

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL S. CUORE
Sede di Brescia
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

FISICA MATEMATICA

Appunti a cura di Alessandro Musesti

Anno Accademico 2023-2024

Versione del 29 novembre 2023

Indice

1	Calcolo delle Variazioni	3
1.1	Il caso unidimensionale	3
1.2	Il caso multidimensionale	9
2	Principi variazionali in Elasticità lineare	11
2.1	Energia di deformazione	12
2.2	Energia complementare	15
3	Spazi funzionali, convergenza debole, semicontinuità	17
3.1	Convergenza debole	18
3.2	Spazi di Sobolev	20
3.3	Funzioni convesse e semicontinuità inferiore	22
4	Metodo diretto del Calcolo delle variazioni	24
4.1	Semicontinuità debole e coercitività	25
4.2	Convessità degli integrandi	26
4.3	Esistenza della soluzione per il problema misto dell'elasticità lineare	28
4.4	Dipendenza non lineare da u	30
5	Elasticità finita e iperelasticità	32
5.1	Materiali isotropi	35
5.2	Materiali ortotropi	37
5.3	Materiali trasversalmente isotropi	37
5.4	Materiali di St.Venant-Kirchhoff	39
6	Oltre la convessità	40
6.1	Quasiconvessità	40
6.2	Convessità di rango 1	43
6.3	Policonvessità	46
6.4	Approfondimento sulle funzioni policonvesse	51

7	Il teorema di John Ball	54
8	Policonvessità delle energie di Ogden	58
9	Esistenza di soluzioni con il Teorema di inversione locale	62
10	Esercizi	64
11	Rilassamento di un funzionale	65
12	Breve cenno alla Γ -convergenza	68
	12.1 Il caso quadratico	73

1 Calcolo delle Variazioni

In molte situazioni le soluzioni di un problema alle derivate parziali possono essere viste come estremali di un opportuno funzionale definito su un opportuno spazio; anzi, talvolta addirittura il problema fisico che conduce all'equazione può in realtà formularsi anche come principio variazionale. Il cosiddetto *metodo diretto* del Calcolo delle Variazioni è uno degli strumenti matematici che permette di mostrare esistenza e molte altre proprietà dei minimi di un funzionale.

Iniziamo con alcuni richiami. Sia dato un funzionale Φ definito su uno spazio vettoriale A sul quale per ora non facciamo specificazioni precise. Sia poi B uno spazio di Banach denso in A . Diremo che $\bar{\mathbf{u}} \in A$ è un *estremale* per il funzionale Φ (o un *punto stazionario*, o un *punto critico*) se per ogni $\mathbf{v} \in B$ la funzione $g_{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \times B \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$g_{\mathbf{v}}(t) = \Phi[\bar{\mathbf{u}} + t\mathbf{v}]$$

verifica la condizione

$$g'_{\mathbf{v}}(0) = 0. \tag{1}$$

Chiaramente, se Φ ha minimo in $\bar{\mathbf{u}}$ ed è in qualche modo derivabile, allora $\bar{\mathbf{u}}$ sarà un estremale per Φ . Chiameremo *equazione di Eulero-Lagrange* per un funzionale Φ una qualunque condizione equivalente alla (1).

Nel seguito ci restringeremo solo al caso in cui A e B siano spazi di funzioni e Φ sia della forma

$$\Phi[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} W(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) dV$$

dove $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ è una funzione sufficientemente regolare, $\nabla \mathbf{u}$ denota il complesso delle derivate prime di \mathbf{u} , Ω è un aperto di \mathbb{R}^n con frontiera regolare, dV denota l'integrazione rispetto alla misura (di volume) di Lebesgue n -dimensionale \mathcal{L}^n e $W : \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{kn} \rightarrow \mathbb{R}$.

1.1 Il caso unidimensionale

Nel caso $n = 1$ in cui $\Omega =]a, b[$, abbiamo un funzionale del tipo

$$\Phi[\mathbf{u}] = \int_a^b W(x, \mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x)) dx$$

che si può anche scrivere

$$\Phi[u_1, \dots, u_k] = \int_a^b W(x, u_1(x), \dots, u_k(x), u_1'(x), \dots, u_k'(x)) dx$$

con $W :]a, b[\times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. L'azione lagrangiana di un sistema oloonomo a k gradi di libertà ricade in questo caso.

Il problema variazionale, oltre che dall'espressione del funzionale Φ , dipende fortemente dal tipo di spazio funzionale sul quale è definito. Per esempio, il caso della lagrangiana di un sistema oloonomo dà un problema ben preciso quando si cerca la soluzione nello spazio delle funzioni $\mathbf{u} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^2 e tali che $\mathbf{u}(a) = \mathbf{u}_a \in \mathbb{R}^k$ e $\mathbf{u}(b) = \mathbf{u}_b \in \mathbb{R}^k$.

