}(\mathbb{K}))$$

Se si indica con  $PGL(V)$  il gruppo delle proiettività di  $\mathbb{P}_n(V)$ , possiamo quindi concludere che, per ogni scelta di un riferimento proiettivo in  $\mathbb{P}_n(V)$  si stabilisce un isomorfismo tra i gruppi  $PGL(V)$  e  $PGL_{n+1}(\mathbb{K})$ , dunque risulta che  $PGL(V) \cong PGL_{n+1}(\mathbb{K})$ .

### 7.1 Applicazioni semilineari bigettive tra spazi vettoriali

Le considerazioni precedenti si possono estendere al caso di applicazioni bigettive tra due spazi proiettivi distinti. Si può inoltre introdurre l'argomento in un modo ancor più generale come segue.

Consideriamo dapprima due spazi vettoriali  $V = V_n(\mathbb{K})$  e  $V' = V'_m(\mathbb{K}')$  non necessariamente sullo stesso campo.

**(1.7.4) Definizione** *Definiamo isomorfismo geometrico tra spazi vettoriali un'applicazione bigettiva  $f : V \rightarrow V'$  tale che  $f$  e  $f^{-1}$  mutino sottospazi vettoriali in sottospazi vettoriali della stessa dimensione.*

Notiamo che, se esiste un isomorfismo geometrico tra  $V$  e  $V'$ , deve risultare per definizione

$$n = \dim(V) = \dim(V') = m.$$

**(1.7.5) Osservazione** *Se, in particolare, i due campi  $\mathbb{K}$  e  $\mathbb{K}'$  coincidono ed  $f : V \rightarrow V'$  è un isomorfismo (applicazione lineare bigettiva), poichè  $f$  conserva dipendenza e indipendenza lineare di insiemi di vettori, essa muta sottospazi in sottospazi vettoriali (della stessa dimensione); dunque ogni isomorfismo tra due spazi vettoriali sullo stesso campo è un isomorfismo geometrico.*

In generale non è vero il viceversa: si può infatti considerare una classe più ampia di applicazioni bigettive tra spazi vettoriali che sono isomorfismi della struttura geometrica dei sottospazi e ammettono come caso particolare gli isomorfismi (lineari). Introduciamo a tal proposito la seguente definizione:

**(1.7.6) Definizione** *Un'applicazione  $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V'(\mathbb{K}')$  si dice semilineare se esiste un isomorfismo  $\alpha : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$  tale che per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V(\mathbb{K})$  e per ogni  $k \in \mathbb{K}$  risulti*

1.  $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$ ;

2.  $f(k\mathbf{v}) = k^\alpha f(\mathbf{v})$ <sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Usiamo qui la notazione esponenziale riferita all'azione dell'isomorfismo di campi  $\alpha : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$ : dunque, per  $k \in \mathbb{K}$ , denoteremo con  $k^\alpha \in \mathbb{K}'$  l'immagine di  $k$  attraverso  $\alpha$ .

Si noti che se, in particolare  $\mathbb{K} = \mathbb{K}'$  ed  $\alpha = id_{\mathbb{K}}$ , l'applicazione  $f$  risulta lineare. Diversamente, chiameremo  $f$  *applicazione semilineare propria*.

Si verifica immediatamente che ogni applicazione semilineare bijectiva (*isomorfismo semilineare*) fra due spazi vettoriali su campi (necessariamente isomorfi) è un isomorfismo geometrico. Viceversa, si può dimostrare che vale il seguente

**(1.7.7) Teorema** *Siano  $V(\mathbb{K})$ ,  $V'(\mathbb{K}')$  due spazi vettoriali di dimensione  $\geq 3$ . Allora ogni isomorfismo geometrico tra i suddetti spazi vettoriali è un'applicazione semilineare bijectiva  $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V'(\mathbb{K}')$ .*

In conclusione, gli isomorfismi geometrici tra due spazi vettoriali (della stessa dimensione su campi isomorfi) sono tutti e soli gli isomorfismi semilineari.

Poniamo ora  $V(\mathbb{K}) = V'(\mathbb{K}')$ , spazio vettoriale di dimensione  $n \geq 3$ . Per il Teorema (1.7.7) si può affermare che gli automorfismi geometrici dello spazio vettoriale sono tutte e sole le trasformazioni semilineari bijective  $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V(\mathbb{K})$ , che chiameremo anche *automorfismi semilineari di  $V(\mathbb{K})$* . Gli automorfismi semilineari di  $V(\mathbb{K})$  formano un gruppo, che denoteremo con  $\Gamma L(V)$ , che contiene come sottogruppo il gruppo generale lineare  $GL(V)$ .

Dunque, se il campo  $\mathbb{K}$  ammette automorfismi non banali, esistono automorfismi geometrici di  $V(\mathbb{K})$  che non sono lineari, cioè  $GL(V) \subsetneq \Gamma L(V)$ . Per gli spazi vettoriali su campi che non ammettono automorfismi non banali, che si dicono *stautdiani*<sup>5</sup>, risulta che ogni automorfismo geometrico dello spazio vettoriale è anche un automorfismo vettoriale, i.e. lineare.

**(1.7.8) Esercizio** *Gli automorfismi di  $V_n(\mathbb{K})$  con determinante uguale ad 1 formano il sottogruppo  $SL(V) \leq GL(V)$  che si chiama gruppo speciale lineare. E' chiaro che  $SL(V) \cong SL_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K})$ , con*

$$SL_n(\mathbb{K}) := \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : \det A = 1\}.$$

*Provare che  $SL_n(\mathbb{K}) \triangleleft GL_n(\mathbb{K})$ .*

*(Suggerimento: l'applicazione  $\det : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$  ;  $A \mapsto \det A$  è un epimorfismo di gruppi con nucleo...).*

**(1.7.9) Esercizio** *Provare che  $GL(V) \triangleleft \Gamma L(V)$ . (Suggerimento: si consideri l'applica-*

<sup>5</sup>Esempi:  $\mathbb{F}_p$  per ogni  $p$  primo,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$ .

zione  $\Gamma L(V) \rightarrow \text{Aut}\mathbb{K}$ ;  $f \mapsto \alpha$ , con  $\alpha$  automorfismo del campo associato ad  $f$ , che è un epimorfismo di gruppi, con nucleo...).

## 7.2 Isomorfismi geometrici tra spazi proiettivi

Passando ora dagli spazi vettoriali ai corrispondenti spazi proiettivi, vediamo come si traducono le nozioni introdotte nel precedente paragrafo.

**(1.7.10) Definizione** Siano  $(PG(V), \Sigma_p)$  e  $(PG(V'), \Sigma'_p)$  due spazi proiettivi rispettivamente  $m$ - ed  $n$ -dimensionali. Chiamiamo isomorfismo geometrico (tra spazi proiettivi) un'applicazione bijectiva  $f : PG(V) \rightarrow PG(V')$  tale che  $f$  ed  $f^{-1}$  mutino sottospazi proiettivi in sottospazi proiettivi della stessa dimensione.

Si noti che da questa definizione segue subito che se due spazi proiettivi di dimensioni  $m$  ed  $n$  sono isomorfi, allora necessariamente hanno la stessa dimensione  $m = n$ .

Per caratterizzare opportunamente gli isomorfismi geometrici tra spazi proiettivi, possiamo ricondurci alle considerazioni appena fatte per gli spazi vettoriali. A tale scopo premettiamo la seguente osservazione:

**(1.7.11) Osservazione** Se  $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V'(K')$  è un'applicazione semilineare (con isomorfismo associato  $\alpha : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$ ), risulta ben definita l' applicazione indotta da  $f$

$$\pi : \begin{cases} PG(V) & \longrightarrow & PG(V') \\ P = \mathbb{K}\mathbf{v} & \longmapsto & \pi(P) := \mathbb{K}'f(\mathbf{v}) \end{cases}$$

tra gli spazi proiettivi corrispondenti.

Abbiamo visto che le applicazioni semilineari bijective sono (tutti e soli gli, se la dimensione è  $\geq 3$ ) isomorfismi geometrici tra spazi vettoriali (cioè, conservano i sottospazi in entrambe le direzioni), così risulta immediatamente che esse inducono isomorfismi geometrici tra i corrispondenti spazi proiettivi.

Viceversa, si può dimostrare il seguente teorema, che altro non è che la riformulazione del teorema (1.7.7) in termini proiettivi:

**(1.7.12) Teorema** Ogni isomorfismo geometrico  $\varphi : PG(V) \rightarrow PG(V')$  tra due spazi proiettivi di dimensione  $\geq 2$ , associati a due spazi vettoriali  $V(\mathbb{K})$  e  $V'(K')$ , è indotto da un isomorfismo semilineare  $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V'(K')$ .

Chiameremo *proiettività semilineari* le bijezioni tra due spazi proiettivi che siano indotte da applicazioni semilineari tra gli spazi vettoriali corrispondenti: queste sono

tutti e soli gli isomorfismi geometrici se la dimensione degli spazi proiettivi è almeno due. In particolare poi le *proiettività* (lineari) sono quelle indotte da applicazioni lineari.

Possiamo notare subito che gli isomorfismi geometrici tra spazi proiettivi di dimensione 1 sono semplicemente le bijezioni fra rette proiettive (dato che i sottospazi propri di una retta proiettiva sono solo l'insieme vuoto e i punti), e si può provare (si veda il successivo esercizio (??)) che esistono bijezioni non indotte da applicazioni semilineari dei corrispondenti spazi vettoriali bidimensionali; comunque, a norma del teorema precedente solo nel caso di dimensione 1 si possono costruire isomorfismi geometrici che non siano proiettività semilineari o lineari.

Poniamo ora  $(PG(V), \Sigma_p) = (PG(V'), \Sigma'_p)$ . Indichiamo con  $PGL(V)$  il gruppo delle proiettività semilineari e lineari di  $PG(V)$ , e, come abbiamo già visto, con  $PGL(V)$  il sottogruppo delle proiettività (lineari): si può allora provare che  $PGL(V) \triangleleft PGL(V)$ .

## 8 Esercizi

**(1.8.1) Esercizio** *Siano assegnati in  $PG(2, \mathbb{K})$  i punti  $A_1 = [(-1, 2, 1)]$ ,  $A_2 = [(1, -1, 0)]$ ,  $A_3 = [(2, 1, -1)]$  e  $A_4 = [(3, 1, 0)]$ . Verificare che  $(A_1, \dots, A_4)$  costituiscono un riferimento proiettivo  $\mathcal{R}'$  e ricavare le equazioni del cambiamento di riferimento da  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$ , dove*

$$\mathcal{R} = ([ (1, 0, 0) ], [ (0, 1, 0) ], [ (0, 0, 1) ], [ (1, 1, 1) ]) .$$

*Soluzione.* I punti  $A_1, A_2, A_3$  non sono allineati in quanto la matrice  $A$  delle loro coordinate è non singolare. Analogamente, si verifica che  $A_4$  non è allineato con alcuna coppia dei primi tre. Cerchiamo ora una base di  $\mathbb{K}^3$  rispetto alla quale  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  siano punti fondamentali e punto unità:

$$\mathbf{e}_1 = (-1, 2, 1), \quad \mathbf{e}_2 = (1, -1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (2, 1, -1), \quad \mathbf{a}_4 = (3, 1, 0),$$

con  $\mathbf{a}_4 = \lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 + \nu \mathbf{e}_3$ . Allora

$$\begin{cases} -\lambda + \mu + 2\nu & = 3, \\ 2\lambda - \mu + 2\nu & = 1, \\ \lambda - \nu & = 0. \end{cases}$$

Dal fatto che la matrice di tale sistema è proprio  $A$  (non singolare), segue che esiste una ed una sola soluzione. Tale soluzione è  $\lambda = \nu = 1$  e  $\mu = 2$ . Allora

$$\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3),$$



è la base cercata (a meno di un fattore di proporzionalità). Quindi

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e pertanto per determinare il passaggio dalle vecchie alle nuove coordinate proiettive, occorre costruire una matrice proporzionale all'inversa della precedente, cioè

$$\rho M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = \rho \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni cercate sono

$$\rho \mathbf{x}' = \rho \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

e l'esercizio è concluso. ♣

**(1.8.2) Esercizio** *Provare che le formule (in  $\text{PG}(3, \mathbb{K})$ )*

$$\begin{cases} \rho x'_1 = x_1 - x_2, \\ \rho x'_2 = -x_3, \\ \rho x'_3 = x_2, \\ \rho x'_4 = x_3 - x_4, \end{cases}$$

*si possono interpretare come un cambiamento di coordinate proiettive. Determinare le coordinate dei punti fondamentali del nuovo riferimento.*

*Soluzione.* Possiamo scrivere tali equazioni in forma compatta  $\rho \mathbf{x}' = M^{-1} \mathbf{x}$ , con

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e  $\det(M^{-1}) \neq 0$ . Tanto basta per provare quanto richiesto. Calcoliamo inoltre  $M$ :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sulle cui colonne leggiamo le coordinate (rispetto al vecchio riferimento) dei nuovi punti fondamentali:

$$A_1 = [(1, 0, 0, 0)], \quad A_2 = [(0, 0, -1, -1)], \quad A_3 = [(1, 1, 0, 0)], \quad A_4 = [(0, 0, 0, -1)],$$

quindi  $A_5 = [(2, 1, -1, -2)]$  (punto unità del nuovo riferimento). ♣

**(1.8.3) Esercizio** Si considerino in  $PG(4, \mathbb{K})$  i tre punti

$$W_1 = [(1, 0, 1, 1, 0)], \quad W_2 = [(0, 0, 1, 0, 1)], \quad W_3 = [(1, 1, 1, 0, 0)].$$

Dopo aver verificato che essi sono punti indipendenti, si scrivano le equazioni parametriche e poi un sistema di equazioni cartesiane per il piano  $S_2$  da essi generato.

*Soluzione.* Si verifica subito che la matrice

$$(w_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, per cui i  $W_i$  sono indipendenti. Le equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} \rho x_1 = t_1 + t_3, \\ \rho x_2 = t_3, \\ \rho x_3 = t_1 + t_2 + t_3, \\ \rho x_4 = t_1, \\ \rho x_5 = t_2. \end{cases}$$

Per ricavare un sistema di equazioni cartesiane per il piano ottenuto, occorre eliminare i parametri tra le equazioni qui sopra descritte, combinandole linearmente in modo opportuno, per esempio:

$$\begin{cases} x_3 - x_1 - x_5 = 0, \\ x_3 - x_2 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Il piano si ottiene così come intersezione di due iperpiani di  $PG(4, \mathbb{K})$ ; il corrispondente sottospazio vettoriale tridimensionale è il nucleo di un omomorfismo  $f : \mathbb{K}^5 \rightarrow \mathbb{K}^5$  con matrice associata

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

di rango 2. ♣

**(1.8.4) Esercizio** Definire una permutazione della retta proiettiva reale  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$  che non sia indotta da un isomorfismo semilineare di  $\mathbb{R}^2$ .

*Soluzione.* Si possono costruire facilmente esempi di permutazioni non semilineari della retta proiettiva reale, a partire da opportune applicazioni (anche non iniettive) di  $\mathbb{R}^2$  in sè, che inducano permutazioni di  $PG(1, \mathbb{R})$ , come segue:

- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $f(r e^{i\vartheta}) = r^2 e^{i\vartheta}$ , o anche con rotazione,  $= r^2 e^{i(\vartheta+\varphi)}$ ;

- $f(z) = k(\vartheta) z$  (cioè,  $z$  si moltiplica per una costante  $k \in \mathbb{R}$  che dipende dall'anomalia  $\vartheta$ );
- $z \rightarrow z^2$ .

Si verifica facilmente che ciascuna delle funzioni sopra definite muta sottospazi unidimensionali in sottospazi unidimensionali dello spazio vettoriale  $\mathbb{C}(\mathbb{R})$  isomorfo ad  $\mathbb{R}^2$ , e che quindi queste inducono funzioni della retta proiettiva reale in sè, ma nessuna di queste è lineare, né semilineare. In particolare, si noti che nell'ultimo esempio la funzione  $f$  non è neppure iniettiva in  $\mathbb{C}$ , ma, poichè le due controimmagini (cioè le radici quadrate) di ciascun numero complesso differiscono solo per la moltiplicazione per  $-1$ , cioè sono proporzionali su  $\mathbb{R}$ , tale funzione induce comunque una permutazione della retta proiettiva  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ . ♣

**(1.8.5) Esercizio** Ricordiamo che un sottospazio  $S_r$  di  $\text{PG}(n, \mathbb{K})$  si chiama sottospazio fondamentale o sottospazio coordinato quando contiene (e quindi è da essi generato)  $r+1$  punti fondamentali. Si scriva un sistema di equazioni cartesiane per  $l'S_r$  contenente  $i$  punti fondamentali  $E_{i_1}, \dots, E_{i_r}$ .

*Soluzione.* Basta considerare il sistema

$$\{x_j = 0 : j \neq i_1, \dots, i_r\}.$$

Vediamo alcuni esempi. In  $\text{PG}(4, \mathbb{K})$  siano  $E_1 = [(1, 0, 0, 0, 0)]$  ed  $E_3 = [(0, 0, 1, 0, 0)]$  due punti fondamentali che generano una retta fondamentale di equazioni

$$\text{rt}(E_1, E_3) = E_1 + E_3 : \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

In  $\text{PG}(3, \mathbb{K})$  i tre punti fondamentali  $E_1 = [(1, 0, 0, 0)]$ ,  $E_3 = [(0, 0, 1, 0)]$  ed  $E_4 = [(0, 0, 0, 1)]$  generano il piano fondamentale di equazione

$$\text{pn}(E_1, E_3, E_4) = E_1 + E_3 + E_4 : x_2 = 0.$$

♣

**(1.8.6) Definizione** Dato un riferimento proiettivo  $\mathcal{R}$  di  $\text{PG}(V)$ , si chiama *simpletso fondamentale* l'insieme di tutti i sottospazi fondamentali del riferimento  $\mathcal{R}$  che siano propri (i.e. diversi da  $\text{PG}(V)$ ) e non banali (i.e. diversi da  $\emptyset$ ).

**(1.8.7) Esempio** In  $\text{PG}(V) = \mathbb{P}_0$  il semplice fondamentale è il punto stesso. In  $\mathbb{P}_1$  (retta proiettiva) il semplice fondamentale è costituito da due punti distinti. In  $\mathbb{P}_2$  (piano proiettivo) il semplice fondamentale è un triangolo. In  $\mathbb{P}_3$  (spazio proiettivo) il semplice fondamentale è un tetraedro.

In ciascuno di questi casi si può aggiungere al semplice fondamentale il punto unità, che sarà in  $\mathbb{P}_1$  un punto diverso dagli altri due, in  $\mathbb{P}_2$  un punto che non sta su alcun lato del triangolo e in  $\mathbb{P}_3$  un punto che non sta su alcuna faccia del tetraedro.

**(1.8.8) Esercizio** Provare che l'insieme delle rette proiettive di un piano proiettivo  $\text{PG}(2, \mathbb{K})$  è, a sua volta, un piano proiettivo e che ogni fascio di rette di  $\text{PG}(2, \mathbb{K})$  è una retta proiettiva in tale piano.

*Soluzione.* Una retta generica  $r$  di  $\text{PG}(2, \mathbb{K})$  ha, nel riferimento standard, l'equazione

$$r : \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

in cui la terna ordinata  $(a, b, c)$ , definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, costituisce le coordinate plückeriane della retta  $r$ , cioè

$$r \sim (a, b, c) \quad \text{con } (a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \setminus (0, 0, 0),$$

e, con riferimento alla bijezione  $\delta_{\mathcal{R}}$  introdotta a pagina 24, possiamo scrivere:

$$\delta_{\mathcal{R}} : \begin{cases} \mathcal{S}_1^2 & \longrightarrow \text{PG}(2, \mathbb{K}) \\ r : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 & \longmapsto \mathbb{K}(a, b, c), \end{cases}$$

dove abbiamo denotato con  $\mathcal{S}_1^2$  l'insieme delle rette (cioè iperpiani) del piano proiettivo  $\text{PG}(2, \mathbb{K})$ . Notiamo che  $\delta_{\mathcal{R}}(r)$  è un punto di  $\text{PG}(2, \mathbb{K})$ .

La bijezione  $\delta_{\mathcal{R}}$  identifica in questo caso le rette di  $\text{PG}(2, \mathbb{K})$  con i punti di  $\text{PG}(2, \mathbb{K})$ : in questo senso possiamo quindi affermare che  $\mathcal{S}_1^2$  è, esso stesso, un piano proiettivo, che viene detto *piano duale*.

Come opera la  $\delta_{\mathcal{R}}$  sui fasci di rette?

Siano ora  $r$  ed  $s$  due rette di  $\text{PG}(2, \mathbb{K})$  dove

$$r : \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad s : \quad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0.$$

Se  $r \neq s$  risulta  $\delta_{\mathcal{R}}(r) = \mathbb{K}(a_1, a_2, a_3) \neq \mathbb{K}(b_1, b_2, b_3) = \delta_{\mathcal{R}}(s)$ . Dunque a due rette distinte corrispondono punti distinti del piano duale.

A ciascuna retta del fascio di  $r$  ed  $s$ , la cui equazione è combinazione lineare di quelle di  $r$

e di  $s$ , corrisponde allora un punto del piano duale, le cui coordinate sono combinazione lineare delle coordinate dei punti  $\delta_{\mathcal{R}}(r)$  e  $\delta_{\mathcal{R}}(s)$ :

$$\underbrace{(\lambda a_1 + \mu b_1)}_{u_1} x_1 + \underbrace{(\lambda a_2 + \mu b_2)}_{u_2} x_2 + \underbrace{(\lambda a_3 + \mu b_3)}_{u_3} x_3 = 0,$$

da cui, applicando la  $\delta_{\mathcal{R}}$ , si ottiene il punto  $\mathbb{K}(u_1, u_2, u_3)$ , con

$$\begin{cases} u_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \\ u_2 = \lambda a_2 + \mu b_2, \\ u_3 = \lambda a_3 + \mu b_3. \end{cases}$$

Al variare della retta nel fascio (cioè al variare dei parametri  $\lambda$  e  $\mu$ ) si ottengono, mediante le equazioni parametriche scritte sopra, tutti e soli i punti della retta determinata da  $\delta_{\mathcal{R}}(r)$  e  $\delta_{\mathcal{R}}(s)$  nel piano duale.

I punti e le rette del piano duale corrispondono rispettivamente alle rette ed ai fasci di rette del piano originario.

Dunque, ogni fascio di rette di  $\text{PG}(2, \mathbb{K})$  può ben essere considerato uno spazio proiettivo unidimensionale  $\text{PG}(1, \mathbb{K})$ , proprio come ogni retta di  $\text{PG}(2, \mathbb{K})$ . ♣

**(1.8.9) Esercizio** *Provare che l'insieme dei piani dello spazio proiettivo  $\text{PG}(3, \mathbb{K})$  è, a sua volta, uno spazio proiettivo tridimensionale, e che ogni fascio di piani di  $\text{PG}(3, \mathbb{K})$  è una retta proiettiva di tale spazio e ogni stella di piani di  $\text{PG}(3, \mathbb{K})$  (cioè l'insieme dei piani le cui equazioni sono combinazioni lineari delle equazioni di tre piani non appartenenti ad uno stesso fascio) è un piano proiettivo di tale spazio.*

*Soluzione.* Si tratta, anche qui, di esplicitare la  $\delta_{\mathcal{R}} : \mathcal{S}_2^3 \rightarrow \text{PG}(3, \mathbb{K})$ , dove con  $\mathcal{S}_2^3$  indichiamo l'insieme di tutti i piani di  $\text{PG}(3, \mathbb{K})$ , e di verificare come opera la  $\delta_{\mathcal{R}}$  sui fasci e sulle stelle di piani: otterremo, stavolta, lo *spazio duale*: i punti, le rette e i piani dello spazio (tridimensionale) duale corrispondono rispettivamente ai piani, ai fasci di piani ed alle stelle di piani dello spazio originario. ♣

Vedremo ora come si può introdurre in modo rigoroso la nozione di spazio proiettivo duale per ogni dimensione (finita  $n \in \mathbb{N}$ ) dello spazio proiettivo di partenza.



# Capitolo 2

## Spazi duali e dualità

### 1 Spazio vettoriale duale

Consideriamo uno spazio vettoriale  $V = V(\mathbb{K})$ .

**(2.1.1) Definizione** Una forma lineare (o funzionale lineare) su  $V$  è un omomorfismo  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ . Denotiamo con  $\text{Hom}(V, \mathbb{K})$  l'insieme di tutte le forme lineari su  $V$ .

Risulta che  $\text{Hom}(V, \mathbb{K})$  è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare così definite:

$$\forall f, g \in \text{Hom}(V, \mathbb{K}) : f + g : \begin{cases} V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ v & \longmapsto & f(v) + g(v), \end{cases}$$
$$\forall f \in \text{Hom}(V, \mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda f : \begin{cases} V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ v & \longmapsto & \lambda f(v). \end{cases}$$

Occorre ovviamente verificare che  $(f + g) \in \text{Hom}(V, \mathbb{K})$  e  $\lambda f \in \text{Hom}(V, \mathbb{K})$ , ma ciò è una conseguenza immediata delle definizioni e della linearità di  $f$  e  $g$ : siano infatti  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  e  $a, b \in \mathbb{K}$ . Allora

$$\begin{aligned} (f + g)(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) &= f(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) + g(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = f(a\mathbf{x}) + g(a\mathbf{x}) + f(b\mathbf{y}) + g(b\mathbf{y}) = \\ &= af(\mathbf{x}) + ag(\mathbf{x}) + bf(\mathbf{y}) + bg(\mathbf{y}) = a(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) + b(f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y})) = \\ &= a(f + g)(\mathbf{x}) + b(f + g)(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

In modo analogo

$$(\lambda f)(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = \lambda(af(\mathbf{x}) + bf(\mathbf{y})) = a(\lambda f)(\mathbf{x}) + b(\lambda f)(\mathbf{y}).$$

**(2.1.2) Definizione** Lo spazio vettoriale  $\text{Hom}(V, \mathbb{K})$  viene chiamato spazio vettoriale duale di  $V(\mathbb{K})$  e viene indicato con  $\widehat{V}(\mathbb{K})$ <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Alcuni autori indicano lo spazio vettoriale  $\text{Hom}(V, \mathbb{K})$  con  $V^*$ .

Supponiamo d'ora in poi che  $V = V_{n+1}(\mathbb{K})$  sia di dimensione finita  $n + 1 \in \mathbb{N}$ . Sia allora  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}\}$  una base ordinata di  $V$ . Quindi

$$\forall \mathbf{x} \in V : \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \mathbf{e}_i \quad \text{con } x_i \in \mathbb{K}.$$

Sia ora  $u \in \widehat{V}(\mathbb{K})$ :

$$u(\mathbf{x}) = u\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i u(\mathbf{e}_i).$$

Abbiamo così provato la seguente

**(2.1.3) Proposizione** *Ogni forma lineare di  $\widehat{V}(\mathbb{K})$  è univocamente determinata quando siano assegnate le sue azioni sui vettori di una base ordinata di  $V$ .*

Consideriamo ora, per  $i = 1, \dots, n + 1$ :

$$f_i : \begin{cases} V & \longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{x} = \sum_{j=i}^{n+1} x_j \mathbf{e}_j & \longmapsto x_i \end{cases}$$

Risulta subito che per ogni  $i = 1, \dots, n + 1$ ,  $f_i$  è una forma lineare su  $V$ , cioè  $f_i \in \widehat{V}(\mathbb{K})$ . Inoltre per ogni  $i = 1, \dots, n + 1$  si ha  $f_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ , dove  $\delta_{ij}$  è il simbolo di Kronecker<sup>2</sup>.

**(2.1.4) Proposizione** *Risulta che  $\widehat{\mathcal{B}} = \{f_1, \dots, f_{n+1}\}$  è una base per  $\widehat{V}(\mathbb{K})$ , quindi  $\dim(\widehat{V}(\mathbb{K})) = n + 1 = \dim(V(\mathbb{K}))$ .*

*Dimostrazione.* Verifichiamo che gli  $f_i$  sono linearmente indipendenti. Poniamo

$$\widehat{0} : \begin{cases} V & \longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{x} & \longmapsto 0_{\mathbb{K}}. \end{cases}$$

Sia  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i = \widehat{0}$ . Allora per ogni  $\mathbf{x} \in V$  si ha  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i(\mathbf{x}) = 0_{\mathbb{K}}$  e, in particolare, ponendo  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$  ( $j = 1, \dots, n + 1$ ), otteniamo  $\lambda_j = 0$  per ogni  $j = 1, \dots, n + 1$ , e da qui segue l'indipendenza lineare degli  $f_i$ .

Verifichiamo che gli  $f_i$  generano  $\widehat{V}(\mathbb{K})$ . Sia  $u \in \widehat{V}(\mathbb{K})$ . Allora

$$\forall \mathbf{x} \in V : \quad u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i u(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(\mathbf{x}) u(\mathbf{e}_i).$$

Dall'arbitrarietà di  $\mathbf{x}$  si ha

$$u = \sum_{i=1}^{n+1} u(\mathbf{e}_i) f_i,$$

<sup>2</sup>Ricordiamo che  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$ , mentre  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ .



da cui segue la tesi. ■

**(2.1.5) Definizione** Chiamiamo base duale rispetto a  $\mathcal{B}$  la base  $\widehat{\mathcal{B}}$  introdotta nella Proposizione (2.1.4).

Se ora si riferiscono i vettori di  $V(\mathbb{K})$  ad una base  $\mathcal{B}$  e i vettori di  $\widehat{V}(\mathbb{K})$  (le forme lineari su  $V$ ) alla base duale  $\widehat{\mathcal{B}}$ , si può ottenere un'espressione comoda dell'azione dei vettori duali sui vettori di  $V$ .

Sia infatti  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \mathbf{e}_i \in V(\mathbb{K})$ ; indichiamo con  $\mathbf{x}$  anche il vettore colonna delle sue coordinate:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Sia ora  $u = \sum_{i=1}^{n+1} u_i f_i \in \widehat{V}(\mathbb{K})$  (con  $u_i = u(\mathbf{e}_i)$ ); indichiamo con  $\mathbf{u}$  il vettore colonna delle sue coordinate:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Risulterà allora:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i u(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i u_i = (u_1 \dots u_{n+1}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{u}^t \mathbf{x}.$$

Pertanto, applicare (una forma lineare) un vettore duale  $u \in \widehat{V}(\mathbb{K})$  ad un vettore  $\mathbf{x} \in V(\mathbb{K})$  equivale ad eseguire il prodotto righe per colonne del vettore riga  $\mathbf{u}^t \in \mathbb{K}^{n+1}$  per il vettore colonna  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^{n+1}$ , rappresentanti rispettivamente le coordinate di  $u$  ed  $\mathbf{x}$  rispetto a due basi  $\widehat{\mathcal{B}}$  (di  $\widehat{V}(\mathbb{K})$ ) e  $\mathcal{B}$  (di  $V(\mathbb{K})$ ), duali l'una dell'altra.

Come conseguenza della Proposizione (2.1.4) è che  $V(\mathbb{K}) \cong \widehat{V}(\mathbb{K})$ , cioè ogni spazio vettoriale di dimensione finita è isomorfo al suo duale.

Si noti che per dimostrare questo fatto abbiamo dovuto necessariamente ricorrere all'introduzione di una base: un isomorfismo tra  $V$  ed il suo duale può essere definito da

$$\vartheta_{\mathcal{B}} : \begin{cases} V & \longrightarrow & \widehat{V} \\ \mathbf{e}_i & \longmapsto & f_i. \end{cases}$$

**(2.1.6) Osservazione** Se la dimensione di  $V$  non è finita tale isomorfismo non si può più stabilire, anzi si può provare che  $\dim(V) \neq \dim(\widehat{V})$ .

Studiamo ora i *nuclei* delle forme lineari  $u \in \widehat{V}$ . Ricordiamo che per ogni  $u \in \widehat{V}$  si ha  $\text{Ker}(u) \leq V(\mathbb{K})$  e che  $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(V) - \dim(\text{Im}(u))$ . Nel nostro caso  $\text{Im}(u) \leq \mathbb{K}(\mathbb{K})$  (cioè il campo  $\mathbb{K}$  come spazio vettoriale 1-dimensionale su se stesso), quindi  $\dim(\text{Im}(u)) = 0$  oppure  $\dim(\text{Im}(u)) = 1$ . Notiamo le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(u)) = 0 &\Leftrightarrow \text{Im}(u) = \{0_{\mathbb{K}}\} \Leftrightarrow u = \widehat{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(u)) = n + 1 = \dim(V) \Leftrightarrow \text{Ker}(u) = V. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(u)) = 1 &\Leftrightarrow \text{Im}(u) = \mathbb{K} \Leftrightarrow u \neq \widehat{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(u)) = n \Leftrightarrow \text{Ker}(u) \text{ è un iperpiano di } V. \end{aligned}$$

Ogni  $u \in \widehat{V}$  determina univocamente il suo nucleo, che, come abbiamo visto, è un iperpiano se e solo se  $u$  è un omomorfismo non banale.

D'altra parte un iperpiano  $H$  di  $V(\mathbb{K})$  non determina univocamente l'elemento  $u \in \widehat{V}(\mathbb{K})$  tale che  $\text{Ker}(u) = H$ ; vale infatti la seguente

**(2.1.7) Proposizione** *Siano  $u, v \in \widehat{V}$ . Allora sono fatti equivalenti:*

- (a)  $\text{Ker}(v) \subseteq \text{Ker}(u)$ ;
- (b) esiste un  $\lambda \in \mathbb{K}$  tale che  $u = \lambda v$ .

*In particolare, se  $u, v \in \widehat{V} \setminus \{\widehat{0}\}$ , risulta  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(v)$  se, e solo se, esiste un  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tale che  $v = \lambda u$ .*

*Dimostrazione.*

(a)  $\implies$  (b) Se  $v = \widehat{0}$ , allora  $\text{Ker}(v) = V \subseteq \text{Ker}(u)$  implica  $\text{Ker}(u) = V$  e quindi  $u = \widehat{0}$ . Supponiamo allora che  $v \neq \widehat{0}$ . Esiste  $\mathbf{e} \in V \setminus \text{Ker}(v)$  tale che  $v(\mathbf{e}) \neq 0$ . Allora esiste  $\lambda \in \mathbb{K}$  tale che  $u(\mathbf{e}) = \lambda v(\mathbf{e})$ . Segue che, essendo  $V = \langle \mathbf{e} \rangle \oplus \text{Ker}(v)$ , se, per ogni  $\mathbf{x} \in V$ , si decompone  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e} + \mathbf{w}$  con  $\mathbf{w} \in \text{Ker}(v) \subseteq \text{Ker}(u)$ , si ottiene:

$$u(\mathbf{x}) = x_1 u(\mathbf{e}) + u(\mathbf{w}) = x_1 u(\mathbf{e}) = x_1 \lambda v(\mathbf{e}) = \lambda v(x_1 \mathbf{e}) = \lambda v(x_1 \mathbf{e} + \mathbf{w}) = \lambda v(\mathbf{x}).$$

(b)  $\implies$  (a) Dal fatto che  $u = \lambda v$  si ha

$$\forall \mathbf{x} \in V : \quad \mathbf{x} \in \text{Ker}(v) \Rightarrow v(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow u(\mathbf{x}) = \lambda v(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in \text{Ker}(u).$$

Dunque  $\text{Ker}(v) \subseteq \text{Ker}(u)$ . ■

Dunque forme lineari non nulle proporzionali hanno come nucleo un medesimo iperpiano e, d'altra parte, ricordando l'Osservazione (1.5.1), possiamo affermare che ogni iperpiano  $H$  di  $V(\mathbb{K})$  è nucleo di una classe di proporzionalità di forme lineari non nulle, e quindi determina un vettore  $u \in \widehat{V}(\mathbb{K})$  a meno di un fattore non nullo di  $\mathbb{K}$ .

## 2 Spazio vettoriale biduale

Dato uno spazio vettoriale  $V = V(\mathbb{K})$ , risulta definito lo spazio vettoriale  $\widehat{V} := \text{Hom}(V, \mathbb{K})$ . Assumendo, ora, come spazio vettoriale iniziale su  $\mathbb{K}$  proprio  $\widehat{V}$ , ha senso costruire il suo duale, ossia lo spazio vettoriale degli omomorfismi da  $\widehat{V}$  a  $\mathbb{K}$ . Poniamo  $\widehat{\widehat{V}} := \text{Hom}(\widehat{V}, \mathbb{K})$ ; tale spazio vettoriale è detto *spazio vettoriale biduale di  $V$* .

In forza di quanto dimostrato in precedenza, se  $\dim(V) = n + 1$  segue che

$$\dim(\widehat{\widehat{V}}) = \dim(\widehat{V}) = \dim(V) = n + 1,$$

e gli spazi  $V$ ,  $\widehat{V}$  e  $\widehat{\widehat{V}}$  sono isomorfi tra loro. L'isomorfismo tra  $\widehat{V}$  e  $V$  è stato mostrato mediante la funzione  $\vartheta_{\mathcal{B}}$  (cfr. pagina 41) che associa, ordinatamente, i vettori di una base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  di  $V$  a quelli della corrispondente base duale  $\widehat{\mathcal{B}} = \{f_1, \dots, f_{n+1}\}$  di  $\widehat{V}$ . In particolare, l'isomorfismo  $\varphi$  dipende dalla base  $\mathcal{B}$  assegnata, per cui se si fissa un'altra base  $\mathcal{B}'$  per  $V$ , si ottiene un isomorfismo  $\varphi'$  diverso da  $\varphi$ .

Invece, tra  $V$  e  $\widehat{\widehat{V}}$  si può costruire un isomorfismo intrinseco, ossia indipendente dalla scelta della base per  $V$ .

