Meccanica dei Continui

Testi consigliati:
[1] M.E. Gurtin: *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press (1981).
[2] E.G.. Virga: *Variational Theories for Liquid Crystals*, Chapman & Hall (1994).

1. Richiami di calcolo vettoriale e tensoriale

<u>Spazio euclideo</u>

- ***Definizione***: **spazio euclideo n-dimensionale**. Un insieme (di *punti*) $\mathcal{E}$ si dice spazio euclideo n-dimensionale se esiste uno spazio vettoriale V, di dimensione n e dotato di prodotto scalare, tale che
  - $\boldsymbol{u} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}\,, \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in V$
  - $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})(x) = \boldsymbol{u}\big(\boldsymbol{v}(x)\big)\,, \quad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\,,\ x \in \mathcal{E}$
  - $\forall x, y \in V \quad \exists!\ \boldsymbol{u} \in V : \boldsymbol{u}(x) = y$. Notazione: $\boldsymbol{u} = y - x, \quad x = y + \boldsymbol{u}$.
- ***Definizione***: **distanza**. Utilizzando la norma di V definiamo una distanza in $\mathcal{E}$:

$$d(x, y) := |x - y| \ .$$

- ***Notazione***: **sfera unitaria**. $\qquad \mathbb{S}^{n-1} := \big\{\boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 1\big\}$.

<u>Tensori</u>

- ***Definizione***: **tensori**. Un tensore (del second'ordine) è un'applicazione lineare $\boldsymbol{L} : V \to V$. I tensori formano lo spazio lineare (*)

$$\mathcal{L}(V) := \big\{\boldsymbol{L} : V \to V : \boldsymbol{L} \text{ è lineare}\big\} \ .$$

  - Un sottospazio vettoriale $V' \subseteq V$ si dice **invariante** sotto l'azione di un tensore $\boldsymbol{L} \in \mathcal{L}(V)$ se $\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \in V'\,, \forall\, \boldsymbol{u} \in V'$.
- ***Definizione***: **autovalori**, **autovettori**. Sia $\boldsymbol{L} \in \mathcal{L}(V)$. Diciamo che $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ è un autovettore di $\boldsymbol{L}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ è il suo corrispondente autovalore, se $\boldsymbol{L}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$.
  - L'insieme degli autovalori di $\boldsymbol{L}$ forma lo **spettro**, $\mathrm{sp}\,(\boldsymbol{L})$.
  - L'insieme degli autovettori di $\boldsymbol{L}$ corrispondente ad uno stesso autovalore (unito al vettore nullo) forma l'**autospazio** di $\boldsymbol{L}$ associato a quell'autovalore. Gli autospazi sono spazi invarianti.
- ***Esempi***
  - Esempi banali di tensori sono

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} \in \mathcal{L}(V) \quad &: \quad \boldsymbol{0}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V\,, \\ \boldsymbol{I} \in \mathcal{L}(V) \quad &: \quad \boldsymbol{I}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{I} \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V\ . \end{aligned}$$

  - Per ogni coppia di vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ definiamo il loro ***prodotto tensoriale*** (***diade***)

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \in \mathcal{L}(V) \quad : \quad (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\boldsymbol{v} := \big(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}\big)\boldsymbol{a} \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V\ .$$

  - Dato un sottospazio vettoriale $V' \subseteq V$ definiamo il ***proiettore*** su V', $\boldsymbol{P}_{V'} \in \mathcal{L}(V)$:

$$\boldsymbol{P}_{V'}\boldsymbol{v} := \begin{cases} \boldsymbol{v} & \text{se } \boldsymbol{v} \in V' \\ \boldsymbol{0} & \text{se } \boldsymbol{v} \in V'^{\perp} \end{cases}$$

    In modo analogo si definisce $\boldsymbol{P}_{\perp V'}$, il proiettore sullo spazio $V'^{\perp}$.

(*) definendo in modo ovvio i tensori $\big(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\big)$ e $\lambda \boldsymbol{A}$

- ***Esercizi***. Siano $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\in V,\ k\in\mathbb{N}$ ed $\boldsymbol{L}\in\mathcal{L}(V)$. Dimostrare:
  - $\big(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\big)\big(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}\big)=\big(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\big)\ \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{d}$
  - $\big(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\big)^k=\big(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\big)^{k-1}\ \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\,,$
  - $\boldsymbol{L}\big(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\big)=\boldsymbol{L}\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\,,$
  - Sia $\boldsymbol{e}\in\mathbb{S}^{n-1}$ e siano $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}$ e $\boldsymbol{P}_{\perp\boldsymbol{e}}$ rispettivamente i proiettori sulla retta parallela ad $\boldsymbol{e}$ e sull'iperpiano perpendicolare ad $\boldsymbol{e}$; allora:
  $$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}\qquad\text{e}\qquad\boldsymbol{P}_{\perp\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}\ .$$
- ***Soluzioni***.
  - Per ogni $\boldsymbol{v}\in V$ si ha:
  $$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d})\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{v})\ \big(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\big)\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{d})\boldsymbol{v}\ .$$
  - Per induzione. Per $k=1$ l'affermazione è evidentemente vera. Supponendo invece valida la proprietà fino a $k-1$, si dimostra la tesi facendo uso dell'esercizio precedente.
  - Per ogni $v\in V$ si ha:
  $$\boldsymbol{L}\big[(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\boldsymbol{v}\big]=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{L}\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{L}\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\boldsymbol{v}\ .$$
  - Siano V_e il sottospazio generato da $\boldsymbol{e}$ e $V_e^\perp$ il suo complemento ortogonale. La decomposizione ortogonale di ogni vettore in questi sottospazi fornisce:
  $$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_\parallel+\boldsymbol{v}_\perp=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}+\boldsymbol{v}_\perp=(\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_\perp\ .$$
  È quindi evidente che
  $$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_\parallel=(\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{v}\qquad\text{e}$$
  $$\boldsymbol{P}_{\perp\boldsymbol{e}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_\perp=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{v}\ .$$
- ***Definizione***: **componenti cartesiane di un tensore**. Sia $\boldsymbol{L}\in\mathcal{L}(V)$ un tensore e sia $e:=\{\boldsymbol{e}_i,i=1,\dots,n\}$ una base ortonormale di V. Le componenti cartesiane di $\boldsymbol{L}$ nella base e sono:
  $$L_{ij}:=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{L}\boldsymbol{e}_j\ .$$
- ***Proprietà***.
  $$\boldsymbol{L}=\sum_{i,j=1}^n L_{ij}\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\qquad\forall\,\boldsymbol{L}\in\mathcal{L}(V)\ .\tag{1}$$
  - Dimostrare per esercizio applicando i due membri della (1) ad un generico $\boldsymbol{u}=u_k\,\boldsymbol{e}_k\in V$.
  - Questa proprietà dimostra che $e^2:=\{\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j,\ i,j=1,\dots,n\}$ è una base di $\mathcal{L}(V)$.

