

LA TEORIA DI SOMMERFELD DEI METALLI.

MODELLO DI DRUDE: DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ DEGLI ELETTRONI
SIMILE A QUELLA DI UN GAS CLASSICO:

$$f_B(\vec{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_B T}$$

con $n = \frac{N}{V}$.

$f_B(\vec{v})$ = densità volumetrica degli elettroni con velocità comprese
tra \vec{v} e $\vec{v} + d\vec{v}$.

MODELLO DI DRUDE: CONTRIBUTO DEGLI ELETTRONI AL CALORE
SPECIFICO DI UN METALLO PARI A $\frac{3}{2} k_B T$. NON OSSERVATO

DISTRIBUZIONE DI FERMI-DIRAC:

$$f(\vec{v}) = \frac{(m/h)^3}{4\pi^3} \frac{1}{e^{(\frac{1}{2}mv^2 - k_B T_0)/k_B T} + 1}$$

T_0 determinata dalla condizione di normalizzazione

$$n = \int d\vec{v} f(\vec{v})$$

T_0 è dell'ordine delle decine di migliaia di K.

MODELLO DI DRUDE + DISTRIBUZIONE FERMI-DIRAC



MODELLO DI SOMMERFELD

efr. FIG. 2.1

STATO FONDAMENTALE DEL GAS DI ELETTRONI

- IPOTESI:
- SISTEMA DI N ELETTRONI CONFINATI IN UN VOLUME V
 - ELETTRONI INDIPENDENTI (NO e-e INTERACTIONS)
 - ELETTRONI LIBERI (NESSUNA INTERAZIONE TRA ELETTRONI E CORE, CIOÈ NESSUN POTENZIALE NELLA EQ. DI SCHRÖDINGER)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = \epsilon \psi(\vec{r})$$

CONFINAMENTO DEGLI ELETTRONI NEL RETICOLO \rightarrow CONDIZIONI AL CONTORNO SU UN CUBO DI VOLUME $V=L^3$

CONDIZIONI AL CONTORNO DI BORN-VON KARMAN

$$\psi(x, y, z+L) = \psi(x, y, z)$$

$$\psi(x, y+L, z) = \psi(x, y, z)$$

$$\psi(x+L, y, z) = \psi(x, y, z)$$

SOLUZIONI:
$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

NORMALIZZAZIONE:
$$1 = \int d\vec{r} |\psi(\vec{r})|^2$$

$\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ È UN AUTOSTATO DI $\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$

CON AUTOVALORE $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

L'ELETTRONE NEL LIVELLO $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ POSSIEDE UNA QUANTITÀ DI MOTO PROPORZIONALE A \vec{k} : $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ È UNA VELOCITÀ

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{È L'ENERGIA DELL'ELETTRONE}$$

\vec{k} PUÒ ESSERE INTERPRETATO ANCHE COME VETTORE D'ONDA ASSOCIATO ALL'ONDA PIANA $e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}}$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{È LA LUNGHEZZA D'ONDA DI DE BROGLIE}$$

DALLE CONDIZIONI AL CONTORNO DI BORN - VAN KARMAN

$$\Psi(x, y, z+L) = \Psi(x, y, z)$$

$$e^{i[k_x x + k_y y + k_z(z+L)]} = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$\Rightarrow e^{i k_z L} = 1 \Rightarrow k_z L = 2\pi m_z \quad \text{ecc.}$$

$$\begin{cases} k_x = \frac{2\pi}{L} m_x \\ k_y = \frac{2\pi}{L} m_y \\ k_z = \frac{2\pi}{L} m_z \end{cases} \quad m_x, m_y, m_z \text{ interi}$$

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 = \text{VOLUME DEL K-SPAZIO ASSOCIATO A CIASCUN K}$$

QUINDI LA DENSITÀ ^(VOLUMETRICA) DEI PUNTI K È:

$$\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{V}{8\pi^3} \quad \text{DENSITÀ DEI LIVELLI NEL K-SPAZIO}$$

PRINCIPIO DI ESCLUSIONE DI PAULI: OGNI LIVELLO ENERGETICO PUÒ ACCOMODARE DUE ELETTRONI

PER N GRANDE, IL VOLUME DEI PUNTI K È INDISTINGUIBILE DA UNA SFERA.