Sia  $\beta : V \rightarrow \widehat{\widehat{V}}$  la funzione così definita:

$$\beta : \begin{cases} V & \longrightarrow & \widehat{\widehat{V}} \\ \mathbf{v} & \longmapsto & \beta(\mathbf{v}) : \begin{cases} \widehat{V} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(\mathbf{v}). \end{cases} \end{cases}$$

Si osserva che per ogni  $\mathbf{v} \in V$  la funzione  $\beta(\mathbf{v})$  è in effetti un funzionale lineare:

$$\begin{aligned} \forall f, g \in \widehat{V}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad \beta(\mathbf{v})(\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)(\mathbf{v}) = \\ &= \lambda f(\mathbf{v}) + \mu g(\mathbf{v}) = \lambda \beta(\mathbf{v})(f) + \mu \beta(\mathbf{v})(g). \end{aligned}$$

**(2.2.1) Proposizione** *L'applicazione  $\beta : V \rightarrow \widehat{\widehat{V}}$  appena introdotta è un isomorfismo.*

*Dimostrazione.* Verifichiamo che  $\beta$  è un omomorfismo. Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e  $a, b \in \mathbb{K}$ . Allora

$$\forall f \in \widehat{V} : \quad \beta(a\mathbf{v} + b\mathbf{w})(f) = f(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = af(\mathbf{v}) + bf(\mathbf{w}),$$

$$\forall f \in \widehat{V} : (a\beta(\mathbf{v}) + b\beta(\mathbf{w}))(f) = a\beta(\mathbf{v})(f) + b\beta(\mathbf{w})(f) = af(\mathbf{v}) + bf(\mathbf{w}).$$

Dall'arbitrarietà di  $f \in \widehat{V}$ , deduciamo che

$$\beta(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\beta(\mathbf{v}) + b\beta(\mathbf{w}).$$

Verifichiamo ora che  $\beta$  è biunivoca. Basta dimostrare che  $\text{Ker}(\beta) = \{\mathbf{0}\}$ , dato che  $V$  e  $\widehat{V}$  hanno la stessa dimensione. Sia  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\beta)$ , ossia  $\beta(\mathbf{v}) = \widehat{\mathbf{0}}$ . Dunque

$$\forall f \in \widehat{V} : f(\mathbf{v}) = \beta(\mathbf{v})(f) = \widehat{\mathbf{0}}(f) = 0.$$

Si consideri ora una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  contenente  $\mathbf{v}$  (una tale base esiste per il Teorema di Steinitz poichè si è supposto  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ). Supponiamo ad esempio che  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n+1}\}$  e sia  $\widehat{\mathcal{B}} = \{f, f_2, \dots, f_{n+1}\}$  la corrispondente base duale. Allora si ha

$$f \in \widehat{V} \text{ e } \mathbf{v} \in \text{Ker}(\beta) \Rightarrow f(\mathbf{v}) = 0,$$

$$\widehat{\mathcal{B}} \text{ base duale di } \mathcal{B} \Rightarrow f(\mathbf{v}) = 1,$$

da cui un assurdo. Pertanto  $\text{Ker}(\beta) = \{\mathbf{0}\}$ . ■

**(2.2.2) Definizione** *Chiamiamo isomorfismo canonico tra  $V$  e  $\widehat{V}$  l'applicazione  $\beta$  definita precedentemente.*

### 3 Spazio proiettivo duale

In base alle osservazioni e alla Proposizione (2.1.7), poichè ogni iperpiano di  $V(\mathbb{K})$  individua un iperpiano di  $\text{PG}(V)$ , si può stabilire una biiezione tra l'insieme  $\mathcal{S}_{n-1}$  degli iperpiani di  $\text{PG}(V)$  e l'insieme delle classi di proporzionalità di vettori non nulli di  $\widehat{V}(\mathbb{K})$ , cha altro non è che l'insieme dei punti di  $\text{PG}(\widehat{V})$ .

**(2.3.1) Definizione** *Chiamiamo  $\text{PG}(\widehat{V})$  lo spazio proiettivo duale di  $\text{PG}(V)$ .*

Come abbiamo detto, si può stabilire la biiezione

$$\delta : \begin{cases} \mathcal{S}_{n-1} & \longrightarrow & \text{PG}(\widehat{V}) \\ H_n & \longmapsto & \mathbb{K}u \text{ tale che } H = \text{Ker}(u). \end{cases}$$

Ora, se si fissa un riferimento proiettivo  $\mathcal{R}$  in  $\text{PG}(V)$ , a questo corrisponde una base  $\mathcal{B}$  in  $V(\mathbb{K})$  (a meno di un fattore di proporzionalità), dalla quale si ottiene la base duale  $\widehat{\mathcal{B}}$ , a cui, a sua volta, corrisponde in  $\text{PG}(\widehat{V})$  un riferimento proiettivo  $\widehat{\mathcal{R}}$ , detto *riferimento*

duale di  $\mathcal{R}$ .

Ricordando le applicazioni  $\delta_{\mathcal{R}}$  (pagina 24) e  $\widehat{\gamma}_{\widehat{\mathcal{R}}}$  (corrispondente, per  $\text{PG}(\widehat{V})$ , della  $\gamma_{\mathcal{R}}$  di pagina 22), risulta, per l'applicazione  $\delta$ :

$$\delta = \widehat{\gamma}_{\widehat{\mathcal{R}}}^{-1} \circ \delta_{\mathcal{R}}$$

qualunque sia il riferimento  $\mathcal{R}$  fissato in  $\text{PG}(V)$ . Cambiando infatti riferimento da  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$  e considerando due basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  di  $V(\mathbb{K})$ , associate rispettivamente ad  $\mathcal{R}$  e ad  $\mathcal{R}'$ , se  $M \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$  è la matrice del cambiamento di base (considerata, naturalmente, a meno di un fattore di proporzionalità), risulta:

$$M^{-1}\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, M^{-1}\mathbf{e}'_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

dove, per ogni  $i = 1, \dots, n+1$ ,  $\mathbf{e}'_i$  denota il vettore colonna delle coordinate dell' $i$ -esimo vettore della base  $\mathcal{B}'$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ . Ma allora la  $i$ -esima riga di  $M^{-1}$  è un vettore che, moltiplicato per  $\mathbf{e}'_j$  dà  $\delta_{ij}$ , ovvero le righe di  $M^{-1}$  coincidono (a meno di un fattore di proporzionalità) con le componenti rispetto alla base  $\widehat{\mathcal{B}}$  dello spazio duale  $\widehat{V}(\mathbb{K})$  dei vettori  $f'_1, \dots, f'_{n+1}$  della base  $\widehat{\mathcal{B}}'$ . Ciò significa che  $(M^{-1})^t \sim \widehat{M}_{\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{B}'}}$  (essendo  $\widehat{M}_{\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{B}'}}$  la matrice relativa al passaggio da  $\widehat{\mathcal{B}}$  a  $\widehat{\mathcal{B}'}$  in  $\widehat{V}(\mathbb{K})$ ):  $(M^{-1})^t$  è quindi, a meno di un fattore di proporzionalità, la matrice del cambiamento di riferimento proiettivo in  $\widehat{\mathbb{P}} = \text{PG}(\widehat{V})$  determinato dal cambiamento in  $\mathbb{P} = \text{PG}(V)$ ; abbiamo così ritrovato proprio la matrice  $(M^{-1})^t$  che determina il cambiamento di coordinate plückeriane d'iperpiano nel passaggio dal riferimento  $\mathcal{R}$  al riferimento  $\mathcal{R}'$  di  $\mathbb{P} = \text{PG}(V)$  (cfr. Proposizione (1.6.2) di pagina 26).

Possiamo riassumere la situazione espressa da (1.6.2) nel seguente digramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{n-1} & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{R}}} & \text{PG}(n, \mathbb{K}) \\ & \searrow \delta_{\mathcal{R}'} & \downarrow (M^{-1})^t \\ & & \text{PG}(n, \mathbb{K}) \end{array}$$

cioè

$$\delta_{\mathcal{R}'} = (M^{-1})^t \circ \delta_{\mathcal{R}}.$$

Inoltre, per quanto sopra provato:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{PG}(\widehat{V}) & \xrightarrow{\widehat{\gamma}_{\mathcal{R}}} & \text{PG}(n, \mathbb{K}) \\
 & \searrow \widehat{\gamma}_{\mathcal{R}'} & \downarrow (M^{-1})^t \\
 & & \text{PG}(n, \mathbb{K})
 \end{array}$$

cioè

$$\widehat{\gamma}_{\mathcal{R}'} = (M^{-1})^t \circ \widehat{\gamma}_{\mathcal{R}}.$$

Da cui segue

$$\widehat{\gamma}_{\mathcal{R}'}^{-1} \circ \delta_{\mathcal{R}'} = \widehat{\gamma}_{\mathcal{R}}^{-1} \circ M^t \circ (M^{-1})^t \circ \delta_{\mathcal{R}} = \delta :$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S}_{n-1} & \xrightarrow{\delta} & \text{PG}(\widehat{V}) \\
 \delta_{\mathcal{R}} \searrow & & \nearrow \widehat{\gamma}_{\mathcal{R}}^{-1} \\
 & \text{PG}(n, \mathbb{K}) & \\
 \delta_{\mathcal{R}'} \searrow & \downarrow (M^{-1})^t & \nearrow M^t \\
 & \text{PG}(n, \mathbb{K}) & \\
 & & \nearrow \widehat{\gamma}_{\mathcal{R}'}^{-1}
 \end{array}$$

Vediamo adesso come si estende la biiezione  $\delta$ , o la  $\delta_{\mathcal{R}}$  (relativa alle equazioni degli iperpiani in un dato riferimento  $\mathcal{R}$ , che però, come abbiamo visto, ha un significato intrinseco) quando da un singolo iperpiano passiamo a considerare un particolare insieme di iperpiani.

**(2.3.2) Definizione** *Dati  $r + 1$  iperpiani indipendenti, l'insieme degli iperpiani le cui equazioni, in un dato riferimento, sono combinazioni lineari delle  $r + 1$  equazioni degli iperpiani assegnati viene detto sistema lineare di iperpiani di dimensione  $r$  generato dagli  $r + 1$  iperpiani indipendenti.*

Ricordiamo che il sistema delle  $r + 1$  equazioni degli iperpiani che generano un dato sistema lineare di dimensione  $r$  costituisce un sistema di equazioni cartesiane per un sottospazio di  $\text{PG}(V)$  di dimensione  $h = n - r - 1$ :

$$S_h : \begin{cases} u_{11}x_1 + \dots + u_{1(n+1)}x_{n+1} & = 0, \\ \vdots & \vdots \\ u_{(r+1)1}x_{r+1} + \dots + u_{(r+1)(n+1)}x_{n+1} & = 0, \end{cases} \quad \text{con } r + 1 = n - h.$$

(Il rango della matrice dei coefficienti è massimo).

**(2.3.3) Osservazione** *Notiamo che gli iperpiani che contengono tale sottospazio  $S_h$  sono tutti e soli quelli la cui equazione, aggiunta al sistema dell' $S_h$ , dà luogo ad un*

sistema equivalente, cioè sono tutti e soli gli iperpiani del sistema lineare generato dagli  $r + 1 = n - h$  iperpiani di partenza.

**(2.3.4) Definizione** Dato un sottospazio  $S_h$  di  $\text{PG}(V)$ , la famiglia di tutti e soli gli iperpiani che contengono tale  $S_h$  viene chiamata stella di iperpiani di sostegno  $S_h$  e denotata con  $\sigma(S_h)$ .

In particolare, se  $\text{PG}(V) = \mathbb{P}_2$  è un piano proiettivo, parleremo di *fascio di rette* (di sostegno un punto) e se  $\text{PG}(V) = \mathbb{P}_3$ , parleremo di *fascio di piani* (di sostegno una retta), o *stella di piani* (di sostegno un punto).

Dall'osservazione precedente segue direttamente il

**(2.3.5) Teorema (della stella di iperpiani)** Ogni sistema lineare di iperpiani di dimensione  $r$  ( $-1 \leq r \leq n$ ) coincide con una stella di iperpiani di sostegno un  $S_h$ , con  $h = n - r - 1$ ; e viceversa.

Consideriamo, in particolare, i valori estremi per la dimensione  $r$  del sistema lineare. Se  $r = -1$ , il sistema è generato da zero iperpiani se, e solo se,  $h = n + 1 - 1 = n$ . Pertanto si ha la stella vuota, vista come la famiglia degli iperpiani che contengono tutto  $S_n = \text{PG}(V)$  ( $\sigma(S_n) = \emptyset$ ). Se  $r = n$ , il sistema lineare è generato da  $n + 1$  iperpiani indipendenti e quindi contiene tutti gli iperpiani di  $\text{PG}(V)$  (sistema lineare improprio), quindi  $h = -1$ . Pertanto abbiamo la stella impropria di tutti gli iperpiani di  $\text{PG}(V)$ :  $\sigma(\emptyset) = \mathcal{S}_{n-1}$ .

**(2.3.6) Definizione** Le dimensioni  $r$  ed  $h$  tali che  $r+1 = n-h$  vengono dette dimensioni duali

È chiaro che, se la  $\delta$  associa ad ogni iperpiano di  $\text{PG}(V)$  un punto del duale  $\text{PG}(\widehat{V})$ , essa deve necessariamente associare ad ogni sistema lineare di iperpiani di dimensione  $r$  di  $\text{PG}(V)$  un sottospazio  $\widehat{S}_r$  di  $\text{PG}(\widehat{V})$ , della stessa dimensione, generato dagli  $r + 1$  punti corrispondenti agli iperpiani che generano il sistema stesso; ma tale sistema di iperpiani è una stella che individua, per intersezione, il suo sostegno  $S_h$ , con  $h = n - r - 1$ .

Si può quindi asserire, con abuso di linguaggio, che la biiezione  $\delta$  opera su ogni sottospazio  $S_h$  di  $\text{PG}(V)$ , individuato come sostegno di una stella di iperpiani, trasformandolo in un sottospazio  $\widehat{S}_r$  di  $\text{PG}(\widehat{V})$ , con  $r = n - h - 1$ , che corrisponde al sistema lineare di iperpiani coincidente con la stella  $\sigma(S_h)$ : abbiamo cioè identificato la stella  $\sigma(S_h)$  col suo sostegno  $S_h$ , e scriviamo

$$\delta : \begin{cases} \Sigma_p & \longrightarrow & \widehat{\Sigma}_p \\ S_h \cong \sigma(S_h) & \longmapsto & \widehat{S}_{n-h-1}. \end{cases}$$

Per  $h = n - 1$  ritroviamo l'azione di  $\delta$  sugli iperpiani:  $\delta(S_{n-1}) = \widehat{S}_0$ .

**(2.3.7) Osservazione** *Dati due sottospazi  $S_h$  ed  $S_k$  di  $\text{PG}(V)$ , ogni iperpiano che contiene  $S_h$  contiene  $S_k$  se, e solo se,  $S_k \subseteq S_h$ . Ciò permette di concludere che*

$$\sigma(S_h) \subseteq \sigma(S_k) \iff S_h \supseteq S_k,$$

ovvero

$$\delta(S_h) \subseteq \delta(S_k) \iff S_h \supseteq S_k.$$

Dunque la biiezione  $\delta : \Sigma_p \rightarrow \widehat{\Sigma}_p$  inverte l'inclusione e, considerando i due reticoli  $(\Sigma_p, \subseteq, \cap, +)$  e  $(\widehat{\Sigma}_p, \subseteq, \cap, +)$ ,  $\delta$  risulta un antiisomorfismo di reticoli, per cui si ottiene che

$$\delta(S_h + S_k) = \delta(S_h) \cap \delta(S_k),$$

$$\delta(S_h \cap S_k) = \delta(S_h) + \delta(S_k).$$

**(2.3.8) Definizione** *Se  $T = T(S_h, S_k, \dots, \subseteq, \cap, +)$  è una proposizione grafica in  $\mathbb{P}_n$ , diremo che  $\widehat{T} = T(S_{n-h-1}, S_{n-k-1}, \dots, \supseteq, +, \cap)$  è la proposizione grafica duale di  $T$ , ed è, cioè, quella ottenuta da  $T$ , sostituendo ogni sottospazio nominato in  $T$  con un sottospazio di dimensione duale e scambiando fra loro le espressioni 'contenere' ed 'essere contenuto', 'intersecare' e 'congiungere'. Se  $T = \widehat{T}$ , si dice che  $T$  è autoduale.*

Possiamo dunque enunciare il

**(2.3.9) Teorema (principio di dualità)** *Ogni proposizione grafica relativa ad un qualsiasi spazio proiettivo  $n$ -dimensionale è equivalente alla propria duale<sup>3</sup>.*

*Dimostrazione.* Sia  $T = T(S_h, S_k, \dots, \subseteq, \cap, +)$  vera per qualsiasi spazio proiettivo  $\mathbb{P}_n = \text{PG}(V)$ . Allora  $T$  è vera anche nel duale  $\widehat{\mathbb{P}}_n = \text{PG}(\widehat{V})$ . Ne segue che interpretando  $T(\widehat{S}_h, \widehat{S}_k, \dots, \subseteq, \cap, +)$  in  $\mathbb{P}_n$  (cioè passando da ogni sottospazio  $\widehat{S}_h, \widehat{S}_k$  ad una stella di iperpiani tramite  $\delta^{-1}$  e da ogni stella al suo sostegno), si ottiene per  $\mathbb{P}_n$  la proposizione

$$T(\delta^{-1}(\widehat{S}_h), \delta^{-1}(\widehat{S}_k), \dots, \supseteq, +, \cap) = T(S_{n-h-1}, S_{n-k-1}, \dots, \supseteq, +, \cap) = \widehat{T}.$$

■

<sup>3</sup>In altre parole: una proposizione riguardante punti, sottospazi e le loro incidenze è vera, in un qualsiasi spazio proiettivo di dimensione  $n$ , se, e solo se, è vera la proposizione che si ottiene da quella sostituendo ciascun sottospazio con un sottospazio di dimensione duale e le espressioni 'contenere' con 'essere contenuto', 'intersecare' con 'congiungere'.



**(2.3.10) Esempio** Si consideri la proposizione «Date due rette sghembe in  $\mathbb{P}_3$ , per ogni punto che non appartiene a nessuna delle due rette passa una ed una sola retta intersecante entrambe le rette»<sup>4</sup>.

La proposizione duale è «Date due rette sghembe in  $\mathbb{P}_3$ , ogni piano che non contiene nessuna delle due rette contiene una ed una sola retta complanare con entrambe».

Come la nozione di  $h + 1$  punti indipendenti in  $\mathbb{P}_n$ , con  $h < n$  è stata caratterizzata geometricamente affermando che essi generano un  $S_h$  e non sono tutti contenuti in alcun sottospazio  $S_r$  di dimensione  $r < h$ , così anche la nozione di  $h + 1$  iperpiani indipendenti in  $\mathbb{P}_n$  può essere caratterizzata, dualmente, affermando che essi si intersecano tutti in un  $S_{n-h-1}$  e non contengono (tutti quanti) alcun sottospazio  $S_r$ , di dimensione  $r > n - h - 1$ . Consideriamo dunque la seguente coppia di proposizioni duali:

$$\begin{aligned} h + 1 \text{ punti indipendenti generano un sottospazio } S_h; \\ h + 1 \text{ iperpiani indipendenti si intersecano in un } S_{n-h-1}. \end{aligned}$$

Essa dà, in particolare, per  $h = n - 1$ :

$$\begin{aligned} n \text{ punti indipendenti generano un iperpiano;} \\ n \text{ iperpiani indipendenti si intersecano in un punto.} \end{aligned}$$

È immediato esprimere tali proposizioni nel caso del piano (in cui  $h$  può variare tra  $-1$  e  $2$ ) o dello spazio proiettivo ordinario: in questo caso, al variare di  $h$ , si ottengono le ‘dieci proposizioni grafiche fondamentali’ che classicamente caratterizzano lo spazio proiettivo tridimensionale (si veda ad esempio [3]).

Se  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_2$  e, rispettivamente,  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_3$ , la corrispondenza  $\delta$  verrà detta *dualità piana* e, rispettivamente, *dualità spaziale*.

Data una figura  $\mathcal{F}$ , costituita da un insieme di sottospazi di  $\mathbb{P}_n$ , chiamiamo *figura duale*  $\widehat{\mathcal{F}}$  di  $\mathcal{F}$  la figura costituita da sottospazi di dimensioni duali rispetto ai sottospazi di  $\mathcal{F}$ ; così, per esempio, un *triangolo*, che è una figura costituita da tre punti (vertici) non allineati di  $\mathbb{P}$  e dalle tre rette (lati) che li congiungono a due a due, ha come figura duale nel piano il *trilatero*, costituito da tre rette non passanti per un punto e dai tre punti in cui esse si intersecano a due a due: in questo caso abbiamo ottenuto due figure, duali l’una dell’altra, dello stesso tipo (cioè costituite dagli stessi elementi) e diremo perciò che il triangolo (o il trilatero) è una *figura autoduale* del piano.

<sup>4</sup>Per la dimostrazione, basta considerare il piano generato dal punto e da una delle due rette ed intersecarlo con l’altra retta: il punto ottenuto, congiunto col punto dato, determina la retta cercata.

Un altro esempio è dato dal *quadrangolo piano (completo)* che è una figura costituita da quattro punti (di un piano), a tre a tre non allineati e dalle sei rette che li congiungono a due a due in tutti i modi possibili; esso ha come figura duale nel piano il *quadrilatero piano (completo)* costituito da quattro rette (complanari) a tre a tre non concorrenti in un punto e dai sei punti in cui tali rette si intersecano a due a due in tutti i modi possibili. Osserviamo che, attraverso la dualità spaziale e la dualità piana, si viene a stabilire un terzo tipo di relazione: la *dualità della stella* (stella intesa estensivamente come la totalità delle rette e dei piani che passano per un punto, cioè la figura duale nello spazio del piano) in cui si scambiano le rette con i piani e, in particolare, il fascio di rette (totalità delle rette della stella che giacciono in un piano) si scambia con il fascio di piani (totalità dei piani della stella che passano per una retta).

Possiamo fare di più: riprendendo un esempio di figura piana, come il triangolo o il quadrangolo piano (completo), ne possiamo considerare la figura duale nello spazio, che risulterà essere una figura della stella.

Dai discorsi precedenti capiamo subito che se una proposizione grafica enunciata relativamente ad una certa figura è valida in  $\mathbb{P}_n$ , sarà valida di conseguenza non solo la sua duale in  $\mathbb{P}_n$ , ma anche tutte le sue duali negli eventuali sottospazi proiettivi di dimensioni distinte che contengono la figura data: per esempio, se in  $\mathbb{P}_3$  si dimostra una proposizione grafica relativa al quadrangolo piano completo ci si troveranno automaticamente dimostrate le proposizioni duali nel piano, nello spazio e nella stella relative, rispettivamente, al quadrilatero piano, all'*angoloide tetraedro* (duale nello spazio del quadrangolo) e all'*angoloide quadrispigo* (duale nello spazio del quadrilatero piano). Si invita a definire, per esercizio, l'angoloide tetraedro e l'angoloide quadrispigo.

Vediamo ora una classica proposizione grafica che si può dimostrare nello spazio e nel piano proiettivo e che si può anche dualizzare.

**(2.3.11) Teorema (dei triangoli omologici, Desargues 1639)** *Se due triangoli non aventi alcun elemento comune, sono così riferiti che le rette congiungenti i vertici dell'uno con i vertici corrispondenti dell'altro passino per uno stesso punto, le intersezioni dei lati dell'uno con i lati corrispondenti dell'altro appartengono ad una medesima retta*

*Dimostrazione.* Distinguiamo due casi, a seconda che i due triangoli non siano complanari oppure lo siano.

1. Configurazione tridimensionale. Sia  $T$  il triangolo di vertici  $A, B, C$  nel piano

$\alpha$ , sia  $T'$  il triangolo di vertici  $A', B', C'$  nel piano  $\beta$  con  $\beta \neq \alpha$ , Poichè, per ipotesi, i

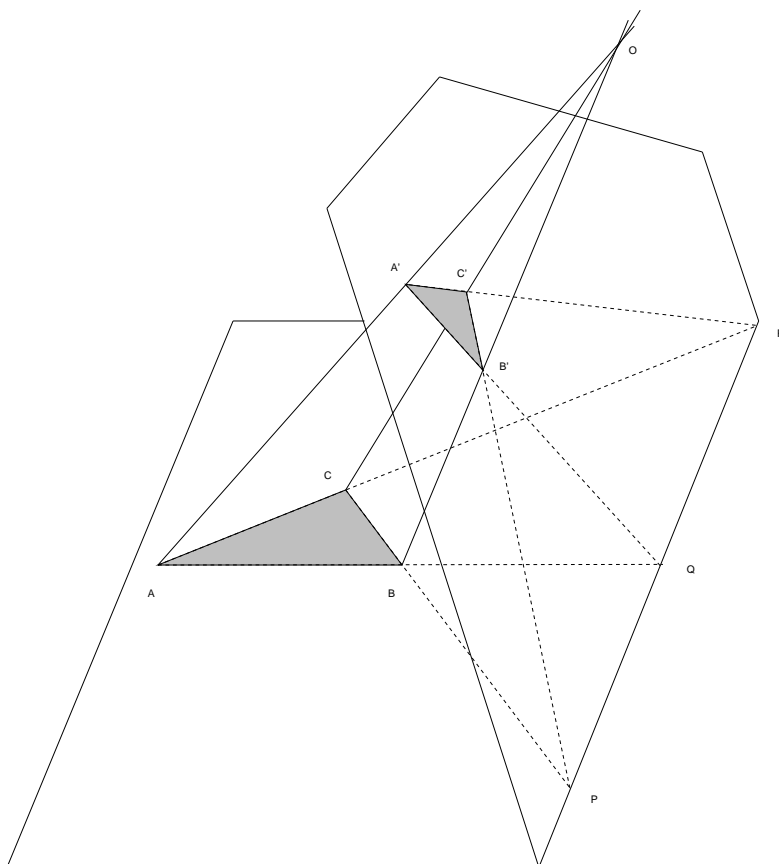


Figura 2.1: Configurazione di Desargues: caso tridimensionale.

punti rispettivamente  $A$  e  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$  sono allineati con un medesimo punto  $O$ , le rette, rispettivamente,  $A + B$  e  $A' + B'$ ,  $B + C$  e  $B' + C'$ ,  $A + C$  e  $A' + C'$  risultano complanari e quindi incidenti a due a due. Poniamo  $Q := (A + B) \cap (A' + B') \in \alpha \cap \beta$ ,  $P := (B + C) \cap (B' + C') \in \alpha \cap \beta$  ed  $R := (A + C) \cap (A' + C') \in \alpha \cap \beta$ . Osserviamo inoltre che qualunque sia la dimensione dello spazio proiettivo ambiente, l'intera configurazione è contenuta nel sottospazio  $S_3 = O + \alpha = O + \beta$ . Poichè, dunque,  $\alpha$  e  $\beta$  sono distinti e giacciono in uno spazio di dimensione 3, la loro intersezione è una retta, alla quale appartengono  $P, Q, R$  che risultano quindi tre punti allineati.

**2. Configurazione piana.** Diamo due tipi di dimostrazione: analitica e geometrica. Partiamo dalla dimostrazione analitica, che fa ricorso allo spazio vettoriale. Siano allora  $A = \mathbb{K}\mathbf{a}$ ,  $B = \mathbb{K}\mathbf{b}$ ,  $C = \mathbb{K}\mathbf{c}$  e  $A' = \mathbb{K}\mathbf{a}'$ ,  $B' = \mathbb{K}\mathbf{b}'$ ,  $C' = \mathbb{K}\mathbf{c}'$ , i vertici dei due triangoli, e sia  $O = \mathbb{K}\mathbf{o}$  il punto per cui passano le rette congiungenti vertici corrispondenti. Per

ipotesi si ha

$$\mathbf{o} = \alpha\mathbf{a} + \alpha'\mathbf{a}' = \beta\mathbf{b} + \beta'\mathbf{b}' = \gamma\mathbf{c} + \gamma'\mathbf{c}',$$

con  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathbb{K}$  e tutti diversi da 0. Allora

$$\alpha\mathbf{a} - \gamma\mathbf{c} = -\alpha'\mathbf{a}' + \gamma'\mathbf{c}'$$

è un vettore che rappresenta il punto comune alle rette  $A + C$  e  $A' + C'$ , cioè  $R$ . Analogamente

$$-\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \beta'\mathbf{b}' - \gamma'\mathbf{c}' \longrightarrow P,$$

$$-\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \alpha'\mathbf{a}' - \beta'\mathbf{b}' \longrightarrow Q.$$

Ma i tre vettori  $(\alpha\mathbf{a} - \gamma\mathbf{c})$ ,  $(-\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c})$  e  $(-\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})$  sono linearmente dipendenti (infatti danno per somma  $\mathbf{0}$ ), quindi  $R, P, Q$  sono allineati.

Vediamo ora la dimostrazione geometrica. Presa una retta per il punto  $O$ , che non giaccia nel piano  $\alpha = \beta$  della configurazione, e presi due punti  $U$  e  $V$  su questa retta, indichiamo i seguenti punti:  $W_A = (U + A) \cap (V + A')$ ,  $W_B = (U + B) \cap (V + B')$  e  $W_C = (U + C) \cap (V + C')$ . I triangoli  $U, A, B$  e  $V, A', B'$ ,  $U, B, C$  e  $V, B', C'$ ,  $U, A, C$  e

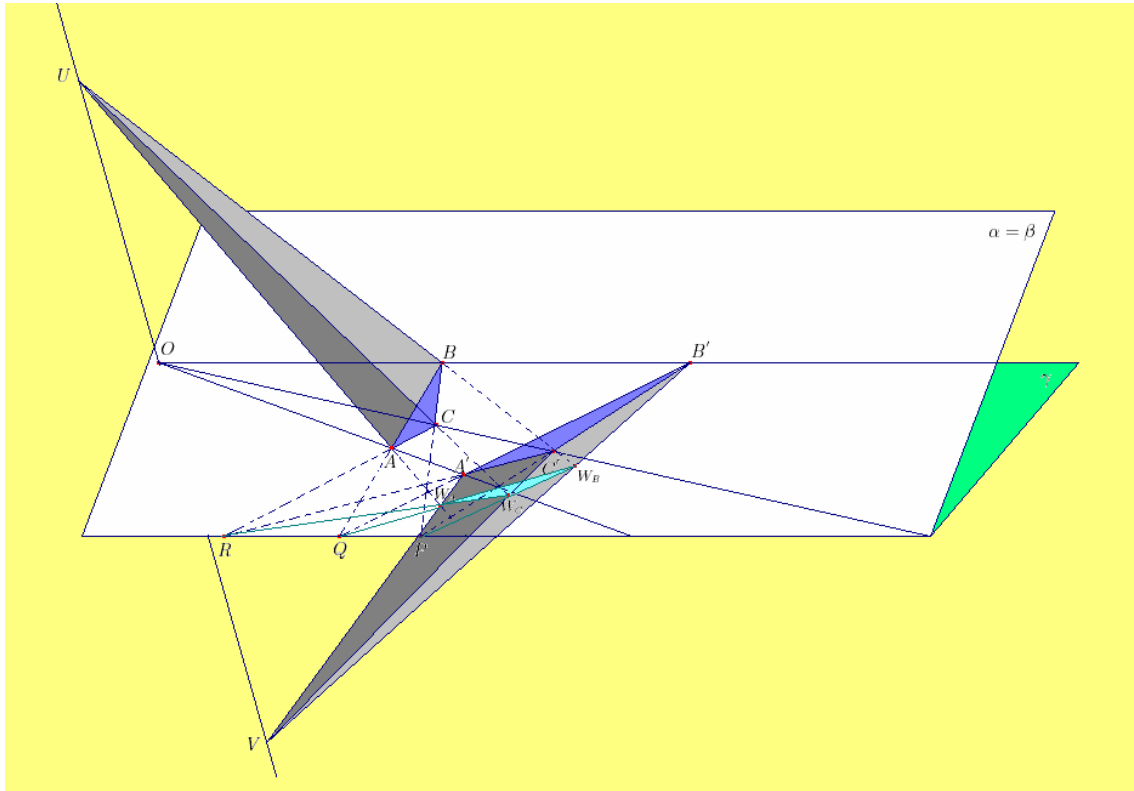


Figura 2.2: Configurazione di Desargues: caso piano

$V, A', C'$  sono a due a due omologici rispetto al centro  $O$  e non complanari. Da ciò segue, per la parte **1.**:

$$\left. \begin{array}{l} Q \in W_A + W_B \\ R \in W_A + W_C \\ P \in W_B + W_C \end{array} \right\} \Rightarrow P, Q, R \in \alpha \cap (W_A + W_B + W_C).$$

L'ultima intersezione è proprio una retta dato che  $\gamma := W_A + W_B + W_C$  è un piano perchè se questi tre punti fossero allineati vorrebbe dire che le tre rette  $U + A$ ,  $U + B$  e  $U + C$  appartengono ad uno stesso piano (e lo stesso dicasi per le rette  $V + A'$ ,  $V + B'$  e  $V + C'$ ) e cioè che i tre punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  (e anche  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ ) sono allineati. ■

**(2.3.12) Teorema (di Desargues inverso)** *Se due triangoli, non aventi alcun elemento comune, sono così riferiti che le intersezioni dei lati dell'uno con i lati corrispondenti dell'altro stiano su una stessa retta, le rette congiungenti i vertici dell'uno con i vertici corrispondenti dell'altro passano per uno stesso punto.*

*Dimostrazione.* Si ragiona con argomenti di tipo grafico nel caso tridimensionale (esercizio). Per il caso piano si noti che questa è la proposizione duale del Teorema (2.3.11).

■



## Capitolo 3

# Spazi proiettivi e spazi affini

### 1 Prime definizioni

Sia  $PG(V) = \mathbb{P}_n(V)$  lo spazio proiettivo  $n$ -dimensionale derivato dallo spazio vettoriale  $V = V_{n+1}(\mathbb{K})$ . Denoteremo  $P_n(V)$  semplicemente con  $\mathbb{P}_n$ .

Sia  $S_{n-1} =: H$  un iperpiano di  $\mathbb{P}_n$ . Allora l'insieme  $\mathbb{P}_n \setminus H$  può essere dotato della struttura di spazio affine nel seguente modo:

- si fissi in  $\mathbb{P}_n$  un riferimento proiettivo  $\mathcal{R} = (E_1, \dots, E_n, E_{n+1}, E)$  in modo che sia

$$H = \bigoplus_{k=1}^n E_k,$$

cosicchè  $H$  abbia equazione  $x_{n+1} = 0$ : lo indicheremo allora con  $H^{n+1}$ ;

- si consideri la biiezione

$$(3.1.1) \quad f_{n+1} : \begin{cases} \mathbb{P}_n \setminus H^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P = [(x_1, \dots, x_{n+1})] & \longmapsto & \left( \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right), \end{cases}$$

Osserviamo che  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) = f_{n+1}(E_{n+1})$ . Verifichiamo ora che in effetti la (3.1.1) è una biiezione. Anzitutto,  $f_{n+1}$  è un'applicazione poichè, se

$$P = [(x_1, \dots, x_{n+1})] = [(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1})],$$

allora

$$f_{n+1}(P) = \left( \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = \left( \frac{\lambda x_1}{\lambda x_{n+1}}, \dots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_{n+1}} \right).$$

Inoltre  $f_{n+1}$  è iniettiva. Infatti, se  $P = [(x_1, \dots, x_{n+1})]$  e  $P' = [(x'_1, \dots, x'_{n+1})]$  si ha  $f_{n+1}(P) = f_{n+1}(P')$  se e solo se per ogni  $i = 1, \dots, n$  risulta  $\frac{x_i}{x_{n+1}} = \frac{x'_i}{x'_{n+1}}$ , se e solo se per ogni  $i = 1, \dots, n$  si ha  $x'_i = \frac{x'_{n+1}}{x_{n+1}} x_i$ , e poichè è anche banalmente

$x'_{n+1} = \frac{x'_{n+1}}{x_{n+1}}x_{n+1}$ , risulta  $f_{n+1}(P) = f_{n+1}(P')$  se, e solo se,  $P = P'$ .

Verifichiamo ora la suriettività di  $f_{n+1}$ : sia  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ . Allora  $[(y_1, \dots, y_n, 1)]$  appartiene a  $\mathbb{P}_n \setminus H^{n+1}$  e  $f_{n+1}([(y_1, \dots, y_n, 1)]) = (y_1, \dots, y_n)$ .

Pertanto  $f_{n+1}$  è una biiezione e risulta  $f_{n+1}^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [(y_1, \dots, y_n, 1)]$ ;

- si induca ora in  $\mathbb{P}_n \setminus H^{n+1}$  la struttura di spazio affine di  $\mathbb{K}^n$  per mezzo della  $f_{n+1}^{-1}$ : in tal modo i sottospazi affini di  $\mathbb{P}_n \setminus H^{n+1}$  sono esattamente gli  $f_{n+1}^{-1}(S)$ , al variare di  $S$  sottospazio affine di  $\mathbb{K}^n$ ;
- occorre infine verificare che lo spazio affine indotto in questo modo in  $\mathbb{P}_n \setminus H^{n+1}$  è compatibile con la struttura geometrica già esistente in esso, nel senso che i sottospazi affini di  $\mathbb{P}_n \setminus H^{n+1}$  devono essere tutti e soli i sottospazi dello spazio proiettivo  $\mathbb{P}_n$  privati dell'intersezione con  $H^{n+1}$ .

A questo scopo, basta constatare l'equivalenza dei seguenti fatti:

- $S$  è un sottospazio affine di  $\mathbb{K}^n \neq \emptyset$ ;
- esistono  $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$  tali che  $S$  è l'insieme dei vettori le cui componenti sono le soluzioni del sistema lineare  $A\mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , con  $\mathbf{y}^t = (y_1, \dots, y_n)$ ;
- $f_{n+1}^{-1}(S)$  è il luogo dei punti di  $\mathbb{P}_n \setminus H^{n+1}$  le cui coordinate proiettive omogenee sono soluzioni del sistema lineare omogeneo  $[A|\mathbf{b}]\mathbf{x} = 0$ , con

$$\mathbb{K}^* \mathbf{x} = [(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})] = [(y_1, \dots, y_n, 1)] = f_{n+1}^{-1}(y_1, \dots, y_n) = f_{n+1}^{-1}(\mathbf{y}),$$

avendo posto  $x_i/x_{n+1} = y_i$ ,  $x_{n+1} \neq 0$ ;

- $f_{n+1}^{-1}(S)$  è un sottospazio di  $\mathbb{P}_n$  privato dei punti per cui  $x_{n+1} = 0$ , cioè della sua intersezione con  $H^{n+1}$  (se poi  $S = \emptyset$ , banalmente  $f_{n+1}^{-1}(S) = \emptyset$ ).

In conclusione, abbiamo mostrato come l'insieme dei punti di uno spazio proiettivo  $n$ -dimensionale  $\mathbb{P}_n(V)$  privato di un fissato iperpiano  $H$  si possa dotare della struttura di spazio affine  $n$ -dimensionale  $\mathbb{A}_n = \mathbb{P}_n \setminus H$ .

Viceversa, sia  $\mathbb{A}_n(\mathbb{K})$  lo spazio affine di dimensione  $n$  su  $\mathbb{K}$  ed  $\mathbb{A}_{n+1}(\mathbb{K})$  lo spazio affine di dimensione  $n+1$  su  $\mathbb{K}$  (ricordiamo che ogni spazio affine di dimensione  $d$  su  $\mathbb{K}$  si può identificare con  $\mathbb{K}^d$ , una volta fissato un riferimento affine).