Trasposizione

- ***Teorema di trasposizione***. Sia $\boldsymbol{L}\in\mathcal{L}(V)$. Esiste un unico tensore $\boldsymbol{L}^T\in\mathcal{L}(V)$, detto **trasposto** di $\boldsymbol{L}$, tale che
  $$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\qquad\forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V\ .$$
- ***Esercizi***. Siano $\boldsymbol{L},\boldsymbol{M}\in\mathcal{L}(V)$, ed $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$. Dimostrare:
  - $(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})_{ij}=a_i\,b_j\,,$
  - $\big(L^T\big)_{ij}=L_{ji}\,.$
  - Dimostrare il teorema di trasposizione utilizzando la proprietà precedente (*se* esiste un tensore che verifichi la proprietà richiesta dal teorema, deve verificare la proprietà precedente, ma un tale tensore si può costruire esplicitamente, ed è unico).
  - $\big(\boldsymbol{L}^T\big)^T=\boldsymbol{L}\,,$
  - $\big(\boldsymbol{L}\boldsymbol{M}\big)^T=\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{L}^T\,,$
  - $(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})^T=\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}\,,$
  - $\big(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\big)\boldsymbol{L}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{b}\ .$

- ***Definizione:* tensori simmetrici ed antisimmetrici**. Sia $\boldsymbol{L} \in \mathcal{L}(V)$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} = \ \ \boldsymbol{L}^T \qquad &\Longrightarrow \qquad \boldsymbol{L} \text{ simmetrico} \in \mathrm{sym}(V) \\ \boldsymbol{L} = -\boldsymbol{L}^T \qquad &\Longrightarrow \qquad \boldsymbol{L} \text{ antisimmetrico} \in \mathrm{skw}(V) \end{aligned}$$

  * $\forall\, \boldsymbol{L} \in \mathcal{L}(V)$, $\exists! \boldsymbol{S} \in \mathrm{sym}(V)$, $\exists! \boldsymbol{W} \in \mathrm{skw}(V) : \boldsymbol{L} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{W}$;

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T\big)\ , \qquad \boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^T\big)\ .$$

Invarianti

- ***Definizione:* traccia**. Esiste un'unica applicazione lineare $\mathrm{tr} : \mathcal{L}(V) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \qquad \forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V\ .$$

  * Essendo e^2 una base di $\mathcal{L}(V)$, la definizione di traccia sui prodotti tensoriali si estende per linearità a tutti i tensori.
  * Se e è una base ortonormale, $\boldsymbol{L} = \sum_{i,j=1}^{n} L_{ij}\ \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} L_{ii}\ .$

- ***Definizione:* prodotto scalare in $\mathcal{L}(V)$**. Siano $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d} \in V$. Definiamo il prodotto scalare in $\mathcal{L}(V)$ come l'applicazione bilineare e simmetrica tale che

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})\ .$$

  * Essendo $e^2 := \{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j,\ i, j = 1, \dots, n\}$ una base di $\mathcal{L}(V)$, la definizione si estende per linearità al prodotto di qualunque coppia di tensori.
  * La base e^2 è ortonormale rispetto al prodotto scalare appena introdotto.

- ***Esercizi*.** Siano $\boldsymbol{L}_i \in \mathcal{L}(V)$, $\boldsymbol{S}_i \in \mathrm{sym}(V)$, $\boldsymbol{W}_i \in \mathrm{skw}(V) : \boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{S}_i + \boldsymbol{W}_i$, $i = 1, 2$; siano inoltre $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in V$. Dimostrare:
  * $\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2 := \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}_1^T \boldsymbol{L}_2) = \sum_{i,j} L_{1ij} L_{2ij}$.
  * $\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}_2 \cdot \boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_1^T \cdot \boldsymbol{L}_2^T$,
  * $\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{W}_1 \cdot \boldsymbol{W}_2$,
  * $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{L}\boldsymbol{b}$.

- ***Definizione*: determinante**. Sia $\dim V = n$. Si può dimostrare che, per ogni forma multilineare alternante non-nulla $\alpha : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$, e per ogni tensore $\boldsymbol{L} \in \mathcal{L}(V)$, esiste uno scalare $\det \boldsymbol{L}$, dipendente solo da $\boldsymbol{L}$, tale che:

$$\alpha(\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{L}\boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{L}\boldsymbol{v}_n) = (\det \boldsymbol{L})\ \alpha(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)\ .$$

  * $\det(\lambda \boldsymbol{L}) = \lambda^n \det \boldsymbol{L}$; $\qquad \det(\boldsymbol{L}\boldsymbol{M}) = (\det \boldsymbol{L})\, (\det \boldsymbol{M})$; $\qquad \det(\boldsymbol{L}) = \det \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$;
  * $0 \in \mathrm{sp}\,\boldsymbol{L} \quad \Longrightarrow \quad \det \boldsymbol{L} = 0$.
  * $\big[n = 3\big]$: $\det \boldsymbol{L} = \sum_{ijk=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, L_{1i}\, L_{2j}\, L_{3k}$;

- ***Proprietà***: **tensore inverso**. Dato un tensore $\boldsymbol{L} \in \mathcal{L}(V)$, si dimostra che esiste un (ed un solo) tensore $\boldsymbol{L}^{-1}$ (detto tensore inverso) tale che $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{-1} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}$ se e solo se $\det \boldsymbol{L} \neq 0$.
  - $*$ $\det\big(\boldsymbol{L}^{-1}\big) = \det(\boldsymbol{L})^{-1}$;
  - $*$ $(\boldsymbol{L}\boldsymbol{M})^{-1} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{L}^{-1}$;
  - $*$ $\Big(\boldsymbol{L}^T\Big)^{-1} = \big(\boldsymbol{L}^{-1}\big)^T =: \boldsymbol{L}^{-T}$;
  - $*$ Se $\boldsymbol{L}\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$ (con $\lambda \neq 0$), allora $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{v} = \lambda^{-1}\,\boldsymbol{v}$.