RAGGIO DELLA SFERA: k_F

VOLUME DELLA SFERA $\Omega = \frac{4}{3} \pi k_F^3$

NUMERO DI STATI PERMESSI NELLA SFERA:

$$\frac{4}{3} \pi k_F^3 \cdot \frac{V}{8\pi^3} = k_F^3 \frac{V}{6\pi^2}$$

PER OGNI k POSSIAMO ACCOMODARE 2 ELETTRON:

$$N = 2 \frac{k_F^3}{6\pi^2} V$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}}$$

DEFINIAMO r_s COME RAGGIO DELLA SFERA IL CUI VOLUME È PARI A QUELLO CHE COMPETE AD UN SINGOLO ELETTRONE DI CONDUZIONE

$$n = 6.022 \times 10^{23} \frac{Z \rho_m}{A}$$

$$\frac{V}{N} = \frac{1}{n} = \frac{4\pi r_s^3}{3}; \quad r_s = \left(\frac{3}{4\pi n} \right)^{1/3}$$

$2 \leq r_s \leq 6$ per la maggior parte dei metalli.

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \quad \text{e} \quad n = \frac{3}{4\pi r_s^3}$$

$$\Rightarrow k_F = \frac{(9\pi/4)^{1/3}}{r_s} = \frac{1.92}{r_s}$$

$$k_F = \frac{3.63}{r_s/a_0} \text{ \AA}^{-1}; \quad a_0 = 0.529 \times 10^{-8} \text{ cm} = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

$$v_F = \frac{\hbar}{m} k_F = \frac{4.20}{r_s/a_0} \times 10^8 \text{ cm/sec.}$$

$$v_F \sim 0.01 c \quad \omega T \gg 0$$

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{e^2}{2a_0} (k_F a_0)^2$$

$$\frac{e^2}{2a_0} = 13.6 \text{ eV} = 1 \text{ Rydberg}$$

$$\epsilon_F = \frac{50.1 \text{ eV}}{(\pi_s/a_0)^2}$$

ENERGIA DELLO STATO FONDAMENTALE DI UN SISTEMA DI N ELETTRONI:

$$E = 2 \sum_{k < k_F} \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\sum_{\vec{k}} F(\vec{k}) = \frac{V}{8\pi^3} \sum_{\vec{k}} F(\vec{k}) \Delta \vec{k}$$

$$\Delta \vec{k} \rightarrow 0 \quad (\text{i.e. } V \rightarrow \infty)$$

SE $F(\vec{k})$ NON VARIA APPREZZABILMENTE SU DISTANZE DELL'ORDINE DI $2\pi/L$ POSSIAMO PORRE:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} F(\vec{k}) = \int \frac{d\vec{k}}{8\pi^3} F(\vec{k})$$

QUINDI, TORNANDO AL CALCOLO DI E, POSSIAMO PORRE:

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{k < k_F} d\vec{k} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\hbar^2 k_F^5}{10m}$$

$$\frac{E}{N} = \frac{E/V}{N/V} = \frac{3}{10} \frac{\hbar^2 k_F^2}{m} = \frac{3}{5} \epsilon_F$$

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5} k_B T_F$$

$$\Rightarrow T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B} = \frac{58.2}{(\pi_s/a_0)^2} \times 10^4 \text{ K}$$

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_N$$

$$E = \frac{3}{5} N \epsilon_F = \frac{3}{5} N \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{3 N \hbar^2}{10 m} (3\pi^2 n)^{2/3}; \quad n = \frac{N}{V}$$

$$\epsilon \sim n^{2/3} \Rightarrow P = \frac{2}{3} \frac{E}{V}$$

$$B = \frac{1}{K} = -V \frac{\partial P}{\partial V} \quad \text{ma} \quad E \sim n^{2/3} \Rightarrow P \sim V^{-2/3-1}$$

$$\Rightarrow B = -V \left(-\frac{5}{3} \right) \frac{P}{V} = \frac{5}{3} P$$

$$B = \frac{5}{3} P = \frac{10}{9} \frac{E}{V} = \frac{2}{3} n \epsilon_F$$

$$B = \left(\frac{6.13}{2.5 \times 10^9} \right)^5 \times 10^{10} \text{ dynes/cm}^2$$