Consideriamo, in  $\mathbb{A}_{n+1}$ , l'iperpiano affine di equazione  $x_{n+1} = 1$  e identifichiamolo con  $\mathbb{A}_n$  attraverso l'applicazione che associa ad ogni  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}_n$  il punto  $(y_1, \dots, y_n, 1)$ . Osserviamo che lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$  si può identificare con l'insieme delle rette



per l'origine di  $\mathbb{A}_{n+1}(\mathbb{K})$ : ogni punto  $[(x_1, \dots, x_{n+1})] \in \mathbb{P}_n$  corrisponde alla retta di  $\mathbb{A}_{n+1}$  costituita dai punti  $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1})$ , al variare di  $\lambda \in \mathbb{K}$  (tali punti, ad eccezione di  $(0, \dots, 0)$ , costituiscono le  $(n+1)$ -uple di coordinate omogenee di  $[(x_1, \dots, x_{n+1})]$ ).

Se  $W$  è l'iperpiano affine di  $\mathbb{A}_{n+1}$  di equazione  $x_{n+1} = 0$ ,  $H^{n+1} = [W]$  è l'iperpiano dello spazio proiettivo  $\mathbb{P}_n$  di equazione  $x_{n+1} = 0$  e i suoi punti corrispondono esattamente alle rette di  $\mathbb{A}_{n+1}$  contenute in  $W$ . Le rette per l'origine di  $\mathbb{A}_{n+1}$  non appartenenti a  $W$  non sono parallele all'iperpiano affine di equazione  $x_{n+1} = 1$  (che è parallelo a  $W$ ), e quindi ognuna di esse ha in comune con esso uno ed un solo punto.

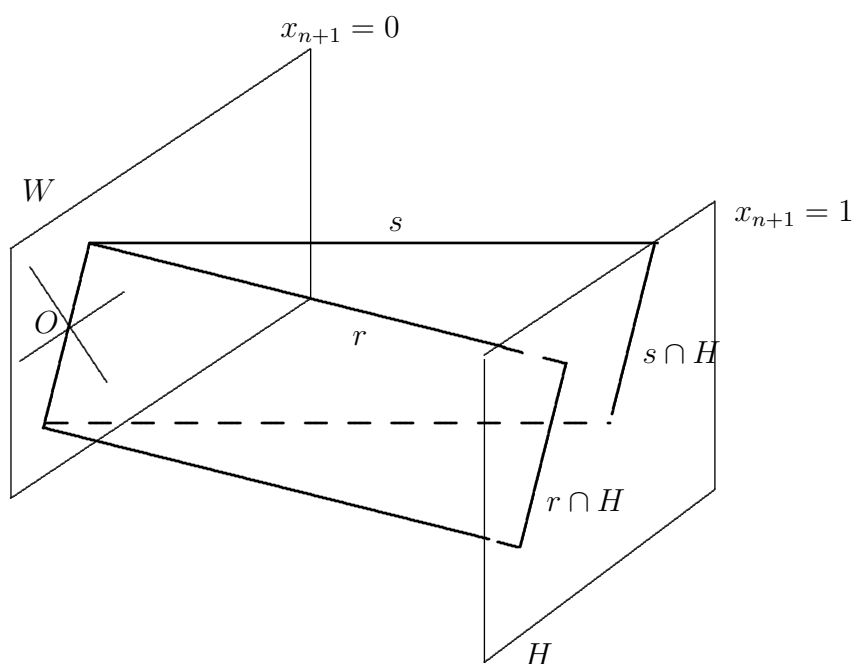


Figura 1

In tal modo si interpreta geometricamente la corrispondenza biunivoca  $f_{n+1}^{-1}$ , cioè:

$$f_{n+1}^{-1} : \begin{cases} \mathbb{A}_n & \longrightarrow & \mathbb{P}_n \setminus H^{n+1} \\ (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & [(y_1, \dots, y_n, 1)], \end{cases}$$

che è un'immersione di  $\mathbb{A}_n$  in  $\mathbb{P}_n$  e risulta  $\mathbb{P}_n = f_{n+1}^{-1}(\mathbb{A}_n) \cup (\mathbb{P}_n \setminus H^{n+1})$  (*spazio affine ampliato*).

L'applicazione  $f_{n+1}$  è l'applicazione di passaggio a coordinate non omogenee e la  $f_{n+1}^{-1}$  di passaggio a coordinate omogenee rispetto a  $x_{n+1}$ .

I punti di  $H^{n+1}$  sono chiamati *punti impropri* (e ciascuno di essi si può identificare con una classe di parallelismo di rette di  $\mathbb{A}_n$ ), i punti di  $\mathbb{P}_n \setminus H^{n+1}$  *punti propri* e  $H^{n+1}$  è detto *iperpiano improprio rispetto a  $x_{n+1}$*  dello spazio affine ampliato. Due rette  $r$  ed

$s$  di  $\mathbb{A}_n$  risultano allora parallele se, e solo se, i sottospazi affini 2-dimensionali (piani) che ciascuna di esse individua con l'origine  $(0, \dots, 0)$  si intersecano lungo una retta per  $(0, \dots, 0)$  che è contenuta in  $W$  (la retta per l'origine parallela ad  $r$  ed  $s$ ), cioè se, e solo se, le loro immagini in  $\mathbb{P}_n$  attraverso  $f_{n+1}^{-1}$  sono due rette che si intersecano in un punto improprio.

Considerando, invece di  $H^{n+1}$ , uno qualsiasi degli iperpiani  $S_{n-1}^i =: H^i$  di equazione  $x_i = 0$  e procedendo come nel caso precedente, si ottiene l'applicazione biunivoca

$$f_i : \begin{cases} \mathbb{P}_n \setminus H^i & \longrightarrow & \mathbb{K}^n(\mathbb{K}) \\ [(x_1, \dots, x_{n+1})] & \longmapsto & \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right), \end{cases}$$

e, in modo analogo alla  $f_{n+1}^{-1}$  anche la  $f_i^{-1}$ ;  $f_i$  ed  $f_i^{-1}$  si chiamano l'applicazione di passaggio rispettivamente a coordinate non omogenee e a coordinate omogenee, rispetto ad  $x_i$ . In tal caso i punti impropri sono quelli di  $H^i$ , che è detto *iperpiano improprio rispetto ad  $x_i$* .

**(3.1.2) Esercizio** In  $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$ , ampliamento dello spazio affine  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ , si fissi un riferimento proiettivo in modo da considerare coordinate proiettive omogenee  $x, y, z$  e  $t$ , rispetto alle quali il piano improprio abbia equazione  $t = 0$ . Si determini un'equazione cartesiana del piano di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$  passante per il punto  $[(1, 1, 0, 1)]$  e per i punti impropri delle rette  $r$  ed  $s$  di  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$  di equazioni

$$r : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ 2x - y - z = 0, \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Col linguaggio affine questo problema si enuncerebbe nel seguente modo: determinare un'equazione cartesiana del piano per  $(1, 1, 0)$  e parallelo alle rette  $r$  ed  $s$ .

*Soluzione.* Il punto improprio di  $r$  (in coordinate omogenee) si determina risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0, \\ 2x - y - z = 0, \\ t = 0, \end{cases}$$

pertanto otteniamo il punto  $[(0, 1, -1, 0)]$ . Il punto improprio di  $s$  (in coordinate omogenee) si determina risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z + t = 0, \\ y + z - t = 0, \\ t = 0, \end{cases}$$

pertanto otteniamo il punto  $[(1, -2, 2, 0)]$ .

Il piano di  $\mathbb{P}_3$  per i punti  $[(1, 1, 0, 1)]$ ,  $[(0, 1, -1, 0)]$  e  $[(1, -2, 2, 0)]$  ha equazione:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

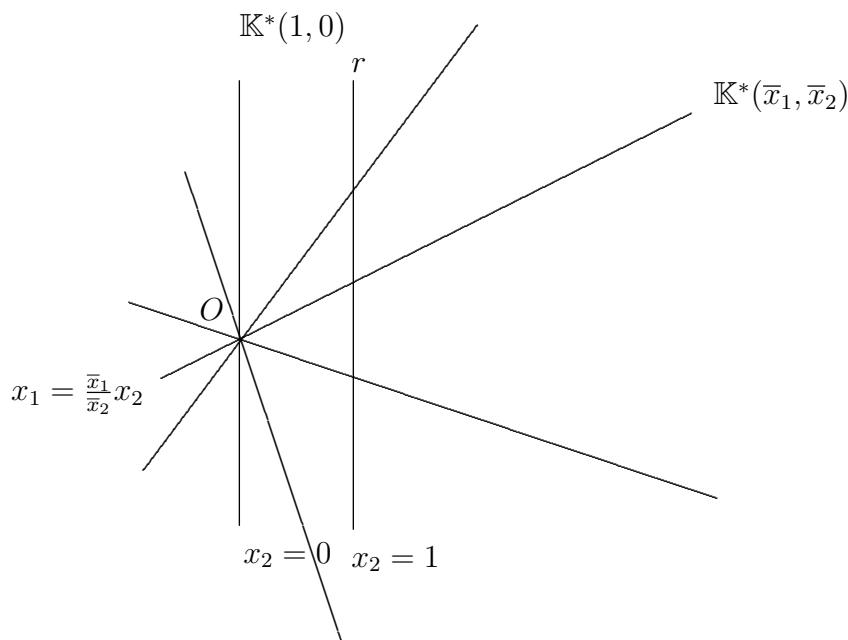
da cui si ha  $y + z - t = 0$  (in coordinate non omogenee sarebbe  $y + z - 1 = 0$ , cioè interpretato nello spazio affine  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ ). ♣

## 2 Situazione in dimensioni ordinarie (1, 2, 3)

Storicamente l'introduzione degli spazi proiettivi ordinari fu fatta a partire 'dal basso': essi cioè furono inizialmente definiti come ampliamento di spazi affini, ottenuti aggiungendo ad essi certi 'punti impropri'.

Per capire come ciò fu fatto, riprendiamo la costruzione geometrica vista nella seconda parte del precedente paragrafo, dell'ampliamento proiettivo di uno spazio affine di dimensione 1: la retta.

Consideriamo  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ , visto come l'insieme delle rette di  $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$  (il piano affine) passanti per l'origine.



Per ogni  $[(\bar{x}_1, \bar{x}_2)] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ , il punto  $(\lambda\bar{x}_1, \lambda\bar{x}_2)$  descrive, al variare di  $\lambda \in \mathbb{K}$ , la corrispondente retta per l'origine in  $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ . In particolare, il punto  $S_2 = [(1, 0)] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$

corrisponde alla retta di equazione  $x_2 = 0$ , mentre tutti gli altri punti di  $\mathbb{P}_1 \setminus S_2$  corrispondono a rette di  $\mathbb{A}_2$  di equazione  $x_1 = mx_2$ , con  $m = \bar{x}_1/\bar{x}_2 \in \mathbb{K}$ .

Consideriamo ora in  $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$  la retta  $r$  di equazione  $x_2 = 1$ : essa è parallela alla retta  $x_2 = 0$  e dunque, per ogni  $[(\bar{x}_1, \bar{x}_2)] \in \mathbb{P}_1 \setminus S_2$ , la corrispondente retta di  $\mathbb{A}_2$  non è parallela ad  $r$  e la interseca nel punto  $(m, 1)$ . Viceversa, ogni punto  $(m, 1) \in r$  determina con  $(0, 0)$  l'unica retta di equazione  $x_1 = mx_2$ , corrispondente al punto  $[(m, 1)] \in \mathbb{P}_1 \setminus S_2$ .

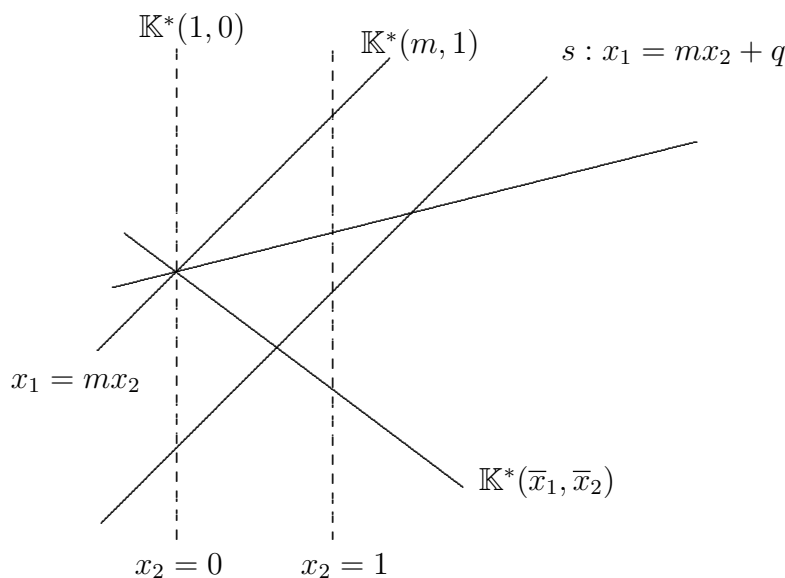
Si ha quindi una corrispondenza biunivoca tra  $\mathbb{P}_1 \setminus S_2$  ed  $r$ , ovvero tra  $\mathbb{P}_1$  ed  $r \cup R_\infty$ , dove  $R_\infty$  può essere considerato come un nuovo punto convenzionale, aggiunto alla retta  $r$  come corrispondente di  $S_2$  per estendere la biunivocità della corrispondenza considerata a tutto  $\mathbb{P}_1$ .

In tal modo, i punti della retta proiettiva  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$  possono essere riguardati come i punti di una retta affine ( $r$ , immersa in  $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ ) con l'aggiunta di un nuovo punto convenzionale,  $R_\infty$ ).

Possiamo presentare la convenzione sopra introdotta anche nel modo seguente: la Geometria proiettiva riguarda come punti di una retta non solo i punti intuitivi o propri (quelli della retta affine), che la geometria elementare considera, ma anche la direzione della retta, alla quale dà il nome di punto improprio o punto all'infinito (infatti, nel caso reale, la retta  $\mathbb{R}(1, 0)$  può essere considerata come la posizione limite della retta  $\mathbb{R}(m, 1)$  quando  $|m|$  tende all'infinito ed è la stessa sia per  $m \rightarrow +\infty$  che per  $m \rightarrow -\infty$ ).

Se passiamo ora a  $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ , visto come l'insieme delle rette di  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$  passanti per l'origine, possiamo riprendere il modello visto in precedenza (cfr la Figura 1 di pagina 57) e considerare, in  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ , il piano  $H$  di equazione  $x_3 = 1$ : esso è parallelo al piano  $x_3 = 0$  e può essere identificato col piano affine. Si ottiene che due rette  $r$  ed  $s$  con  $r \neq s$  in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ , viste come due piani di  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$  passanti per  $O$ , hanno sempre un punto in comune (perchè i due piani in  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$  hanno in comune una retta per  $O$ ) *proprio* quando le due rette segate da tali due piani sul piano  $H$  si intersecano nel senso della geometria elementare (cioè come rette affini), *improprio* quando sono parallele (sempre come rette affini nel piano affine  $H$ ).

Il piano proiettivo si può adesso vedere anche in un altro modo. Consideriamo, in  $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ , la retta  $r$  del modello precedente ampliata col suo punto improprio: lo stesso si può fare per tutte le rette parallele ad  $r$  che avranno tutte come punto improprio l'elemento  $R_\infty$  corrispondente alla retta  $\mathbb{K}(1, 0)$ , alla quale pure attribuiamo lo stesso punto improprio. Prendiamo poi una retta  $s$  non parallela ad  $r$ , di equazione  $x_1 = mx_2 + q$  e la sua parallela per l'origine, di equazione  $x_1 = mx_2$  (a cui corrisponde in  $\mathbb{P}_1$  il punto  $[(m, 1)]$ ).



Ora, per ogni  $[(\bar{x}_1, \bar{x}_2)] \in \mathbb{P}_1 \setminus [(m, 1)]$ , la corrispondente retta di  $\mathbb{A}_2$  è non parallela ad  $s$  e dunque la interseca in un punto ben determinato. Viceversa, ogni punto di  $s$  determina con  $O$  un'unica retta di  $\mathbb{P}_1 \setminus [(m, 1)]$ . Possiamo dunque stabilire anche in questo caso una corrispondenza biunivoca tra  $\mathbb{P}_1 \setminus [(m, 1)]$  ed  $s$ , ovvero tra  $\mathbb{P}_1$  ed  $s \cup S_\infty$ , dove  $S_\infty$  è ora il punto convenzionale aggregato alla retta  $s$  come corrispondente del punto  $[(m, 1)] \in \mathbb{P}_1$ : il punto improprio della retta  $s$  e di tutte le rette di  $\mathbb{A}_2$  parallele ad  $s$ .

In questa maniera ogni retta del piano affine viene ampliata con l'aggiunta di un punto improprio, in modo tale che due rette parallele abbiano lo stesso punto improprio e due rette distinte e incidenti abbiano punti impropri diversi. Allora l'espressione della geometria elementare (valida nel piano affine  $\mathbb{A}_2$ ) «le due rette  $r$  ed  $r'$  sono parallele» si traduce nell'espressione «le due rette  $r$  ed  $r'$  hanno in comune il punto improprio» che è valida nel nuovo ente geometrico che abbiamo ottenuto dal piano affine, ampliandolo con l'aggiunta dei punti impropri: il *piano proiettivo*. Nel piano proiettivo così ottenuto sono soddisfatte le seguenti due proprietà:

- (1) *per due punti distinti passa una ed una sola retta;*
- (2) *due rette distinte hanno in comune uno ed un solo punto,*

che valgono indistintamente per elementi propri ed impropri (ove per *retta impropria* si intende l'insieme di tutti i punti impropri). La verifica di tali proprietà si fa sfruttando le proprietà dell'incidenza e del parallelismo nel piano affine.

Per ottenere, infine,  $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$ , possiamo procedere (perdendo parte dell'intuizione geometrica perchè necessitiamo di lavorare in  $\mathbb{A}_4(\mathbb{K})$ ) come fatto nel caso piano (visto come l'insieme delle rette di  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$  passanti per l'origine). Oppure, se vogliamo procedere come nel secondo modo del caso piano, cioè ampliando direttamente lo spazio affine tridimensionale  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$  con l'aggiunta del punto improprio di ogni retta (comune a tutta la sua classe di parallelismo), dobbiamo però stabilire in che relazioni stanno i punti e le rette impropri di piani distinti. Per fare ciò, dobbiamo richiamare alcuni teoremi di geometria affine:

- (a) In  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$  una retta  $r$  parallela ad un piano  $\pi$  è parallela ad infinite rette di  $\pi$  (o a  $q$  rette di  $\pi$  se  $\mathbb{K} = \text{GF}(q)$ );
- (b) Le infinite rette (o le  $q$  rette se  $\mathbb{K} = \text{GF}(q)$ ) parallele condotte per un punto  $S$  di  $\mathbb{A}_3$ , appartengono ad un medesimo piano  $\sigma$  parallelo a  $\pi$ ;
- (c) Un piano  $\pi$ , che sia parallelo a due rette  $r$  ed  $s$  di un piano  $\sigma$ , è parallelo al piano  $\sigma$ ;
- (d) Una retta  $r$ , che sia parallela a due piani  $\pi$  e  $\rho$  secantesi lungo una retta  $s$ , è parallela alla retta  $s$ .

Dalla (a) si deduce che un piano, oltre a contenere i punti impropri delle sue rette, contiene anche quello di ogni sua parallela.

La (b) ci permette di affermare che la retta impropria di un piano  $\pi$  è comune ad ogni altro piano  $\sigma$  parallelo a  $\pi$  (che individuano tutti insieme una 'giacitura').

Per mezzo della (c) e della (d) rispettivamente, possiamo provare che due punti impropri distinti determinano una ed una sola retta impropria e che due rette improprie distinte hanno in comune uno ed un solo punto improprio.

L'ente geometrico ottenuto in questo modo, ampliando lo spazio affine ordinario  $\mathbb{A}_3$  con l'aggiunta del punto improprio di ogni sua retta, della retta impropria di ogni suo piano e del 'piano improprio' (inteso come l'insieme di tutti i punti impropri dello spazio: esso ha la struttura di piano proiettivo, le cui rette sono tutte e sole le rette improprie dello spazio, per le proprietà dimostrate a partire da (c) e (d)) è lo *spazio proiettivo ordinario*. In esso sono verificate tutte le dieci proposizioni fondamentali, valide indistintamente per elementi propri ed impropri, attraverso le quali si riesce ad attribuire alle relazioni di posizione tra punti, rette e piani una forma semplice e comprensiva, che unifica tutti i diversi casi particolari dovuti al parallelismo, esistenti nella Geometria affine.

## Capitolo 4

# Spazi vettoriali metrici reali e complessi

### 1 Spazi vettoriali metrici reali. Prodotti scalari simmetrici

Richiamiamo brevemente le nozioni fondamentali sugli spazi vettoriali euclidei. Sia  $V = V(\mathbb{R})$  uno spazio vettoriale reale e sia  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  un prodotto scalare euclideo (ossia una forma bilineare simmetrica definita positiva su  $V(\mathbb{R})$ ). Chiamiamo *spazio vettoriale metrico reale*, o *euclideo* la coppia  $(V(\mathbb{R}), b)$ . Per ogni  $\mathbf{v} \in V$  poniamo  $q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ . Un prodotto scalare euclideo dunque definisce univocamente la *forma quadratica* definita positiva  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  ad esso associata. Si può verificare d'altra parte che il prodotto scalare è a sua volta determinato dalla forma quadratica, infatti:

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : \quad b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} (q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{w})) .$$

Per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  possiamo definire una *norma (euclidea)*:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{q(\mathbf{v})} = \sqrt{b(\mathbf{v}, \mathbf{v})} ,$$

che soddisfa alle usuali proprietà di una norma come funzione a valori reali, omogenea (risp. al valore assoluto), definita positiva, verificante le disuguaglianze di Schwartz e di Minkowski.

Si definisce inoltre l'ortogonalità tra due vettori

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \Leftrightarrow b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$$

e, utilizzando la disuguaglianza di Schwartz, l'angolo da essi formato, tramite:

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{|\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} ,$$

Se  $V = V_n(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  è una base di  $V$ , poniamo

$$\forall i, j = 1, \dots, n : \quad a_{ij} := b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

La matrice  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  è simmetrica. Consideriamo ora  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ . Supponiamo che

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \quad \mathbf{w} = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j.$$

Allora

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad (\text{espressione scalare}),$$

oppure, se indichiamo con  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  i vettori delle componenti di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  rispettivamente:

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{y} = \mathbf{y}^t A \mathbf{x} \quad (\text{espressione vettoriale}).$$

In particolare, se la base  $\mathcal{B}$  è ortonormale (cioè per ogni  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ , si ha  $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$  e  $\|\mathbf{e}_h\| = 1$  per ogni  $h = 1, \dots, n$ ), si ha  $A = I_n$ , quindi

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j = \mathbf{x}^t \mathbf{y} = \mathbf{y}^t \mathbf{x}.$$

Poniamo

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y} \quad (\text{prodotto scalare canonico}).$$

Se dunque  $(V_n(\mathbb{R}), b)$  è uno spazio vettoriale euclideo, fissata una qualsiasi base è sempre possibile stabilire un isomorfismo tra  $V_n(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}^n$  che trasforma il prodotto scalare euclideo  $b$  nel prodotto scalare canonico dello spazio  $\mathbb{R}^n$ . Tale isomorfismo si realizza attraverso il passaggio dalla base fissata ad una base ortonormale rispetto a  $b$ . Ciò si può esprimere affermando che ogni spazio vettoriale (metrico) euclideo finitamente generato  $(V_n(\mathbb{R}), b)$  è *equivalente* allo spazio euclideo  $(\mathbb{R}^n, \cdot)$  munito del prodotto scalare canonico.

## 2 Forme hermitiane su $V(\mathbb{C})$

Che cosa accade se consideriamo il campo complesso  $\mathbb{C}$ ? Supponiamo di voler utilizzare il prodotto scalare canonico in  $\mathbb{C}^2$ . Sia  $\mathbf{v} = (1, i) \in \mathbb{C}^2$ . Allora

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(1, i) \cdot (1, i)} = 0.$$

Tuttavia  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Se poi consideriamo il vettore  $\mathbf{w} = (2, 3i)$ , otteniamo

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{(2, 3i) \cdot (2, 3i)} = \sqrt{-5} \notin \mathbb{R}.$$



Questi risultati non sono soddisfacenti. È necessario dunque introdurre un altro prodotto scalare in cui  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$  per ogni  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ .

**(4.2.1) Definizione** Siano  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  un'applicazione. Diciamo che  $\varphi$  è una forma hermitiana su  $V$  se soddisfa le seguenti proprietà per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$(a) \quad \varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w});$$

$$(b) \quad \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w});$$

$$(c) \quad \varphi(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v});$$

$$(d) \quad \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u})}.$$

Le proprietà (a) e (c) della definizione precedente affermano che l'applicazione  $\varphi$  è  $\mathbb{C}$ -lineare sul primo argomento, mentre dalla proprietà (b) deduciamo che  $\varphi$  è additiva rispetto al secondo argomento.

**(4.2.2) Osservazione** Siano  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e  $\varphi$  una forma hermitiana su  $V$ . Allora risulta

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \quad \varphi(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}) = \overline{\lambda} \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

*Dimostrazione.* Dalle proprietà (c) e (d) della definizione di forma hermitiana deduciamo

$$\varphi(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}) = \overline{\varphi(\lambda \mathbf{v}, \mathbf{u})} = \overline{\lambda \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u})} = \overline{\lambda} \overline{\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u})} = \overline{\lambda} \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

da cui la tesi. ■

Si noti che nel caso di uno spazio vettoriale reale, la nozione di forma hermitiana si riduce a quella di forma bilineare simmetrica (prodotto scalare): ciò si può esprimere dicendo che *le forme hermitiane costituiscono una naturale estensione agli spazi vettoriali complessi delle forme bilineari simmetriche reali.*

Sia ora  $V = V_n(\mathbb{C})$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  di dimensione  $n \in \mathbb{N}$ . Consideriamo una base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  di  $V$ . Sia  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  una forma hermitiana su  $V$ . Poniamo

$$\forall i, j = 1, \dots, n : \quad a_{ij} := \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

La matrice  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  è la matrice che rappresenta  $\varphi$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ . Per ogni matrice  $M = (m_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  poniamo  $\overline{M} = (\overline{m}_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ . Chiamiamo  $\overline{M}$  *matrice coniugata* di  $M$ .

**(4.2.3) Definizione** Sia  $H \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ . Diciamo che  $H$  è una matrice hermitiana se  $H = \overline{H}^t$ .

Si noti che, se  $H = (h_{ij})$  è una matrice hermitiana, risulta dalla definizione che  $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$  per ogni  $i, j = 1, \dots, n$  e in particolare  $a_{ii} \in \mathbb{R}$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

In base alle definizioni e quanto appena osservato possiamo allora formulare il

**(4.2.4) Teorema** Siano  $V = V_n(\mathbb{C})$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  su  $\mathbb{C}$ ,  $\varphi$  una forma hermitiana su  $V$ ,  $\mathcal{B}$  una base di  $V$  ed  $A$  la matrice che rappresenta  $\varphi$  rispetto a  $\mathcal{B}$ . Allora  $A$  è una matrice hermitiana.

**(4.2.5) Teorema (di rappresentazione)** Siano  $V = V_n(\mathbb{C})$  uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $n$ ,  $\mathcal{B}$  una base di  $V$  e  $\varphi$  una forma hermitiana su  $V$ . Allora, per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  risulta

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}^t A \overline{\mathbf{y}},$$

dove  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono i vettori delle coordinate rispettivamente di  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  ed  $A$  è la matrice di  $\varphi$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

Viceversa, se  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  è una matrice hermitiana e  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  è una base di  $V$ , ponendo

$$\Phi : \begin{cases} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \longmapsto & \mathbf{x}^t A \overline{\mathbf{y}}, \end{cases}$$

con  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{v}_i$ , si definisce una forma hermitiana su  $V$ .

*Dimostrazione.* Ricordando la definizione di forma hermitiana e l'Osservazione (4.2.2) otteniamo:

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi \left( \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{y_j} \varphi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{y_j} a_{ij} = \mathbf{x}^t A \overline{\mathbf{y}},$$

da cui la prima parte della tesi.

Dimostriamo ora, per esempio, che per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  risulta

$$\Phi(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Infatti, ponendo

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{v}_i,$$

risulta

$$\Phi(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y})^t A \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{x}^t A \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{y}^t A \bar{\mathbf{z}} = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Le rimanenti proprietà di  $\Phi$  possono essere dimostrate per esercizio. ■

**(4.2.6) Proposizione** *Siano  $V = V_n(\mathbb{C})$  uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi$  una forma hermitiana su  $V$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  due basi di  $V$ ,  $A$  e  $B$  le matrici associate a  $\varphi$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  rispettivamente. Allora, detta  $M$  la matrice del cambiamento di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ , risulta  $B = M^t A \bar{M}$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . Allora, rispetto alla base  $\mathcal{B}$  si ha che  $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}^t A \bar{\mathbf{y}}$ . Rispetto alla base  $\mathcal{C}$  abbiamo invece  $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}'^t B \bar{\mathbf{y}'}$  con  $\mathbf{x} = M \mathbf{x}'$  e  $\mathbf{y} = M \mathbf{y}'$ . Dunque:

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (M \mathbf{x}')^t A \overline{M \mathbf{y}'} = \mathbf{x}'^t (M^t A \bar{M}) \bar{\mathbf{y}'},$$

da cui la tesi. ■

**(4.2.7) Definizione** *Siano  $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ . Diciamo che  $A$  e  $B$  sono matrici congruenti se esiste una matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  tale che  $B = P^t A \bar{P}$ . In tal caso scriveremo  $A \cong B$ .*

**(4.2.8) Osservazione** *La relazione di congruenza tra matrici è una relazione di equivalenza (la verifica di questo fatto è un semplice esercizio).*

La Proposizione (4.2.6) si può allora esprimere affermando che *matrici che rappresentano la stessa forma hermitiana su  $V_n(\mathbb{C})$  rispetto a basi diverse sono congruenti.*

**(4.2.9) Definizione** *Siano  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e  $\varphi$  una forma hermitiana su  $V$ . Diciamo che due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  sono ortogonali se  $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ . In tal caso scriveremo  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ .*

**(4.2.10) Definizione** *Siano  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ ,  $W \subseteq V$  e  $\varphi$  una forma hermitiana su  $V$ . Poniamo*

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \perp \mathbf{w}, \forall \mathbf{w} \in W\}.$$

*Diciamo che  $W^\perp$  è il complemento ortogonale di  $W$ .*

Si possono introdurre anche per una forma hermitiana su  $V(\mathbb{C})$  le definizioni che abbiamo visto per le forme bilineari simmetriche su  $V(\mathbb{R})$  (definizione di radicale, vettori isotropi e anisotropi, decomposizione di uno spazio regolare rispetto a un vettore anisotropo e relazioni dimensionali tra sottospazi ortogonali ...) e si possono provare proprietà analoghe a quelle viste per le forme bilineari simmetriche; in particolare diamo la definizione di base ortogonale per una forma hermitiana e citiamo il teorema di esistenza di basi ortogonali.

**(4.2.11) Definizione** Siano  $V = V_n(\mathbb{C})$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  di dimensione finita,  $\varphi$  una forma hermitiana su  $V$  e  $\mathcal{B}$  una base di  $V$ . Diciamo che  $\mathcal{B}$  è ortogonale (rispetto a  $\varphi$ ) se ogni due vettori distinti di  $\mathcal{B}$  sono ortogonali.

**(4.2.12) Teorema (di esistenza di basi ortogonali)** Siano  $V = V_n(\mathbb{C})$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  di dimensione finita  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  e  $\varphi$  una forma hermitiana su  $V$ . Allora esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  ortogonale (rispetto a  $\varphi$ ).

*Dimostrazione.* È sufficiente imitare la dimostrazione del caso reale. ■

### 3 Prodotti scalari hermitiani

**(4.3.1) Osservazione** Siano  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e  $\varphi$  una forma hermitiana su  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v} \in V$  risulta  $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{v} \in V$ . Dalla proprietà (d) della Definizione (4.2.1) abbiamo:

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \overline{\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})},$$

da cui  $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}$ . ■

In virtù di tale osservazione, è giustificata l'introduzione della seguente

**(4.3.2) Definizione** Siano  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e  $\varphi$  una forma hermitiana su  $V$ . Diciamo che  $\varphi$  è

- semidefinita positiva se  $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ ;
- semidefinita negativa se  $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ ;
- definita positiva se  $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ ;

– definita negativa se  $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

Una forma hermitiana  $\varphi$  su uno spazio vettoriale  $V(\mathbb{C})$  definita positiva sarà anche chiamata *prodotto (scalare) hermitiano* su  $V(\mathbb{C})$ .

**(4.3.3) Definizione** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ . Diciamo che  $V$  è uno spazio vettoriale metrico su  $\mathbb{C}$  se  $V$  è provvisto di un prodotto scalare hermitiano  $\varphi$ . In tal caso scriveremo  $(V, \varphi)$  per indicare tale spazio metrico. La norma  $\|\cdot\|_\varphi : V \rightarrow [0, +\infty[$  in questo spazio vettoriale metrico è definita da  $\|\mathbf{v}\|_\varphi = \sqrt{\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ .

**(4.3.4) Osservazione** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio vettoriale metrico complesso. Ricordiamo che la norma  $\|\cdot\|_\varphi$  soddisfa la disuguaglianza di Schwartz:

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : |\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq \|\mathbf{v}\|_\varphi \|\mathbf{w}\|_\varphi,$$

e vale l'uguaglianza se, e solo se, i vettori sono linearmente dipendenti su  $\mathbb{C}$ .

*Dimostrazione.* Si consulti, ad esempio, [4], pag. 276. ■

**(4.3.5) Proposizione** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio vettoriale metrico su  $\mathbb{C}$  e siano  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  vettori di  $V$  non nulli e ortogonali a due a due. Allora  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  sono linearmente indipendenti.

*Dimostrazione.* La dimostrazione può essere svolta per esercizio. ■

**(4.3.6) Definizione** Siano  $(V_n(\mathbb{C}), \varphi)$  uno spazio vettoriale metrico finitamente generato su  $\mathbb{C}$  e  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$ . Diciamo che  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  è un insieme ortonormale se per ogni  $h, k = 1, \dots, m$  risulta

$$\|\mathbf{v}_h\|_\varphi = 1;$$

$$h \neq k \implies \varphi(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_k) = 0.$$

In particolare, se  $m = n$  allora  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  è una base, e parleremo di base ortonormale per  $(V_n(\mathbb{C}), \varphi)$ .

**(4.3.7) Teorema** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio vettoriale metrico su  $\mathbb{C}$  con  $\dim(V) = n < +\infty$ . Allora esiste una base ortonormale di  $V$ . Inoltre, ogni insieme ortonormale in  $V$  può essere completato in modo da ottenere una base ortonormale di  $V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\{\mathbf{v}_h : h = 1, \dots, m\}$  un insieme ortonormale di  $V$ , con  $m < n$ . È noto che un tale insieme può essere completato per ottenere una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  aggiungendo  $n - m$  vettori opportuni di  $V$ . Supponiamo che

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_n\}.$$

Ponendo quindi  $\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$  per  $i = 1, \dots, m$  e per ogni  $h$  con  $m + 1 \leq h \leq n$

$$\mathbf{e}_h = \frac{\mathbf{v}_h - \sum_{j=1}^{h-1} \varphi(\mathbf{v}_h, \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j}{\left\| \mathbf{v}_h - \sum_{j=1}^{h-1} \varphi(\mathbf{v}_h, \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j \right\|_{\varphi}},$$

si ottiene la base  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  che è ortonormale. ■

È importante osservare che questo teorema fornisce un'estensione agli spazi metrici complessi (finitamente generati) del procedimento di Gram-Schmidt (in una forma generalizzata) che era già noto per il prodotto scalare euclideo.

Per definizione di base ortonormale, anche per un prodotto scalare hermitiano  $\varphi$  su  $V_n(\mathbb{C})$ , come abbiamo visto per un prodotto scalare euclideo su  $V_n(\mathbb{R})$ , la scelta di una base ortonormale determina anche qui, come matrice di rappresentazione del prodotto hermitiano la matrice identica  $I_n$  e riconduce il prodotto alla *forma canonica* su  $\mathbb{C}^n$ , così definita: per  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$  poniamo

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

Fissata dunque una qualsiasi base per  $V_n(\mathbb{C})$ , è sempre possibile stabilire un isomorfismo tra  $V_n(\mathbb{C})$  e  $\mathbb{C}^n$  che trasforma il prodotto hermitiano  $\varphi$  nel prodotto hermitiano canonico dello spazio  $\mathbb{C}^n$ . Tale isomorfismo si realizza attraverso il passaggio dalla base fissata ad una base ortonormale rispetto a  $\varphi$ . Ciò si può esprimere affermando che ogni spazio vettoriale (metrico) complesso finitamente generato  $(V_n(\mathbb{C}), \varphi)$  è *equivalente* allo spazio metrico  $(\mathbb{C}^n, *)$  munito del prodotto hermitiano canonico  $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \bar{\mathbf{y}}$ .

Per questo motivo, d'ora in poi indicheremo sempre con  $*$  un qualunque prodotto hermitiano su uno spazio vettoriale finitamente generato  $V_n(\mathbb{C})$  riferito ad una base ortonormale.

**(4.3.8) Definizione** Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  poniamo

$$\|\mathbf{x}\|_* = \sqrt{\mathbf{x} * \mathbf{x}}.$$

## 4 Matrici hermitiane e matrici unitarie

**(4.4.1) Definizione** Per ogni  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  poniamo

$$A^H := \overline{A}^t.$$

**(4.4.2) Lemma** Siano  $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ . Allora valgono i seguenti fatti:

(a)  $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$ ;

(b)  $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è conseguenza immediata del fatto che il coniugio è un automorfismo del campo complesso  $\mathbb{C}$ , e può essere svolta per esercizio. ■

Dal lemma precedente deduciamo che il passaggio da una matrice  $A$  alla sua coniugata  $\overline{A}$  è un automorfismo di  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ . Inoltre la trasposizione è un antiautomorfismo. Segue che l'applicazione

$$H : \begin{cases} \text{Mat}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & A^H \end{cases}$$

è un *antiautomorfismo dell'anello*  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  poichè composizione dell'applicazione coniugio e della trasposizione. Tale antiautomorfismo risulta inoltre *involutorio*, essendo composizione di due applicazioni involutorie permutabili.

Ricordando la definizione (4.2.3) di matrici hermitiane poniamo:

**(4.4.3) Definizione**

$$\text{H}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) : A^H = A\} \quad (\text{insieme delle matrici hermitiane su } \mathbb{C}),$$

e

$$\text{S}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) : A^t = A\} \quad (\text{insieme delle matrici simmetriche su } \mathbb{C}).$$

**(4.4.4) Osservazione** Risulta

$$\text{S}_n(\mathbb{R}) = \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \cap \text{H}_n(\mathbb{C}).$$

Per mezzo dell'antiautomorfismo  $H$  definiamo ora un'altra classe notevole di matrici complesse.