- Sia $\dim V = 3$. Se λ è autovalore di $\boldsymbol{L}$ allora $\boldsymbol{L} - \lambda\boldsymbol{I}$ ha un autovalore nullo, e quindi λ è una radice del ***polinomio caratteristico*** di $\boldsymbol{L}$:

$$\det\big(\boldsymbol{L} - \lambda\,\boldsymbol{I}\big) = -\lambda^3 + \big(\operatorname{tr}\boldsymbol{L}\big)\,\lambda^2 - \big(\mathrm{II}_{\boldsymbol{L}}\,\big)\,\lambda + \det\boldsymbol{L} = 0\ , \quad \text{con (\textbf{invariante secondo})}$$

$$\mathrm{II}_{\boldsymbol{L}} := \frac{1}{2}\big[(\operatorname{tr}\boldsymbol{L})^2 - \operatorname{tr}\boldsymbol{L}^2\big] = L_{11}L_{22} + L_{22}L_{33} + L_{33}L_{11} - L_{12}L_{21} - L_{13}L_{31} - L_{23}L_{32}\ .$$

  - $*$ L'invarianza del determinante implica l'invarianza dei coefficienti del polinomio caratteristico.

- ***Teorema di Cayley-Hamilton***. Sia $\dim V = 3$. Ogni tensore soddisfa la sua equazione caratteristica:

$$\boldsymbol{L}^3 - \big(\operatorname{tr}\boldsymbol{L}\big)\,\boldsymbol{L}^2 + \big(\mathrm{II}_{\boldsymbol{L}}\,\big)\,\boldsymbol{L} - (\det\boldsymbol{L})\,\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}\ .$$

  - $*$ Questo teorema implica che, essendo $\boldsymbol{L}^3$ combinazione lineare delle potenze inferiori, ogni funzione analitica di $\boldsymbol{L}$ si può esprimere come

$$f(\boldsymbol{L}) = \alpha\,\boldsymbol{I} + \beta\,\boldsymbol{L} + \gamma\boldsymbol{L}^2\ ,$$

  con α, β e γ funzioni arbitrarie dipendenti unicamente dagli invarianti di $\boldsymbol{L}$.

Tensori simmetrici

- ***Teorema spettrale***. Gli autospazi di un tensore simmetrico decompongono V :

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^T \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \exists \text{ base ortonormale } e \\ \exists\ \lambda_i \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{tali che} \quad \boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i\ .$$

- ***Definizione***. Un tensore $\boldsymbol{L}$ si dice **definito positivo** se $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{L}\boldsymbol{v} > 0\ \forall\,\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Analogamente si definiscono i tensori semidefiniti positivi, definiti e semidefiniti negativi.
  - $*$ I tensori simmetrici sono (semi)definiti positivi o negativi a seconda del segno dei loro autovalori.

Tensori antisimmetrici e prodotto vettoriale (da qui in poi, poniamo $n = 3$)

- ***Teorema***. Sia $\boldsymbol{W} \in \operatorname{skw}(V)$, spazio vettoriale 3-dimensionale. Allora:
  - $*$ $\dim\operatorname{skw}(V) = 3$. Si vuole stabilire una corrispondenza lineare tra $\operatorname{skw}(V)$ e V.
  - $*$ $\operatorname{sp}(\boldsymbol{W}) = \{0\}$. Infatti, $\operatorname{sp}(\boldsymbol{W}) \subseteq \{0\}$ qualunque sia la dimensione di V. Nel caso $n = 3$ vale l'uguaglianza poiché ogni tensore ha almeno un autovalore reale.
  Dimostriamo che ogni autovalore reale è nullo: sia $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di $\boldsymbol{W}$ e sia $\boldsymbol{v}$ un autovettore associato a λ. Allora:

$$-\lambda\,\big|\boldsymbol{v}\big|^2 = -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{W}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \lambda\,\big|\boldsymbol{v}\big|^2\ ,$$

  e quindi $\lambda = 0$.
  - $*$ L'autospazio associato all'autovalore nullo ha dimensione 1 (**asse** di $\boldsymbol{W}$), a meno che non sia $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{0}$.
  - $*$ Ci sono quindi esattamente due vettori $\boldsymbol{w}$ appartenenti all'asse di di $\boldsymbol{W}$ tali che

$$\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W} = 2\,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\ . \tag{1}$$

Associare l'uno o l'altro di questi vettori a $\boldsymbol{W}$ equivale a fissare l'orientazione di V. Fatta comunque la scelta del **vettore assiale** per un particolare $\boldsymbol{W} \neq \boldsymbol{0}$, tutte le altre seguono per linearità.(*)
Indicheremo con $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{W})$ il vettore assiale di $\boldsymbol{W}$ e con $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{w})$ il tensore antisimmetrico associato a $\boldsymbol{w}$.
Per dimostrare la precedente affermazione, supponiamo di aver associato il vettore $\boldsymbol{w}_1$ al tensore $\boldsymbol{W}_1$ e sia $\boldsymbol{w}_2$ uno dei due vettori che soddisfano la (1) rispetto al tensore $\boldsymbol{W}_2$. Il vettore $\boldsymbol{w}_2$ ha la stessa orientazione di $\boldsymbol{w}_1$ se rispetta la relazione (necessaria tra vettori assiali) $\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{w}_2 = -\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{w}_1$.