IL B CALCOLATO PER GLI ELETTRONI LIBERI DA' UN EFFETTO SULLA PRESSIONE CHE È ALTRETTANTO IMPORTANTE DI QUELLA PRODOTTO DA ALTRE INTERAZIONI.

PROPRIETÀ TERMICHE DEL GAS DI ELETTRONI LIBERI: LA DISTRIBUZIONE DI FERMI-DIRAC

SISTEMA DI N PARTICELLE IN EQUILIBRIO TERMICO ALLA TEMPERATURA T

ENERGIA E , PESO $P_N(E) \sim e^{-E/k_B T}$

$$P_N(E) = \frac{e^{-E/k_B T}}{\sum_{\alpha} e^{-E_{\alpha}^N/k_B T}}$$

E_{α}^N : ENERGIA DELLO STATO STAZIONARIO α -ESIMO DEL SISTEMA DI N PARTICELLE.

ENERGIA LIBERA DI HELMHOLTZ: $F = U - TS$

$$\sum_{\alpha} e^{-E_{\alpha}^N/k_B T} = e^{-F_N/k_B T}$$

$$\Rightarrow P_N(E) = e^{-(E - F_N)/k_B T}$$

PRINCIPIO DI ESCLUSIONE:

STATO AD N -ELETTRONI COSTRUITO COME RIEMPIENDO N DIVERSI LIVELLI DI SINGOLO ELETTRONE.

CALCOLIAMO f_i^N , LA PROBABILITÀ CHE CI SIA UN ELETTRONE NELLO STATO i -ESIMO:

$$f_i^N = \sum P_N(E_{\alpha}^N)$$

DOVE LA SOMMATORIA È ESTESA A TUTTI GLI STATI α AD N -ELETTRONI IN CUI IL LIVELLO i -ESIMO È OCCUPATO

ALTERNATIVAMENTE:

$$f_i^N = 1 - \sum P_N (E_i^N)$$

γ = STATI AD N-ELETTRONI IN CUI IL LIVELLO I-ESIMO RISULTA VUOTO.

CONSIDERIAMO UNO STATO AD N+1 ELETTRONI IN CUI IL LIVELLO I-ESIMO RISULTA OCCUPATO. DA QUESTO TIPO DI STATI POSSIAMO OTTENERE UNO STATO AD N ELETTRONI IN CUI IL LIVELLO I-ESIMO RISULTA VUOTO SEMPLICEMENTE sottraendo agli STATI AD N+1 ELETTRONI L'ELETTRONE I-ESIMO.

LE ENERGIE DELLO STATO AD N ELETTRONI È DI QUELLO A N+1 ELETTRONI DEVONO DIFFERIRE DELLA ENERGIA ϵ_i .

$$f_i^N = 1 - \sum P_N (E_\alpha^{N+1} - \epsilon_i)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli stati α ad N+1 elettroni in cui è presente un elettrone nel livello i-esimo

$$\begin{aligned} P_N (E_\alpha^{N+1} - \epsilon_i) &= e^{- (E_\alpha^{N+1} - \epsilon_i - F_N) / k_B T} \\ &= e^{- (E_\alpha^{N+1} - \epsilon_i - F_{N+1} + F_{N+1} - F_N) / k_B T} \\ &= e^{(\epsilon_i - F_{N+1} + F_N) / k_B T} e^{- (E_\alpha^{N+1} - F_{N+1}) / k_B T} \\ &= e^{(\epsilon_i - \mu) / k_B T} P_{N+1} (E_\alpha^{N+1}) \end{aligned}$$