**(4.4.5) Definizione** Una matrice  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  si dice unitaria se  $A^H = A^{-1}$ , ovvero  $AA^H = A^H A = I_n$ .

Poniamo inoltre

$$U_n(\mathbb{C}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) : AA^H = A^H A = I_n\} \quad (\text{insieme delle matrici unitarie su } \mathbb{C}).$$

**(4.4.6) Osservazione** Risulta

$$O_n(\mathbb{R}) = \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \cap U_n(\mathbb{C}),$$

dove  $O_n(\mathbb{R})$  è l'insieme delle matrici ortogonali a coefficienti reali.

**(4.4.7) Proposizione** Sia  $A \in U_n(\mathbb{C})$ . Allora  $\det(A) \in \mathbb{C}_1$ , essendo

$$\mathbb{C}_1 := \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 1 = |z|\}.$$

Segue quindi che  $U_n(\mathbb{C}) \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo anzitutto che

$$\det(A^H) = \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}.$$

Quindi, ricordando la formula di Binet:

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^H) = \det(A) \det(A^H) = \det(A) \overline{\det(A)},$$

da cui la tesi. ■

**(4.4.8) Proposizione** L'insieme  $U_n(\mathbb{C})$  è un sottogruppo di  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

*Dimostrazione.* Sia  $A \in U_n$ . Osserviamo che  $(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$  poichè  $H$  è un antiautomorfismo. Dal fatto che  $A^H A = I_n$  abbiamo  $A = (A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$ , da cui

$$(A^{-1})^H (A^{-1}) = AA^{-1} = I_n,$$

Dunque  $A^{-1} \in U_n$ . Inoltre, da  $A, B \in U_n$  segue subito

$$(AB)^H (AB) = B^H A^H AB = B^H I_n B = B^H B = I_n,$$



cioè  $AB \in U_n$ . ■

**(4.4.9) Proposizione** Una matrice  $M \in GL_n(\mathbb{C})$  è unitaria se, e solo se, è matrice di un cambiamento di basi ortonormali rispetto ad un prodotto scalare hermitiano  $*$  definito su uno spazio  $V_n(\mathbb{C})$ .

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $\mathbf{a}_i$  l' $i$ -esima colonna della matrice  $M$  che, essendo invertibile, può sempre essere interpretata come matrice di passaggio da una base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  ad una base  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$  di uno spazio vettoriale complesso  $V_n(\mathbb{C})$ , su cui sia definito un prodotto hermitiano  $*$ . Ricordiamo che  $\mathbf{a}_i$  è un vettore le cui componenti sono le componenti di  $\mathbf{e}'_i$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Pertanto le due basi sono ortonormali se e solo se per ogni  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i * \mathbf{e}'_j = \mathbf{a}_j^H \mathbf{a}_i$$

il che è equivalente a dire che

$$M^H M = I_n,$$

e quindi che la matrice  $M$  è unitaria. ■

## 5 Operatori hermitiani su $V_n(\mathbb{C})$

**(4.5.1) Definizione** Siano  $(V(\mathbb{C}), *)$  uno spazio vettoriale metrico complesso e  $T : V \rightarrow V$  un endomorfismo. Diciamo che  $T$  è un operatore hermitiano se

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : T(\mathbf{v}) * \mathbf{w} = \mathbf{v} * T(\mathbf{w}).$$

**(4.5.2) Proposizione** Per un operatore hermitiano  $T$  su  $(V_n(\mathbb{C}), *)$  valgono i seguenti fatti:

- (a) la matrice  $A$  associata all'operatore  $T$  rispetto ad una base ortonormale è hermitiana; viceversa, ogni matrice hermitiana rappresenta, rispetto ad una base ortonormale, un operatore hermitiano;
- (b) ogni autovalore  $\lambda$  di  $T$  (o, equivalentemente, di una matrice hermitiana  $A$ ) è reale;

(c) se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono due autovettori relativi ad autovalori distinti  $\lambda$  e  $\mu$ , allora  $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$  (ovvero,  $V_\lambda \perp V_\mu$ ).

*Dimostrazione.* (a) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_n(\mathbb{C})$ . Fissiamo una base ortonormale  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  di  $V_n(\mathbb{C})$ . Supponiamo che  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i$ . Sia  $A$  la matrice di  $T$  rispetto a  $\mathcal{B}$ . Allora

$$T(\mathbf{v}) * \mathbf{w} = (A\mathbf{x})^t \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x}^t A^t \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x}^t \overline{A\mathbf{y}} = \mathbf{x}^t \overline{A} \mathbf{y} = \mathbf{v} * T(\mathbf{w}) \Leftrightarrow A^t = \overline{A},$$

da cui la tesi.

(b) Sia  $\lambda \in \mathbb{C}$  un autovalore per  $T$  (o, della matrice hermitiana  $A$ : in questo caso, si consideri l'endomorfismo  $T$  associato ad  $A$  rispetto ad una prefissata base) e  $\mathbf{v}$  un autovettore ad esso relativo. Allora

$$\lambda(\mathbf{v} * \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{v}) * \mathbf{v} = T(\mathbf{v}) * \mathbf{v} = \mathbf{v} * T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} * (\lambda\mathbf{v}) = \bar{\lambda}(\mathbf{v} * \mathbf{v}),$$

da cui  $\lambda = \bar{\lambda}$ .

(c) Siano  $\mathbf{v} \in V_\lambda$  e  $\mathbf{w} \in V_\mu$ . Allora

$$\lambda(\mathbf{v} * \mathbf{w}) = (\lambda\mathbf{v}) * \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) * \mathbf{w} = \mathbf{v} * T(\mathbf{w}) = \mathbf{v} * (\mu\mathbf{w}) = \mu(\mathbf{v} * \mathbf{w}).$$

Dal fatto che  $\lambda \neq \mu$ , deduciamo che  $\mathbf{v} * \mathbf{w} = 0$ , da cui la tesi. ■

**(4.5.3) Teorema (spettrale per operatori hermitiani - forma I)** *Ogni endomorfismo hermitiano di  $(V_n(\mathbb{C}), *)$  ammette una base ortonormale composta da autovettori.*

*Dimostrazione.* Ragioniamo per induzione su  $n$ . Se  $n = 1$  la dimostrazione è ovvia. Sia ora  $n > 1$  e supponiamo vera la tesi per  $n - 1$ . Siano  $T : V_n \rightarrow V_n$  un endomorfismo hermitiano ed  $\mathbf{e}_1$  un autovettore relativo ad un autovalore  $\lambda \in \mathbb{R}$  di  $T$ . Poniamo  $U = \mathbf{e}_1^\perp$ . Segue che  $\dim(U) = n - 1$ . Vediamo ora che  $T(U) = U$ . Per tale scopo, si consideri  $\mathbf{u} \in U$ . Allora

$$T(\mathbf{u}) * \mathbf{e}_1 = \mathbf{u} * T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u} * (\lambda\mathbf{e}_1) = \lambda(\mathbf{u} * \mathbf{e}_1) = 0,$$

da cui  $T(\mathbf{u}) \perp \mathbf{e}_1$ , ovvero  $T(U) = U$ . Risulta che  $T|_U : U \rightarrow U$  è un endomorfismo hermitiano. Sfruttando l'ipotesi induttiva, esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}_U = \{\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  per  $U$  formata da autovettori di  $T|_U$ . Allora  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  è una base per  $V_n(\mathbb{C})$  formata da autovettori di  $T$ , a meno di normalizzare  $\mathbf{e}_1$ . ■

**(4.5.4) Teorema (spettrale per matrici hermitiane - forma II)** *Ogni matrice hermitiana è unitariamente simile ad una matrice diagonale.*

**(4.5.5) Teorema (spettrale per forme hermitiane - forma III)** *Ogni forma hermitiana  $\varphi : V_n \rightarrow \mathbb{C}$  ammette una base diagonalizzante ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico  $*$ .*

## 6 Operatori unitari su $(V_n(\mathbb{C}), *)$

**(4.6.1) Definizione** *Sia  $(V(\mathbb{C}), *)$  uno spazio vettoriale metrico complesso. Un endomorfismo  $T : V \rightarrow V$  viene detto operatore unitario se conserva il prodotto hermitiano  $*$ , cioè se*

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : T(\mathbf{v}) * T(\mathbf{w}) = \mathbf{v} * \mathbf{w}.$$

Richiamiamo brevemente le proprietà di un operatore unitario.

**(4.6.2) Proposizione** *Per un operatore unitario  $T$  su  $(V_n(\mathbb{C}), *)$  valgono i seguenti fatti:*

- (a) *per ogni  $\mathbf{v} \in V$  risulta  $\|T(\mathbf{v})\|_* = \|\mathbf{v}\|_*$ ;*
- (b) *se  $n \geq 1$  e se  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  è una base di  $V$  ortonormale rispetto al prodotto hermitiano  $*$ , anche  $T(\mathcal{B}) = \{T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n)\}$  è una base ortonormale;*
- (c) *la matrice  $A$  associata all'operatore  $T$  rispetto ad una base ortonormale è unitaria;*
- (d) *ogni autovalore  $\lambda$  di  $T$  è tale che  $|\lambda| = 1$  (cioè  $\lambda \in \mathbb{C}_1$ );*
- (e) *se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono due autovettori relativi ad autovalori distinti  $\lambda$  e  $\mu$ , allora  $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ .*

*Dimostrazione.* Le prime due proprietà sono conseguenza immediata della definizione.

La (c) segue da (b) e dalla proposizione (4.4.9). Dimostriamo la (d):

Dalle proprietà della norma segue che, se  $\mathbf{v} \in V$  è un autovettore per  $T$

$$\|\mathbf{v}\|_* = \|T(\mathbf{v})\|_* = \|\lambda\mathbf{v}\|_* = |\lambda| \|\mathbf{v}\|_*$$

da cui si deduce  $|\lambda| = 1$ .

Dimostriamo ora la (e). Risulta

$$\mathbf{v} * \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) * T(\mathbf{w}) = \lambda \mathbf{v} * \mu \mathbf{w} = \lambda \bar{\mu} (\mathbf{v} * \mathbf{w}).$$

Se  $\lambda \bar{\mu} = 1$ , allora per la (d) otteniamo  $\bar{\lambda} = \lambda^{-1} = \bar{\mu}$ , da cui  $\lambda = \mu$ , contro l'assunto.

Segue che  $\mathbf{v} * \mathbf{w} = 0$ . ■

**(4.6.3) Teorema (spettrale per operatori unitari - forma I)** *Siano  $(V_n(\mathbb{C}), *)$  uno spazio vettoriale metrico complesso di dimensione  $n \geq 1$  e  $T : V \rightarrow V$  un operatore unitario. Allora esiste una base ortonormale per  $*$  che diagonalizza  $T$  (ossia costituita da autovettori per  $T$ ).*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $n$ . Per  $n = 1$ , la proprietà è soddisfatta. Sia  $n \geq 2$  e supponiamo la proprietà soddisfatta per uno spazio di dimensione  $n - 1$ . Sia  $\mathbf{e}_1 \in V$  un autovettore per  $T$  (ricordiamo che un operatore, cioè un endomorfismo su uno spazio vettoriale complesso, ammette sempre autovalori e quindi autovettori, dato che il polinomio caratteristico ammette sempre radici su  $\mathbb{C}$ ) e sia  $\lambda$  il relativo autovalore. Possiamo supporre che  $\|\mathbf{e}_1\| = 1$ . Sia ora  $U = \mathbf{e}_1^\perp$ . Segue che  $\dim U = n - 1$ . Inoltre:

$$0 = \mathbf{u} * \mathbf{e}_1 = T(\mathbf{u}) * T(\mathbf{e}_1) = T(\mathbf{u}) * \lambda \mathbf{e}_1 = \bar{\lambda} (T(\mathbf{u}) * \mathbf{e}_1),$$

con  $\bar{\lambda} \neq 0$ . Allora  $T(\mathbf{u}) * \mathbf{e}_1 = 0$  e dunque  $T(\mathbf{u}) \perp \mathbf{e}_1$ , il che significa che  $T(\mathbf{u}) \in U$ . Allora  $T(U) = U$  e risulta che  $T|_U$  è un operatore unitario su  $U$ . Per l'ipotesi induttiva, poichè  $\dim U = n - 1$ ,  $U$  ammette una base ortonormale di autovettori per  $T$ . Sia  $\bar{\mathcal{B}}_U = \{\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  tale base. Allora la base  $\bar{\mathcal{B}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  è una base ortonormale di  $V$  formata da autovettori per  $T$ . ■

**(4.6.4) Teorema (spettrale per matrici unitarie - forma II)** *Ogni matrice unitaria è unitariamente simile ad una matrice diagonale.*

## 7 Riduzione a forma canonica di una conica

Un'applicazione geometrica del teorema della base spettrale per matrici simmetriche reali è relativa alla riduzione a forma canonica dell'equazione di una conica.

Nel piano affine euclideo  $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ , nel quale è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $(O, x, y)$ , una conica  $\Gamma$  ha equazione:

$$\Gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

dove per ogni  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ . Tale equazione può essere scritta anche in forma matriciale:

$$\Gamma : \overline{\mathbf{X}}^t A \overline{\mathbf{X}} = 0,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nella trattazione seguente si prenderanno in considerazione solo coniche generali, ossia prive di punti doppi, o, equivalentemente, tali che  $\det(A) \neq 0$ . Con tali ipotesi, se si indicano con

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = (a_{13}, a_{23}),$$

l'equazione di  $\Gamma$  può essere scritta nella cosiddetta *forma matriciale cartesiana*:

$$(4.7.1) \quad \Gamma : \mathbf{X}^t A^* \mathbf{X} + 2\mathbf{L}\mathbf{X} + a_{33} = 0.$$

Nell'espressione proiettiva del piano affine, per definizione, un diametro di una conica è la polare di un punto improprio, per cui, indicato con  $[(\ell, m, 0)]$  il polo, un diametro ha equazione:

$$(a_{11}\ell + a_{12}m)x_1 + (a_{12}\ell + a_{22}m)x_2 + (a_{13}\ell + a_{23}m) = 0,$$

quindi ha direzione  $[-(a_{12}\ell + a_{22}m), a_{11}\ell + a_{12}m]$ .

In particolare, gli assi di una conica sono i diametri perpendicolari al relativo polo, pertanto un diametro è un asse se, e solo se,  $[(\ell, m)]$  coincide con la direzione

$$[(a_{11}\ell + a_{12}m, a_{12}\ell + a_{22}m)],$$

perpendicolare a quella del diametro; ciò equivale ad affermare che  $(\ell, m)$  deve essere proporzionale a  $(a_{11}\ell + a_{12}m, a_{12}\ell + a_{22}m)$ . Esiste quindi  $\rho \in \mathbb{R}^*$  tale che

$$\begin{cases} a_{11}\ell + a_{12}m = \rho\ell, \\ a_{12}\ell + a_{22}m = \rho m, \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} (a_{11} - \rho)\ell + a_{12}m = 0, \\ a_{12}\ell + (a_{22} - \rho)m = 0. \end{cases}$$

Questo significa che  $(\ell, m)$  deve essere un autovettore relativo all'autovalore  $\rho$  di  $A^*$ . Essendo  $A^*$  una matrice simmetrica reale, essa ha tutti gli autovalori reali ed è possibile diagonalizzarla tramite una matrice ortogonale  $U$ , matrice del cambiamento dalla base  $\mathcal{B}$  ortonormale associata al riferimento cartesiano ortogonale dato alla base  $\mathcal{B}'$  ortonormale che definisce il nuovo sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Pertanto esiste una matrice  $U \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$  con  $U^t = U$ , tale che

$$(4.7.2) \quad U^t A^* U = D,$$

con

$$D = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix},$$

essendo  $\rho_1$  e  $\rho_2$  gli autovalori reali della matrice  $A^*$ .

Dal punto di vista geometrico, il passaggio dalla base  $\mathcal{B}$  alla base  $\mathcal{B}'$  equivale a cambiare il sistema di riferimento cartesiano lasciando inalterata l'origine, quindi dal sistema  $(O, x, y)$  si passa al sistema  $(O, x', y')$ , ruotato rispetto al precedente di una rotazione di centro  $O$  e avente gli assi paralleli agli assi di simmetria della conica  $\Gamma$ .

Effettuando il cambiamento di riferimento, si ha  $\mathbf{X} = U\mathbf{X}'$ , dove

$$\mathbf{X}'^t = (x', y');$$

pertanto l'equazione (4.7.1) di  $\Gamma$  diventa:

$$(U\mathbf{X}')^t A^* (U\mathbf{X}') + 2\mathbf{L}(U\mathbf{X}') + a_{33} = 0,$$

ovvero

$$\mathbf{X}'^t (U^t A^* U) \mathbf{X}' + 2\mathbf{L}U\mathbf{X}' + a_{33} = 0,$$

da cui, per (4.7.2) e posto  $2\mathbf{L}U = \mathbf{B} = (b_1, b_2)$ , si ha

$$(4.7.3) \quad \mathbf{X}'^t D \mathbf{X}' + \mathbf{B}\mathbf{X}' + a_{33} = 0,$$

oppure

$$\rho_1 x'^2 + \rho_2 y'^2 + b_1 x' + b_2 y' + a_{33} = 0.$$

Dato che  $A^*$  e  $D$  sono ortogonalmente simili le due matrici hanno lo stesso determinante; d'altra parte  $\det(A^*)$  è l'invariante quadratico che consente di classificare dal punto di vista affine  $\Gamma$  e  $\det(D) = \rho_1 \rho_2$ , pertanto dalla (4.7.3) è immediatamente riconoscibile il tipo affine di conica:  $\Gamma$  è una *parabola* se, e solo se,  $\det(A^*) = 0$ , ossia se, e solo se,  $\rho_1 = 0$  oppure  $\rho_2 = 0$ . D'altra parte  $\Gamma$  è a *centro* se, e solo se,  $\det(A^*) \neq 0$ , ossia se, e solo se,  $\rho_1 \rho_2 \neq 0$ . Allora possono presentarsi due situazioni: se  $\rho_1 \rho_2 > 0$  abbiamo che  $\Gamma$  è una ellisse, mentre se  $\rho_1 \rho_2 < 0$  abbiamo che  $\Gamma$  è una iperbole.

**La conica  $\Gamma$  è a centro:**  $\rho_1 \neq 0$  e  $\rho_2 \neq 0$

Si effettua la traslazione che porta gli assi del riferimento a coincidere con gli assi di simmetria della conica; essendo gli assi  $x'$  e  $y'$  già paralleli a quelli di  $\Gamma$ , è sufficiente traslare  $O$  nel centro  $C$  di simmetria di  $\Gamma$ . In  $(O, x', y')$  il punto  $C$  ha coordinate

$$C = \begin{cases} 2\rho_1 x' + b_1 = 0, \\ 2\rho_2 y' + b_2 = 0, \end{cases}$$

da cui

$$C = \begin{cases} x' = -\frac{b_1}{2\rho_1}, \\ y' = -\frac{b_2}{2\rho_2}, \end{cases}$$

per cui l'equazione della traslazione è

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X}'' + \mathbf{T},$$

con

$$\mathbf{X}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -b_1/(2\rho_1) \\ -b_2/(2\rho_2) \end{pmatrix}.$$

Applicando alla (4.7.3) la traslazione, nel sistema di riferimento  $(C, x'', y'')$ ,  $\Gamma$  ha equazione:

$$(\mathbf{X}'' + \mathbf{T})^t D (\mathbf{X}'' + \mathbf{T}) + \mathbf{B} (\mathbf{X}'' + \mathbf{T}) + a_{33} = 0,$$

da cui, svolgendo i calcoli, si giunge a

$$(4.7.4) \quad \mathbf{X}''^t D \mathbf{X}'' + (2\mathbf{T}^t D + \mathbf{B}) \mathbf{X}'' + \mathbf{T}^t D \mathbf{T} + \mathbf{B} \mathbf{T} + a_{33} = 0.$$

Poniamo  $c = \mathbf{T}^t D \mathbf{T} + \mathbf{B} \mathbf{T} + a_{33}$  e notiamo che

$$2\mathbf{T}^t D + \mathbf{B} = 2 \left( -\frac{b_1}{2\rho_1}, -\frac{b_2}{2\rho_2} \right) \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} + (b_1, b_2) = (-b_1, -b_2) + (b_1, b_2) = 0,$$

pertanto, riducendo in (4.7.4) si ricava

$$\rho_1 x''^2 + \rho_2 y''^2 + c = 0,$$

che è l'equazione canonica di una conica a centro. In particolare se  $\rho_1$  è concorde con  $\rho_2$  si ha un'ellisse; in caso in cui, invece,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  sono discordi, si ha un'iperbole.

**La conica  $\Gamma$  è una parabola:**  $\rho_1 = 0$  oppure  $\rho_2 = 0$

Sia, ad esempio,  $\rho_2 = 0$ . Ciò significa che  $\rho_1 \neq 0$ , in quanto in caso contrario  $A^* = 0_{\text{Mat}_2(\mathbb{R})}$  e  $\Gamma$  sarebbe degenera. La relazione (4.7.3) diventa:

$$(4.7.5) \quad \rho_1 x'^2 + b_1 x' + b_2 y' + a_{33} = 0.$$

Si considera la traslazione  $\mathbf{X}' = \mathbf{X}'' + \mathbf{T}$  con

$$\mathbf{X}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -b_1/(2\rho_1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

e la si applica a (4.7.5) ottenendo:

$$(4.7.6) \quad \mathbf{X}''' D \mathbf{X}'' + (2\mathbf{T}^t D + \mathbf{B}) + c = 0,$$

dove

$$2\mathbf{T}^t D + \mathbf{B} = 2 \left( -\frac{b_1}{2\rho_1}, 0 \right) \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b_1, 0) = (-b_1, 0) + (b_1, b_2) = (0, b_2),$$

per cui la (4.7.6) diventa:

$$(4.7.7) \quad \rho_1 x''^2 + b_2 y'' + c = 0.$$

Si effettua ora la traslazione di equazione

$$\mathbf{X}'' = \mathbf{X}''' + \mathbf{M},$$

con

$$\mathbf{X}''' = \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c/b_2 \end{pmatrix},$$

che trasforma la (4.7.7) in

$$\rho_1 x'''^2 + b_2 y''' = 0,$$

che è l'*equazione canonica di una parabola* in un sistema di riferimento che ha l'origine nel vertice della parabola e l'asse  $y'''$  coincidente con l'asse di simmetria di  $\Gamma$ . Se si suppone  $\rho_1 = 0$  e quindi  $\rho_2 \neq 0$ , si arriva, con passaggi analoghi ai precedenti, all'equazione:

$$\rho_2 y'''^2 + b_1 x''' = 0,$$

che è l'*equazione canonica di una parabola* in un sistema di riferimento che ha l'origine nel vertice della parabola e l'asse  $x'''$  coincidente con l'asse di simmetria di  $\Gamma$ .

### Esercizi



1. Calcolare la norma e il prodotto hermitiano dei vettori (di  $\mathbb{C}^2$ )

$$\mathbf{x} = (2 - 4i, 4i) \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = (2 + 4i, 4).$$

2. Verificare se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & (1-i)/\sqrt{3} \\ (1+i)/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

è unitaria.

3. Applicare il procedimento di Gram-Schmidt per ottenere una base ortonormale dai vettori (di  $\mathbb{C}^3$ )

$$\mathbf{u} = (1 + i, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (-1, -1 + i, 0), \quad \mathbf{w} = (i, 1, -1).$$

4. Siano  $A, B \in U_n(\mathbb{C})$ . Dimostrare che  $A^{-1} \in U_n(\mathbb{C})$  e  $AB \in U_n(\mathbb{C})$  (ossia  $U_n(\mathbb{C})$  è un gruppo).

5. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2+i & 0 \\ 2-i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

una matrice di  $\text{Mat}_3(\mathbb{C})$ . Verificare se  $A$  è unitaria. In caso contrario, determinare una base ortonormale (rispetto a  $*$ ) per lo spazio generato dalle sue colonne.

6. Si considerino le seguenti applicazioni  $\varphi_h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h = 1, 2$ , definite da:

$$\varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 - 3x_2\bar{y}_2,$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2.$$

Dire se  $\varphi_1$  oppure  $\varphi_2$  definiscono un prodotto hermitiano (definito positivo).

7. Siano  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ ,  $W \subseteq V$  e  $\varphi$  una forma hermitiana su  $V$ . Dimostrare che  $W^\perp$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

8. Si verifichi che l'applicazione

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 & \longrightarrow \mathbb{C} \\ ((z_1, z_2, z_3), (z'_1, z'_2, z'_3)) & \longmapsto iz_2\bar{z}'_1 - iz_1\bar{z}'_2 + z_3\bar{z}'_3 \end{cases}$$

è un prodotto scalare hermitiano. Si scriva inoltre la matrice di  $\varphi$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{C}^3$ . Determinare inoltre una base ortogonale di  $\mathbb{C}^3$  rispetto a  $\varphi$  e si scriva la matrice di  $\varphi$  rispetto a tale base.

**9.** Si stabilisca quali delle seguenti forme sono hermitiane su  $\mathbb{C}^2$  e quali sono prodotti scalari hermitiani:

$$\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ((z_1, z_2), (z'_1, z'_2)) & \longmapsto & z_1 \bar{z}'_1 + iz_1 \bar{z}'_2 + iz_2 \bar{z}'_1; \end{cases}$$

$$\varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ((z_1, z_2), (z'_1, z'_2)) & \longmapsto & z_1 \bar{z}'_1 + 2iz_1 \bar{z}'_2 - 2iz_2 \bar{z}'_1; \end{cases}$$

$$\varphi_3 : \begin{cases} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ((z_1, z_2), (z'_1, z'_2)) & \longmapsto & 1 + z_1 \bar{z}'_1 + z_1 \bar{z}'_2; \end{cases}$$

$$\varphi_4 : \begin{cases} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ((z_1, z_2), (z'_1, z'_2)) & \longmapsto & z_1 \bar{z}'_1 + 2z_2 \bar{z}'_2. \end{cases}$$

Parte II

# Approfondimenti di Geometria

Prof. Elena Zizioli



## Capitolo 5

# Spazi proiettivi come ampliamenti di spazi affini

Nel corso di questo Capitolo denoteremo con  $\mathbb{K}$  un generico campo.

### 1 Alcuni richiami circa gli spazi affini

Iniziamo richiamando la definizione di spazio affine. Sia  $\mathcal{A}$  un insieme non vuoto, i cui elementi si diranno *punti*, e  $V_n(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Sia data inoltre un'applicazione

$$a : \begin{cases} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow V_n(\mathbb{K}) \\ (P, Q) & \longmapsto \overrightarrow{PQ} \end{cases}$$

che verifichi i seguenti assiomi:

(SA1) per ogni punto  $P \in \mathcal{A}$  e per ogni vettore  $\mathbf{v} \in V_n(\mathbb{K})$  esiste uno ed un solo punto  $Q \in \mathcal{A}$  tale che  $a(P, Q) = \mathbf{v}$ ;

(SA2) per ogni  $P, Q, R \in \mathcal{A}$  risulta

$$a(P, Q) + a(Q, R) = a(P, R).$$

Diremo allora che  $\mathbb{A}_n(\mathbb{K}) = [\mathcal{A}, V_n(\mathbb{K}), a]$  è uno *spazio affine di dimensione  $n$  sul campo  $\mathbb{K}$* . Fissato un vettore  $\mathbf{v} \in V$ , per ogni punto  $P \in \mathcal{A}$  esiste per (SA1) uno ed un solo punto  $Q$  tale che  $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$ . Ciò permette di definire un'applicazione  $t_{\mathbf{v}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , detta *traslazione*, ponendo  $t_{\mathbf{v}}(P_1) = P_2$  con  $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{v}$ . I sottospazi affini vengono definiti come i traslati di un punto  $P$  (detto *origine* del sottospazio) mediante le traslazioni  $t_{\mathbf{v}}$  con  $\mathbf{v}$  appartenente ad un prefissato sottospazio vettoriale di  $V_n(\mathbb{K})$ . Siano  $P \in \mathcal{A}$  e  $V_q$  un sottospazio vettoriale di  $V_n(\mathbb{K})$ . Poniamo

$$S_q = [P, V_q] := \{t_{\mathbf{v}}(P) : \mathbf{v} \in V_q\}.$$

I punti possono essere identificati con sottospazi affini 0–dimensionali, le rette sono i sottospazi affini 1–dimensionali, i piani sono sottospazi affini 2–dimensionali e gli iperpiani sono sottospazi affini  $(n - 1)$ –dimensionali. Due sottospazi affini  $S_q = [P, V_q]$  e  $S_t = [R, V_t]$  sono paralleli se, e solo se,  $V_q \leq V_t$  oppure  $V_t \leq V_q$ . Se ci limitiamo a sottospazi affini della stessa dimensione, il parallelismo è una relazione di equivalenza (ossia riflessiva, simmetrica e transitiva). Così, se  $S_1 = [P, V_1]$  e  $S'_1 = [Q, V'_1]$  sono due rette, risulta che  $S_1 \parallel S'_1$  se, e solo se,  $V_1 = V'_1$ . Più in generale, se abbiamo  $S_q = [P, V_q]$  e  $S'_q = [P', V'_q]$ , risulta

$$S_q \parallel S'_q \Leftrightarrow V_q = V'_q.$$

Chiamiamo *giacitura* il sottospazio vettoriale  $V_q$ .

Sia ora  $\mathcal{B}$  una base di  $V_n(\mathbb{K})$ . Fissiamo un riferimento affine  $[O, \mathcal{B}]$ . Allora, se  $P \in \mathcal{A}$ , si ha  $P = (x_1, \dots, x_n)$ , ossia il punto affine è identificato con le sue coordinate affini. D'ora in poi, se  $P$  è un punto di  $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$  porremo  $P = (x, y)$ , mentre se  $P$  è un punto di  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ , scriveremo  $P = (x, y, z)$ .

In  $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ , fissato un riferimento affine, una retta  $r$  ha equazioni cartesiane

$$r : \quad ax + by + c = 0,$$

con  $a, b, c \in \mathbb{K}$  e  $(a, b) \neq (0, 0)$ . L'equazione parametrica della medesima retta  $r$  è

$$r : \begin{cases} x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + m t, \end{cases}$$

dove  $t \in \mathbb{K}$  e  $(\ell, m) \neq (0, 0)$ . Chiamiamo  $(\ell, m)$  *parametri direttori della retta*. Notiamo che tali parametri direttori non sono unici, ma costituiscono una classe di proporzionalità. Due rette  $r$  ed  $r'$  sono parallele se, e solo se, le classi di proporzionalità dei parametri direttori coincidono.

Un piano in  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$  ha equazione cartesiana

$$\pi : \quad ax + by + cz + d = 0,$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$  e  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . La forma parametrica del piano  $\pi$  è:

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a', \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b', \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c', \end{cases}$$

con  $(a, b, c)$  non proporzionale a  $(a', b', c')$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Una retta  $r$  può essere vista anche come intersezione di piani non paralleli:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{cases} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

Consideriamo due rette  $r, r' \in \mathbb{A}_3(\mathbb{K})$  in forma parametrica

$$r : \begin{cases} x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + m t, \\ z = z_0 + n t, \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = x'_0 + \ell' t, \\ y = y'_0 + m' t, \\ z = z'_0 + n' t, \end{cases}$$

con  $t \in \mathbb{K}$ ,  $(\ell, m, n) \neq (0, 0, 0)$  e  $(\ell', m', n') \neq (0, 0, 0)$ . Ricordiamo che  $r \parallel r'$  se, e solo se,  $[(\ell, m, n)] = [(\ell', m', n')]$  e se

$$\pi : \quad ax + by + cz + d = 0$$

è l'equazione di un piano, si avrà  $r \parallel \pi$  se, e solo se,  $a\ell + bm + cn = 0$ .

## 2 Ampliamento proiettivo di $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$

**(5.2.1) Definizione** Dato uno spazio affine  $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$  consideriamo la seguente struttura geometrica definendone i punti  $\mathcal{P}$  e le rette  $\mathcal{R}$ :

$$\mathbb{P}_2(\mathbb{K}) : \begin{cases} \mathcal{P} = \begin{cases} \mathcal{A} & \text{punti del piano affine (punti propri),} \\ \mathcal{A}_\infty & \text{insieme degli spazi vettoriali 1-dimensionali di } V_2(\mathbb{K}) \\ & \text{detti punti impropri;} \end{cases} \\ \mathcal{R} = \begin{cases} \text{rette di } \mathbb{A}_2(\mathbb{K}) \text{ ciascuna ampliata con la sua direzione (rette proprie),} \\ \text{insieme di tutti i punti impropri (retta impropria).} \end{cases} \end{cases}$$

Poniamo  $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}) := (\mathcal{P}, \mathcal{R})$  e chiameremo  $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$  piano proiettivo sul campo  $\mathbb{K}$ .

**(5.2.2) Proposizione** In  $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$  valgono le seguenti proprietà<sup>1</sup>:

- (a) per due punti distinti passa una ed una sola retta;
- (b) per ogni  $r, s \in \mathcal{R}$ , con  $r \neq s$ , si ha  $r \cap s \neq \emptyset$ ;
- (c) esistono quattro punti a tre a tre non allineati.

Consideriamo la coordinatizzazione di  $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ . Fissiamo, in  $\mathbb{A}_2(\mathbb{K}) = [\mathcal{A}, V_2(\mathbb{K}), a]$ , un riferimento affine  $[O, \mathcal{B}]$ , dove  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$  è una base di  $V_2(\mathbb{K})$ . Consideriamo l'insieme  $(\mathbb{K}^3)^* := \mathbb{K}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Se  $(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{K}^3)^*$  e  $(y_1, y_2, y_3) \in (\mathbb{K}^3)^*$  diciamo che  $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$  se, e solo se, esiste  $k \in \mathbb{K}^*$  tale che  $y_i = kx_i$  per  $i = 1, 2, 3$ . Si verifica facilmente che ' $\sim$ ' è una relazione di equivalenza. Passiamo quindi all'insieme quoziente

$$\frac{(\mathbb{K}^3)^*}{\sim} = \{[(x_1, x_2, x_3)] : (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{K}^3)^*\}.$$

<sup>1</sup>In alcune introduzioni ai piani proiettivi queste proprietà sono assunte come assiomi.

e consideriamo la seguente funzione  $\tilde{\varphi} := \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_\infty \rightarrow (\mathbb{K}^3)^* / \sim$  così definita: se  $P$  è un punto proprio, allora  $P$  ha per coordinate affini una coppia  $(x, y)$  e quindi poniamo  $\tilde{\varphi}(P) = [(x, y, 1)]$ . Se  $P$  è improprio, sarà

$$P = \langle \mathbf{v} \rangle = \{t(\ell \mathbf{e}_1 + m \mathbf{e}_2) : t \in \mathbb{K}\},$$

e quindi poniamo  $\tilde{\varphi}(P) = [(\ell, m, 0)]$ . Si può dimostrare che  $\tilde{\varphi}$  è biiettiva e questo permette di identificare il punto  $P$  di  $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$  con  $\tilde{\varphi}(P)$  e  $[(x_1, x_2, x_3)]$  sono dette *coordinate proiettive omogenee del punto  $P$* , ossia una terna di elementi di  $\mathbb{K}$ , non contemporaneamente nulli, definiti a meno di un fattore di proporzionalità diverso da zero. Una generica retta  $r$  di  $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$  ha equazione cartesiana

$$r : \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

dove  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . Se  $(a, b) \neq (0, 0)$  abbiamo la retta propria che è estensione della retta affine di equazione  $ax + by + c = 0$ . Se  $(a, b) = (0, 0)$ , abbiamo  $x_3 = 0$  (equazione della retta impropria). Possiamo dare anche una rappresentazione parametrica di una generica retta di  $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ . Siano  $P = [(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)]$  e  $Q = [(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)]$  due punti distinti. La retta  $\text{rt}(P, Q)$  sarà:

$$\text{rt}(P, Q) = \begin{cases} x_1 = \lambda \bar{x}_1 + \mu \bar{y}_1, \\ x_2 = \lambda \bar{x}_2 + \mu \bar{y}_2, \\ x_3 = \lambda \bar{x}_3 + \mu \bar{y}_3, \end{cases}$$

dove  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ . Ad ogni retta  $r$  di equazione  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$  viene associata una terna  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  e definita a meno di un fattore di proporzionalità. Chiamiamo *coordinate plückeriane* della retta  $r$  la classe di proporzionalità  $[(a, b, c)]$ .



### 3 Ampliamento proiettivo di $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$

**(5.3.1) Definizione** Dato uno spazio affine  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K}) = [\mathcal{A}, V_3(\mathbb{K}), a]$ , consideriamo la seguente struttura geometrica definendone i punti  $\mathcal{P}$ , le rette  $\mathcal{R}$  e i piani  $\Pi$ :

$$\mathbb{P}_3(\mathbb{K}) : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \quad \text{punti di } \mathbb{A}_3(\mathbb{K}), \\ \mathcal{A}_\infty \quad \text{insieme degli spazi vettoriali 1-dimensionali di } V_3(\mathbb{K}), \\ \quad \text{detti punti impropri;} \end{array} \right. \\ \\ \mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{l} \text{rette di } \mathbb{A}_3(\mathbb{K}) \text{ ciascuna ampliata con la sua direzione} \\ \text{dette rette proprie,} \\ \text{insieme degli spazi vettoriali 2-dimensionali di } V_3(\mathbb{K}), \\ \text{dette rette improprie;} \end{array} \right. \\ \\ \Pi = \left\{ \begin{array}{l} \text{piani di } \mathbb{A}_3(\mathbb{K}) \text{ in cui ogni retta è ampliata con il suo punto improprio} \\ \text{e a cui viene aggiunta come retta (impropria) la sua giacitura,} \\ \text{insieme di tutti i punti impropri e di tutte le rette improprie.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Poniamo  $\mathbb{P}_3(\mathbb{K}) := (\mathcal{P}, \mathcal{R}, \Pi)$  e chiamiamo  $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$  spazio proiettivo 3-dimensionale sul campo  $\mathbb{K}$ .

**(5.3.2) Proposizione** In  $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$  valgono le seguenti proprietà:

- (a) per ogni  $A, B \in \mathcal{P}$ , con  $A \neq B$ , esiste una ed una sola retta  $r \in \mathcal{R}$  tale che  $A, B \in r$ ;
- (b) per ogni  $\alpha, \beta \in \Pi$ , con  $\alpha \neq \beta$ , esiste una ed una sola retta  $r \in \mathcal{R}$  tale che  $\alpha \cap \beta = r$ ;
- (c) date due rette  $r, s \in \mathcal{R}$  distinte e complanari si ha  $r \cap s \neq \emptyset$ ;
- (d) esistono cinque punti a quattro a quattro non appartenenti allo stesso piano.