* Fissiamo una base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Se $\boldsymbol{w} = \sum_i w_i\, \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{W})$, si ha, per linerità: $\boldsymbol{W} = \sum_i w_i\, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{e}_i)$. Inoltre, le componenti cartesiane di $\boldsymbol{W}$ sono legate a quelle di $\boldsymbol{w}$ da: $W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k$.
  La matrice di $\boldsymbol{W}$ è: $\begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$.

- ***Definizione***: **prodotto vettoriale**. Siano $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$. Definiamo:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} := \boldsymbol{W}(\boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b}\,.$$

- ***Esercizi***. Siano $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$. Dimostrare:
  * $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$ (*)
  * $\boldsymbol{a} \cdot \big(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\big) = \boldsymbol{b} \cdot \big(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\big) = 0$,
  * $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{w}\big(\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}\big)$,
  * $\boldsymbol{a} \wedge \big(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}\big) = \big(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}\big)\boldsymbol{b} - \big(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\big)\boldsymbol{c}$,
  * $\displaystyle \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, \boldsymbol{e}_k$.

- ***Proprietà***. Dato che $\beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}$ è una forma trilineare alternante, si ottiene (interpretazione geometrica del determinante)

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{L}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{L}\boldsymbol{w} = (\det \boldsymbol{L})\, \big(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}\big) \qquad \forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\,.$$

Da questa proprietà segue che, se $\boldsymbol{L}$ è invertibile,

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{L}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{L}^*\big(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}\big) \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{L}^* := (\det \boldsymbol{L})\, \boldsymbol{L}^{-T}\,.$$

Se $\boldsymbol{L}$ non è invertibile, l'**aggiunto** $\boldsymbol{L}^*$ si può comunque esprimere come il tensore costruito a partire dai minori di $\boldsymbol{L}$: la sua componente cartesiana (i, j) è pari a $(-1)^{i+j}$ moltiplicato per il determinante della matrice ottenuta togliendo l'i-esima riga e la j-esima colonna.

<u>Gruppo ortogonale di V</u>

- ***Definizione***: **gruppo ortogonale**. $O(V) := \big\{\boldsymbol{Q} \in \mathcal{L}(V) : \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \quad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\big\}$.
  * $\boldsymbol{Q} \in O(V) \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} \quad \Longrightarrow \quad \det \boldsymbol{Q} = \pm 1$.
  * **gruppo ortogonale speciale**: $SO(V) := \big\{\boldsymbol{Q} \in O(V) : \det \boldsymbol{Q} = 1\big\}$ (**rotazioni**).

- ***Proprietà***.
  * $\boldsymbol{Q} \in O(V) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{sp}\,(\boldsymbol{Q}) \subseteq \{-1, 1\}$.
    Infatti, se $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, si ha:
    $$\big|\boldsymbol{v}\big|^2 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v} = \lambda^2\big|\boldsymbol{v}\big|^2\,.$$
  * $\boldsymbol{Q} \in SO(V) \quad \Longrightarrow \quad 1 \in \mathrm{sp}\,(\boldsymbol{Q})$. Inoltre, se $\boldsymbol{Q} \neq \boldsymbol{I}$, la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 1$ è pari ad 1. Tale autospazio è l'**asse di rotazione** di $\boldsymbol{Q}$.

(*) Per la dimostrazione si deve usare la seguente proprietà: se $\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{w}_2$ sono rispettivamente i vettori assiali associati a $\boldsymbol{W}_1$ e $\boldsymbol{W}_2$, $\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{w}_2 = -\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{w}_1$. Questa proprietà segue dal fatto che $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}\big(\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{W}_2\big)$.

* Sia $\boldsymbol{e} \in \mathbb{S}^2$. **Gruppo delle rotazioni intorno ad $\boldsymbol{e}$**:
  $SO(\boldsymbol{e}, V) := \{\boldsymbol{Q} \in SO(V) : \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}\}$.
* Sia $\boldsymbol{Q} \in SO(\boldsymbol{e}, V)$. Allora esiste $\vartheta \in [0, 2\pi)$ tale che:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e} + \cos\vartheta\, \boldsymbol{P}_{\perp \boldsymbol{e}} + \sin\vartheta\, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{e}) \ .$$

  L'angolo ϑ è l'**angolo di rotazione** di $\boldsymbol{Q}$ attorno ad $\boldsymbol{e}$.

<u>**Simmetrie**</u>

- ***Definizione***: **invarianza**. Sia $O'(V)$ un sottogruppo di $O(V)$. Diciamo che un tensore $\boldsymbol{L}$ è invariante sotto l'azione del sottogruppo $O'(V)$ se

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{L} \qquad \forall\, \boldsymbol{Q} \in O'(V) \ .$$

  * Un tensore invariante sotto l'azione di $O(V)$ si dice **isotropo**.
  * Un tensore invariante sotto l'azione di $SO(\boldsymbol{e}, V)$ si dice **trasversalmente isotropo attorno ad $\boldsymbol{e}$**.

- ***Teorema di rappresentazione***
  * $\boldsymbol{L}$ isotropo $\iff$ $\boldsymbol{L} = \alpha\, \boldsymbol{I}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
  * $\boldsymbol{L}$ trasversalmente isotropo attorno ad $\boldsymbol{e}$ se e solo se

$$\boldsymbol{L} = \alpha_1\, \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e} + \alpha_2\, \boldsymbol{P}_{\perp \boldsymbol{e}} + \alpha_3\, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{e}) \qquad \text{con} \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \ .$$

  Dimostrazione:
  * Se $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{Q}$, con $\boldsymbol{Q} \in SO(\boldsymbol{e}, V)$, allora $\boldsymbol{e}$ è autovettore di $\boldsymbol{L}$.
  * Se l'invarianza vale $\forall \boldsymbol{Q} \in O(V)$, la proprietà precedente deve valere $\forall \boldsymbol{e} \in \mathbb{S}^2$ e quindi $\boldsymbol{L}$ deve essere un multiplo dell'identità.
  * Nel secondo caso, per ricavare la formula precedente basta richiedere esplicitamente l'invarianza sotto la rotazione $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e} + \boldsymbol{W}(e)$.