DOVE $F_{N+1} - F_N = \mu$ POTENZIALE CHIMICO

$$\begin{aligned} \text{QUINDI } f_i^N &= 1 - \sum P_N (E_\alpha^{N+1} - \epsilon_i) = \\ &= 1 - e^{(\epsilon_i - \mu) / k_B T} \sum P_{N+1} (E_\alpha^{N+1}) \end{aligned}$$

$$\text{CIOE } \boxed{f_i^N = 1 - e^{(\epsilon_i - \mu) / k_B T} f_i^{N+1}}$$

$$\text{SE } N \gg 10^{22}, \quad f_i^{N+1} \approx f_i^N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_i^N = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/k_B T} + 1}} \quad \text{F.D.}$$

POICHÈ IL NUMERO DI ELETTRONI SU CIASCUN LIVELLO PUÒ ESSERE 1 O 0 (PRINC. ESCLUSIONE DI PAULI), f_i DIVENTA SIA LA PROBABILITÀ CHE IL LIVELLO i -ESIMO DEL SISTEMA AD N ELETTRONI SIA OCCUPATO, SIA IL NUMERO MEDIO DI ELETTRONI NEL MEDESIMO LIVELLO.

$$N = \sum_i f_i = \sum_i \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/k_B T} + 1}$$

DA TALE FORMULA, NOTI N (o $\frac{N}{V}$) E T È POSSIBILE DETERMINARE μ .

APPLICAZIONI DELLA DISTRIBUZIONE DI FERMI-DIRAC

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad \text{A } T=0 \quad \epsilon(\vec{k}) \leq \epsilon_F$$

$$\begin{cases} f_{\vec{k},s} = 1 & \epsilon(\vec{k}) < \epsilon_F \\ f_{\vec{k},s} = 0 & \epsilon(\vec{k}) > \epsilon_F \end{cases}$$

QUESTE CONDIZIONI VALGONO PER LO STATO FONDAMENTALE ($T=0$).

D'ALTRA PARTE, PER LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI F.D.

VALGONO LE RELAZIONI:

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_{\vec{k},s} = \begin{cases} 1 & \epsilon(\vec{k}) < \mu \\ 0 & \epsilon(\vec{k}) > \mu \end{cases}$$

AFFINCHÉ LE DUE CONDIZIONI SIANO CONSISTENTI È NECESSARIO CHE:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mu = \epsilon_F$$

QUESTO VALE, PER I METALLI, CON OTTIMA APPROSSIMAZIONE FINO ALLA TEMPERATURA AMBIENTE.

CONTRIBUTO ELETTRONICO AL CALORE SPECIFICO A VOLUME COSTANTE

$$c_v = \frac{T}{V} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_V \quad \text{con} \quad \mu = \frac{U}{V}$$

NELLA APPROSSIMAZIONE DI ELETTRONI INDIPENDENTI:

$$U = 2 \sum_{\vec{k}} \epsilon(\vec{k}) f(\epsilon(\vec{k}))$$

$$\mu = \frac{U}{V} = \int \frac{d\vec{k}}{4\pi^3} \epsilon(\vec{k}) f(\epsilon(\vec{k}))$$

D'ALTRA PARTE LA DENSITÀ ELETTRONICA $n = N/V$ DIVENTA:

$$n = \int \frac{d\vec{k}}{4\pi^3} f(\epsilon(\vec{k}))$$

$$\int \frac{d\vec{k}}{4\pi^3} F(\epsilon(\vec{k})) = \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{\pi^2} F(\epsilon(\vec{k})) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon g(\epsilon) F(\epsilon)$$

$$\text{DOVE} \quad g(\epsilon) = \begin{cases} \frac{m}{\hbar^2 \pi^2} \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} & \epsilon > 0 \\ 0 & \epsilon < 0 \end{cases}$$

$$\text{INFATTI} \quad \epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad k = \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}, \quad dk = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{1}{2} \epsilon^{-1/2} d\epsilon$$

$$\begin{aligned} \text{QUINDI} \quad \frac{k^2 dk}{\pi^2} &= \frac{1}{\pi^2} \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{1}{2} \epsilon^{-1/2} d\epsilon = \\ &= \frac{m}{\pi^2 \hbar^2} \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} d\epsilon \end{aligned}$$

$$g(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{V} \times \left[\begin{array}{l} \text{NUMERO DI LIVELLI DI SINGOLO} \\ \text{ELETTRONE NELL'INTERVALLO } \epsilon, \epsilon + d\epsilon \end{array} \right]$$