Consideriamo la coordinatizzazione di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$ . Fissiamo, in  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K}) = [\mathcal{A}, V_3(\mathbb{K}), a]$ , un riferimento affine  $[O, \mathcal{B}]$ , dove  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è una base di  $V_3(\mathbb{K})$ . Consideriamo l'insieme  $(\mathbb{K}^4)^* := \mathbb{K}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ . Se  $(x_1, \dots, x_4) \in (\mathbb{K}^4)^*$  e  $(y_1, \dots, y_4) \in (\mathbb{K}^4)^*$  diciamo che  $(x_1, \dots, x_4) \sim (y_1, \dots, y_4)$  se, e solo se, esiste un  $k \in \mathbb{K}^*$  tale che  $y_i = kx_i$  per ogni  $i = 1, 2, 3, 4$ . Si verifica facilmente che ' $\sim$ ' è una relazione di equivalenza. Passiamo quindi all'insieme quoziente

$$\frac{(\mathbb{K}^4)^*}{\sim} = \{[(x_1, \dots, x_4)] : (x_1, \dots, x_4) \in (\mathbb{K}^4)^*\}.$$

e consideriamo la seguente funzione  $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_\infty \rightarrow (\mathbb{K}^4)^* / \sim$  così definita: se  $P$  è un punto proprio, allora  $P$  ha per coordinate affini una terna  $(x, y, z)$  e quindi poniamo  $\tilde{\varphi}(P) = [(x, y, z, 1)]$ . Se  $P$  è improprio, sarà

$$P = \langle \mathbf{v} \rangle = \{t(\ell\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3) : t \in \mathbb{K}\},$$

e quindi poniamo  $\tilde{\varphi}(P) = [(\ell, m, n, 0)]$ . Si può dimostrare che  $\tilde{\varphi}$  è biettiva. Identifichiamo il punto  $P$  di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$  con  $\tilde{\varphi}(P)$ .  $[(x_1, x_2, x_3, x_4)]$  sono dette *coordinate proiettive omogenee del punto  $P$* , ossia una quaterna di elementi di  $\mathbb{K}$ , non contemporaneamente nulli, definiti a meno di un fattore di proporzionalità diverso da zero.

Un punto  $P = [(x_1, \dots, x_4)]$  di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$  è proprio se, e solo se,  $x_4 \neq 0$ . Allora

$$P = [(x_1, \dots, x_4)] = \left[ \left( \frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1 \right) \right].$$

Gli scalari  $x_i/x_4$  ( $i = 1, 2, 3$ ) definiscono le coordinate affini del punto  $P$  e le seguenti relazioni

$$\begin{cases} x = x_1/x_4, \\ y = x_2/x_4, \\ z = x_3/x_4 \end{cases}$$

stabiliscono il legame tra le coordinate affini e le coordinate proiettive di uno stesso punto.

#### 4 Rappresentazione dei piani in $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$

Sia  $\bar{\alpha}$  un piano proprio. Per definizione,  $\bar{\alpha}$  è l'estensione di un piano affine  $\alpha$  di equazione

$$\alpha: \quad ax + by + cz + d = 0 \quad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Sia  $P \in \mathcal{P}$  un punto proprio con  $P \in \bar{\alpha}$ :  $P = [(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)]$  con  $\bar{x}_4 \neq 0$ . Le coordinate affini di  $P$  sono:

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x}_1/\bar{x}_4, \\ \bar{y} = \bar{x}_2/\bar{x}_4, \\ \bar{z} = \bar{x}_3/\bar{x}_4. \end{cases}$$

Allora  $a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d = 0$ , ovvero  $a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + c\bar{x}_3 + d\bar{x}_4 = 0$ , cioè ogni punto proprio di  $\bar{\alpha}$ , con le sue coordinate proiettive, soddisfa l'equazione

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0.$$

Sia ora  $P$  un punto improprio di  $\bar{\alpha}$ :  $P = [(\ell, m, n, 0)]$  (con  $(\ell, m, n)$  parametri direttori di una retta propria  $r$  di  $\bar{\alpha}$ ). Allora

$$r \subseteq \alpha \Leftrightarrow a\ell + bm + cn = 0 \quad (\text{condizione di parallelismo tra retta e piano}).$$

Dunque si ha  $a\ell + bm + cn = 0$ , ossia  $a\ell + bm + cn + d0 = 0$  che esprime che il punto  $[(\ell, m, n, 0)]$  soddisfa l'equazione  $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$  in cui sono state sostituite le coordinate proiettive del punto improprio  $P$ . Pertanto il punto  $P = [(\ell, m, n, 0)]$  appartiene al piano  $\bar{\alpha}$  di equazione  $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$ . Per il piano improprio, l'equazione sarà semplicemente  $x_4 = 0$  (confronta la definizione di  $\tilde{\varphi}$ ).

## 5 Rappresentazione delle rette di $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$

Sia  $\bar{r} \in \mathcal{R}$  una retta propria. Allora  $r$  è l'ampliamento di una retta  $r$  dello spazio affine  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$  di equazione

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{cases} \quad \text{con} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

Se  $P \in r$  e  $P$  è proprio, sarà  $P = [(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)]$  con  $\bar{x}_4 \neq 0$ . Allora certamente (per quanto visto prima)  $P$  verifica le equazioni

$$(5.5.1) \quad \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0. \end{cases}$$

Supponiamo ora che  $P \in \bar{r}$  sia improprio. Per determinare il punto improprio di  $\bar{r}$  bisogna determinare i parametri direttori di  $r$ . Come è ben noto, i parametri direttori della retta  $r$  sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ a'x + b'y + c'z = 0. \end{cases}$$

Siano  $(\bar{\ell}, \bar{m}, \bar{n})$  tali parametri direttori, cioè

$$(5.5.2) \quad \begin{cases} a\bar{\ell} + b\bar{m} + c\bar{n} = 0, \\ a'\bar{\ell} + b'\bar{m} + c'\bar{n} = 0. \end{cases}$$

Poichè il punto improprio  $P_\infty$  di  $\bar{r}$  ha coordinate proiettive  $[(\bar{\ell}, \bar{m}, \bar{n}, 0)]$ , le relazioni (5.5.2) ci dicono che anche  $P_\infty$  verifica le equazioni di (5.5.1). Sia ora  $\bar{r}$  una retta impropria. Allora  $\bar{r}$  è individuata da una classe di parallelismo di piani. Siano

$$\alpha : \quad ax + by + cz + d = 0,$$

e

$$\alpha' : \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

due piani con

$$\text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \quad \text{e} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2,$$

cioè  $\alpha$  e  $\alpha'$  sono due piani distinti e paralleli. Si consideri l'estensione proiettiva di  $\alpha$  e  $\alpha'$ :

$$\bar{\alpha} : \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0,$$

e

$$\bar{\alpha}' : \quad a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0.$$

Se consideriamo  $\bar{\alpha} \cap \bar{\alpha}'$  otteniamo il sistema

$$\bar{\alpha} \cap \bar{\alpha}' = \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0. \end{cases}$$

Il sistema precedente è equivalente a:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Pertanto le rette improprie si vedono come intersezione di un piano proprio con il piano improprio. Segue che tutte le rette proprie ed improprie di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$  hanno una rappresentazione cartesiana data da:

$$\bar{r} : \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0, \end{cases} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2,$$

ossia da un sistema lineare omogeneo di due equazioni in quattro incognite. Per quanto concerne le rette, è importante ricordare che esiste anche la rappresentazione parametrica che può essere effettuata anche in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$ . Esplicitiamo le autosoluzioni del sistema che rappresenta  $\bar{r}$ . Tale sistema consiste in due equazioni in quattro incognite. Il sistema è omogeneo, pertanto ammette sempre soluzioni (poichè il rango della matrice dei coefficienti è due avremo  $\infty^2$  soluzioni). Supponiamo di avere determinato due autosoluzioni del sistema non proporzionali:  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)$  e  $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_4)$ , alle quali corrispondono due punti distinti della retta  $\bar{r}$ . Considero ora tutte le combinazioni lineari di queste due autocoluzioni:

$$(5.5.3) \quad \begin{cases} x_i = \lambda \bar{x}_i + \mu \bar{y}_i, \\ i = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$$

con  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Per ogni  $\lambda$  e  $\mu$  si ha:

$$\begin{aligned} & a(\lambda \bar{x}_1 + \mu \bar{y}_1) + b(\lambda \bar{x}_2 + \mu \bar{y}_2) + c(\lambda \bar{x}_3 + \mu \bar{y}_3) + d(\lambda \bar{x}_4 + \mu \bar{y}_4) = \\ & = \lambda (a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + c\bar{x}_3 + d\bar{x}_4) + \mu (a\bar{y}_1 + b\bar{y}_2 + c\bar{y}_3 + d\bar{y}_4) = \lambda 0 + \mu 0 = 0. \end{aligned}$$

Quindi la (5.5.3) rappresenta sempre soluzioni del sistema che rappresenta  $\bar{r}$ ; al variare di  $(\lambda, \mu)$  queste soluzioni sono  $\infty^2$  e quindi la (5.5.3) rappresenta tutte le soluzioni del sistema dato. Ponendo  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ , la (5.5.3) rappresenta tutti e soli i punti di  $\bar{r}$ . La (5.5.3) rappresenta le equazioni parametriche della retta  $\bar{r}$ . Si noti che ogni punto di  $\bar{r}$  è associato ad una classe di proporzionalità di  $(\lambda, \mu)$  perchè alterando sia  $\lambda$  che  $\mu$  per uno stesso fattore di proporzionalità non nullo si ottiene il medesimo punto.

**(5.5.4) Esercizio** Scrivere l'equazione della retta passante per i punti  $A = [(1, 5, 2, 1)]$  e  $B_\infty = [(1, 1, 1, 0)]$  di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ .

*Soluzione.* Ci sono diversi modi di procedere. Il primo modo consiste nel passare attraverso la rappresentazione affine. Risulta  $A = (1, 5, 2)$ , mentre  $B_\infty$  è una terna di parametri direttori  $(1, 1, 1)$ . Allora

$$\text{rt}(A, B_\infty) = \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 5 + t, \\ z = 2 + t. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Eliminando il parametro  $t$  si arriva al sistema

$$\text{rt}(A, B_\infty) = \begin{cases} x - y + 4 = 0, \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

che rappresenta solo i punti propri della retta richiesta. Pertanto, passando a coordinate proiettive si ottiene una rappresentazione cartesiana della retta richiesta:

$$\text{rt}(A, B_\infty) = \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Il secondo modo di procedere consiste nello scrivere parametricamente la retta  $\text{rt}(A, B_\infty)$ :

$$\text{rt}(A, B_\infty) = \begin{cases} x_1 = \lambda + \mu, \\ x_2 = 5\lambda + \mu, \\ x_3 = 2\lambda + \mu, \\ x_4 = \lambda, \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Eliminando i parametri  $\lambda$  e  $\mu$ , si ottiene

$$\text{rt}(A, B_\infty) = \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

e l'esercizio è concluso. ♣

**(5.5.5) Esercizio** In  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  si determini una rappresentazione cartesiana della retta impropria  $r_\infty$  del piano

$$\pi : 3x - 2y - 4z - 5 = 0.$$

*Soluzione.* Dovendo rappresentare un elemento improprio è necessario passare a coordinate proiettive nella rappresentazione di  $\pi$ :  $3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0$ . Allora

$$r_\infty = \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

ovvero:

$$r_\infty = \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

♣

**(5.5.6) Esercizio** In  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  si determinino gli eventuali punti di intersezione tra la retta

$$\bar{t} : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$$

e il piano

$$\bar{\alpha} : 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0.$$

*Soluzione.* Facciamo prima delle considerazioni in  $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ . Se indichiamo con  $t$  ed  $\alpha$  rispettivamente la retta ed il piano affine di cui  $\bar{t}$  e  $\bar{\alpha}$  sono l'estensione si ha che  $t \parallel \alpha$ , allora in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$   $\bar{t}$  e  $\bar{\alpha}$  hanno almeno in comune il punto improprio  $P_\infty$  della retta  $\bar{t}$ . Vediamo se effettivamente  $t$  ed  $\alpha$  sono paralleli. Determiniamo il punto improprio  $P_\infty$  della retta. Grazie alla regola dei minori, si ha

$$\ell = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 3,$$

e analogamente,  $m = -4$  ed  $n = 1$ . Allora  $P_\infty = [(3, -4, 1, 0)]$ . Se  $P_\infty \in \bar{\alpha}$ , si ha che  $t \parallel \alpha$  oppure  $t \subseteq \alpha$  in  $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ . Vediamo se  $P_\infty \in \bar{\alpha}$ . Basta sostituire le coordinate di  $P_\infty$  nell'equazione del piano  $\bar{\alpha}$ . Si verifica facilmente che  $P_\infty \in \bar{\alpha}$ . Allora, dal punto di vista affine, la retta  $t$  ed il piano  $\alpha$  sono paralleli. Consideriamo un altro punto di  $t$ : ad esempio ponendo  $x_3 = 0$  otteniamo il punto  $T = [(-2, 2, 0, 1)]$ . Risulta che anche  $T \in \bar{\alpha}$ , pertanto  $\bar{t} \subseteq \bar{\alpha}$ . ♣

### Esercizi

**1.** In  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  si determini la classe delle coordinate omogenee del punto  $P$  avente coordinate affini  $(\frac{1}{2}, 2, 1)$ .

**2.** In  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  si determini il punto improprio  $P_\infty$  della retta  $\bar{r}$ , chiusura proiettiva della retta

$$r : \begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0, \\ x = 2z. \end{cases}$$

**3.** Si determinino, se possibile, rappresentazioni in coordinate non omogenee (affini) dei seguenti enti:

$$P = [(1, 3, -1, 2)], \quad Q = [(-1, 1, 0, 0)],$$

$$\pi : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4, \quad x_1 = 0, \quad x_4 = 0,$$

$$r_1 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Si determinino le equazioni parametriche e cartesiane della retta congiungente i punti  $P = [(1, 1, 0, 0)]$  e  $Q = [(0, 0, 1, 0)]$ .





# Capitolo 6

## Superfici algebriche reali

### 1 Lo spazio proiettivo complesso

Lo spazio proiettivo complesso  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  è l'ampliamento dello spazio affine  $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ . Dal fatto che in  $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$  troviamo tutto lo spazio affine reale  $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ , segue che in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  ci saranno anche dei punti con una quaterna di scalari formata tutti da numeri reali identificabili con i punti di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ . Ricordiamo che  $\mathbb{C}$  è un campo algebricamente chiuso e che esiste un importante automorfismo di  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ , il coniugio, definito come segue:

$$\bar{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = a + ib & \longmapsto & \bar{z} = a - ib. \end{cases}$$

Gli elementi uniti dell'applicazione coniugio sono i numeri reali (cioè  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ).

**(6.1.1) Definizione** Sia  $P = [(x_1, \dots, x_4)]$  un punto di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Chiamiamo punto coniugato di  $P$  il punto

$$\bar{P} = [(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)].$$

**(6.1.2) Osservazione** La definizione di punto coniugato è ben posta.

*Dimostrazione.* Sia  $P = [(x_1, \dots, x_4)]$  un punto di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Allora  $\bar{P} = [(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)]$ . Prendiamo ora per  $P$  un'altra rappresentazione  $[(\lambda x_1, \dots, \lambda x_4)]$ . Allora, ricordando che il coniugio è un automorfismo del campo  $\mathbb{C}$ , si ha:

$$\bar{P} = [(\overline{\lambda x_1}, \dots, \overline{\lambda x_4})] = [(\bar{\lambda} \bar{x}_1, \dots, \bar{\lambda} \bar{x}_4)] = [(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)].$$

■

**(6.1.3) Definizione** Sia  $\alpha$  un piano di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  di equazione  $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$ .  
Chiamiamo piano coniugato di  $\alpha$  il piano

$$\bar{\alpha}: \quad \bar{a}x_1 + \bar{b}x_2 + \bar{c}x_3 + \bar{d}x_4 = 0.$$

**(6.1.4) Osservazione** La definizione di piano coniugato è ben posta.

*Dimostrazione.* La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

**(6.1.5) Definizione** Sia  $r$  una retta di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  di equazione

$$r: \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0. \end{cases}$$

Chiamiamo retta coniugata di  $r$  la retta

$$\bar{r}: \begin{cases} \bar{a}x_1 + \bar{b}x_2 + \bar{c}x_3 + \bar{d}x_4 = 0, \\ \bar{a}'x_1 + \bar{b}'x_2 + \bar{c}'x_3 + \bar{d}'x_4 = 0. \end{cases}$$

**(6.1.6) Osservazione** La definizione di retta coniugata è ben posta.

*Dimostrazione.* La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

**(6.1.7) Osservazione** Sia  $r$  una retta di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  e  $P$  un punto di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Allora  $P \in r$  se, e solo se,  $\bar{P} \in \bar{r}$ .

**(6.1.8) Definizione** Un punto  $P = [(x_1, \dots, x_4)]$  di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  si dice reale se nella sua classe di coordinate omogenee esiste almeno una quaterna formata da numeri reali (ossia appartenente a  $(\mathbb{R}^4)^*/\sim$ ).

Un punto di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  è detto immaginario se non è reale.

Nello spazio proiettivo complesso dovremo quindi fare più distinzioni tra i punti. Infatti un punto  $P$  potrà essere proprio o improprio, reale o immaginario.

**(6.1.9) Definizione** Un piano di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  è detto reale se ammette almeno un'equazione cartesiana a coefficienti tutti reali (e non tutti nulli). Diciamo che un piano di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  è immaginario se non è reale.

**(6.1.10) Definizione** Una retta di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  è detta reale se si rappresenta come intersezione di due piani reali o, equivalentemente, se ogni suo punto è combinazione lineare di due punti reali. Diremo che una retta è immaginaria in caso contrario.

**(6.1.11) Proposizione** Sia  $P$  un punto di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Allora sono fatti equivalenti:

- (a)  $P$  è reale;
- (b)  $P$  coincide con  $\bar{P}$ .

*Dimostrazione.*

(a)  $\implies$  (b) Sia  $P$  un punto reale, quindi

$$P = [(x_1, \dots, x_4)] = [(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)],$$

poichè  $x_j \in \mathbb{R}$  per ogni  $j = 1, 2, 3, 4$ .

(b)  $\implies$  (a) Supponiamo che  $\bar{P} = P$  con  $P = [(x_1, \dots, x_4)]$ ,  $x_j \in \mathbb{C}$  per  $j = 1, 2, 3, 4$ . Per definizione di coordinate proiettive omogenee, esiste un  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  tale per cui  $x_j \neq 0$ . Supponiamo che sia ad esempio  $x_1 \neq 0$ . Allora

$$P = \left[ \left( 1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1} \right) \right],$$

quindi, per l'Osservazione (6.1.2),

$$\bar{P} = \left[ \left( 1, \overline{\left( \frac{x_2}{x_1} \right)}, \overline{\left( \frac{x_3}{x_1} \right)}, \overline{\left( \frac{x_4}{x_1} \right)} \right) \right] = \left[ \left( 1, \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}, \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1}, \frac{\bar{x}_4}{\bar{x}_1} \right) \right].$$

Per ipotesi si ha che  $P = \bar{P}$ , quindi

$$\begin{cases} \frac{x_j}{x_1} = \frac{\bar{x}_j}{\bar{x}_1}, \\ j = 2, 3, 4, \end{cases}$$

il che è vero se, e solo se,  $x_j/x_1 \in \mathbb{R}$  per ogni  $j = 2, 3, 4$ . Segue che  $P$  è rappresentato da almeno una quaterna di numeri reali, da cui la tesi. ■

**(6.1.12) Proposizione** Sia  $\alpha$  un piano di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Allora sono fatti equivalenti:

- (a)  $\alpha$  è reale;
- (b)  $\alpha$  coincide con  $\bar{\alpha}$ .

*Dimostrazione.* Analoga alla Proposizione (6.1.11). ■

**(6.1.13) Proposizione** *Sia  $r$  una retta di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Allora sono fatti equivalenti:*

(a)  $r$  è reale;

(b)  $r$  coincide con  $\bar{r}$ .

*Dimostrazione.*

(a)  $\implies$  (b) Ovvio.

(b)  $\implies$  (a) Siano  $A, B \in r$  con  $A = [(a_1, \dots, a_4)]$  e  $B = [(b_1, \dots, b_4)]$ . Allora  $\bar{A}, \bar{B} \in \bar{r} = r$ , pertanto anche i punti  $\bar{A} = [(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_4)]$  e  $\bar{B} = [(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_4)]$  appartengono alla retta  $r$ . Allora, (cfr (5.5.3)) anche il punto  $[(a_1 + \bar{a}_1, \dots, a_4 + \bar{a}_4)]$  appartiene alla retta  $r$  ed è un punto reale. Analogamente,  $[(b_1 + \bar{b}_1, \dots, b_4 + \bar{b}_4)]$  è un punto reale ed appartiene alla retta  $r$ . Pertanto  $r$  contiene almeno due punti reali, quindi è reale. ■

**(6.1.14) Proposizione** *La retta congiungente due punti immaginari e coniugati è reale.*

*Dimostrazione.* Sia  $P \in \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  un punto immaginario. Allora per la Proposizione (6.1.11),  $P \neq \bar{P}$ . Esiste perciò una ed una sola retta  $r$  tale che  $r = \text{rt}(P, \bar{P})$ . Consideriamo  $\bar{r}$ . Poichè  $P, \bar{P} \in r$  segue che  $\bar{P}, \overline{\bar{P}} \in \bar{r}$ , ossia  $P, \bar{P} \in \bar{r}$ . Dall'unicità della retta per i due punti  $P$  e  $\bar{P}$ , segue necessariamente che  $\bar{r} = r$ . Dalla Proposizione (6.1.13) deduciamo la tesi. ■

**(6.1.15) Proposizione** *Per un punto immaginario passa una ed una sola retta reale.*

*Dimostrazione.* Sia  $P$  un punto immaginario di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Sia  $r = \text{rt}(P, \bar{P})$ . Allora, per la Proposizione (6.1.14),  $r$  è reale. Supponiamo, per assurdo, che esista un'altra retta  $s$  reale passante per  $P$ . Ne segue:

$$P = r \cap s = \bar{r} \cap \bar{s} = \bar{P},$$

da cui  $P = \bar{P}$ , ossia  $P$  è reale, il che è assurdo, in quanto  $P$  è immaginario per ipotesi. ■

**(6.1.16) Proposizione** *Due piani immaginari e coniugati si intersecano lungo una retta reale.*

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha$  un piano immaginario di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ , allora  $\alpha \neq \bar{\alpha}$  per la Proposizione (6.1.12). Consideriamo la retta  $r = \alpha \cap \bar{\alpha}$ . Risulta che  $r$  è reale, infatti:

$$\bar{r} = \overline{\alpha \cap \bar{\alpha}} = \bar{\alpha} \cap \bar{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha} \cap \alpha = r,$$

da cui la tesi. ■

**(6.1.17) Proposizione** *Un piano immaginario contiene esattamente una retta reale.*

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha$  un piano immaginario di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Per la Proposizione (6.1.16) la retta  $r = \alpha \cap \bar{\alpha}$  è reale. Su  $\alpha$  non esiste un'altra retta reale perchè altrimenti sul piano  $\alpha$  ci sarebbero tre punti reali non allineati e di conseguenza i coefficienti del piano  $\alpha$  sarebbero tutti reali e  $\alpha$  sarebbe reale, contro l'ipotesi. ■

**(6.1.18) Proposizione** *Una retta immaginaria ha al più un punto reale e per essa passa al più un piano reale.*

*Dimostrazione.* Sia  $r$  una retta immaginaria e  $\bar{r}$  la retta coniugata di  $r$ . Per la Proposizione (6.1.13)  $\bar{r} \neq r$ . Si hanno due possibilità.

1. Le rette  $r$  e  $\bar{r}$  sono incidenti. Sia quindi  $P = r \cap \bar{r}$ . Segue che  $P$  è reale, infatti:

$$\bar{P} = \overline{r \cap \bar{r}} = \bar{r} \cap \bar{\bar{r}} = \bar{r} \cap r = P.$$

Consideriamo ora  $\alpha = \text{pn}(r, \bar{r})$ . Allora anche  $\alpha$  è un piano reale, infatti:

$$\bar{\alpha} = \text{pn}(\bar{r}, \bar{\bar{r}}) = \text{pn}(\bar{r}, r) = \alpha.$$

2. Le rette  $r$  e  $\bar{r}$  sono sghembe. Allora non esistono punti comuni a  $r$  e  $\bar{r}$ . Pertanto  $r$  non ha alcun punto reale. ■

**(6.1.19) Definizione** *Diciamo che una retta immaginaria di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  è di prima specie se contiene esattamente un punto reale.*

*Diciamo che una retta immaginaria di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  è di seconda specie se non esistono punti reali su di essa.*

**(6.1.20) Esercizio** *Si dica se il punto  $P = [(2 + i, i, i - 1, -i)]$  è reale.*

*Soluzione.* Dividendo ogni coordinata di  $P$  per  $i$  otteniamo:

$$P = \left[ \left( \frac{2+i}{i}, 1, \frac{i-1}{i}, -1 \right) \right].$$

Tuttavia

$$\frac{2+i}{i} = -i(2+i) = 1-2i,$$

quindi  $P$  non è reale. Notiamo che  $P$  è un punto proprio, in quanto l'ultima coordinata è diversa da zero. ♣

**(6.1.21) Esercizio** *Si determini l'unica retta reale passante per il punto  $P = [(1, -i, 0, 0)]$ .*

*Soluzione.* Il punto  $P$  è immaginario e improprio. La retta richiesta è la retta che congiunge  $P$  con  $\bar{P}$ . Si ha  $\bar{P} = [(1, i, 0, 0)]$ . Le equazioni parametriche della retta sono:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + \mu, \\ x_2 = -\lambda i + \mu i, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Per vedere se la retta è reale, è consigliabile vederla come intersezione tra due piani. Eliminando  $\lambda$  e  $\mu$  troviamo una rappresentazione cartesiana per la retta:

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

La retta richiesta è la retta impropria del piano  $z = 0$ . ♣

**(6.1.22) Esercizio** *Si determini una rappresentazione cartesiana reale per l'unica retta reale del piano*

$$\pi : (i+1)x_1 - 2ix_2 + 7x_3 + (3-5i)x_4 = 0.$$

*Soluzione.* Notiamo anzitutto che  $\pi$  è un piano immaginario e quindi la retta  $r = \pi \cap \bar{\pi}$  è reale. Diamo due metodi di risoluzione dell'esercizio.

**Primo metodo.** Consideriamo il piano coniugato di  $\pi$ :

$$\bar{\pi} : (1-i)x_1 + 2ix_2 + 7x_3 + (3+5i)x_4 = 0.$$

Allora

$$r : \begin{cases} (i+1)x_1 - 2ix_2 + 7x_3 + (3-5i)x_4 = 0, \\ (1-i)x_1 + 2ix_2 + 7x_3 + (3+5i)x_4 = 0, \end{cases}$$

da cui, combinando linearmente le due equazioni:

$$r : \begin{cases} 2x_1 + 14x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

**Secondo metodo.** Riscriviamo in altro modo l'equazione di  $\pi$ :

$$\pi : (x_1 + 7x_3 + 3x_4) + i(x_1 - 2x_2 - 5x_4) = 0.$$

Allora  $\pi$  appartiene al fascio di piani di equazione

$$\pi_k : (x_1 + 7x_3 + 3x_4) + k(x_1 - 2x_2 - 5x_4) = 0.$$

Tutti i piani di tale fascio passano per la retta che è l'intersezione dei due piani che generano il fascio  $\pi_k$ :

$$r : \begin{cases} 2x_1 + 14x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Dunque  $r$  è la retta reale contenuta in  $\pi$ . ♣

**(6.1.23) Esercizio** Si determini una rappresentazione cartesiana per la retta passante per i punti

$$P = [(-i, 2, 1 - 2i, 0)] \quad e \quad Q = [(5, i, 1, 0)].$$

*Soluzione.* Proponiamo anche in questo esercizio due metodi risolutivi.

**Primo metodo.** Scriviamo direttamente le equazioni parametriche della retta  $rt(P, Q)$  ed eliminiamo i parametri.

**Secondo metodo.** La retta che stiamo cercando è impropria perchè i punti  $P$  e  $Q$  sono impropri. Cerchiamo il piano passante per l'origine  $[(0, 0, 0, 1)]$  e per i punti  $P$  e  $Q$  e lo intersechiamo con  $x_4 = 0$ . La retta richiesta è la retta impropria del piano  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$  che contiene i punti  $P$  e  $Q$ . Troviamo i valori di  $a, b, c$  imponendo il passaggio per  $P$  e  $Q$ :

$$\begin{cases} -ai + 2b + (1 - 2i)c = 0, \\ 5a + bi + c = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene una soluzione dipendente, ad esempio, da  $a$ . Ponendo  $a = 1$  otteniamo

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 9 + 5i, \\ c = -9i. \end{cases}$$

Allora la giacitura del piano che passa per i punti  $P, Q$  e  $[(0, 0, 0, 1)]$  è data da

$$-ix_1 + (9i - 5)x_2 + 9x_3 = 0.$$

La retta  $r$  richiesta è la retta impropria del precedente piano:

$$\begin{cases} -ix_1 + (9i - 5)x_2 + 9x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

e l'esercizio è concluso. ♣

**(6.1.24) Definizione** Una superficie algebrica reale  $\Sigma$  è il luogo dei punti di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  le cui coordinate proiettive omogenee sono le autosoluzioni dell'equazione

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

dove  $F$  è un polinomio omogeneo, a coefficienti reali, non costante.

**(6.1.25) Definizione** Diciamo che un polinomio  $F = F(x_1, \dots, x_4)$  è omogeneo se

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} : F(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) = \lambda^n F(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

dove  $n = \deg(F)$ . Chiamiamo ordine della superficie algebrica reale lo scalare  $n$ .

Il fatto che  $F$  sia un polinomio omogeneo garantisce che la definizione di superficie algebrica reale sia ben data. Infatti, sia  $P = [(x'_1, \dots, x'_4)] \in \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  tale che  $F(x'_1, \dots, x'_4) = 0$ . Consideriamo un'altra rappresentazione di  $P$ , ossia  $P = [(kx'_1, \dots, kx'_4)]$ . Allora

$$F(kx'_1, \dots, kx'_4) = k^n F(x'_1, \dots, x'_4) = k^n \cdot 0 = 0.$$

**(6.1.26) Definizione** Una superficie algebrica reale

$$\Sigma : F(x_1, \dots, x_4) = 0$$

si dice riducibile se

$$F(x_1, \dots, x_4) = \prod_{j=1}^t F_j(x_1, \dots, x_4)^{\alpha_j},$$

con  $\deg(F_j) \geq 1$  per ogni  $j = 1, \dots, t$  e  $\deg(F) = \sum_{j=1}^t \alpha_j \deg(F_j)$ .

Pertanto, se  $\Sigma$  è una superficie algebrica reale riducibile descritta come il luogo dei punti che soddisfano  $F(x_1, \dots, x_4) = 0$  e  $F(x_1, \dots, x_4) = \prod_{j=1}^t F_j(x_1, \dots, x_4)^{\alpha_j}$ , possiamo considerare le superfici algebriche reali  $\Sigma_j$  definite dai polinomi  $F_j$  per ogni  $j = 1, \dots, t$ . Segue che  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_t$ . Chiamiamo *componenti* di  $\Sigma$  le superfici  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_t$ ; esse devono essere contate  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  volte rispettivamente.

**(6.1.27) Osservazione** Le superfici algebriche reali del primo ordine sono della forma

$$\Sigma : a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0 \quad (a_1, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, \dots, 0)\}.$$



Pertanto sono esattamente tutti e soli i piani reali di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Se una quadrica si riduce, allora si riduce in piani. Se una superficie non è riducibile, diciamo che essa è irriducibile.

**(6.1.28) Teorema (I sull'ordine)** *L'ordine di una superficie algebrica reale  $\Sigma$  eguaglia il numero di intersezioni che una generica retta dello spazio (non contenuta in  $\Sigma$ ) ha con la superficie stessa, a patto di contare le intersezioni con la dovuta molteplicità.*

*Dimostrazione.* Sia

$$\Sigma : F(x_1, \dots, x_4) = 0,$$

una superficie algebrica reale e  $n = \deg(F)$ . Siano  $P = [(x'_1, \dots, x'_4)]$  e  $Q = [(y'_1, \dots, y'_4)]$  due punti distinti e  $r = \text{rt}(P, Q)$ . Allora

$$r : \begin{cases} x_i = \lambda x'_i + \mu y'_i, \\ i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Consideriamo l'intersezione della retta  $r$  con la superficie  $\Sigma$ :

$$\Sigma \cap r : \begin{cases} F(x_1, \dots, x_4) = 0, \\ x_i = \lambda x'_i + \mu y'_i, \\ i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

L'equazione risolvete il sistema è la seguente:

$$(6.1.29) \quad F(\lambda x'_1 + \mu y'_1, \lambda x'_2 + \mu y'_2, \lambda x'_3 + \mu y'_3, \lambda x'_4 + \mu y'_4) = 0,$$

ed è un'equazione polinomiale in  $\lambda$  e  $\mu$ . Risulta ancora che  $F(\lambda, \mu)$  è un polinomio omogeneo di grado  $n$ . Abbiamo ora due possibilità per l'equazione (6.1.29).

**1.** Il polinomio risulta identicamente soddisfatto per ogni valore di  $\lambda$  e di  $\mu$ . Allora tutti i punti della retta sono contenuti in  $\Sigma$ , ossia  $r \subseteq \Sigma$ . Ciò va contro l'ipotesi.

**2.** Il polinomio (6.1.29) è effettivamente di grado  $n$  in  $\lambda$  e  $\mu$ . Allora si avrà:

$$\sum_{h=0}^n a_h \lambda^{n-h} \mu^h = 0.$$

**2.1.** Se  $a_0 \neq 0$ , tra le soluzioni di (6.1.29) non ci può essere la soluzione  $(\lambda, 0)$  con  $\lambda \neq 0$ . Dividendo per  $\mu^n$  non perdiamo soluzioni dell'equazione polinomiale e otteniamo la seguente:

$$\sum_{h=0}^n a_h \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-h} = 0.$$

Poniamo  $\lambda/\mu = t$  e otteniamo:

$$\sum_{h=0}^n a_h t^{n-h} = 0.$$

Il campo su cui stiamo lavorando è il campo complesso. Allora, poichè  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso, per il Teorema fondamentale dell'algebra, questo polinomio si fattorizza:

$$a_0(t - t_1)^{\alpha_1} \cdot (t - t_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (t - t_r)^{\alpha_r} = 0,$$

con  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$ . Le radici del polinomio sono  $t = t_1$  contata  $\alpha_1$  volte,  $\dots$ ,  $t = t_r$  contata  $\alpha_r$  volte. Per  $t = t_1$  abbiamo  $\lambda = t_1$  e  $\mu = 1$ . Sostituendo in  $r$ :

$$P_1 : \begin{cases} x_i = t_1 x'_i + y'_i, \\ i = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$$

quindi  $P_1 \in \Sigma \cap r$  contata  $\alpha_1$  volte. Analogamente, per le altre radici otterremo  $P_2 \in \Sigma \cap r$  contata  $\alpha_2$  volte,  $\dots$ ,  $P_r \in \Sigma \cap r$  contata  $\alpha_r$  volte. Poichè  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$ , si ha che il numero di punti comuni a  $\Sigma$  e ad  $r$ , contati con la dovuta molteplicità, è esattamente  $n$ .

**2.2.** Supponiamo ora che  $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$  e  $a_k \neq 0$ . In questo caso l'equazione (6.1.29) è:

$$\sum_{h=k}^n a_h \lambda^{n-h} \mu^h = 0,$$

ovvero

$$\mu^k \left( a_k \lambda^{n-k} + a_{k+1} \lambda^{n-(k+1)} \mu + \dots + a_n \mu^{n-k} \right) = 0.$$

Quindi  $\mu^k = 0$  dà la soluzione  $\mu = 0$  contata  $k$  volte (con  $\lambda \neq 0$ ). Allora il punto corrispondente è il punto  $P = [(x'_1, \dots, x'_4)]$  contato  $k$  volte.

La restante equazione

$$a_k \lambda^{n-k} + a_{k+1} \lambda^{n-(k+1)} \mu + \dots + a_n \mu^{n-k} = 0,$$

si ottiene da un polinomio omogeneo di grado  $(n - k)$  con  $a_k \neq 0$ . Possiamo allora sfruttare le considerazioni fatte nel caso **2.1**. Troviamo quindi  $(n - k)$  punti comuni a  $\Sigma$  e  $r$  contati con la dovuta molteplicità. ■

**(6.1.30) Corollario** *L'ordine di una superficie è una proprietà geometrica della superficie stessa.*

**(6.1.31) Definizione** *Una curva algebrica reale in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  è l'intersezione di due superfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  distinte e non contenute l'una nell'altra:*

$$\mathcal{C} = \Sigma_1 \cap \Sigma_2.$$

**(6.1.32) Osservazione** Una retta reale di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ , essendo intersezione di due piani distinti, è una curva algebrica reale.

**(6.1.33) Definizione** Una curva algebrica reale  $\mathcal{C}$  si dice *piana* se esiste un piano  $\pi$  tale che  $\mathcal{C} \subseteq \pi$ .

**(6.1.34) Definizione** Sia  $\mathcal{C}$  una curva algebrica piana e  $\pi$  il piano tale che le contiene. Chiamiamo *ordine* di  $\mathcal{C}$  il numero dei punti comuni a  $\mathcal{C}$  e ad una retta  $r \subseteq \pi$  con  $r \not\subseteq \mathcal{C}$ , contati con la dovuta molteplicità.

**(6.1.35) Teorema (II sull'ordine)** Sia  $\Sigma$  una superficie algebrica reale di ordine  $n$  e sia  $\alpha$  un piano non componente  $\Sigma$ . Allora  $\Sigma \cap \alpha$  è una curva piana di ordine  $n$ .

*Dimostrazione.* Poniamo

$$\Sigma : F(x_1, \dots, x_4) = 0,$$

$$\alpha : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0,$$

$$\mathcal{C} : \begin{cases} F(x_1, \dots, x_4) = 0, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0, \end{cases}$$

e

$$r : \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0, \end{cases} \quad \text{con} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_4 \\ b_1 & \cdots & b_4 \end{pmatrix} = 2.$$

Consideriamo quindi l'intersezione della retta  $r$  con la curva  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C} \cap r : \begin{cases} F(x_1, \dots, x_4) = 0, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0. \end{cases}$$

Scrivendo la retta  $r$  in forma parametrica, otteniamo:

$$\mathcal{C} \cap r : \begin{cases} F(x_1, \dots, x_4) = 0, \\ x_i = \lambda x'_i + \mu y'_i, \\ i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Considerando il I Teorema sull'ordine, deduciamo che ci sono  $n$  punti comuni tra  $r$  e  $\mathcal{C}$  (contati con la dovuta molteplicità). ■

## 2 Quadriche

Consideriamo una superficie algebrica reale del secondo ordine che chiameremo *quadrica*:

$$Q: \sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_i x_j = 0, \quad \text{con } a_{ij} = a_{ji}.$$

Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Allora risulta

$$Q: \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0, \quad \text{con } A^t = A \in \text{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

Dividendo l'equazione di  $Q$  per  $x_4^2$ , otteniamo l'equazione di  $Q$  in coordinate affini  $(x, y, z)$ . L'equazione di una quadrica dipende da dieci coefficienti non tutti nulli e definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo; pertanto essa dipende da *nove* coefficienti essenziali e quindi ci serviranno almeno nove condizioni lineari per determinare i suoi coefficienti. Dunque per nove punti passerà in generale una sola quadrica di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ .

**(6.2.1) Osservazione** *Siano  $Q$  una quadrica e  $r$  una retta tale che  $|Q \cap r| \geq 3$ . Allora  $r \subseteq Q$ .*

*Dimostrazione.* La tesi discende direttamente dal Teorema sull'ordine I. ■

Vediamo ora alcuni esempi di quadriche.

**(6.2.2) Definizione** *Chiamiamo cono quadrico il luogo delle rette, dette generatrici del cono, uscenti da un punto  $V$ , detto vertice del cono, e che si appoggiano ad una conica irriducibile (non spezzata in due rette), detta conica direttrice, contenuta in un piano non passante per  $V$ .*

**(6.2.3) Osservazione** *Consideriamo un cono quadrico  $Q$ . Il vertice di tale cono potrebbe essere un punto improprio; questo porta alla seguente distinzione affine: se il vertice è un punto proprio diciamo che  $Q$  è un cono (affine). In caso contrario,  $Q$  viene chiamato cilindro.*

**(6.2.4) Osservazione** *I coni quadrici sono superfici algebriche reali del secondo ordine, ossia sono quadriche.*

**(6.2.5) Esercizio** *Si scriva l'equazione cartesiana del cono avente vertice  $V = (1, 1, 0)$  e conica direttrice*

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + 3y^2 + z^2 = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

*Soluzione.* Anzitutto osserviamo che

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Pertanto, la conica  $\mathcal{C}$  è una circonferenza di centro l'origine  $O$  e raggio 1 del piano coordinato  $y = 0$ . Consideriamo il generico punto  $P = (x_0, 0, z_0)$  di  $\mathcal{C}$ . Allora la totalità delle rette congiungenti  $P$  a  $V$  viene individuata dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + t(1 - x_0), \\ y = 1 + t, \\ z = -tz_0, \\ x_0^2 + z_0^2 = 1. \end{cases}$$

Eliminando i parametri  $x_0$ ,  $z_0$  e  $t$  otteniamo:

$$Q : x^2 - 2xy + z^2 + 2y - 1 = 0,$$

che è l'equazione del cono richiesta.

Notiamo che la matrice simmetrica  $A$  associata a  $Q$  ha rango 3 e che il cono  $Q$  può essere scritto anche nel seguente modo:

$$Q : (x - 1)^2 - 2(x - 1)(y - 1) + z^2 = 0.$$

cioè risulta essere una equazione omogenea in  $(x - 1)$ ,  $(y - 1)$  e  $z$ , ossia un'equazione omogenea in  $x - x_V$ ,  $y - y_V$  e  $z - z_V$ , essendo  $(x_V, y_V, z_V)$  le coordinate del vertice  $V$ .



**(6.2.6) Esercizio** *Determinare l'equazione cartesiane del cilindro avente per conica direttrice*

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + 3y^2 + z^2 = 1 \\ y = 0, \end{cases}$$

e vertice  $V = [(0, 1, 0, 0)] = Y_\infty$ .

*Soluzione.* Un generico punto  $P$  appartenente al cilindro è della forma  $P = (x_0, 0, y_0)$  con  $x_0^2 + z_0^2 = 1$ . Allora la totalità delle rette congiungenti  $P$  a  $V$  viene individuata dalle seguenti equazioni:

$$\text{rt}(P, V) : \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0, \\ x_0^2 + z_0^2 = 1. \end{cases}$$

L'eliminazione (immediata) dei parametri  $x_0$ ,  $z_0$  e  $t$  conduce all'equazione del cilindro:

$$x^2 + z^2 = 1.$$

Notiamo che la matrice simmetrica  $A$  associata ha rango 3 e nell'equazione affine del cilindro *non* compare la variabile  $y$  (e il suo vertice è  $Y_\infty$ ). Questa caratteristica di alcuni tipi di cilindri è esplicitata nella Proposizione che segue. ♣

**(6.2.7) Proposizione** *Sia  $Q$  una quadrica irriducibile nella cui equazione affine manca il termine  $x$  (rispettivamente  $y$  o  $z$ ). Allora  $Q$  è un cilindro con vertice  $X_\infty$  (rispettivamente  $Y_\infty$  o  $Z_\infty$ ).*

*Dimostrazione.* Assumiamo che l'equazione affine di  $Q$  sia priva del termine  $x$ . Allora  $Q$  sarà identificata con un polinomio  $F(y, z)$  di secondo grado. Poniamo  $V_\infty = [(1, 0, 0, 0)]$ . Sia  $P = (x_0, y_0, z_0)$  un punto qualsiasi di  $Q$ . Pertanto  $F(y_0, z_0) = 0$ . Consideriamo le equazioni parametriche affini della retta passante per  $P$  e  $V_\infty$ :

$$\text{rt}(P, V_\infty) : \begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0 + 0t, \\ z = z_0 + 0t. \end{cases}$$

Verifichiamo che tutti i punti della retta  $\text{rt}(P, V_\infty)$  appartengono a  $Q$ . Sia

$$X = (x_0 + t, y_0, z_0)$$

un punto della retta  $\text{rt}(P, V_\infty)$ . Sostituendo le coordinate di  $X$  nell'equazione di  $Q$  otteniamo  $F(y_0, z_0) = 0$ , dunque le coordinate di  $X$  soddisfano l'equazione di  $Q$ , pertanto  $X \in Q$ . Dall'arbitrarietà di  $t$ , segue che  $\text{rt}(P, V_\infty) \subseteq Q$ . Se ora  $\mathcal{C}$  è una sezione piana irriducibile non passante per  $V_\infty$  (tale sezione deve esistere perchè  $Q$  è una quadrica irriducibile) si ha che  $Q$  contiene interamente il cilindro con direttrice  $\mathcal{C}$  e generatrici passanti per  $V_\infty$ . Poichè sia  $Q$  che tale cilindro sono quadriche, esse devono coincidere. ■

Interpretiamo la Proposizione (6.2.7) dal punto di vista delle coordinate proiettive: se manca il termine  $x_1$  abbiamo un cilindro di vertice  $V = [(1, 0, 0, 0)] = X_\infty$ ; se manca il termine  $x_2$  otteniamo il cilindro di vertice  $V = [(0, 1, 0, 0)] = Y_\infty$  e, analogamente, se manca il termine in  $x_3$  abbiamo un cilindro di vertice  $V = [(0, 0, 1, 0)] = Z_\infty$ . Dunque se nell'equazione non compare il termine  $x_1$  nella matrice  $A$  associata al cilindro abbiamo  $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ . Quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix},$$

e  $\det(A) = 0$ . In modo analogo, se in  $Q$  non compare il termine  $x_2$ , la matrice  $A$  avrà la seconda riga formata tutta da zeri. Se manca il termine  $x_3$ , la matrice  $A$  avrà tutti zeri sulla terza riga.

**(6.2.8) Proposizione** *Sia  $Q$  una quadrica irriducibile. Supponiamo che  $Q$  sia rappresentata in coordinate affini da un'equazione omogenea nelle variabili  $x, y$  e  $z$ . Allora  $Q$  è un cono con vertice  $V = (0, 0, 0)$ .*

*Dimostrazione.* Sia

$$Q : F(x, y, z) = 0$$

una quadrica irriducibile, con  $F$  polinomio omogeneo. Allora

$$F(tx, ty, tz) = t^2 F(x, y, z).$$

Notiamo che il punto  $V = (0, 0, 0)$  appartiene alla quadrica  $Q$  in quanto  $F$  è omogeneo. Sia  $P \in Q \setminus \{V\}$ . Verifichiamo che tutta la retta  $\text{rt}(P, V)$  è contenuta in  $Q$ . Poniamo  $P = (x_0, y_0, z_0)$ . Allora  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Inoltre:

$$\text{rt}(P, V) : \begin{cases} x = tx_0, \\ y = ty_0, \\ z = tz_0. \end{cases}$$

Il generico punto della retta  $\text{rt}(P, V)$  sarà  $X = (tx_0, ty_0, tz_0)$ , al variare di  $t$ . Risulta che  $X \in Q$ . Infatti:

$$F(tx_0, ty_0, tz_0) = t^2 F(x_0, y_0, z_0) = t^2 \cdot 0 = 0.$$

Dall'arbitrarietà di  $t$ , segue la tesi. ■

**(6.2.9) Corollario** *Una quadrica irriducibile rappresentata da un'equazione omogenea in  $x - x_0, y - y_0$  e  $z - z_0$  rappresenta un cono di vertice  $V = (x_0, y_0, z_0)$ .*

*Dimostrazione.* Basta passare a coordinate  $x' = x - x_0, y' = y - y_0$  e  $z' = z - z_0$  (traslazione dei tre assi) e applicare la Proposizione (6.2.8). ■

**(6.2.10) Proposizione** *Sia  $Q$  un cono quadratico di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  di vertice  $V$ . Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) *per ogni punto  $A \in Q \setminus \{V\}$  si ha  $\text{rt}(A, V) \subseteq Q$ ;*

(b)  *$Q$  è una quadrica irriducibile;*

- (c) se una retta  $r$  è contenuta in  $Q$ , allora  $r$  è una generatrice (ossia  $V \in r$ );
- (d) se  $s$  è una retta appartenente alla stella di centro  $V$ , allora  $s \subseteq Q$ , oppure  $s \cap Q = V$  (contato due volte).

*Dimostrazione.*

- (a) Segue dalla definizione di cono quadrico.
- (b) Sempre per definizione, un cono possiede sempre almeno una sezione piana (che è una conica) irriducibile. Allora  $Q$  non può essere riducibile, cioè spezzarsi nell'unione di due piani, perchè altrimenti tutte le sue sezioni piane sarebbero coppie di rette (ossia sezioni piane riducibili).
- (c) Sia  $r$  una retta tale che  $r \subseteq Q$ . Supponiamo, per assurdo, che  $V \notin r$ . Consideriamo  $A, B \in r \subseteq Q \setminus \{V\}$ . Dall'affermazione (a) abbiamo che  $rt(A, V) \subseteq Q$  e  $rt(B, V) \subseteq Q$ . Consideriamo il piano  $\alpha$  individuato dai punti  $A, B, V$ , ossia  $\alpha = pn(A, B, V)$ . Segue che  $r \subseteq \alpha \cap Q$ ,  $rt(A, V) \subseteq \alpha \cap Q$  e  $rt(B, V) \subseteq \alpha \cap Q$ . Dal II Teorema sull'ordine, segue che  $\alpha \subseteq Q$ . Allora  $Q$  è riducibile, il che è assurdo per (b).
- (d) Se  $s$  interseca  $Q$  in un altro punto  $A$  distinto da  $V$ , risulta  $s = rt(A, V)$ . Da (a) deduciamo che  $s \subseteq Q$ . Se  $s \not\subseteq Q$ , risulta  $s \cap Q = V$  contato due volte (per il I Teorema sull'ordine). ■

Per ogni punto di un cono (diverso dal vertice  $V$ ) passa una ed una sola retta interamente contenuta nella superficie stessa. Allora diciamo che il cono è una *superficie semplicemente rigata*.

### 3 Sfere generalizzate

**(6.3.1) Definizione** *Nello spazio euclideo reale  $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$  una sfera è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso (detto centro della sfera). Chiamiamo raggio della sfera la distanza di un generico punto della sfera dal suo centro.*

Consideriamo  $C = (\alpha, \beta, \gamma)$  un punto di  $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$  ed  $R$  un numero reale positivo. Sia  $P = (x, y, z) \in \mathbb{E}_3(\mathbb{R})$  tale che  $d(P, C)^2 = R^2$  (abbiamo indicato con  $d(P, C)$  la distanza di  $P$  da  $C$ ). Otteniamo:

$$\Sigma : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2 .$$



Pertanto l'equazione di una sfera è data da

$$\Sigma: \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 = 0.$$

Possiamo osservare che l'equazione di  $\Sigma$  è priva dei termini rettangolari e i coefficienti di  $x^2$ ,  $y^2$  e  $z^2$  sono uguali. Inoltre, le sfere sono superfici quadriche.

Consideriamo ora una quadrica la cui equazione abbia le proprietà di quella della sfera:

$$Q: \quad x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

Con alcuni passaggi algebrici possiamo riscrivere la quadrica  $Q$  nella forma:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d.$$

A questo punto distinguiamo tre casi.

**Caso 1.** Se  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$  abbiamo una *sfera a punti reali* con centro

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right),$$

e raggio

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}}.$$

**Caso 2.** Se  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0$  abbiamo, dal punto di vista reale, una sfera di raggio 0. L'unico punto reale è il centro  $C = (-a/2, -b/2, -c/2)$ . D'altra parte l'equazione

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = 0$$

è omogenea di secondo grado in  $(x+a/2)$ ,  $(y+b/2)$  e  $(z+c/2)$  e quindi per le Proposizioni (6.2.8) e (6.2.10) è un cono con  $V = (-a/2, -b/2, -c/2)$  le cui generatrici sono tutte immaginarie. Tale cono viene detto *cono isotropo* di vertice  $V = (-a/2, -b/2, -c/2)$ .

**Caso 3.** Se  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$   $Q$  non possiede punti reali.

**(6.3.2) Definizione** *Chiamiamo sfera generalizzata di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  il luogo dei punti che verificano un'equazione del tipo*

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0.$$

Da quanto detto sopra, una sfera generalizzata è una sfera con infiniti punti reali se i coefficienti soddisfano le condizioni del caso 1. È un cono isotropo il cui unico punto reale è il suo vertice (caso 2). È una sfera a punti immaginari nel caso 3.

Vediamo ora quali sono le intersezioni di una sfera generalizzata con il piano improprio  $\pi_\infty$ :

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_1x_4 + bx_2x_4 + cx_3x_4 + dx_4 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Otteniamo

$$\mathcal{A} : \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Risulta che  $\mathcal{A}$  è una conica irriducibile a punti immaginari.

**(6.3.3) Definizione** La conica  $\mathcal{A}$  è detta assoluto di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . I suoi punti sono detti punti ciclici dello spazio. Tra di essi troviamo i punti ciclici dei tre piani coordinati

$$\begin{aligned} I &= [(1, i, 0, 0)], & \bar{I} &= [(1, -i, 0, 0)], & J &= [(1, 0, i, 0)], & \bar{J} &= [(1, 0, -i, 0)], \\ K &= [(0, 1, i, 0)], & \bar{K} &= [(0, 1, -i, 0)]. \end{aligned}$$

**(6.3.4) Teorema** Le sfere generalizzate sono tutte e sole le quadriche contenenti l'assoluto di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ .

*Dimostrazione.* Sia  $Q$  una sfera generalizzata. Allora  $\mathcal{A} \subseteq Q$ . Sia ora  $Q$  una quadrica generica contenente l'assoluto  $\mathcal{A}$ . Verifichiamo che  $Q$  è una sfera generalizzata. Sia

$$Q : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{44}x_4^2 = 0.$$

Consideriamo l'intersezione di  $Q$  con il piano improprio  $\pi_\infty$ :

$$(6.3.5) \quad Q \cap \pi_\infty : \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Per ipotesi  $Q \cap \pi_\infty = \mathcal{A}$ , quindi  $I = [(1, i, 0, 0)]$  deve verificare il sistema (6.3.5), cioè

$$a_{11} + 2ia_{12} - a_{22} = 0.$$

Anche il punto  $\bar{I} = [(1, -i, 0, 0)]$  deve verificare il sistema (6.3.5), cioè:

$$a_{11} - 2ia_{12} - a_{22} = 0.$$

Per differenza otteniamo  $a_{12} = 0$  e, sostituendo, abbiamo  $a_{11} = a_{22}$ . Consideriamo ora il punto  $J = [(1, 0, i, 0)]$ . Sostituendo in (6.3.5) risulta

$$a_{11} + 2ia_{13} - a_{33} = 0.$$

Come prima, anche il punto  $\bar{J} = [(1, 0, -i, 0)]$  soddisfa il sistema, quindi

$$a_{11} - 2ia_{13} - a_{33} = 0.$$

Sottraendo tra loro le ultime due relazioni otteniamo  $a_{13} = 0$  e, sostituendo,  $a_{11} = a_{33} = 0$ . Considerando infine il punto  $K = [(0, 1, i, 0)]$  otteniamo  $a_{23} = 0$ . Dalle relazioni ricavate sui coefficienti  $a_{ij}$ , deduciamo che  $Q$  è una sfera generalizzata. ■

Sia  $\alpha$  un piano proprio reale di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  e sia  $a_\infty$  la retta impropria (reale) di  $\alpha$ . Allora  $\mathcal{A} \cap a_\infty$  consiste di due punti impropri e immaginari coniugati di  $\alpha$ . Tali punti si chiamano *punti ciclici* del piano  $\alpha$ . Ogni piano proprio di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  possiede esattamente due punti ciclici.

**(6.3.6) Esercizio** *Si determinino i punti ciclici del piano  $z = 0$ .*

*Soluzione.* La retta impropria del piano  $x_3 = 0$  è

$$a_\infty : \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Segue che

$$\mathcal{A} \cap a_\infty : \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases}$$

da cui  $x_2 = \pm ix_1$ . Pertanto, i punti ciclici del piano  $z = 0$  sono

$$[(1, i, 0, 0)] \quad \text{e} \quad [(1, -i, 0, 0)].$$



**(6.3.7) Definizione** *Una circonferenza generalizzata è l'intersezione di un piano qualsiasi con una sfera generalizzata.*

La circonferenza è a punti reali se la sfera è a punti reali e la distanza del centro della sfera dal piano è minore del raggio; possiede un solo punto reale se tale distanza coincide con il raggio della sfera; è a punti immaginari se la distanza del centro della sfera dal piano è maggiore del raggio della sfera.

Ci poniamo il seguente problema: come riconoscere che una conica è una circonferenza nello spazio? Abbiamo due possibilità: **1.** la scriviamo come intersezione di una sfera generalizzata  $S$  con un piano  $\alpha$ . **2.** Una conica è una curva piana e giace in un piano  $\alpha$ . Determiniamo i punti ciclici di  $\alpha$  intersecando l'assoluto  $\mathcal{A}$  della sfera con la retta impropria di  $\alpha$  e poi verifichiamo che essi appartengono alla conica data.

## 4 Intersezione di due sfere

Siano  $S_1$  ed  $S_2$  due sfere. Dal punto di vista euclideo, se  $P \in S_1 \cap S_2$ ,  $P$  descrive una circonferenza con centro in  $H = \text{rt}(C_1, C_2) \cap \text{pn}(P \perp \text{rt}(C_1, C_2))$  (dove  $C_i$  indica il centro della sfera  $S_i$  per  $i = 1, 2$ ) e raggio pari a  $d(P, H)$  e appartiene al piano  $\text{pn}(P \perp \text{rt}(C_1, C_2))$ .

In  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  l'intersezione di due sfere è una curva del quarto ordine che si compone di una circonferenza e dell'assoluto  $\mathcal{A}$ . Infatti, poniamo

$$S_1 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_1x_4 + bx_2x_4 + cx_3x_4 + dx_4^2 = 0,$$

e

$$S_2 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a'x_1x_4 + b'x_2x_4 + c'x_3x_4 + d'x_4^2 = 0.$$

Intersecando  $S_1$  con  $S_2$  otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_1x_4 + bx_2x_4 + cx_3x_4 + dx_4^2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a'x_1x_4 + b'x_2x_4 + c'x_3x_4 + d'x_4^2 = 0, \end{cases}$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_1x_4 + bx_2x_4 + cx_3x_4 + dx_4^2 = 0, \\ x_4((a - a')x_1x_4 + (b - b')x_2x_4 + (c - c')x_3x_4 + (d - d')x_4) = 0. \end{cases}$$

Pertanto otteniamo l'unione dei due sistemi seguenti:

$$\mathcal{A} : \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_1x_4 + bx_2x_4 + cx_3x_4 + dx_4^2 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

e

$$C : \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_1x_4 + bx_2x_4 + cx_3x_4 + dx_4^2 = 0, \\ (a - a')x_1x_4 + (b - b')x_2x_4 + (c - c')x_3x_4 + (d - d')x_4 = 0. \end{cases}$$

**(6.4.1) Osservazione** *Supponiamo che le due sfere  $S_1$  ed  $S_2$ , considerate in precedenza, siano concentriche (ossia  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $c = c'$ ,  $d \neq d'$ ). Allora  $S_1 \cap S_2$  consiste nell'assoluto, contato due volte.*

**(6.4.2) Esercizio** *Dato un fascio  $\mathcal{F}$  di piani paralleli al piano*

$$\pi : x + y + z = 0,$$

*determinare le equazioni cartesiane dei piani del fascio tangenti alla sfera di equazione*

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 12 = 0.$$

*Soluzione.*  $S$  è una sfera a punti reali avente centro in  $C = (3, 2, 0)$  e raggio  $R = 1$ . I piani richiesti sono quelli a distanza 1 da  $C$ . Un generico piano del fascio  $\mathcal{F}$  risulta essere

$$\pi_k: \quad x + y + z + k = 0.$$

Imponiamo  $d(\pi_k, C) = 1$ . Otteniamo

$$\frac{|k + 5|}{\sqrt{3}} = 1,$$

da cui abbiamo due valori di  $k$ , ossia i due piani richiesti. ♣

**(6.4.3) Esercizio** *Scrivere le equazioni di tutte le sfere di raggio  $R = 3$  che risultano essere tangenti al piano  $\pi$  di equazione  $x = 0$  e passanti per i punti  $A = (1, 0, 0)$  e  $B = (2, 2, 2)$ .*

*Soluzione.* Sia  $C = (x_0, y_0, z_0)$  il generico centro di una di queste sfere. Imponendo che  $d(C, \pi) = 3$  otteniamo  $|x_0| = 3$ . Sfruttando ora il passaggio per i punti  $A$  e  $B$ , giungiamo al sistema

$$\begin{cases} |x_0| = 3, \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9, \\ (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 2)^2 + (z_0 - 2)^2 = 9, \end{cases}$$

che è equivalente all'unione dei due sistemi (ponendo  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  e  $z = z_0$ )

$$\begin{cases} x = 3, \\ (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 9, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 9. \end{cases}$$

Ognuno di questi sistemi rappresenta l'intersezione di un piano (prima equazione) con una circonferenza  $\mathcal{C}$  (seconda e terza equazione). Dunque se la circonferenza  $\mathcal{C}$  non giace nel piano  $x = \pm 3$  ci aspettiamo due punti in comune per ciascuno dei due sistemi. Procedendo con i calcoli si ottengono effettivamente quattro punti corrispondenti ai centri delle sfere richieste. ♣

**(6.4.4) Esercizio** *Si dica se la conica*

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4, \\ x = y - z, \end{cases}$$

*è una circonferenza a punti reali. In caso affermativo, determinarne centro e raggio. Determinare, inoltre, la proiezione parallela all'asse  $z$  sul piano  $z = 0$ .*

*Soluzione.* Poniamo

$$S: \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4,$$

e

$$\pi : x - y + z = 0.$$

Notiamo che  $S$  è una sfera di centro  $C = (1, 1, -1)$  e raggio  $R = 2$ . L'intersezione del piano  $\pi$  con la sfera  $S$  è una circonferenza generalizzata. Risulta  $d(C, \pi) = 1/\sqrt{3} < 2$ , quindi siamo in presenza di una circonferenza a punti reali. Per determinarne il centro  $H$  della circonferenza dobbiamo intersecare il piano  $\pi$  con la retta  $s$  passante per  $C$  ed ortogonale a  $\pi$ .

$$s : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Segue che

$$H : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo  $H = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ . Il raggio della circonferenza risulta essere

$$\rho = \sqrt{R^2 - d(C, H)^2} = \sqrt{\frac{11}{3}}.$$

Per concludere l'esercizio, dobbiamo scrivere l'equazione del cilindro con curva direttrice proprio la circonferenza trovata e vertice  $Z_\infty$  ed intersecarlo con il piano  $z = 0$ .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 1, \\ x - y + z = 0, \end{cases}$$

Per la Proposizione (6.2.7) tale cilindro dovrà essere rappresentato da un'equazione di secondo grado in cui manca la variabile  $z$ . Nel sistema che rappresenta la circonferenza data ricaviamo  $z$  dalla seconda equazione e sostituiamo nella prima:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (y - x)^2 - 2x - 2y + 2(y - x) = 1, \\ z = y - x. \end{cases}$$

In questo modo stiamo rappresentando la stessa circonferenza vista però ora intersezione del piano  $x - y + z = 0$  con un'altra quadrica di equazione

$$D : 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 1 = 0.$$

Poichè in tale equazione manca la variabile  $z$ ,  $D$  è un cilindro con generatrici parallele all'asse  $z$  che contiene la circonferenza data.  $D$  è quindi il cilindro richiesto. Intersecando  $D$  con il piano coordinato  $(x, y)$  si ha la curva richiesta:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Si lascia come esercizio lo studio di tale conica. ♣

**(6.4.5) Esercizio** *Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza di centro  $C = (1, 1, 0)$  e tangente alla retta di equazione*

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = 2t \\ z = -t. \end{cases}$$

*Soluzione.* Come abbiamo visto, una circonferenza deve essere sempre ottenuta come sezione di una sfera  $S$  con un piano  $\alpha$ . La circonferenza deve appartenere al piano  $\alpha$  che contiene il suo centro  $C$  e la retta  $r$ . Il raggio della circonferenza sarà  $d(C, r)$ . Consideriamo il fascio  $\mathcal{F}_r$  di piani pasanti per la retta  $r$ :

$$\mathcal{F}_r : (2x - y) + k(x + z) = 0.$$

Imponendo il passaggio di un generico piano  $\alpha \in \mathcal{F}_r$  per il punto  $C$  si ottiene

$$\alpha : x - y - z = 0.$$

Determiniamo ora la sfera  $S$  di centro  $C$  e raggio  $d(C, r)$ . Per fare ciò, individuiamo il piano passante per  $C$  ed ortogonale alla retta  $r$ ; poi determiniamo il punto  $H$  dato dall'intersezione della retta  $r$  con il piano appena trovato; infine  $d(C, H)$  è il raggio di  $S$ . Per concludere basta intersecare  $S$  con il piano  $\alpha$ . ♣

**(6.4.6) Esercizio** *Si considerino le sfere*

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = hy.$$

*Determinare il parametro  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  in modo tale che  $S_1 \cap S_2$  sia una circonferenza di raggio  $R = 3$ .*

*Soluzione.* Otteniamo

$$S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ hy = 25. \end{cases}$$

La sfera  $S_1$  ha centro  $C_1 = (0, 0, 0)$  e raggio  $R_1 = 5$ . Sia  $H$  il centro della circonferenza richiesta. Affinchè  $S_1 \cap S_2$  sia una circonferenza di raggio pari a 3 si deve avere, per il Teorema di Pitagora, che  $d(C_1, H) = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ . Imponiamo ora che  $C_1$  abbia distanza 4 dal piano  $hy = 25$ . Sviluppando i calcoli, si ha  $h = \pm \frac{25}{4}$ . ♣

**(6.4.7) Esercizio** *Siano*

$$Q : 5y^2 + z^2 - 2z = 0, \quad \alpha : x - 2y = 0.$$

Riconoscere che la conica  $\mathcal{C} = Q \cap \alpha$  è una circonferenza e se ne determinino il centro ed il raggio.

*Soluzione.* Diamo due metodi risolutivi.

**Primo metodo.** L'intersezione di  $Q$  con  $\alpha$  è sicuramente una conica, poichè  $Q$  è una quadrica e  $\alpha$  è un piano. Nell'equazione di  $Q$  manca il termine  $x$ , pertanto, dalla Proposizione (6.2.7), si ha che  $Q$  è un cilindro. L'intersezione di  $Q$  con il piano  $yz$  è un'ellisse. Il sistema  $Q \cap \alpha$  equivale al sistema

$$\begin{cases} 5y^2 + z^2 - 2z + 1 = 1, \\ x = 2y, \end{cases}$$

ovvero a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, \\ x = 2y. \end{cases}$$

L'ultimo sistema rappresenta quindi lo stesso insieme di punti ma ora la prima equazione rappresenta una sfera  $S$  di centro  $D = (0, 0, 1)$  e raggio  $R = 1$  e la seconda equazione è un piano. Questo prova che  $\mathcal{C}$  è una circonferenza. Inoltre il piano  $x = 2y$  passa per il centro della sfera  $D$ , quindi la circonferenza che cerchiamo è quella massima ed il centro e il raggio della circonferenza coincidono con quelli della sfera.

**Secondo metodo.** Ricordiamo che le circonferenze sono le uniche coniche passanti per i punti ciclici del piano su cui giacciono. Intersecando  $\alpha$  con l'assoluto  $\mathcal{A}$  otteniamo i punti ciclici:

$$I_\alpha = [(2, 1, i\sqrt{5}, 0)], \quad J_\alpha = [(2, 1, -i\sqrt{5}, 0)].$$

Svolgendo i calcoli si deduce che effettivamente  $I_\alpha$  e  $J_\alpha$  appartengono alla conica  $C$ . Segue che  $C$  è una circonferenza. ♣

**(6.4.8) Esercizio** *Si consideri la superficie*

$$\Sigma : x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2z = 1,$$

*il punto  $P = (2, 0, -1)$  e il piano  $\alpha$  di equazione  $x = 2$ . Determinare l'equazione del piano passante per  $P$ , ortogonale ad  $\alpha$  e che sechi  $\Sigma$  secondo una circonferenza.*

*Soluzione.* Osserviamo che  $\Sigma$  non è una sfera. Infatti, i termini al quadrato non hanno tutti i medesimi coefficienti. Per il punto  $P$  passa una ed una sola retta  $r$  ortogonale al piano  $\alpha$  e tutti i piani del fascio  $\mathcal{F}_r$  di sostegno  $r$  sono ortogonali ad  $\alpha$ . Fra di essi dobbiamo individuare quei piani che tagliano  $\Sigma$  secondo una circonferenza. La retta  $r$  ha equazione

$$r : \begin{cases} z + 1 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$



Il fascio di piani ha equazione

$$\mathcal{F}_r : (z + 1) + ky = 0.$$

Ci chiediamo quali piani di  $\mathcal{F}_r$  tagliano  $\Sigma$  secondo una circonferenza. Anzitutto, vediamo se i piani che generano  $\mathcal{F}_r$  soddisfano la richiesta. Controllando, si vede che il piano  $z + 1 = 0$  taglia  $\Sigma$  secondo una circonferenza. Verifichiamo ora se esistono altri piani di  $\mathcal{F}_r$  che secano  $\Sigma$  secondo una circonferenza. Determiniamo i punti ciclici del generico piano di  $\mathcal{F}_r$  (che dipenderanno dal parametro  $k$ ) e vediamo se esistono dei valori di  $k$  per i quali tali punti ciclici appartengono a  $\Sigma$ . Sia quindi  $\pi_k \in \mathcal{F}_k$ . I punti ciclici si ottengono intersecando  $\pi_k$  con l'assoluto  $\mathcal{A}$ . Otteniamo i punti

$$I_{\pi_k} = \left[ \left( i\sqrt{1+k^2}, 1, -k, 0 \right) \right], \quad J_{\pi_k} = \left[ \left( -i\sqrt{1+k^2}, 1, -k, 0 \right) \right].$$

Sostituendo il punto  $I_{\pi_k}$  in  $\Sigma$  si ottiene il valore  $k = 0$ . Quindi, nel fascio di piani  $\mathcal{F}_r$ , il piano richiesto è dato per  $k = 0$ , ossia è il piano  $z + 1 = 0$ . ♣

## 5 Superfici di rotazione

**(6.5.1) Definizione** Una superficie di rotazione è la superficie ottenuta dalla rotazione di una curva piana  $\mathcal{L}$  attorno ad una retta  $a$  (detta asse di rotazione) in modo che il sistema  $\mathcal{L} \cup a$  sia rigido (ovvero, la curva non subisca modifiche durante la rotazione).

Ogni punto  $P$  della curva  $\mathcal{L}$  descrive una circonferenza intorno all'asse di rotazione  $a$ . Questa circonferenza ha come centro il punto  $H$  di intersezione dell'asse  $a$  con il piano per  $P$  ortogonale ad  $a$  e raggio pari a  $d(P, H)$ . Al variare di  $P$  otteniamo la superficie di rotazione.

**(6.5.2) Definizione** Chiamiamo meridiani le varie posizioni assunte dalla curva  $\mathcal{L}$  nella rotazione. Esse sono le intersezioni della superficie di rotazione con i piani passanti per l'asse di rotazione  $a$ .

**(6.5.3) Definizione** Chiamiamo paralleli le circonferenze descritte dai vari punti di  $\mathcal{L}$ .

**(6.5.4) Definizione** Una superficie risulta essere rotonda (cioè di rotazione) se esiste una retta tale che tutti i piani ortogonali a quella retta tagliano la superficie secondo circonferenze.

Ci chiediamo ora come si scrivono le equazioni cartesiane di una superficie di rotazione. Noto l'asse di rotazione  $a$  e le equazioni di  $\mathcal{L}$ , procediamo come segue:

- determiniamo le equazioni parametriche della curva  $\mathcal{L}$ ;
- fissiamo il generico punto  $P \in \mathcal{L}$ , quindi  $P = (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ ;
- scriviamo l'equazione del parallelo passante per  $P$  ossia consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \text{pn}(P \perp a), \\ \text{sfera } \Sigma \text{ di centro } C \in a \text{ e raggio } R = d(C, P). \end{cases}$$

Si noti che la sfera che individua la circonferenza non è unica.

**(6.5.5) Esercizio** *Scrivere l'equazione della superficie ottenuta ruotando la retta*

$$s : \begin{cases} x = 2t, \\ y = t, \\ z = -t, \end{cases}$$

*attorno alla retta*

$$a : \begin{cases} x + y = 0, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

*Soluzione.* Osserviamo che le rette  $a$  ed  $s$  sono incidenti in  $O = (0, 0, 0)$ . Con la rotazione otteniamo un cono di vertice l'origine. Troviamone l'equazione. Nel nostro caso  $\mathcal{L} = s$ . Consideriamo un punto  $P \in s$ , quindi  $P = (2t, t, -t)$ . Individuiamo i parametri direttori della retta  $a$  (con la regola dei minori): essi sono

$$\ell_a = 1, \quad m_a = -1, \quad n_a = -1.$$

Allora il piano  $\pi$  passante per  $P$  e ortogonale all'asse  $a$  è:

$$\pi : x - y - z - 2t = 0.$$

Come sfera  $\Sigma$  da intersecare consideriamo quella con centro  $O$  e raggio pari a  $d(O, P) = t\sqrt{6}$ .

Quindi

$$Q : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6t^2, \\ x - y - z = 2t. \end{cases}$$

Eliminando il parametro  $t$  si giunge all'equazione cartesiana

$$Q : x^2 + y^2 + z^2 - 6xy - 6xz + 6yz = 0.$$



**(6.5.6) Osservazione** La superficie  $Q$  individuata nell'esercizio precedente si compone di infinite circonferenze. Se prendiamo un qualsiasi piano ortogonale ad  $a$  (e non passante per  $O$ ) e lo intersechiamo con  $Q$ , otteniamo sempre delle circonferenze (e lo sappiamo per come abbiamo ottenuto  $Q$ ). Ciò significa che, ad esempio, la curva

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6xy - 6xz + 6yz = 0, \\ x - y - z = 1, \end{cases}$$

è una circonferenza. Si verifichi che effettivamente  $C$  è una circonferenza applicando i metodi precedentemente introdotti.

**(6.5.7) Esercizio** Scrivere l'equazione della superficie ottenuta ruotando la retta

$$r : \begin{cases} x = 1, \\ z = 2y, \end{cases}$$

attorno alla retta di equazione

$$a : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

*Soluzione.* Notiamo che l'asse di rotazione  $a$  è l'asse  $z$ . Le rette  $r$  ed  $a$  non hanno punti in comune. Se fosse  $r \parallel a$ , per rotazione otterremmo un cilindro circolare retto, ma  $r \not\parallel a$ . Allora  $r$  ed  $a$  sono sghembe. Sia  $P \in r$ , quindi  $P = (1, t, 2t)$ . Il piano  $\pi$  passante per  $P$  ed ortogonale all'asse  $a$  ha equazione

$$\pi : z - 2t = 0,$$

infatti, i parametri direttori dell'asse  $z$  sono

$$\ell_a = 0, \quad m_a = 0, \quad n_a = 1.$$

Dal fatto che  $O = (0, 0, 0) \in a$  consideriamo la sfera  $\Sigma$  di centro  $O$  e raggio  $d(O, P) = \sqrt{1 + 5t^2}$ :

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 5t^2.$$

Procedendo come nell'esercizio precedente, otteniamo la superficie

$$Q : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 5t^2, \\ z - 2t = 0. \end{cases}$$

Eliminando il parametro  $t$ , otteniamo

$$Q : x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1,$$

e l'esercizio è concluso. ♣

La quadrica  $Q$  dell'esercizio precedente si chiama *iperboloide a una falda* o *iperboloide iperbolico* ed è doppiamente rigata, cioè per ogni punto di  $Q$  passano due rette reali e distinte interamente contenute in  $Q$ . Se sezioniamo la superficie  $Q$  con il piano  $x = 0$  otteniamo (nel piano  $yz$ ) un'iperbole. Se sezioniamo  $Q$  con il piano  $y = 0$  otteniamo (nel piano  $xz$ ) un'iperbole. Se sezioniamo con il piano  $z = 0$  otteniamo una circonferenza di raggio unitario, se invece sezioniamo con  $z = k$  otteniamo una circonferenza con raggio crescente al crescere di  $|k|$ .

Più in generale, sia  $\mathcal{L}$  una curva del piano  $yz$  che vogliamo ruotare attorno all'asse  $z$ .

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x = 0, \\ F(y, z) = 0. \end{cases}$$

Sia  $P = (0, y_0, z_0)$  con  $F(y_0, z_0) = 0$ . Il piano passante per  $P$  ed ortogonale all'asse  $z$  è  $z = z_0$ . La sfera di centro  $O = (0, 0, 0)$  e raggio  $d(O, P)$  è data da  $x^2 + y^2 + z^2 = y_0^2 + z_0^2$ . Pertanto, la superficie di rotazione che cerchiamo è data da

$$Q : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = y_0^2 + z_0^2, \\ z = z_0, \\ F(y_0, z_0) = 0, \end{cases}$$

ovvero:

$$Q : F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

In modo analogo, se

$$\mathcal{L} : \begin{cases} z = 0, \\ F(x, y), \end{cases}$$

e vogliamo la superficie di rotazione  $Q$  ottenuta ruotando  $\mathcal{L}$  attorno all'asse  $x$ , troveremo

$$Q : F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

Similmente, se

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x = 0, \\ F(y, z) = 0, \end{cases}$$

e vogliamo la superficie di rotazione  $Q$  ottenuta ruotando  $\mathcal{L}$  attorno all'asse  $y$  troveremo

$$Q : F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}).$$

**(6.5.8) Esercizio** Scrivere l'equazione della superficie  $\Sigma$  generata dalla rotazione della curva

$$\mathcal{L} : \begin{cases} (y - 2)^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

attorno all'asse  $z$ .