- ***Esercizi***.
  * Siano $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$. Calcolare l'invariante secondo, il determinante, lo spettro e gli autospazi del tensore $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$.
  * Dimostrare che

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}\big)^k}{k!} = \boldsymbol{I} + \psi\big(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\big)\, \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \ , \qquad \text{con} \quad \psi(x) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \ . \end{cases}$$

  Generalizzare il precedente risultato per dimostrare che, per ogni funzione analitica $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi\big(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}\big) := \Phi(0)\boldsymbol{I} + \widetilde{\Phi}\big(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\big)\, \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \ , \qquad \text{con} \quad \widetilde{\Phi}(x) := \begin{cases} \dfrac{\Phi(x) - \Phi(0)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \Phi'(0) & \text{se } x = 0 \ . \end{cases}$$

2. Richiami di calcolo differenziale

- ***Esercizi***. Sia $\boldsymbol{L}(t)$ un tensore dipendente dal tempo (differenziabile). Allora:

$$
\begin{aligned}
\big(\boldsymbol{L}^{-1}\big)^{\bullet} &= -\boldsymbol{L}^{-1}\dot{\boldsymbol{L}}\,\boldsymbol{L}^{-1} \\
(\det \boldsymbol{L})^{\bullet} &= \boldsymbol{L}^{*}\cdot\dot{\boldsymbol{L}} \\
(\operatorname{tr}\boldsymbol{L})^{\bullet} &= \operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{L}} \\
(\mathrm{II}_{\boldsymbol{L}})^{\bullet} &= \big(\operatorname{tr}\boldsymbol{L}\big)\,\big(\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{L}}\big) - \boldsymbol{L}^{T}\cdot\dot{\boldsymbol{L}} \\
\boldsymbol{L}\in O(V) \quad &\Longrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{L}^{T}\in \mathrm{Skw}(V)\ .
\end{aligned}
$$

  * $\boldsymbol{0} = \big(\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{-1}\big)^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{L}^{-1} + \boldsymbol{L}\,\big(\boldsymbol{L}^{-1}\big)^{\bullet} \quad \dots$
  * Dimostriamo la seconda nel caso $\boldsymbol{L}$ invertibile:

$$
\begin{aligned}
\det\big(\boldsymbol{L}(t+\epsilon)\big) &= \det\big(\boldsymbol{L}(t)+\epsilon\dot{\boldsymbol{L}}(t)+o(\epsilon)\big) = \det\big[\boldsymbol{L}\big(\boldsymbol{I}+\epsilon\boldsymbol{L}^{-1}\dot{\boldsymbol{L}}+o(\epsilon)\big)\big] \\
&= \big(\det\boldsymbol{L}\big)\ \det\big(\boldsymbol{I}+\epsilon\boldsymbol{L}^{-1}\dot{\boldsymbol{L}}+o(\epsilon)\big) = \det\boldsymbol{L}\,\big(1+\epsilon\operatorname{tr}\big(\boldsymbol{L}^{-1}\dot{\boldsymbol{L}}\big)+o(\epsilon)\big) \\
&= \det\boldsymbol{L}\ + \epsilon\boldsymbol{L}^{*}\cdot\dot{\boldsymbol{L}} + o(\epsilon)
\end{aligned}
$$

  * Segue dalla linearità della traccia.
  * Segue dalla differenziazione di $\mathrm{II}_{\boldsymbol{L}} = \frac{1}{2}\Big[\big(\operatorname{tr}\boldsymbol{L}\big)^2 - \operatorname{tr}\boldsymbol{L}^2\Big]$.
  * Segue dalla differenziazione di $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{T} = \boldsymbol{I}$.

<u>**Funzioni vettoriali e tensoriali**</u>

- Sia $\boldsymbol{f} : \mathcal{E} \to V$ differenziabile in P_0, cioè tale che esista $\boldsymbol{F} =: \boldsymbol{\nabla f} \in \mathcal{L}(V)$ tale che $\boldsymbol{f}(P_0+\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(P_0) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{u} + o(|\boldsymbol{u}|)$.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{f} &:= \operatorname{tr}\boldsymbol{\nabla f}\ ; \\
\operatorname{rot}\boldsymbol{f} &:= \boldsymbol{w}\big(\boldsymbol{\nabla f} - (\boldsymbol{\nabla f})^{T}\big)
\end{aligned}
$$

- ***Esercizio***: sia $\boldsymbol{v}(p) := \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\wedge(p-p_0)$ [velocità in un atto di moto rigido]. Dimostrare che:

$$
\boldsymbol{\nabla v} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\omega}) \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}\ .
$$

- Sia analogamente $\boldsymbol{L} : \mathcal{E} \to \mathcal{L}(V)$ differenziabile in P_0. Definiamo (per motivi chiari tra poco) la funzione vettoriale $\operatorname{div}\boldsymbol{L}$ come l'unica funzione vettoriale che soddisfa

$$
(\operatorname{div}\boldsymbol{L})\cdot\boldsymbol{a} = \operatorname{div}\big(\boldsymbol{L}^{T}\boldsymbol{a}\big) \qquad \forall\,\boldsymbol{a}\in V\ .
$$

  * $(\operatorname{div}\boldsymbol{L})\cdot\boldsymbol{e}_i = \operatorname{div}\big(\boldsymbol{L}^{T}\boldsymbol{e}_i\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{L} = \sum_i \left[\sum_j \frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j}\right]\boldsymbol{e}_i\ .$

- ***Proprietà***. Siano $\psi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g} : \mathcal{E} \to V$ e $\boldsymbol{L} : \mathcal{E} \to \mathcal{L}(V)$, differenziabili. Valgono le seguenti relazioni differenziali:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\big(\psi\boldsymbol{f}\big) &= \boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{\nabla}\psi + \psi\,\boldsymbol{\nabla f} \\
\operatorname{div}\big(\psi\boldsymbol{f}\big) &= \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + \psi\ \operatorname{div}\boldsymbol{f} \\
\operatorname{div}\big(\psi\boldsymbol{L}\big) &= \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\nabla}\psi) + \psi\ \operatorname{div}\boldsymbol{L} \\
\boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\big) &= (\boldsymbol{\nabla f})^{T}\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{\nabla g})^{T}\boldsymbol{f} \\
\operatorname{div}\big(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g}\big) &= (\operatorname{div}\boldsymbol{g})\,\boldsymbol{f} + (\boldsymbol{\nabla f})\,\boldsymbol{g} \\
\operatorname{div}\big(\boldsymbol{L}\boldsymbol{f}\big) &= \boldsymbol{f}\cdot\big(\operatorname{div}\boldsymbol{L}^{T}\big) + \boldsymbol{L}^{T}\cdot\boldsymbol{\nabla f}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   * $\left[\boldsymbol{\nabla}(\psi \boldsymbol{f})\right]_{ij} = \left(\psi f_i\right)_{,j} = f_i \psi_{,j} + \psi f_{i,j}$
   * $\left[\operatorname{div}\left(\psi \boldsymbol{L}\right)\right]_i = \left(\psi L_{ij}\right)_{,j} = L_{ij}\psi_{,j} + \psi L_{ij,j}$
   * ...