$\Rightarrow g(\epsilon) =$ DENSITÀ DEI LIVELLI PER UNITÀ DI VOLUME.

$$g(\epsilon) = \frac{m}{\hbar^2 \pi^2} \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}$$

$$g(\epsilon_F) = \frac{m}{\hbar^2 \pi^2} \sqrt{\frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2}} = \frac{m}{\hbar^2 \pi^2} K_F$$

INFINE :

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon g(\epsilon) \epsilon f(\epsilon)$$

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon g(\epsilon) f(\epsilon)$$

IN GENERALE GLI INTEGRALI CHE DEFINISCONO N ED n SONO ABBASTANZA COMPLESSI. TUTTAVIA È POSSIBILE CONSIDERARE UNA ESPANSIONE CHE SFURTA IL FATTO CHE PER QUASI TUTTE LE TEMPERATURE DI INTERESSE PER I METALLI, T È MOLTO INFERIORE RISPETTO A T_F .

AD ESEMPIO, A TEMPERATURA AMBIENTE LA DISTRIBUZIONE DI F.D. DIFFERISCE DA QUELLA A $T=0$ PER UNA REGIONE LARGA $\sim k_B T$ ATTORNO A μ .

(QUINDI IL MODO IN CUI INTEGRALI DEL TIPO $\int_{-\infty}^{+\infty} H(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$ DIFFERISCONO DAL VALORE A $T=0$ $\int_{-\infty}^{\epsilon_F} H(\epsilon) d\epsilon$ È INTERAMENTE DETERMINATO DALL'ANDAMENTO DI $H(\epsilon)$ IN PROSSIMITÀ DI $\epsilon = \mu$.)

SE $H(\epsilon)$ NON VARIA APPREZZABILMENTE IN UN INTERVALLO DI AMPIEZZA $k_B T$ ATTORNO A μ , POSSIAMO CONSIDERARE L'ESPANSIONE:

$$H(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n H(\epsilon)}{d\epsilon^n} \Big|_{\epsilon=\mu} \frac{(\epsilon-\mu)^n}{n!}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\infty}^{\mu} H(\epsilon) d\epsilon + \sum_{m=1}^{\infty} (k_B T)^{2m} a_m \left. \frac{d^{2m-1}}{d\epsilon^{2m-1}} H(\epsilon) \right|_{\epsilon=\mu}$$

TALE ESPRESSIONE È NOTA COME ESPANSIONE DI SOMMERFELD.

DATA LA FORMA DELLE ESPRESSIONI $H(\epsilon)$, CHE PRESENTANO VARIAZIONI DELL'ORDINE DI μ , È ^{POI CHE} IN GENERALE

$$\left. \left(\frac{d}{d\epsilon} \right)^m H(\epsilon) \right|_{\epsilon=\mu} \sim \frac{H(\mu)}{\mu^m}$$

SOLO I PRIMI TERMINI DELLA ESPANSIONE DI SOMMERFELD VENGONO PRESI IN CONSIDERAZIONE:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\infty}^{\mu} H(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 H'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} (k_B T)^4 H'''(\mu) + O\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^6$$

QUANDO $H(\epsilon) = g(\epsilon)\epsilon$:

$$\mu = \int_0^{\mu} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 [\mu g'(\mu) + g(\mu)] + O(T^4)$$

QUANDO $H(\epsilon) = g(\epsilon)$:

$$\mu = \int_0^{\mu} g(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g'(\mu) + O(T^4)$$

QUESTA ESPRESSIONE IMPLICA CHE μ DIFFERISCE DAL SUO VALORE A $T=0$ (ϵ_F) PER TERMINI DELL'ORDINE DI T^2 .