*Soluzione.* Nel piano  $x = 0$  la prima equazione del sistema rappresenta una circonferenza di centro  $(0, 2, 0)$  e raggio  $R = 1$ . Risolvendo l'esercizio si otterrà un *toro* o *superficie torica* di equazione

$$\Sigma : \left( \pm \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + z^2 = 1,$$

da cui

$$\Sigma : (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = \left( \pm 4 \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2,$$

ossia

$$\Sigma : (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2).$$



**(6.5.9) Esercizio** *Si dica se la superficie*

$$S : x^2 - 4y^2 + z^2 + 2z = 0$$

*è di rotazione attorno alla retta*

$$a : \begin{cases} x = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases}$$

*Soluzione.* Affinchè  $S$  sia una superficie di rotazione rispetto all'asse  $a$  deve succedere che sezionando  $S$  con piani ortogonali alla retta  $a$  si ottengono delle circonferenze. Un generico piano ortogonale all'asse di rotazione  $a$  è  $y = k$ . Allora

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 + z^2 + 2z = 0, \\ y = k, \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} x^2 + z^2 + 2z = 4k^2, \\ y = k, \end{cases}$$

che nel piano  $xz$  e nei suoi paralleli è una circonferenza. Pertanto la superficie  $S$  è di rotazione. ♣

## 6 Punti semplici e punti singolari

**(6.6.1) Definizione** *Siano  $\Sigma$  una superficie algebrica reale e  $P$  un punto di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Chiamiamo molteplicità di  $\Sigma$  in  $P$  (in simboli  $m_P(\Sigma)$ ) il minimo delle molteplicità di intersezione in  $P$  di  $\Sigma \cap r$ , dove  $r$  è una retta che varia nella stella di centro  $P$  e non è contenuta in  $\Sigma$ .*

**(6.6.2) Osservazione** *Siano  $\Sigma$  una superficie algebrica reale e  $P$  un punto di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) se  $P \in \Sigma$ , risulta  $1 \leq m_P(\Sigma) \leq n$ , essendo  $n$  l'ordine di  $\Sigma$ ;

(b)  $m_P(\Sigma) = 0$  se, e solo se,  $P \notin \Sigma$ .

**(6.6.3) Definizione** Siano  $\Sigma$  una superficie algebrica reale e  $P$  un punto di  $\Sigma$ . Diciamo che  $P$  è un punto

– semplice per  $\Sigma$  se  $m_P(\Sigma) = 1$ ;

– multiplo o singolare per  $\Sigma$  se  $m_P(\Sigma) \geq 2$ .

In particolare, se  $m_P(\Sigma) = 2$  o  $m_P(\Sigma) = 3$  diremo, rispettivamente, che  $P$  è un punto doppio o triplo.

Vogliamo ora pervenire ad un teorema di caratterizzazione dei punti singolari. Per questo abbiamo bisogno dei seguenti due lemmi.

**(6.6.4) Lemma** Siano  $\mathbb{K}$  un campo,  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$  e  $\alpha$  una radice di  $f(x)$ . Allora  $\alpha$  è radice con molteplicità algebrica maggiore o uguale a due se, e solo se,  $\alpha$  è radice di  $f(x)$  e di  $f'(x)$ .

*Dimostrazione.* Per il Teorema di Ruffini, se  $\alpha$  è radice di  $f(x)$  si ha:

$$f(x) = (x - \alpha)^h g(x), \quad \text{con } h \geq 1 \text{ e } g(\alpha) \neq 0,$$

ed  $h$  è la molteplicità di  $\alpha$ . La derivata formale di  $f(x)$  è data da:

$$f'(x) = h(x - \alpha)^{h-1} g(x) + (x - \alpha)^h g'(x).$$

Se  $h = 1$  si ha

$$f'(x) = g(x) + (x - \alpha)g'(x).$$

Pertanto,  $f'(\alpha) = g(\alpha) \neq 0$  e quindi  $\alpha$  non è radice di  $f'(x)$  e viceversa.

Se  $h \geq 2$  si ha  $f'(\alpha) = 0$ , quindi  $\alpha$  è radice di  $f'(x)$  e di  $f(x)$ . ■

**(6.6.5) Lemma (di derivazione delle funzioni composte in più variabili)** Sia  $f = f(x_1, \dots, x_4)$ . Poniamo  $x_i = g_i(t)$  e definiamo  $F(t) = f(g_1(t), \dots, g_4(t))$ . Allora

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dg_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_4} \frac{dg_4}{dt}.$$

Se, inoltre,  $P_0 = (g_1(t_0), \dots, g_4(t_0))$  si ha

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{P_0} \left(\frac{dg_1}{dt}\right)_{P_0} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_{P_0} \left(\frac{dg_4}{dt}\right)_{P_0}.$$

**(6.6.6) Teorema (di caratterizzazione dei punti singolari)** *Siano*

$$\Sigma: F(x_1, \dots, x_4) = 0$$

una superficie algebrica reale e  $P$  un punto di  $\Sigma$ . Allora  $P$  è semplice per  $\Sigma$  se, e solo se, almeno una delle derivate parziali di  $F(x_1, \dots, x_4)$  calcolata in  $P$  è diversa da zero.

Equivalentemente,  $P$  è singolare per  $\Sigma$  se, e solo se,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_P = 0 \quad i = 1, \dots, 4.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo che  $P$  è singolare se, e solo se,  $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_P = 0$  per  $i = 1, 2, 3, 4$ . Poniamo  $P = [(p_1, \dots, p_4)]$ . Dal fatto che dobbiamo imporre  $m_P(\Sigma) \geq 2$ , dovremo considerare le rette passanti per  $P$  e intersecarle con  $\Sigma$ . Sia  $Q = [(x'_1, \dots, x'_4)]$ , con  $Q \neq P$ . La retta  $r = \text{rt}(P, Q)$  ha equazione

$$r: \begin{cases} x_i = \lambda p_i + \mu x'_i \\ i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Osserviamo che per  $\lambda \neq 0$  e  $\mu = 0$  si ha il punto  $P$ . La retta  $r$  può essere scritta anche nella seguente forma:

$$r: \begin{cases} x_i = p_i + tx'_i \\ i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (t = \mu/\lambda).$$

Per  $t = 0$  otteniamo il punto  $P$ . L'unico punto non rappresentato da questa parametrizzazione è  $Q$ . Poichè vogliamo condurre un'indagine locale delle intersezioni fra  $r$  e  $\Sigma$  riunite in  $P$  possiamo considerare il seguente sistema:

$$\Sigma \cap r: \begin{cases} F(x_1, \dots, x_4) = 0, \\ x_i = p_i + tx'_i, \\ i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

L'equazione che risolve il precedente sistema è data da

$$\tilde{F}(t) = F(p_1 + tx'_1, p_2 + tx'_2, p_3 + tx'_3, p_4 + tx'_4) = 0.$$

Il polinomio  $\tilde{F}(t)$  è non omogeneo e di grado  $n$  in  $t$ . Allora sarà della forma:

$$\tilde{F}(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^{n-k} = 0.$$

Il punto  $P$  è singolare se, e solo se,  $t = 0$  è radice almeno doppia del polinomio  $\tilde{F}(t)$ . Dal Lemma (6.6.4) abbiamo che  $t = 0$  è radice doppia per il polinomio  $\tilde{F}(t)$  se, e solo se,  $t = 0$  è radice anche di  $\tilde{F}'(t)$ . Dal Lemma (6.6.5) otteniamo:

$$\tilde{F}'(t) = \frac{d\tilde{F}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_1} x'_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_4} x'_4.$$

Imponendo che  $\tilde{F}'(0) = 0$ , si ha

$$\tilde{F}'(0) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_P x'_1 + \dots + \left( \frac{\partial F}{\partial x_4} \right)_P x'_4 = 0.$$

Allora, il punto  $P$  è singolare se, e solo se,  $\tilde{F}'(0) = 0$  per ogni scelta di  $Q \in \mathbb{P}_3(\mathbb{C}) \setminus \{P\}$ . Ciò equivale ad affermare che il punto  $P$  è singolare se, e solo se,  $\left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_P = 0$  per ogni  $i = 1, 2, 3, 4$ . ■

Sia ora  $P = [(p_1, \dots, p_4)]$  un punto semplice di  $\Sigma$ , dove

$$\Sigma : F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

con  $F$  polinomio omogeneo di grado  $n$ . Consideriamo la seguente equazione:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_P x_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_P x_2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_3} \right)_P x_3 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_4} \right)_P x_4 = 0.$$

Poniamo  $a_i = \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_P$  per  $i = 1, 2, 3, 4$ . Poichè  $(a_1, \dots, a_4) \neq (0, \dots, 0)$  essendo  $P$  semplice, l'equazione

$$\tau_P : a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

rappresenta un piano di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ .

**(6.6.7) Osservazione** Il punto  $P$  appartiene al piano  $\tau_P$ .

*Dimostrazione.* Per definizione di superficie algebrica, il polinomio  $F$  è un polinomio omogeneo, ossia

$$F(tx_1, \dots, tx_4) = t^n F(x_1, \dots, x_4).$$

Derivando ora rispetto a  $t$  entrambi i membri si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_4} x_4 = nt^{n-1} F(x_1, \dots, x_4).$$

Per  $t = 1$  giungiamo all'identità di Eulero:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_4} x_4 = nF(x_1, \dots, x_4).$$



Ricordando che  $P \in \Sigma$ , si ha  $F(p_1, \dots, p_4) = 0$  e, considerando l'identità di Eulero applicata a  $P$ , risulta

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_P p_1 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_4}\right)_P p_4 = nF(p_1, \dots, p_4) = 0.$$

Quindi, se  $P \in \Sigma$  si ha sempre

$$(6.6.8) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_P p_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_P p_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_P p_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_4}\right)_P p_4 = 0.$$

Riprendendo l'espressione di  $\tau_P$ , deduciamo che la relazione (6.6.8) equivale ad affermare che  $P \in \tau_P$ . ■

**(6.6.9) Osservazione** Sia  $Q = [(x'_1, \dots, x'_4)]$ ,  $Q \in \tau_P \setminus \{P\}$  cioè

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_P x'_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_P x'_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_P x'_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_4}\right)_P x'_4 = 0.$$

Questa condizione, alla luce del Teorema (6.6.6), afferma che la retta  $\text{rt}(P, Q)$  è tale che almeno due delle  $n$  intersezioni con  $\Sigma$  sono riunite in  $P$ . Allora la retta  $\text{rt}(P, Q)$  è contenuta in  $\Sigma$  oppure è una retta tangente a  $\Sigma$  in  $P$ .

**(6.6.10) Definizione** Siano

$$\Sigma : F(x_1, \dots, x_4) = 0$$

una superficie algebrica reale e  $P \in \Sigma$  un punto semplice. Chiamiamo piano tangente alla superficie  $\Sigma$  in  $P$  il piano  $\tau_P$  definito dall'equazione:

$$\tau_P : \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_P x_i = 0.$$

## 7 Applicazione alle quadriche

**(6.7.1) Proposizione** Sia  $Q$  una quadrica di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Allora  $Q$  non ha punti tripli.

*Dimostrazione.* Sia  $P \in Q$ . Dall'Osservazione (6.6.2) deduciamo che

$$1 \leq m_P(Q) \leq 2,$$

pertanto possiamo avere al più punti doppi. ■

**(6.7.2) Proposizione** Sia  $Q$  una quadrica di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Allora sono fatti equivalenti:

(a)  $Q$  è riducibile;

(b)  $Q$  ha almeno due punti doppi.

*Dimostrazione.*

(a)  $\implies$  (b) Sia  $Q$  una quadrica riducibile. Allora  $Q$  si spezza in due piani  $\alpha$  e  $\beta$  (eventualmente coincidenti). Se  $\alpha \neq \beta$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  possono essere entrambi reali oppure  $\beta = \bar{\alpha}$  (perchè  $Q$  è una superficie algebrica reale). Sia  $r = \alpha \cap \beta$ . Risulta che  $r$  è una retta reale. Verifichiamo che tutti i punti della retta  $r$  sono doppi per  $Q$ . Siano  $A \in r$  ed  $s$  una retta per  $A$ . Per il I Teorema sull'ordine, si ha che  $|s \cap Q| = 2$  e  $A \in (s \cap Q)$ . Sia  $B \in (s \cap Q)$ , con  $B \neq A$ . Allora  $B$  deve appartenere ad  $\alpha$  oppure a  $\beta$ . Se  $B \in \alpha$ , risulta  $s \subseteq \alpha$ , altrimenti  $s \subseteq \beta$ , pertanto  $s \subseteq Q$ . Da ciò deduciamo che una retta  $s$  passante per  $A$  e non contenuta in  $Q$  deve essere tale che  $s \cap Q = A$  (contato due volte). Allora  $A$  è punto doppio per  $Q$ . Dall'arbitrarietà di  $A \in r$ , segue che tutti i punti di  $r$  sono doppi. Se ora  $\alpha = \beta$ , abbiamo  $Q = \alpha \cup \alpha$ . Sia  $A \in \alpha$ . Per il punto  $A$  valgono le stesse considerazioni fatte nel passo precedente, ossia  $A$  è punto doppio per  $Q$ . Allora tutti i punti del piano  $\alpha$  sono doppi.

(b)  $\implies$  (a) Supponiamo che  $Q$  possieda due punti doppi  $A$  e  $B$  distinti. Poniamo  $r = \text{rt}(A, B)$ . Allora  $|Q \cap r| \geq 4$ . Se la retta  $r$  ha quattro punti in comune con una quadrica segue che  $r \subseteq Q$  (per il I Teorema sull'ordine). Sia ora  $C \in Q$  con  $C \notin r$ . Sia  $s = \text{rt}(A, C)$ . Allora  $|Q \cap s| \geq 3$ , da cui  $s \subseteq Q$ . Sia ora  $t = \text{rt}(B, C)$  e, quindi,  $|Q \cap t| \geq 3$ . Pertanto  $r, s, t \subseteq Q$ . Poniamo  $\alpha = \text{pn}(A, B, C)$ . Notiamo che  $\alpha \cap Q$  non è una conica, e per il II Teorema sull'ordine deve essere  $\alpha \subseteq Q$ , da cui la tesi. ■

**(6.7.3) Proposizione** Sia  $Q$  una quadrica di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Allora sono fatti equivalenti:

(a)  $Q$  è un cono;

(b)  $Q$  ha esattamente un punto doppio.

*Dimostrazione.*

(a)  $\implies$  (b) Supponiamo che  $Q$  sia un cono. Dalla Proposizione (6.2.10) sappiamo che  $Q$  è irriducibile e, quindi, dalla Proposizione (6.7.2) deduciamo che  $Q$  avrà al più un punto doppio. Tale punto è il vertice  $V$  del cono in quanto tutte le rette passanti per  $V$  (non contenute in  $Q$ ) intersecano  $Q$  solo in  $V$ .

(b)  $\implies$  (a) Supponiamo che  $Q$  possieda un solo punto doppio  $D$ . Dobbiamo verificare

che  $Q$  verifica la definizione (6.2.2) di cono. Notiamo che  $Q$  non è riducibile per la Proposizione (6.7.2). Dimostriamo che  $Q$  ammette almeno una sezione piana irriducibile. Infatti, se per assurdo tutte le sezioni piane di  $Q$  fossero riducibili, esisterebbe un piano  $\alpha$  con  $D \notin \alpha$  tale che  $Q \cap \alpha = r \cup s$ . Sia  $R \in r$ . Consideriamo la retta  $t = \text{rt}(D, R)$ . Allora  $|Q \cap t| \geq 3$ . Per il I Teorema sull'ordine si ha  $t \subseteq Q$ . Per l'arbitrarietà del punto  $R$ , otteniamo  $\text{pn}(D, r) \subseteq Q$ . Ciò significa che  $Q$  è riducibile, assurdo.

Sia quindi  $\beta$  un piano tale che la conica  $\mathcal{C} = Q \cap \beta$  sia irriducibile. Il punto  $D$  non appartiene a  $\beta$ . In tal caso il punto  $D$  risulterebbe essere doppio per tutte le coniche date da sezioni di  $Q$  per piani passanti per  $D$ . Siano  $X \in \mathcal{C}$  e  $x = \text{rt}(X, D)$ . Allora  $|x \cap Q| \geq 3$  e quindi, per il I Teorema sull'ordine,  $x \subseteq Q$ . Dall'arbitrarietà di  $X$  risulta che tutte le rette  $\text{rt}(D, X)$  appartengono a  $Q$  e tali rette sono quelle che proiettano da  $D$  i punti di  $\mathcal{C}$ . Otteniamo così il cono quadrico  $Q'$  di vertice  $D$  e curva direttrice  $\mathcal{C}$ . Allora  $Q' \subseteq Q$ . Poichè  $Q$  e  $Q'$  sono entrambi rappresentati da polinomi di secondo grado, essi devono coincidere a meno di un fattore moltiplicativo, quindi  $Q = Q'$ . ■

**(6.7.4) Definizione** Sia  $Q$  una quadrica di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Diciamo che  $Q$  è

- generale se non ha punti doppi;
- cono se ha esattamente un punto doppio;
- semplicemente riducibile se ha una retta di punti doppi;
- doppiamente riducibile se tutti i suoi punti sono doppi.

**(6.7.5) Teorema** Sia  $Q$  una quadrica di equazione

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = 0, \quad A^t = A.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- (a)  $Q$  è generale se, e solo se,  $\det(A) \neq 0$  cioè  $\text{rg}(A) = 4$ ;
- (b)  $Q$  è un cono se, e solo se,  $\text{rg}(A) = 3$ ;
- (c)  $Q$  è semplicemente riducibile se, e solo se,  $\text{rg}(A) = 2$ ;
- (d)  $Q$  è doppiamente riducibile se, e solo se,  $\text{rg}(A) = 1$ .

*Dimostrazione.* Sia  $Q$  una quadrica i cui punti soddisfano l'equazione  $F(x_1, \dots, x_4) = 0$ , essendo  $F$  un polinomio omogeneo di secondo grado. Un punto  $P$  è singolare per  $Q$  se, e solo se,  $P$  è autosoluzione del sistema delle derivate parziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \\ i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Determiniamo direttamente le derivate parziali di  $F$ . Dal fatto che

$$F(x_1, \dots, x_4) = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

il sistema precedente assume la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0. \end{cases}$$

Otteniamo così un sistema lineare omogeneo in  $x_1, \dots, x_4$ . In forma matriciale, il sistema precedente diviene

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

dove  $A$  è la matrice dei coefficienti di  $Q$ . Sfruttiamo quindi la teoria dei sistemi lineari per dimostrare il teorema.

(a) Il  $\det(A) \neq 0$  se, e solo se, l'unica soluzione del sistema è  $(0, \dots, 0)$  cioè non esiste alcun punto doppio se ovvero  $Q$  è generale.

(b) Il  $\text{rg}(A) = 3$  se, e solo se, il sistema possiede  $\infty^{4-\text{rg}(A)} = \infty^1$  soluzioni che risultano essere della forma

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \bar{x}_1, \\ x_2 = \lambda \bar{x}_2, \\ x_3 = \lambda \bar{x}_3, \\ x_4 = \lambda \bar{x}_4, \end{cases}$$

(con  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)$  soluzione non banale del sistema) ovvero esiste un solo punto doppio di coordinate  $[(\lambda \bar{x}_1, \dots, \lambda \bar{x}_4)]$ .

(c) Il  $\text{rg}(A) = 2$  se, e solo se, il sistema possiede  $\infty^2$  soluzioni che sono della forma

$$\begin{cases} x_i = \lambda \bar{x}_i + \mu \bar{y}_i, \\ i = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$$

(dove  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)$  e  $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_4)$  sono soluzioni non banali del sistema e non proporzionali tra loro) cioè abbiamo una retta di punti doppi.

(d) Questo caso rimane automaticamente verificato per esclusione. ■

**(6.7.6) Osservazione** Si noti che qualora la quadrica abbia punti doppi, le loro coordinate sono autosoluzioni del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Quindi i punti singolari di una quadrica, se esistono, sono punti reali di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ .

**(6.7.7) Esercizio** Sia

$$Q : x^2 + 2hxz + y^2 + 4yz + 5hz^2 + 2x + 1 = 0$$

una famiglia di quadriche. Si studi la riducibilità di  $Q$  al variare del parametro  $h \in \mathbb{R}$ .

*Soluzione.* Consideriamo la matrice  $A$  dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ h & 2 & 5h & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risulta  $\det(A) = -h^2$ . Se  $h \neq 0$ ,  $Q$  è una quadrica generale. Se  $h = 0$  si verifica facilmente che  $\text{rg}(A) = 3$ , pertanto  $Q$  è un cono dal punto di vista proiettivo. Studiamo tale cono. La sua equazione è data da

$$Q : x^2 + y^2 + 4yz + 2z + 1 = 0.$$

Il vertice del cono è l'unico punto doppio che possiede  $Q$ . Per trovare il vertice  $V$  bisogna risolvere il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 = 0, \\ x_1 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si trova  $V = [(-1, 0, 0, 1)]$ , quindi  $V$  è un punto proprio reale. Le coordinate affini di  $V$  sono  $(-1, 0, 0)$ .

Ci chiediamo ora se tale cono  $Q$  è a punti reali. Notiamo che tutti i punti del tipo  $(-1, 0, t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) sono contenuti in  $Q$ . Tuttavia

$$r : \begin{cases} x = -1, \\ y = 0, \\ z = t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

è una retta reale che è generatrice del cono  $Q$ . Segue che il cono  $Q$  è a falda reale. ♣

**(6.7.8) Esercizio** Stabilire per quali valori del parametro  $\lambda \in \mathbb{R}$  la quadrica

$$Q : x^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2\lambda yz + 1 = 0$$

è riducibile.

*Soluzione.* Scriviamo la matrice  $A$  dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risulta  $\det(A) = -(\lambda - 1)^2$ . Se  $\lambda \neq 1$ , la quadrica  $Q$  è generale. Se  $\lambda = 1$ , si verifica facilmente che  $\text{rg}(A) = 2$ , pertanto  $Q$  è sempre riducibile in due piani distinti  $\alpha$  e  $\beta$ . La retta reale formata da punti doppi è data dalla soluzione del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Esplicitando tale sistema otteniamo:

$$r : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Poichè  $r$  è impropria, i piani  $\alpha$  e  $\beta$  che compongono  $Q$  visti nello spazio affine sono paralleli. Proviamo a determinarli per  $\lambda = 1$ : l'equazione di  $Q$  diviene

$$Q : (x + y + z)^2 + 1 = 0.$$

Proiettivamente abbiamo:

$$Q : (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_4^2 = 0,$$

che si fattorizza in

$$Q : (x_1 + x_2 + x_3 + ix_4)(x_1 + x_2 + x_3 - ix_4) = 0.$$

Pertanto, in coordinate affini, i piani componenti  $Q$  sono:

$$\alpha : x + y + z = i \quad \text{e} \quad \bar{\alpha} : x + y + z = -i.$$



## 8 Caratterizzazione geometrica del piano tangente

Ricordiamo che se

$$Q : F(x_1, \dots, x_4) = 0$$

e  $P$  è un punto semplice per  $Q$  abbiamo definito

$$\tau_P : \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_P x_i = 0,$$

ed abbiamo chiamato  $\tau_P$  *piano tangente a  $Q$  in  $P$* . Tutte le rette di  $\tau_P$  passanti per  $P$  e non contenute in  $Q$  sono tangenti a  $Q$  in  $P$ . Se  $Q$  è una quadrica la sua equazione può essere scritta in forma matriciale:

$$Q: \quad \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = 0.$$

Allora, il piano  $\tau_P$  lo si può esplicitare in quattro forme equivalenti:

$$\tau_P: \quad \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_P x_i = 0;$$

$$\tau_P: \quad \sum_{i=1}^4 \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i^{(P)} = 0;$$

$$\tau_P: \quad \mathbf{x}^t A \mathbf{x}_P = 0;$$

$$\tau_P: \quad \mathbf{x}_P^t A \mathbf{x} = 0.$$

Vediamo ora quali proprietà ha il piano tangente in un punto semplice  $P$  a seconda della riducibilità o meno di  $Q$ . Se  $Q$  è una quadrica doppiamente riducibile, allora  $Q = \alpha \cup \alpha$  e quindi non ci sono punti semplici, pertanto nessun punto di  $Q$  possiede un piano tangente. Se ora  $Q = \alpha \cup \beta$ , con  $\alpha \neq \beta$ , e  $P \in \beta$  è un punto semplice per  $Q$ , si può verificare che  $\tau_P = \beta$  (in modo analogo, se  $P \in \alpha$  è semplice per  $Q$ , allora  $\tau_P = \alpha$ ). Se  $Q$  è una quadrica irriducibile e  $P \in Q$  è un punto semplice allora  $Q \cap \tau_P$  è una conica  $\mathcal{C}$  per il II Teorema sull'ordine. Tale conica deve passare per  $P$ .

**(6.8.1) Teorema** *Siano  $Q$  una quadrica irriducibile,  $P \in Q$  un punto semplice e  $\alpha$  un piano appartenente alla stella di piani di centro  $P$ . Allora sono fatti equivalenti:*

- (a)  $\alpha$  è il piano tangente a  $Q$  in  $P$ ;
- (b) la conica  $\mathcal{C} = Q \cap \alpha$  è riducibile in due rette passanti per  $P$ .

*Dimostrazione.*

(a)  $\implies$  (b) Sia  $\alpha = \tau_P$  e sia  $\mathcal{C} = Q \cap \tau_P$ , con  $\mathcal{C}$  conica passante per  $P$ . Sia  $r$  una retta del piano  $\tau_P$  non contenuta in  $Q$ . Allora  $r \cap Q = P$  contato due volte. Tuttavia

$$r \cap \mathcal{C} = r \cap (Q \cap \tau_P) = (r \cap Q) \cap \tau_P = P$$

contato due volte. Ciò significa che il punto  $P$  è doppio per la conica  $\mathcal{C}$  e quindi  $\mathcal{C}$  è riducibile nell'unione di due rette  $r$  ed  $s$  con  $P \in r \cap s$ .

(b)  $\implies$  (a) Supponiamo che  $\mathcal{C} = Q \cap \alpha = r \cup s$  con  $P \in r \cap s$ . Sia  $r'$  una retta del piano  $\alpha$  passante per  $P$ . Se  $r' = r$  oppure  $r' = s$  allora  $r' \subseteq Q$ . Sia ora  $r' \neq r$ . Proviamo che  $r'$  è una retta tangente a  $Q$  in  $P$ , cioè  $r' \cap Q$  è esattamente il punto  $P$  contato due volte.

$$r' \cap Q = (r' \cap Q) \cap \alpha = r' \cap (Q \cap \alpha) = r' \cap (r \cup s) = (r' \cap r) \cup (r' \cap s) = P \cup P.$$

Dall'arbitrarietà della retta  $r'$  in  $\alpha$ , deduciamo che tutte le rette del piano  $\alpha$  distinte da  $r$  e da  $s$  e passanti per  $P$  sono tangenti a  $Q$ , quindi  $\tau_P = \alpha$ . ■

**(6.8.2) Definizione** Siano  $Q$  una quadrica non riducibile,  $P \in Q$  un punto semplice e  $\tau_P$  il piano tangente a  $Q$  in  $P$ . Diciamo che  $P$  è un punto

- iperbolico se la conica  $\tau_P \cap Q$  consiste di due rette reali e distinte passanti per  $P$ ;
- parabolico se la conica  $\tau_P \cap Q$  consiste di due rette reali e coincidenti passanti per  $P$ ;
- ellittico se la conica  $\tau_P \cap Q$  consiste di due rette immaginarie e coniugate passanti per  $P$ .

**(6.8.3) Esercizio** Si consideri la sfera

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

e sia  $P = (1, 0, 0) \in S$ . Verificare che  $P$  è un punto ellittico.

*Soluzione.* Passando a coordinate omogenee otteniamo:

$$S: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

e  $P = [(1, 0, 0, 1)]$ . Inoltre, calcolando  $\partial F / \partial x_i$ , per  $i = 1, \dots, 4$ , abbiamo:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_P = 2, \quad \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_P = 0, \quad \left( \frac{\partial F}{\partial x_3} \right)_P = 0, \quad \left( \frac{\partial F}{\partial x_4} \right)_P = -2.$$

Segue che il piano tangente ad  $S$  in  $P$  ha equazione

$$\tau_P: \quad x_1 = x_4,$$

ossia

$$\tau_P: \quad x = 1,$$



Risolvendo il sistema

$$\tau_P \cap S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

otteniamo:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1, \\ y + iz = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1, \\ y - iz = 0, \end{cases}$$

pertanto il punto  $P$  è ellittico. Per simmetria, ogni punto di  $S$  è ellittico. ♣

**(6.8.4) Esercizio** *Si consideri la quadrica*

$$Q : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0,$$

*ed il punto  $P = (1, 0, 0) \in Q$ . Si dica se il punto  $P$  è parabolico, iperbolico oppure ellittico.*

*Soluzione.* Si verifica facilmente che la matrice  $A$  dei coefficienti ha rango 3. Quindi  $Q$  è un cono; in particolare possiamo osservare che nell'equazione cartesiana di  $Q$  non compare la  $z$  quindi, dal punto di vista affine,  $Q$  è un cilindro con vertice  $Z_\infty$ . Passando a coordinate proiettive omogenee si ha

$$Q : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 + x_4^2 = 0.$$

Il piano tangente a  $Q$  in  $P$  ha equazione

$$\tau_P : x_2 = 0,$$

ovvero

$$\tau_P : y = 0.$$

Risolvendo il sistema

$$\tau_P \cap Q : \begin{cases} y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0, \end{cases}$$

otteniamo due rette  $r_1$  ed  $r_2$  reali e tali che  $r_1 = r_2$  di equazione

$$\begin{cases} y = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

Deduciamo da ciò che il punto  $P$  è parabolico. ♣

Questa proprietà è tipica dei coni nel senso del seguente

**(6.8.5) Teorema** *Sia  $Q$  una quadrica irriducibile. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *la quadrica  $Q$  ha un punto parabolico;*

(b) la quadrica  $Q$  è un cono.

*Dimostrazione.*

(a)  $\implies$  (b) Sia  $P \in Q$  un punto semplice e parabolico. Proviamo che  $Q$  è un cono dimostrando che  $Q$  ha esattamente un punto doppio (cfr. Proposizione (6.7.3)). Dal fatto che il punto  $P$  è parabolico, si ha  $\tau_P \cap Q = r \cup r = \mathcal{C}$ . Sia  $X$  un punto qualsiasi di  $r$ . Se  $X$  è un punto semplice per  $Q$  si ha  $\tau_X = \tau_P$  poichè dal Teorema (6.8.1) si deduce che il piano tangente è l'unico piano passante per  $X$  che interseca  $Q$  secondo una conica riducibile. Segue che tutti i punti semplici di  $r$  sono parabolici. Sia ora  $C \in Q$ , con  $C \notin \tau_P$  (un tale punto esiste sicuramente in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ ). Sia  $\alpha$  il piano individuato da  $C$  e da  $r$  e sia  $\mathcal{G} = \alpha \cap Q$ . La conica  $\mathcal{G}$  dovrà contenere la retta  $r$  ed il punto  $C$ . Allora  $\mathcal{G}$  è riducibile, ossia  $\alpha \cap Q = \mathcal{G} = r \cup s$ , con  $C \in s$  ed  $s \neq r$ . Sia  $D$  il punto di intersezione di  $r$  con  $s$ . Se il punto  $D$  fosse semplice, allora ci sarebbero due piani tangenti:  $\alpha$  e  $\tau_P$ . Ciò è assurdo poichè il piano tangente è unico. Allora il punto  $D$  è doppio. Se ora ci fosse un altro punto doppio, la quadrica  $Q$  sarebbe riducibile per la Proposizione (6.7.2) e ciò va contro l'ipotesi. Deduciamo che  $D$  è l'unico punto doppio di  $Q$ , quindi, per la Proposizione (6.7.3),  $Q$  è un cono.

(b)  $\implies$  (a) Siano  $Q$  un cono di vertice  $V$ ,  $P \in Q$  con  $P \neq V$  e  $\tau_P$  il piano tangente a  $Q$  in  $P$ . Allora  $\tau_P \cap Q = r \cup s$ . Poichè  $r$  ed  $s$  appartengono a  $Q$ , per la Proposizione (6.2.10) si ha  $V \in r$  e  $V \in s$ . Allora  $r = s$ , quindi il punto  $P$  è parabolico. Dall'arbitrarietà di  $P \in Q \setminus \{V\}$ , possiamo affermare che tutti i punti semplici di  $Q$  sono parabolici. ■

**(6.8.6) Teorema** *Siano  $Q$  una quadrica irriducibile e  $P \in Q$  un punto iperbolico. Allora tutti i punti di  $Q$  sono iperbolici.*

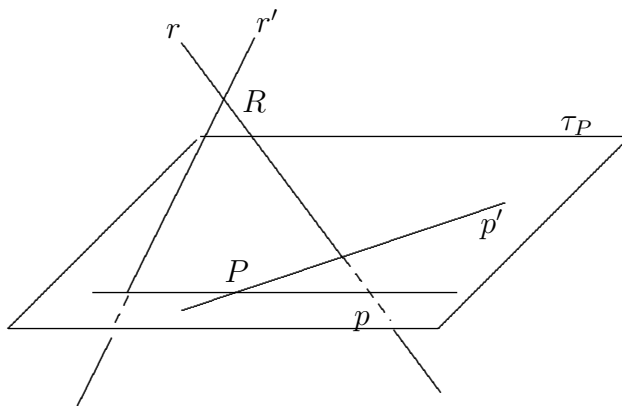
*Dimostrazione.* Sia  $P \in Q$  un punto semplice e iperbolico. Allora  $\tau_P \cap Q = p \cup p'$ , con  $p$  e  $p'$  due rette reali e distinte e  $P = p \cap p'$ . Sia  $S \in Q$  con  $S \notin \tau_P$  (certamente esistente in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ ). Sia  $\alpha$  il piano individuato da  $S$  e dalla retta  $p$ . Poniamo  $\mathcal{C} = Q \cap \alpha$ . Tale conica contiene la retta  $p$  ed il punto  $S$ . Allora la conica  $\mathcal{C}$  è spezzata nella retta  $p$  ed in una retta  $s'$  uscente da  $S$ , ovvero  $Q \cap \alpha = \mathcal{C} = p \cup s'$  (con  $S \in s'$ ). Ripetiamo il medesimo discorso per il piano  $\beta$  dato da  $S$  e  $p'$ . Consideriamo la conica  $\mathcal{D} = Q \cap \beta$ . Allora  $Q \cap \beta = s \cup p'$  (con  $S \in s$ ). Le rette  $s$  ed  $s'$  sono rette reali. Non può accadere che  $s = s'$ , altrimenti la quadrica  $Q$  avrebbe in  $P$  più piani tangenti. Sia  $\gamma$  il piano individuato da  $s$  ed  $s'$ . Allora  $\gamma \cap Q = s \cup s'$ , pertanto  $\gamma$  è il piano tangente in  $S$  a  $Q$ . In questo modo abbiamo dimostrato che tutti i punti di  $Q$  non appartenenti a  $\tau_P$  sono

iperbolici.

Sia ora  $T \in \tau_P$  con  $T \neq P$ . Facendo le stesse considerazioni svolte prima su  $T$  e rispetto a un punto iperbolico di  $Q$  non appartenente a  $\tau_P$ , possiamo affermare che anche  $T$  è iperbolico. ■

**(6.8.7) Corollario** *Sia  $Q$  una quadrica irriducibile. Se  $Q$  possiede un punto ellittico, allora tutti i punti di  $Q$  sono ellittici.*

Sia  $Q$  una quadrica a punti iperbolici. Allora, per ogni  $X \in Q$  escono due rette reali e distinte passanti per  $X$ . Diciamo quindi che  $Q$  è una quadrica *doppiamente rigata*.



Riprendiamo le considerazioni contenute nella dimostrazione del Teorema (6.8.6). Fissato un punto  $P$  e il suo piano tangente  $\tau_P$  con  $\tau_P \cap Q = p \cup p'$  e considerando un punto  $X$  variabile su  $Q$  otteniamo

- una famiglia di rette  $\mathcal{R}_1 = \{r', s', t', \dots\}$ , tutte intersecanti la retta  $p$  in punti distinti e interamente contenute in  $Q$ ;
- una famiglia di rette  $\mathcal{R}_2 = \{r, s, t, \dots\}$ , tutte intersecanti la retta  $p'$  e interamente contenute in  $Q$ .

Queste due famiglie di rette contenute in  $Q$  si chiamano *regoli* o *schiere* di  $Q$ . Ciascuna delle due famiglie ricopre interamente la quadrica. Ogni punto di  $Q$  appartiene ad una sola retta di  $\mathcal{R}_1$  e ad una sola retta di  $\mathcal{R}_2$ .

**(6.8.8) Proposizione** *Sia  $Q$  una quadrica a punti iperbolici. Allora*

- (a) *rette di un medesimo regolo di  $Q$  sono sghembe tra loro;*

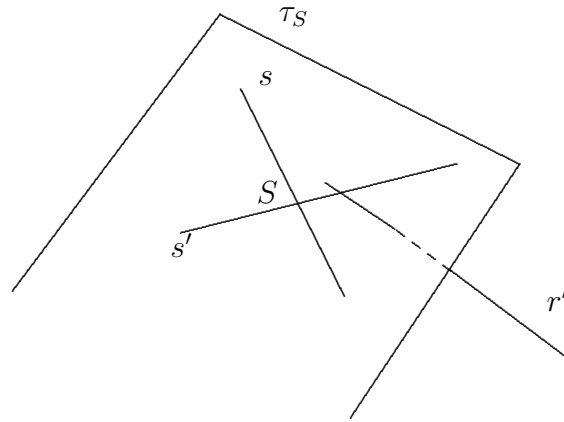
(b) rette appartenenti a regoli diversi sono incidenti.

*Dimostrazione.*

(a) Supponiamo, per assurdo, che  $r, s \in \mathcal{R}_1$  non siano sghembe tra loro e sia  $\alpha = \text{pn}(r, s)$ . Per definizione di regolo,  $r$  ed  $s$  intersecano entrambe la retta  $p'$ , quindi  $p' \subseteq \alpha$ . Allora,  $p', r, s \subseteq \alpha$ , quindi  $\alpha \subseteq Q$ : assurdo, poichè  $Q$  è irriducibile.