- ***Esempio.*** (Utile nella teoria dei cristalli liquidi) Sia $\boldsymbol{n} : \mathcal{E} \to V$, differenziabile. Allora

$$\left|\boldsymbol{n}\right| \equiv \text{cost.} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\boldsymbol{\nabla n}\right)^T \boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{0} \, .$$

   * $\sum_i n_i n_i \equiv \text{cost.} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\sum_i n_i n_i\right)_{,j} \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dots$

- ***Campi vettoriali conservativi***. Sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ semplicemente connesso e sia $\boldsymbol{f} : \mathcal{B} \to V$, $\boldsymbol{f} \in C^1(\mathcal{B})$. Allora

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \psi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}\, , \ \psi \in C^2(\mathcal{B}) \ : \ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\nabla}\psi \, .$$

- ***Teorema della divergenza***. Sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ una regione limitata e regolare e siano $\psi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f} : \mathcal{B} \to V$, ed $\boldsymbol{L} : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(V)$, campi $C^1(\overline{\mathcal{B}})$. Allora:

$$\int_{\partial^*\mathcal{B}} \psi\, \boldsymbol{\nu}\, da = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\nabla}\psi\, dv \ ; \quad \int_{\partial^*\mathcal{B}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\nu}\, da = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, dv \ ; \quad \int_{\partial^*\mathcal{B}} \boldsymbol{L\nu}\, da = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \boldsymbol{L}\, dv \ ,$$

dove $\boldsymbol{\nu}$ indica la normale uscente da $\partial\mathcal{B}$.
   * $\forall\, \boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{u} \cdot \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \boldsymbol{L}\, dv = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}\left(\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{u}\right) dv = \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, da = \dots$

- ***Teorema della divergenza superficiale***
   * Siano Σ una superficie una superficie regolare, $\boldsymbol{\nu}$ la sua normale, ed $\boldsymbol{f}$ un campo C^1 in un aperto contenente Σ. Definiamo il **gradiente superficiale**:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{f} := \boldsymbol{\nabla f}\, \boldsymbol{P}_{\perp\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nabla f}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}\right) .$$

   * Definiamo: $\operatorname{div}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{f} := \operatorname{tr} \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{u} \cdot \operatorname{div}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{L} := \operatorname{div}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{u}\right)$ $(\forall\, \boldsymbol{u} \in V)$.
   * Un campo vettoriale $\boldsymbol{f}$(risp. tensoriale $\boldsymbol{L}$) si dice *tangente* a Σ se $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\nu} \equiv 0$ (risp. $\boldsymbol{L\nu} \equiv \boldsymbol{0}$).
   * Sia $\partial^*\Sigma$ la frontiera ridotta di Σ e $\boldsymbol{t}$ il versore tangente a $\partial^*\Sigma$. Indichiamo con $\boldsymbol{\nu}_\Sigma$ l'unico versore che punta verso l'esterno di Σ ed è ortogonale sia a $\boldsymbol{\nu}$ che a $\boldsymbol{t}$.
   * (**Teorema**). Siano $\boldsymbol{f}$ ed $\boldsymbol{L}$ due campi C^1 e tangenti a Σ. Allora:

$$\int_{\partial^*\Sigma} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma\, ds = \int_\Sigma \operatorname{div}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{f}\, da \qquad \text{e} \qquad \int_{\partial^*\Sigma} \boldsymbol{L\nu}_\Sigma\, ds = \int_\Sigma \operatorname{div}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{L}\, da \, .$$

- ***Teorema di Stokes***. Siano Σ una superficie regolare, $\boldsymbol{\nu}$ la sua normale, $\partial^*\Sigma$ la frontiera ridotta della superficie e $\boldsymbol{t}$ il versore tangente a $\partial^*\Sigma$. Sia inoltre $\boldsymbol{f}$ un campo C^1 in un aperto contenente Σ. Allora:

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\nu}\, da = \int_{\partial^*\Sigma} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{t}\, ds \, .$$

- ***Definizione***. Per una funzione scalare $\psi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ definiamo il **laplaciano** come:

$$\Delta\psi := \operatorname{div} \boldsymbol{\nabla}\psi \, .$$

- ***Esercizi***
   * Siano $\boldsymbol{r}(x,y,z) := x\, \boldsymbol{e}_x + y\, \boldsymbol{e}_y + z\, \boldsymbol{e}_z$; $r(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ed $\boldsymbol{e}_r := \boldsymbol{r}/r$. Dimostrare:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\psi &= \psi'(r)\, \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{\nabla r} &= \boldsymbol{I} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{e}_r &= \frac{2}{r} \\ \operatorname{div}\left(\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{e}_r\right) &= \frac{3}{r}\, \boldsymbol{e}_r \end{aligned}$$

$*$ Dimostrare che il gradiente superficiale soddisfa la relazione

$$\nabla_{\mathrm{s}}\big(\psi \boldsymbol{f}\big) = \psi\, \nabla_{\mathrm{s}} \boldsymbol{f} + \big(\boldsymbol{f} \otimes \nabla\psi\big)\, \boldsymbol{P}_{\perp\boldsymbol{\nu}} \; .$$

$*$ Dimostrare: $\operatorname{div}\big(\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{g}\big) = \boldsymbol{g} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{g}$.