INFATTI SE PONIAMO:

$$\int_0^{\mu} H(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} H(\epsilon) d\epsilon + (\mu - \epsilon_F) H(\epsilon_F)$$

CHE VALG ALL'ORDINE T^2 .

POSSIAMO RISCRIVERE μ ED n COME:

$$\mu = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon + \epsilon_F \left\{ (\mu - \epsilon_F) g(\epsilon_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g'(\epsilon_F) \right\} \\ + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g(\epsilon_F) + O(T^4)$$

$$n = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon + \left\{ (\mu - \epsilon_F) g(\epsilon_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g'(\epsilon_F) \right\}$$

IL CALCOLO DEL CALORE SPECIFICO VIENE FATTO A DENSITÀ COSTANTE.
PERTANTO n È INDIPENDENTE DALLA TEMPERATURA.

$$\Rightarrow 0 = (\mu - \epsilon_F) g(\epsilon_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g'(\epsilon_F)$$

DA CUI:

$$\textcircled{1} \quad \mu = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{g'(\epsilon_F)}{g(\epsilon_F)}$$

D'ALTRA PARTE $g(\epsilon) \sim \sqrt{\epsilon}$ PER GLI ELETTRONI LIBERI E
PERTANTO:

$$\mu = \epsilon_F \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi k_B T}{2 \epsilon_F} \right)^2 \right]$$

INOLTRE:

$$\textcircled{2} \quad \mu = \mu_0 + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g(\epsilon_F)$$

DOVE μ_0 È LA DENSITÀ DI ENERGIA NELLO STATO
FONDAMENTALE.

$$c_V = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_V = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T g(\epsilon_F)$$

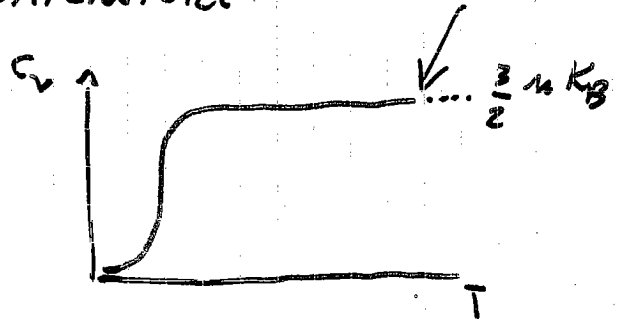
PER GLI ELETTRONI LIBERI $g(\epsilon_F) = \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F}$

E QUINDI: $C_V = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right) N k_B$

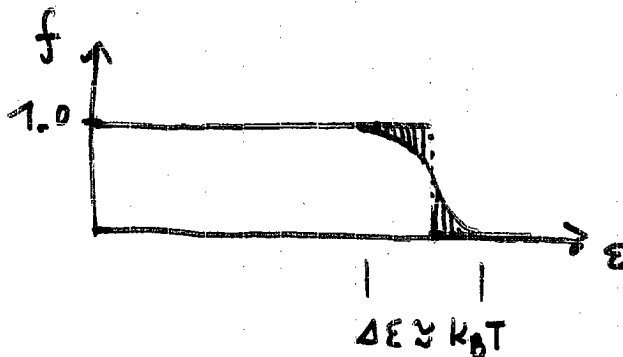
RISULTATO "CLASSICO" AD ALTE TEMPERATURE:

DULONG-PETIT

$$C_V = \frac{3}{2} N k_B$$



PERTANTO NON SI OSSERVA CONTRIBUTO DEL CALORE SPECIFICO ELETTRONICO ALLE ALTE TEMPERATURE



$g(\epsilon_F) k_B T =$ numero di elettroni eccitati al livello di Fermi
 $k_B T =$ energia di eccitazione

$$N g(\epsilon_F) k_B T \cdot k_B T = g(\epsilon_F) (k_B T)^2$$

ALLE BASSE TEMPERATURE:

$$C_V = \gamma T + AT^3$$

\downarrow \downarrow
 ELETTRONI FONONI