(b) La tesi è ovvia se consideriamo coppie di rette del tipo  $(p, p'), (r, r'), \dots$  che individuano i piani tangenti a  $Q$  e si intersecano nel punto di tangenza di  $Q$  con tali piani.

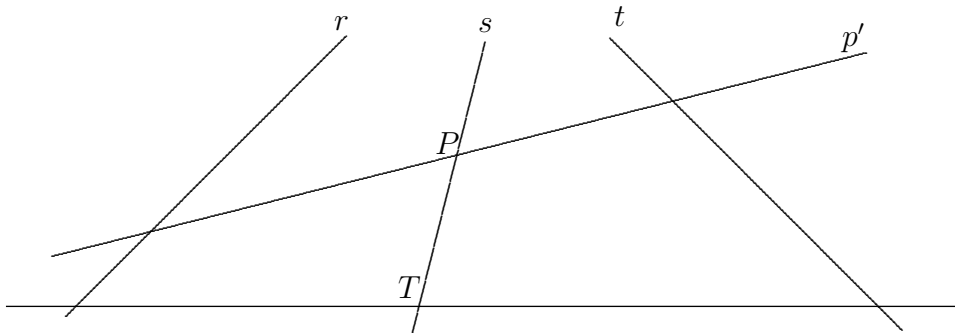
Consideriamo ora la retta  $s$  e la retta  $r'$  come in figura:



Le rette  $s$  ed  $s'$  definiscono il piano tangente  $\tau_S$ . Poichè  $r' \not\subseteq \tau_S$ , esiste un punto  $K$  tale che  $r' \cap \tau_S = K$ . Ma  $r' \subseteq Q$ , quindi  $K \in Q$ . Allora, poichè  $\tau_S \cap Q = s \cup s'$ , sarà  $r' \cap \tau_S \in s$  oppure  $r' \cap \tau_S \in s'$ . La retta  $r'$  non può intersecare la retta  $s'$  per la parte (a) di questa proposizione, quindi  $r' \cap \tau_S \in s$ , da cui la tesi. ■

In virtù delle precedenti proprietà, una quadrica  $Q$  a punti iperbolici è detta *doppia-mente rigata* perchè per ogni suo punto passano esattamente due rette interamente contenute in  $Q$ .

Sia  $\mathcal{R}_1$  un regolo di  $Q$  e siano  $r, s, t \in \mathcal{R}_1$ . Sia  $P$  un punto della retta  $s$  (cfr. figura)



È ben noto che per tale punto esiste una ed una sola retta  $p'$  che interseca sia  $r$  che  $t$ . Poichè  $p'$  ha almeno tre punti in comune con  $Q$ ,  $p' \subseteq Q$  e quindi  $p' \in \mathcal{R}_2$ . Viceversa, ogni retta del regolo  $\mathcal{R}_2$  deve intersecare  $r$ ,  $s$  e  $t$ . Dunque, al variare di  $P$  sulla retta  $s$  viene descritto tutto il regolo  $\mathcal{R}_2$  e la quadrica  $Q$  è completamente determinata. Possiamo dire quindi che sono sufficienti tre rette di uno stesso regolo per individuare completamente una quadrica  $Q$ . Più in generale:

**(6.8.9) Proposizione** *Siano  $r$ ,  $s$  e  $t$  tre rette reali a due a due sghembe di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Allora tali rette individuano una ed una sola quadrica a punti iperbolici che le contiene.*

**(6.8.10) Esercizio** *Studiare la quadrica*

$$Q: \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1.$$

*Soluzione.* La matrice  $A$  dei coefficienti risulta essere

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di  $A$  è diverso da zero. Allora  $Q$  è generale, pertanto non è un cono. Per dare una rappresentazione grafica consideriamo le sezioni di  $Q$  con i piani coordinati e con i loro paralleli. Ad esempio, se consideriamo il piano  $z = 0$  e lo intersechiamo con  $Q$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Otteniamo una ellisse del piano  $xOy$ . Consideriamo il generico piano  $z = k$ ,  $k \neq 0$ , e lo intersechiamo con  $Q$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1 + k^2, \\ z = k. \end{cases}$$

Otteniamo un'ellisse con semiassi crescenti al crescere di  $|k|$ . Deduciamo che  $Q$  non è una superficie di rotazione rispetto all'asse  $z$  in quanto le sezioni con piani paralleli al piano  $z = 0$  sono ellissi e non circonferenze. Le sezioni con gli altri due piani coordinati sono iperboli.

Vediamo ora che tipi di punti possiede  $Q$ . Consideriamo il punto  $P = (0, 3, 0)$ , ovvero  $P = [(0, 3, 0, 1)]$ . Si verifica facilmente che  $P \in Q$ . Determiniamo l'equazione del piano  $\tau_P$  ricordando che

$$\tau_P: \quad \sum_{i=1}^4 \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i^{(P)} = 0.$$

Dopo facili calcoli otteniamo che il piano tangente  $\tau_P$  ha equazione  $y = 3$ . Consideriamo  $\tau_P \cap Q$ :

$$\tau_P \cap Q : \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - z^2 = 1, \\ y = 3, \end{cases}$$

da cui si hanno le due rette reali di equazioni:

$$p : \begin{cases} y = 3, \\ x = -2z, \end{cases} \quad p' : \begin{cases} y = 3, \\ x = 2z, \end{cases}$$

quindi il punto  $P$  è iperbolico e  $Q$  è una quadrica doppiamente rigata.

Vogliamo trovare i regoli di  $Q$ . Consideriamo il fascio  $\mathcal{F}_p$  di piani passanti per la retta  $p$ :

$$\mathcal{F}_p : (x + 2z) + \lambda(y - 3) = 0.$$

Ogni piano di questo fascio interseca  $Q$  in una conica spezzata nella retta  $p$  e in un'altra retta (variabile). Questa retta appartiene al regolo a cui appartiene  $p'$ .

$$\begin{cases} (x + 2z) + \lambda(y - 3) = 0, \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - z^2 = 1, \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} (x + 2z) + \lambda(y - 3) = 0, \\ 9(x - 2z)(x + 2z) = 4(3 - y)(y + 3), \end{cases}$$

da cui otteniamo il regolo  $\mathcal{R}_1$  (al variare del parametro  $\lambda$ ):

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} x + 2z = \lambda(3 - y), \\ 9\lambda(x - 2z) = 4(y + 3). \end{cases}$$

Il regolo  $\mathcal{R}_2$  si ottiene in modo analogo. ♣

**(6.8.11) Esercizio** *Date le rette*

$$r : \begin{cases} y = z, \\ x = 1, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = z, \\ y + 1 = 0, \end{cases} \quad t : \begin{cases} x + 1 = 0, \\ y + z = 0, \end{cases} \quad u : \begin{cases} y = 0, \\ z = 2, \end{cases}$$

(a) *verificare che  $r, s, t$  ed  $u$  sono a due a due sghembe;*

(b) *determinare, se esistono, le rette che si appoggiano a  $r, s, t$  ed  $u$ .*

*Soluzione.*

(a) L'esercizio è lasciato al lettore.

(b) Le rette richieste si devono appoggiare ad  $r, s$  e  $t$ , quindi saranno sulla quadrica generata da  $r, s$  e  $t$ . Sia  $P \in s$ . Allora  $P = (a, -1, a)$ . Cerchiamo la retta per  $P$  che si appoggia ad  $r$  e a  $t$ . Intersechiamo i due piani  $\text{pn}(P, r)$  e  $\text{pn}(P, t)$ . Essi hanno equazione

$$\text{pn}(P, r) : (a - 1)(y - z) + (a + 1)(x - 1) = 0,$$

e

$$\text{pn}(P, t) : a(x - y - z + 1) = (x + y + z + 1).$$

Intersecando tali piani ed eliminando il parametro  $a$  otteniamo

$$Q: \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Intersechiamo quindi  $Q$  con la retta  $u$ . Troviamo due punti reali e distinti

$$A = (\sqrt{5}, 0, 2) \quad \text{e} \quad B = (-\sqrt{5}, 0, 2).$$

Sia  $\mathcal{R}_1$  il regolo di  $Q$  a cui appartengono le tre rette  $r$ ,  $s$  e  $t$ . Il problema ha come soluzione le rette del regolo  $\mathcal{R}_2$  passanti per  $A$  e per  $B$ . Osservando che

$$Q: \quad (x+z)(x-z) = (y+1)(1-y),$$

i due regoli hanno equazioni:

$$\mathcal{R}_1: \begin{cases} x+z = \lambda(y+1), \\ \lambda(x-z) = 1-y, \end{cases} \quad \mathcal{R}_2: \begin{cases} x+z = \mu(1-y), \\ \mu(x-z) = y+1. \end{cases}$$

Determiniamo le rette dei due regoli passanti per  $A$ : esse si ottengono dando a  $\lambda$  il valore  $2 + \sqrt{5}$  e a  $\mu$  il valore  $\sqrt{5} + 2$ .

$$a_1: \begin{cases} x+z = (2+\sqrt{5})(y+1), \\ (2+\sqrt{5})(x-z) = 1-y, \end{cases}$$

$$a_2: \begin{cases} x+z = (2+\sqrt{5})(1-y), \\ (2+\sqrt{5})(x-z) = y+1. \end{cases}$$

Dobbiamo ora vedere se  $r, s, t \in \mathcal{R}_1$  oppure  $r, s, t \in \mathcal{R}_2$ . Se una di queste rette (ad esempio  $r$ ) è sghemba con  $a_1$ , automaticamente è sghemba con tutte le altre due. Quindi, se  $r$  è sghemba con  $a_1$ , risulta  $r, s, t \in \mathcal{R}_1$ , e quindi la retta richiesta è  $a_2$ . Se  $r$  interseca  $a_1$  abbiamo  $r, s, t \in \mathcal{R}_2$  e quindi  $a_1$  è la retta richiesta. Considerando  $a_1 \cap r$  si può verificare che  $a_1$  è sghemba con  $r$ , pertanto la retta richiesta è  $a_2$ . In modo analogo si procede per il punto  $B$ . Esistono dunque due rette che risolvono l'esercizio. ♣

## 9 Classificazione affine delle quadriche generali

**(6.9.1) Definizione** Siano  $Q$  una quadrica generale e  $\pi_\infty$  il piano improprio di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ .

Poniamo  $\mathcal{C}_\infty = Q \cap \pi_\infty$  e chiamiamo  $\mathcal{C}_\infty$  conica impropria di  $Q$ . Diremo che  $Q$  è un

- iperboloide se  $\mathcal{C}_\infty$  è irriducibile e a punti reali;
- ellissoide se  $\mathcal{C}_\infty$  è irriducibile e a punti immaginari;
- paraboloidi se  $\mathcal{C}_\infty$  è riducibile in due rette distinte (ovvero  $\pi_\infty$  è tangente a  $Q$ ).

**(6.9.2) Osservazione** Siano  $Q$  una quadrica generale e  $\pi_\infty$  il piano improprio di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Se  $Q$  è un paraboloide la conica  $\mathcal{C}_\infty$  si spezza in due rette distinte. Tali rette possono essere

- (a) reali e distinte. Ciò significa che il punto di tangenza con  $Q$  di  $\pi_\infty$  è iperbolico, quindi tutti i punti di  $Q$  sono iperbolici. Parleremo quindi di paraboloide iperbolico.
- (b) complesse e coniugate. Il punto di tangenza tra  $Q$  e  $\pi_\infty$  è ellittico, quindi tutti i punti di  $Q$  sono ellittici e parleremo di paraboloide ellittico.

Vediamo ora cosa accade da un punto di vista analitico. Sia  $Q$  una quadrica generale di equazione

$$Q : \sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_i x_j = 0.$$

L'equazione del piano improprio di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  è data da

$$\pi_\infty : x_4 = 0,$$

la conica impropria  $\mathcal{C}_\infty$  di  $Q$  risulta essere

$$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

a la matrice associata alla conica  $\mathcal{C}_\infty$  è data da

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Pertanto, se  $\det(A^*) \neq 0$ , la conica  $\mathcal{C}_\infty$  è irriducibile e quindi  $Q$  è un ellissoide o un iperboloido. Al contrario, se  $\det(A^*) = 0$ , la conica  $\mathcal{C}_\infty$  è riducibile e quindi  $Q$  è un paraboloide.

Osserviamo che la matrice  $A^*$  risulta essere il minore della matrice  $A$  della quadrica  $Q$  che si ottiene sopprimendo l'ultima riga e l'ultima colonna, cioè

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & a_{14} \\ & & & a_{24} \\ & & & a_{34} \\ \hline a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{array} \right)$$

**(6.9.3) Proposizione** Sia  $Q$  un ellissoide. Allora  $Q$  è a punti ellittici.

*Dimostrazione.* Ragioniamo per assurdo, supponendo che  $P \in Q$  sia un punto iperbolico. Allora  $\tau_P \cap Q = r \cup s$  con  $r$  ed  $s$  due rette reali e distinte e  $P = r \cap s$ . Il piano improprio



è reale e i punti  $R_\infty = r \cap \pi_\infty$  ed  $S_\infty = s \cap \pi_\infty$  sono punti reali. Ma  $R_\infty \in Q$  ed  $S_\infty \in Q$ , quindi  $R_\infty, S_\infty \in Q \cap \pi_\infty$ , ossia  $R_\infty, S_\infty \in \mathcal{C}_\infty$ . Dal ragionamento fatto abbiamo ottenuto che la conica impropria contiene due punti reali e distinti, il che è assurdo poichè, per ipotesi, la conica impropria  $\mathcal{C}_\infty$  è irriducibile e a punti immaginari. Deduciamo quindi che  $Q$  è a punti ellittici. ■

**(6.9.4) Proposizione** *Le sezioni piane di un ellissoide sono tutte ellissi.*

*Dimostrazione.* Siano  $Q$  un ellissoide e  $\mathcal{C}_\infty = \pi_\infty \cap Q$  la conica impropria di  $Q$ . Allora  $\mathcal{C}_\infty$  è irriducibile e a punti immaginari. Sia  $\alpha$  un piano non tangente a  $Q$  e  $\alpha \neq \pi_\infty$ . Consideriamo la conica  $\mathcal{D} = \alpha \cap Q$ . I punti impropri di  $\mathcal{D}$  si ottengono intersecando  $\mathcal{D}$  con la retta impropria del piano  $\alpha$ . Poichè  $\mathcal{D} \subseteq Q$ , i punti impropri di  $\mathcal{D}$  sono le intersezioni di  $\mathcal{C}_\infty$  con la retta impropria di  $\alpha$ . Dal fatto che i punti di intersezione sono sempre immaginari e coniugati (in quanto  $\mathcal{C}_\infty$  è a punti immaginari), deduciamo che la conica  $\mathcal{D}$  è una ellisse. ■

**(6.9.5) Proposizione** *Le sezioni piane di un iperboloide sono ellissi, iperboli, o parabole.*

*Dimostrazione.* Siano  $Q$  un iperboloide,  $\alpha$  un piano non tangente e sia  $\mathcal{D} = Q \cap \alpha$  la conica sezione. I punti impropri di  $\mathcal{D}$  sono le intersezioni della retta impropria  $r_\infty$  di  $\alpha$  con la conica  $\mathcal{C}_\infty$ . Se  $r_\infty$  è secante  $\mathcal{C}_\infty$ , allora  $\mathcal{D}$  è una iperbole; se  $r_\infty$  è tangente a  $\mathcal{C}_\infty$ , allora  $\mathcal{D}$  è una parabola; se  $r_\infty$  è esterna a  $\mathcal{C}_\infty$ , allora  $\mathcal{D}$  è una ellisse. ■

**(6.9.6) Proposizione** *Le sezioni piane di un paraboloido iperbolico sono parabole o iperboli.*

*Dimostrazione.* Siano  $Q$  un paraboloido iperbolico e  $\alpha$  un piano non tangente a  $Q$ . Poniamo  $\mathcal{D} = Q \cap \alpha$ . Per ipotesi  $\mathcal{C}_\infty = r \cup s$ , con  $r$  ed  $s$  due rette reali e distinte. Sia  $r_\infty$  la retta impropria del piano  $\alpha$ . Se  $r_\infty \cap \mathcal{C}_\infty$  consiste di due punti reali e distinti, allora  $\mathcal{D}$  è un'iperbole; se  $r_\infty \cap \mathcal{C}_\infty$  consiste di due punti reali e coincidenti, allora  $\mathcal{D}$  è una parabola. ■

In modo analogo si dimostra la seguente

**(6.9.7) Proposizione** *Le sezioni piane di un paraboloido ellittico sono parabole o ellissi.*

## 10 Conica impropria per coni e cilindri

**(6.10.1) Teorema** *Valgono i seguenti fatti:*

- (a) *la conica impropria di un cono è una conica irriducibile, a punti reali (se il cono è a falda reale) oppure a punti immaginari (se il cono è a falda immaginaria);*
- (b) *la conica impropria di un cilindro è riducibile.*

*Dimostrazione.*

(a) Sia  $Q$  un cono. Supponiamo, per assurdo, che la conica impropria sia riducibile in due rette, ovvero  $\mathcal{C}_\infty = r \cup s$ . Il vertice  $V$  del cono non appartiene al piano improprio  $\pi_\infty$  poichè  $Q$  è un cono affine. Sia  $A \in r \setminus \{V\}$ . Dalla Proposizione (6.2.10) risulta  $rt(V, A) \subseteq Q$ . Dall'arbitrarietà di  $A \in r$  si ottiene che il piano  $pn(V, r)$  è contenuto in  $Q$ . Pertanto  $Q$  è riducibile, il che è assurdo per la Proposizione (6.2.10).

(b) Sia  $Q$  un cilindro. Allora il vertice  $V$  appartiene al piano  $\pi_\infty$ , ovvero  $V$  è un punto improprio. Dal fatto che  $V$  è doppio per il cono,  $V$  è doppio anche per le sezioni piane passanti per  $V$ . Segue che  $V \in \mathcal{C}_\infty$ , quindi  $\mathcal{C}_\infty$  è riducibile in quanto contiene un punto doppio. ■

**(6.10.2) Definizione** *Siano  $Q$  un cilindro e  $\mathcal{C}_\infty = Q \cap \pi_\infty$ . Diciamo che  $Q$  è*

- *parabolico se  $\mathcal{C}_\infty = r \cup r$  con  $r$  retta reale;*
- *iperbolico se  $\mathcal{C}_\infty = r \cup s$  con  $r$  ed  $s$  rette reali e distinte;*
- *ellittico se  $\mathcal{C}_\infty = r \cup s$  con  $r$  ed  $s$  immaginarie e coniugate.*

Consideriamo una quadrica  $Q$  scritta in forma matriciale:

$$Q: \quad \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = 0.$$

Indichiamo con  $A^*$  il minore di ordine tre che si ottiene eliminando l'ultima riga ed ultima colonna della matrice  $A$ . La classificazione di  $Q$  può essere sintetizzata nella seguente tabella.

**(6.10.3) Osservazione** *Coni e cilindri sono quadriche semplicemente rigate (ossia per ogni loro punto distinto dal vertice passa una ed una sola retta contenuta in essi).*

$\text{rg}(A)$	4	4	3	3	2	1
$\det(A^*)$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	—	—
La quadrica $Q$ è	iperboloide o ellissoide	paraboloide	cono	cilindro	$\alpha \cup \beta$ $\alpha \neq \beta$	$\alpha \cup \alpha$

Tabella 6.1: Classificazione di una quadrica  $Q$ .

Le quadriche doppiamente rigate sono tutte e sole quelle che possiedono punti iperbolici, quindi sono tutti e soli i paraboloidi iperbolici e gli iperboloidi iperbolici.

**(6.10.4) Esercizio** Classificare la seguente quadrica:

$$Q : x^2 + 5y^2 + 2xz + z^2 - 1 = 0.$$

*Soluzione.* Le matrici  $A$  ed  $A^*$  associata a  $Q$  risultano essere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che  $\det(A) = 0$ , quindi  $Q$  non è generale. Risulta che  $\text{rg}(A) = 3$ , dunque  $Q$  è un cono o un cilindro. Consideriamo quindi la matrice  $A^*$ . Abbiamo  $\det(A^*) = 0$ , allora  $Q$  è un cilindro (per trovare il vertice  $V$  del cilindro dovremo trovare l'unico punto doppio di  $Q$ ). Determiniamo la conica impropria di  $Q$ :

$$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 - x_4 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

da cui

$$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

Guardando il sistema precedente, deduciamo che  $\mathcal{C}_\infty = r_1 \cup r_2$ , dove

$$r_1 : \begin{cases} x_1 + x_3 + i\sqrt{5}x_2 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x_1 + x_3 - i\sqrt{5}x_2 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Segue che  $Q$  è un cilindro ellittico e l'unico punto  $P$  reale sul piano improprio è dato da  $r_1 \cap r_2$ , oppure dalla soluzione del sistema omogeneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  che risulta essere

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ 5x_2 = 0, \\ -x_4 = 0, \end{cases}$$

da cui  $P = [(1, 0, -1, 0)]$ . ♣

## 11 Quadriche in forma canonica

**(6.11.1) Definizione** Una quadrica  $Q$  è detta in forma canonica se  $Q$  è espressa da una delle due seguenti equazioni:

$$(6.11.2) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta,$$

oppure

$$(6.11.3) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 = 2\delta z.$$

Studiamo queste quadriche supponendo per prima cosa che  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$  (ciò equivale a dire che  $\text{rg}(A) = 4$ ). Osserviamo che per l'equazione (6.11.2) si ha  $\det(A) = \alpha\beta\gamma(-\delta)$ , mentre per l'equazione (6.11.3) si ha  $\det(A) = -\alpha\beta\delta^2$ .

Concentriamoci ora sullo studio dell'equazione (6.11.2). Essendo  $\delta \neq 0$ , tale equazione diventa:

$$\frac{x^2}{\delta/\alpha} + \frac{y^2}{\delta/\beta} + \frac{z^2}{\delta/\gamma} = 1,$$

che, a seconda dei segni di  $\delta/\alpha$ ,  $\delta/\beta$  e  $\delta/\gamma$ , dà luogo alle quattro forme canoniche seguenti (essenzialmente distinte):

$$(a) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

$$(b) \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

$$(c) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

$$(d) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Le vogliamo studiare.

**(a)** La sua conica impropria è a punti immaginari e irriducibile. Allora **(a)** è un *ellissoide* (a punti reali). I piani coordinati e gli assi coordinati sono assi di simmetria come pure l'origine  $O = (0, 0, 0)$ . Le sezioni con i piani paralleli ai piani coordinati ci dicono che **(a)** è contenuta interamente nel parallelepipedo

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c\}.$$

Se  $a = b$  l'ellissoide è di rotazione attorno all'asse  $z$ . Se  $a = b = c$ , l'ellissoide è una sfera.

**(b)** Non ci sono punti reali e la sua conica impropria è immaginaria e irriducibile. Allora **(b)** è un *ellissoide* (a punti immaginari).

**(c)** La conica impropria  $\mathcal{C}_\infty$  è a punti reali ed è irriducibile. Allora **(c)** è un *iperboloide*. Notiamo che **(c)** ha gli stessi elementi di simmetria di **(a)**. Operando come in **(a)** si trova che la superficie non è contenuta in una regione limitata dello spazio. Preso il punto  $A = (a, 0, 0)$ , il suo piano tangente è  $x = a$  e la sua intersezione con **(c)** è data da due rette reali. Pertanto **(c)** è un *iperboloide iperbolico* (o *iperboloide a una falda*). Esso è doppiamente rigato. I suoi regoli sono

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} x/a + z/c = \lambda(1 + y/b), \\ \lambda(x/a - z/c) = 1 - y/b, \end{cases} \quad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} x/a - z/c = \mu(1 + y/b), \\ \mu(x/a + z/c) = 1 - y/b, \end{cases}$$

con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Se  $a = b$  l'iperboloide è di rotazione attorno all'asse  $z$ .

**(d)** La conica  $\mathcal{C}_\infty$  è irriducibile e a punti reali. Allora **(d)** è un *iperboloide*. Osserviamo che **(d)** ha gli stessi elementi di simmetria di **(a)**. Il piano  $x = 0$  non ha intersezioni reali con **(d)**; i piani  $x = h$  hanno intersezione reali con **(d)** solo per  $|h| \geq a$ ; la superficie ha due falde. Il piano tangente in  $A = (a, 0, 0)$  è  $x = a$  e la sua intersezione con **(d)** è data da due rette immaginarie e coniugate. Pertanto **(d)** è un *iperboloide ellittico*. Se  $b = c$  l'iperboloide ellittico è di rotazione attorno all'asse  $x$ .

Concentriamo ora l'attenzione sull'equazione (6.11.3). Essendo  $\delta \neq 0$ , l'equazione diventa:

$$\frac{x^2}{\delta/\alpha} + \frac{y^2}{\delta/\beta} = 2z,$$

che, a seconda dei segni di  $\delta/\alpha$  e di  $\delta/\beta$ , dà luogo alle due seguenti forme canoniche (essenzialmente distinte):

$$(e) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z;$$

$$(f) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Le vogliamo studiare.

**(e)** La conica impropria è spezzata in due rette immaginarie e coniugate, quindi **(e)** è un *paraboloide ellittico* (cfr. Figura 6.1). I piani di simmetria sono  $x = 0$  e  $y = 0$  (se  $a \neq b$  non ce ne sono altri). L'asse  $z$  è asse di simmetria. L'intersezione con i piani  $z = h$

esiste solo per  $h \geq 0$ . Per  $h > 0$  le sezioni sono ellissi i cui assi crescono al crescere di  $h$ . Le sezioni con gli altri piani coordinati sono parabole. Per  $a = b$  il paraboloido è di rotazione attorno all'asse  $z$ .

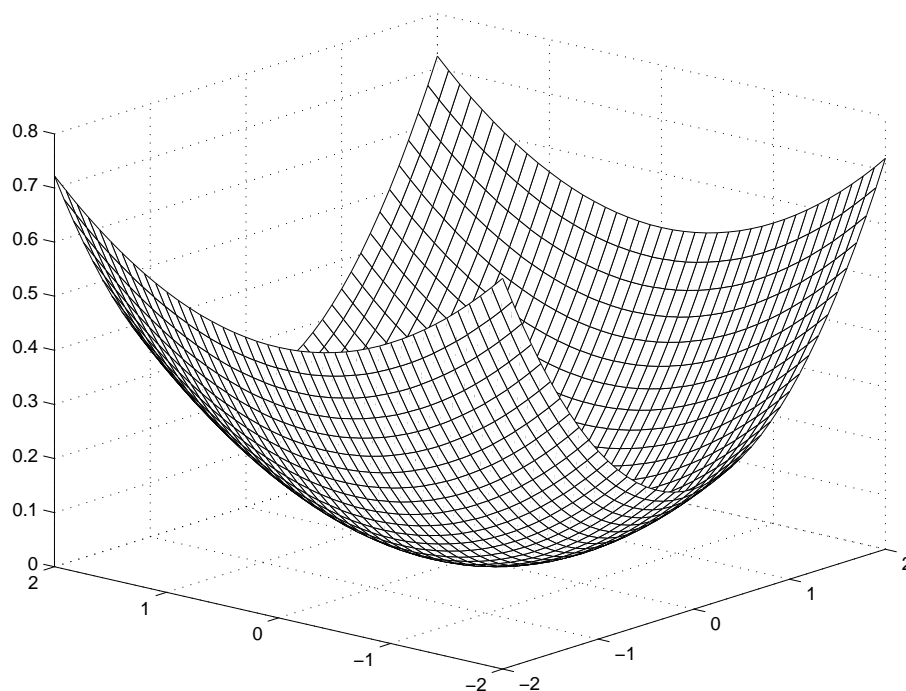


Figura 6.1: Paraboloido ellittico.

(f) La conica  $\mathcal{C}_\infty$  è spezzata in due rette reali, quindi (f) è un *paraboloido iperbolico*. Si può verificare che (f) ha gli stessi elementi di simmetria del paraboloido ellittico. Le sezioni con i piani coordinati e i loro piani paralleli ci dicono che (f) non è contenuta in una regione limitata dello spazio. Il piano  $z = 0$  è tangente ad (f) in  $O = (0, 0, 0)$  e ‘attraversa’ la superficie. Le sezioni con i piani  $x = h$  sono parabole con la concavità rivolta verso il basso; le sezioni con i piani  $y = h$  sono parabole con la concavità rivolta verso l’alto; le sezioni con i piani  $z = h$  sono iperboli che per  $h > 0$  hanno come asse trasverso quello parallelo all’asse  $x$ , mentre per  $h < 0$  hanno come asse trasverso quello parallelo all’asse  $y$ . La (f) non è mai di rotazione (cfr. Figura 6.2). Se ora imponiamo che la matrice  $A$  associata alle equazioni (6.11.2) e (6.11.3) abbia rango tre, abbiamo i seguenti casi (essenzialmente distinti):

$$(6.11.4) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 0).$$

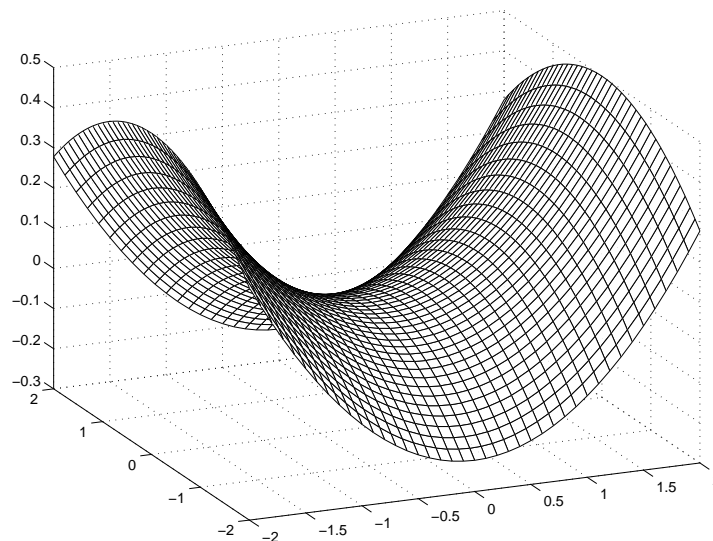


Figura 6.2: Paraboloide iperbolico.

Tale equazione rappresenta un cono con vertice  $V = (0,0,0)$  ed è a falda reale o immaginaria a seconda dei segni di  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Se  $\alpha, \beta, \delta \neq 0$  e  $\gamma = 0$  l'equazione (6.11.2) diviene

(g)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (cilindro ellittico a punti reali);

(h)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (cilindro iperbolico);

(i)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  (cilindro ellittico a punti immaginari).

Per quanto riguarda l'equazione (6.11.3), il caso di  $\text{rg}(A) = 3$  si ha per  $\alpha, \delta \neq 0$  e  $\beta = 0$  e l'equazione è

$$(6.11.5) \quad \alpha x^2 = 2\delta z,$$

ossia un cilindro parabolico.

**(6.11.6) Teorema** *Sia*

$$Q: \quad \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = 0$$

*una quadrica irriducibile. Allora esiste un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel quale l'equazione di  $Q$  assume una delle due seguenti forme:*

$$(6.11.7) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta,$$

$$(6.11.8) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 = 2\delta z.$$

Inoltre, indichiamo con  $A'$  e  $A'^*$  le matrici delle quadriche (6.11.7) e (6.11.8) e del minore ottenuto da esse sopprimendo l'ultima riga e l'ultima colonna si ha che

$$A' = Q^t A Q, \quad A'^* = P^t A^* P,$$

in cui  $P$  è una matrice ortogonale di ordine tre con  $\det(P) = 1$  e  $Q$  è la seguente matrice:

$$Q = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & a \\ & P & & b \\ & & & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Dunque:

(a)  $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A')$ ;

(b)  $A^*$  e  $A'^*$  hanno lo stesso polinomio caratteristico (e quindi gli stessi autovalori).

Questo teorema risulta utile per riconoscere una quadrica senza ridurla a forma canonica, come mostra il seguente

**(6.11.9) Esercizio** Si riconosca la quadrica  $Q$  di equazione

$$Q: \quad x^2 + 4xy - y^2 - 2yz - 1 = 0.$$

*Soluzione.* Diamo due metodi risolutivi.

**Primo metodo.** Scriviamo le matrici  $A$  e  $A^*$  associate a  $Q$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta che  $\det(A^*) = -1$  e  $\det(A) = -\det(A^*) = 1$ . Determiniamo il polinomio caratteristico di  $A^*$ :

$$\det(A^* - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda - 1.$$

Indichiamo con  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  i tre autovalori di  $A^*$ ; nessuno di essi è nullo perchè  $\det(A^*) \neq 0$ .  $Q$  rientra perciò nelle quadriche riconducibili all'equazione

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta.$$



Poichè

$$(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma) = \lambda^3 - 6\lambda + 1$$

si ricava che  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  e  $\alpha\beta\gamma = -1$ . Dunque due autovalori (ad esempio  $\alpha$  e  $\beta$ ) sono positivi e  $\gamma < 0$ . Poichè  $\det(A) = -(\alpha\beta\gamma\delta)$ , si ottiene  $\delta = 1$ , dunque la quadrica rientra nel tipo (c) e quindi è un iperboloide iperbolico.

**Secondo metodo.** Scriviamo l'equazione di  $Q$  in coordinate proiettive:

$$Q : x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 2x_1x_3 - x_4^2 = 0.$$

Le condizioni  $\det(A) \neq 0$  e  $\det(A^*) \neq 0$  ci dicono che  $Q$  è una quadrica generale e non è un paraboloido. determiniamo  $\mathcal{C}_\infty$  (che non è riducibile):

$$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_4 = 0, \\ x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 2x_1x_3 = 0. \end{cases}$$

La conica  $\mathcal{C}_\infty$  contiene il punto reale  $P = [(0, 0, 1, 0)]$  quindi ha infiniti punti reali e dunque  $Q$  è un iperboloide. Esistono due tipi di iperboloidi: iperbolici o parabolici. Vediamo allora di studiare la natura dei punti di  $Q$ . Sia  $P = [(0, 0, 1, 0)] \in Q$ .

$$\tau_P : \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_P x_i = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

Quindi

$$\tau_P \cap Q : \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 2x_1x_3 - x_4^2 = 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ (x_1 - x_4)(x_1 + x_4) = 0. \end{cases}$$

Pertanto  $P$  è un punto iperbolico e quindi  $Q$  è un iperboloide iperbolico. ♣

### Esercizi

1. Si determinino le equazioni cartesiane per l'unica retta reale passante per il punto  $P = [(1 + 2i, -i, 4, 0)]$ .

2. Si determini il punto improprio dell'unica retta reale del piano immaginario

$$\alpha : (1 - 3i)x_1 + 2x_2 - 5ix_3 - 2ix_4 = 0.$$

**3.** Scrivere la matrice  $A$  della quadrica dell'Esercizio (6.2.5) e determinare  $\det(A)$  e  $\text{rg}(A)$ .

**4.** Si verifichi se le seguenti equazioni rappresentano sfere a punti reali. In tal caso, determinare centro e raggio:

$$x^2 + y^2 + xy + x = 0;$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3x + 2y - z = 2;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z + 30 = 0;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z.$$

**5.** Si determini l'equazione della sfera passante per i punti

$$(0, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (-2, 0, 1), \quad (-1, 1, 1).$$

(*Suggerimento*: ricordare il passaggio per l'assoluto  $\mathcal{A}$ ).

**6.** Determinare, se esistono, i piani tangenti alla sfera di equazione

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z = 0,$$

passanti per la retta

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

(*Suggerimento*: individuare anzitutto il fascio di piani di sostegno la retta  $r$ ; successivamente, imporre che la distanza tra il piano ed il centro della sfera sia uguale al raggio di  $S$ ).

**7.** Si dica se la conica

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z = 3, \\ 3x + y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

è una circonferenza a punti reali. In caso affermativo, determinarne centro e raggio. Determinare, inoltre, la proiezione parallela all'asse  $x$  sul piano  $x = 0$ .

**8.** Trovare il centro ed il raggio della circonferenza

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

9. Determinare le equazioni di tutte le sfere passanti per i punti

$$A = (1, 0, 1), \quad B = (-1, 2, 1), \quad C = (0, 2, -1).$$

Si scrivano le equazioni cartesiane per le circonferenze passanti per  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

(*Suggerimento*: ricordare che il piano passante per tre punti  $X_1, X_2, X_3$  è dato da

$$\text{pn}(X_1, X_2, X_3) = \det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix},$$

essendo  $X_j = (x_j, y_j, z_j)$ , per  $j = 1, 2, 3$ .)

10. Sia

$$Q: \quad x^2 - 2xz + z^2 + y^2 = 0$$

una quadrica e  $P = (1, 0, 1)$ . Si dica se  $P$  è parabolico, iperbolico oppure ellittico.

11. Si scriva una rappresentazione cartesiana della curva descritta dal punto  $P = (1, 3, 0)$  nella rotazione attorno alla retta

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 0, \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

12. Si scriva l'equazione della superficie ottenuta ruotando la curva

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = 0, \\ z = 4y^2, \end{cases}$$

attorno all'asse  $z$ .

13. Data la quadrica

$$Q: \quad x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0,$$

si riconosca  $Q$  e, se possibile, si determinino le due rette di  $Q$  passanti per il punto  $M = (4, 0, -2)$ .

14. Siano date le rette  $s_1$  e  $s_2$  di equazioni

$$s_1: \begin{cases} x - z + 1 = 0, \\ y - z = 0, \end{cases} \quad s_2: \begin{cases} y - z - 1 = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

e il piano

$$\sigma: \quad y - z = 0.$$

Determinare

(a) le equazioni della retta  $s$  del piano  $\sigma$  incidente  $s_1$  e perpendicolare a  $s_2$ ;

(b) l'equazione del cono generato dalla rotazione della retta  $s$  attorno ad  $s_1$ .

**15.** Si consideri in un piano proiettivo  $\text{PG}(2, K)$  su un campo  $K$  di caratteristica diversa da 2, una polarità ortogonale  $\pi$  il cui insieme dei punti assoluti sia una conica  $\mathcal{C}$  non vuota. Dimostrare che una proiettività  $\alpha$  di  $\text{PG}(2, K)$  muta  $\mathcal{C}$  in sè se e solo se  $\alpha\pi = \pi\alpha$

# Bibliografia

- [1] M. ABATE, Geometria, *McGraw-Hill*, 1996;
- [2] M.C. BELTRAMETTI, E.CARLETTI, D. GALLARATI, G. MONTI BRAGADIN,  
Lezioni di geometria analitica e proiettiva, *Bollati Boringhieri*, 1996;
- [3] G. CASTELNUOVO, Lezioni di geometria analitica e proiettiva, *Soc. Ed. Dante  
Alighieri*, 1969;
- [4] E. SERNESI, Geometria 1, *Bollati Boringhieri*, 1991.