$*$ Dimostrare: $\operatorname{rot}\big(\psi \boldsymbol{f}\big) = \nabla\psi \wedge \boldsymbol{f} + \psi \operatorname{rot} \boldsymbol{f}$.

$*$ Dimostrare: $\operatorname{rot}\big(\psi\,(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g})\boldsymbol{h}\big) = (\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{h}) \operatorname{rot}(\psi \boldsymbol{f}) + \big(\nabla(\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{h})\big) \wedge \psi \boldsymbol{f}$.

<u>Coordinate cilindriche</u>

- Sia $p - o = x\, \boldsymbol{e}_x + y\, \boldsymbol{e}_y + z\, \boldsymbol{e}_z$.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \dfrac{\partial_r(p-o)}{\big|\partial_r(p-o)\big|} = \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_\varphi = \dfrac{\partial_\varphi(p-o)}{\big|\partial_\varphi(p-o)\big|} = -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z = \dfrac{\partial_z(p-o)}{\big|\partial_z(p-o)\big|} = \boldsymbol{e}_z . \end{cases} \tag{2}$$

  Il sistema di coordinate è *ortogonale* se la base ad esso associata lo è. In questo caso abbiamo: $p - o = r\, \boldsymbol{e}_r + z\boldsymbol{e}_z$.

- Sia ora $p(t) = \big(r(t), \varphi(t), z(t)\big)$ una curva in $\mathcal{E}$. Derivando (2) rispetto al tempo abbiamo:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi \; , \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\dot\varphi\, \boldsymbol{e}_r \qquad \text{e} \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_z = \boldsymbol{0} \; ,$$

  da cui segue

$$\dot p = \dot r\, \boldsymbol{e}_r + r\dot\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi + \dot z\, \boldsymbol{e}_z \; .$$

- Gradiente di una funzione scalare. Sia $\psi(r, \varphi, z)$ una funzione da $\mathcal{E}$ in $\mathbb{R}$ definita in coordinate cilindriche. Allora,

$$\nabla\psi = \psi_{,r}\, \boldsymbol{e}_r + \frac{\psi_{,\varphi}}{r}\, \boldsymbol{e}_\varphi + \psi_{,z}\, \boldsymbol{e}_z \; .$$

  $*$ Lungo ogni curva deve valere

$$\psi_{,r}\dot r + \psi_{,\varphi}\dot\varphi + \psi_{,z}\dot z = \dot\psi\big(r(t), \varphi(t), z(t)\big) = \nabla\psi \cdot \dot p = \nabla\psi\big|_r \dot r + \nabla\psi\big|_\varphi r\dot\varphi + \nabla\psi\big|_z \dot z \; .$$

  Eguagliando i coefficienti $\forall \dot r, \dot\varphi, \dot z$, ne segue la tesi.

- Gradiente dei versori.

$$\begin{aligned} \nabla\boldsymbol{e}_r &= \frac{1}{r}\, \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi \\ \nabla\boldsymbol{e}_\varphi &= -\frac{1}{r}\, \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\varphi \\ \nabla\boldsymbol{e}_z &= \boldsymbol{0} \; . \end{aligned} \tag{3}$$

  $*$ La terza è ovvia. Dimostriamo la prima. Analogamente a prima abbiamo, lungo una generica curva,

$$\dot\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi = \dot{\boldsymbol{e}}_r = \nabla\boldsymbol{e}_r(\dot p) = \begin{aligned} &\Big(\nabla\boldsymbol{e}_r\big|_{rr}\dot r + \nabla\boldsymbol{e}_r\big|_{r\varphi} r\dot\varphi + \nabla\boldsymbol{e}_r\big|_{rz}\dot z\Big)\, \boldsymbol{e}_r \\ +\, &\Big(\nabla\boldsymbol{e}_r\big|_{\varphi r}\dot r + \nabla\boldsymbol{e}_r\big|_{\varphi\varphi} r\dot\varphi + \nabla\boldsymbol{e}_r\big|_{\varphi z}\dot z\Big)\, \boldsymbol{e}_\varphi \\ +\, &\Big(\nabla\boldsymbol{e}_r\big|_{zr}\dot r + \nabla\boldsymbol{e}_r\big|_{z\varphi} r\dot\varphi + \nabla\boldsymbol{e}_r\big|_{zz}\dot z\Big)\, \boldsymbol{e}_z \end{aligned}$$

  di nuovo, eguagliando i coefficienti, segue la tesi.

- Utilizzando le (1) e la (3) si dimostra che, data una funzione vettoriale $\boldsymbol{f} = f_r\, \boldsymbol{e}_r + f_\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi + f_z\, \boldsymbol{e}_z$, si ha:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{f} \;&=\; f_{r,r}\, \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_r \;+\; \frac{1}{r}\big(f_{r,\varphi} - f_\varphi\big)\, \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\varphi \;+\; f_{r,z}\, \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_z \\ &+\; f_{\varphi,r}\, \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\big(f_{\varphi,\varphi} + f_r\big)\, \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi \;+\; f_{\varphi,z}\, \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_z \\ &+\; f_{z,r}\, \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_r \;+\; \frac{f_{z,\varphi}}{r}\, \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_\varphi \;+\; f_{z,z}\, \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z \;,\end{aligned}$$

  da cui:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{f} &= \operatorname{tr} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{f} = f_{r,r} + \frac{1}{r}\big(f_{\varphi,\varphi} + f_r\big) + f_{z,z} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{f} &= \boldsymbol{w}\big(\operatorname{skw} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{f}\big) = \left(\frac{f_{z,\varphi}}{r} - f_{\varphi,z}\right) \boldsymbol{e}_r + \big(f_{r,z} - f_{z,r}\big)\, \boldsymbol{e}_\varphi + \left(f_{\varphi,r} + \frac{f_\varphi - f_{r,\varphi}}{r}\right) \boldsymbol{e}_z \;.\end{aligned}$$

- Il laplaciano di una funzione scalare $\psi(r, \varphi, z)$ è dato da:

$$\Delta\psi = \psi_{,rr} + \frac{1}{r}\,\psi_{,r} + \frac{1}{r^2}\,\psi_{,\varphi\varphi} + \psi_{,zz} \;.$$

- ***Esercizi***
  - ∗ Sia $\boldsymbol{f} = f_r(r)\, \boldsymbol{e}_r + f_\varphi(r)\, \boldsymbol{e}_\varphi + f_z(r)\, \boldsymbol{e}_z$. Dimostrare:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{f} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad f_r(r) = \frac{c_1}{r} \;. \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \quad &\Longleftrightarrow \quad f_z(r) \equiv \text{cost.} \qquad \text{e} \qquad f_\varphi(r) = \frac{c_2}{r} \;.\end{aligned}$$

  - ∗ Sia $\boldsymbol{f} = f_\varphi(\varphi)\, \boldsymbol{e}_\varphi$. Calcolare $\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{f}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ e $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}$.

Coordinate sferiche

- Il tipo di calcoli è simile a quelli fatti per le coordinate cilindriche. Riportiamo solo i risultati. Sia $p - o = x\, \boldsymbol{e}_x + y\, \boldsymbol{e}_y + z\, \boldsymbol{e}_z$.

$$\begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = r \cos\vartheta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \frac{\partial_r (p-o)}{|\partial_r (p-o)|} = \sin\vartheta \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_x + \sin\vartheta \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_y + \cos\vartheta\, \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\partial_\varphi (p-o)}{|\partial_\varphi (p-o)|} = -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_\vartheta = \frac{\partial_\vartheta (p-o)}{|\partial_\vartheta (p-o)|} = \cos\vartheta \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_x + \cos\vartheta \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_y - \sin\vartheta\, \boldsymbol{e}_z \end{cases}$$

  Inoltre, $p - o = r\, \boldsymbol{e}_r$.

- Sia ora $p(t) = \big(r(t), \varphi(t), \vartheta(t)\big)$ una curva in $\mathcal{E}$. Derivando rispetto al tempo abbiamo:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot\varphi \sin\vartheta\, \boldsymbol{e}_\varphi + \dot\vartheta\, \boldsymbol{e}_\vartheta \;, \quad \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\dot\varphi \sin\vartheta\, \boldsymbol{e}_r - \dot\varphi \cos\vartheta\, \boldsymbol{e}_\vartheta \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{e}}_\vartheta = -\dot\vartheta\, \boldsymbol{e}_r + \dot\varphi \cos\vartheta\, \boldsymbol{e}_\varphi \;,$$

  da cui segue (basta la prima derivata): $\dot p = \dot r\, \boldsymbol{e}_r + r\dot\varphi \sin\vartheta\, \boldsymbol{e}_\varphi + r\dot\vartheta\, \boldsymbol{e}_\vartheta$.

- Gradiente di una funzione scalare. Sia $\psi(r, \varphi, \vartheta)$ una funzione da $\mathcal{E}$ in $\mathbb{R}$ definita in coordinate cilindriche. Allora,

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \psi_{,r}\, \boldsymbol{e}_r + \frac{\psi_{,\varphi}}{r \sin\vartheta}\, \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\psi_{,\vartheta}}{r}\, \boldsymbol{e}_\vartheta \;.$$

- Gradiente dei versori.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{e}_r &= \frac{1}{r}\,(\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\vartheta \otimes \boldsymbol{e}_\vartheta) \\
\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{e}_\varphi &= -\frac{1}{r}\,(\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \operatorname{ctg}\vartheta\, \boldsymbol{e}_\vartheta \otimes \boldsymbol{e}_\varphi) \\
\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{e}_\vartheta &= -\frac{1}{r}\,(\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\vartheta - \operatorname{ctg}\vartheta\, \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi)
\end{aligned}$$

- Data una funzione vettoriale differenziabile $\boldsymbol{f} = f_r\, \boldsymbol{e}_r + f_\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi + f_\vartheta\, \boldsymbol{e}_\vartheta$, si ha:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{f} \; = \; & f_{r,r}\, \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{f_{r,\varphi}}{\sin\vartheta} - f_\varphi\right) \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\big(f_{r,\vartheta} - f_\vartheta\big)\, \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\vartheta \\
& + f_{\varphi,r}\, \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{f_{\varphi,\varphi} + f_\vartheta \cos\vartheta}{\sin\vartheta} + f_r\right) \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{f_{\varphi,\vartheta}}{r}\, \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\vartheta \\
& + f_{\vartheta,r}\, \boldsymbol{e}_\vartheta \otimes \boldsymbol{e}_r + \frac{f_{\vartheta,\varphi} - f_\varphi \cos\vartheta}{r \sin\vartheta}\, \boldsymbol{e}_\vartheta \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{f_{\vartheta,\vartheta} + f_r}{r}\, \boldsymbol{e}_\vartheta \otimes \boldsymbol{e}_\vartheta \,,
\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \boldsymbol{f} &= \operatorname{tr} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{f} = f_{r,r} + \frac{2 f_r}{r} + \frac{f_{\varphi,\varphi}}{r \sin\vartheta} + \frac{f_{\vartheta,\vartheta} + f_\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta}{r} \\
\operatorname{rot} \boldsymbol{f} &= \boldsymbol{w}\big(\operatorname{skw} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{f}\big) = \frac{1}{r}\left(f_{\varphi,\vartheta} + f_\varphi \operatorname{ctg}\vartheta - \frac{f_{\vartheta,\varphi}}{\sin\vartheta}\right) \boldsymbol{e}_r + \left(\frac{f_\vartheta - f_{r,\vartheta}}{r} + f_{\vartheta,r}\right) \boldsymbol{e}_\varphi \\
& \qquad + \left(\frac{f_{r,\varphi}}{r \sin\vartheta} - \frac{f_\varphi}{r} - f_{\varphi,r}\right) \boldsymbol{e}_\vartheta \,.
\end{aligned}$$

- Infine, il laplaciano di una funzione scalare $\psi(r, \varphi, \vartheta)$ è dato da:

$$\Delta\psi = \psi_{,rr} + \frac{2}{r}\,\psi_{,r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\,\psi_{,\varphi\varphi} + \frac{\cos\vartheta}{r^2 \sin\vartheta}\,\psi_{,\vartheta} + \frac{1}{r^2}\,\psi_{,\vartheta\vartheta} \,.$$