Vediamo un esempio di come ricavare un'equazione di Eulero-Lagrange in questo caso. Durante il corso di Meccanica Analitica abbiamo imparato che le equazioni del moto di

Lagrange sono proprio le equazioni di Eulero-Lagrange per questo funzionale, sotto alcune ipotesi di regolarità; in particolare, la lagrangiana W doveva essere una funzione di classe C^2 nelle variabili u'_1, \dots, u'_k . Vedremo ora una tecnica più raffinata che permette di indebolire questa ipotesi, che per alcune applicazioni è a volte troppo restrittiva. Premettiamo un lemma fondamentale.

Lemma 1.1 (Du Bois-Reymond). *Sia $\mathbf{u} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funzione continua tale che*

$$\int_a^b \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}'(x) dx = 0$$

per ogni $\mathbf{v} \in C_c^\infty(]a, b[; \mathbb{R}^k)$. Allora \mathbf{u} è costante.

Dimostrazione. Per ogni $h \geq 1$, $h \in \mathbb{N}$ sia $\rho_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione positiva di classe C^∞ tale che $\rho_h(x) = 0$ per $|x| > 1/h$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_h(x) dx = 1.$$

Preso poi $x \in]a, b[$, sia $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $]x - 1/h, x + 1/h[\subseteq]a, b[$ per ogni $h \geq \bar{h}$. Allora⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \rho_h(x - \xi) \mathbf{u}(\xi) d\xi - \mathbf{u}(x) \right| &= \left| \int_a^b \rho_h(x - \xi) (\mathbf{u}(\xi) - \mathbf{u}(x)) d\xi \right| \leq \\ &\leq \int_a^b \rho_h(x - \xi) |\mathbf{u}(\xi) - \mathbf{u}(x)| d\xi \leq \max_{|x - \xi| \leq 1/h} |\mathbf{u}(\xi) - \mathbf{u}(x)|. \end{aligned}$$

Per la continuità di \mathbf{u} esisterà $\xi_h \in]x - 1/h, x + 1/h[$ tale che

$$\max_{|x - \xi| \leq 1/h} |\mathbf{u}(\xi) - \mathbf{u}(x)| = |\mathbf{u}(\xi_h) - \mathbf{u}(x)|.$$

Ma allora, passando al limite per $h \rightarrow +\infty$, abbiamo

$$\forall x \in]a, b[: \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_a^b \rho_h(\xi - x) \mathbf{u}(\xi) d\xi = \mathbf{u}(x). \quad (2)$$

Siano a questo punto x_1, x_2 in $]a, b[$ e $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left] x_1 - \frac{1}{h}, x_1 + \frac{1}{h} \right[\cup \left] x_2 - \frac{1}{h}, x_2 + \frac{1}{h} \right[\subseteq]a, b[$$

per ogni $h \geq \bar{h}$. Poniamo

$$\mathbf{v}_h(x) = (\mathbf{u}(x_2) - \mathbf{u}(x_1)) \int_a^x (\rho_h(x_2 - \xi) - \rho_h(x_1 - \xi)) d\xi;$$

chiaramente \mathbf{v}_h è di classe C^∞ e nulla fuori da un compatto contenuto in $]a, b[$. Pertanto per ipotesi abbiamo

$$\int_a^b \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}'_h(x) dx = 0,$$

⁽¹⁾La funzione (di x) $\int \rho_h(x - \xi) \mathbf{u}(\xi) d\xi$ si chiama *convoluzione* e viene spesso denotata col simbolo $\rho_h * \mathbf{u}$.

che significa

$$(\mathbf{u}(x_2) - \mathbf{u}(x_1)) \cdot \left[\int_a^b \rho_h(x_2 - \xi) \mathbf{u}(\xi) d\xi - \int_a^b \rho_h(x_1 - \xi) \mathbf{u}(\xi) d\xi \right] = 0.$$

Passando al limite per $h \rightarrow +\infty$, dalla (2) segue che

$$\int_a^b \rho_h(x_i - \xi) \mathbf{u}(\xi) d\xi \rightarrow \mathbf{u}(x_i), \quad i = 1, 2,$$

e quindi $|\mathbf{u}(x_2) - \mathbf{u}(x_1)|^2 = 0$, cioè \mathbf{u} è costante su $]a, b[$. Per continuità deve essere costante anche su $[a, b]$. \square

Corollario 1.2. *Siano $\mathbf{u}, \mathbf{U} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ due funzioni continue tali che*

$$\int_a^b [\mathbf{U}(x) \cdot \mathbf{v}'(x) + \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x)] dx = 0$$

per ogni $\mathbf{v} \in C_c^\infty(]a, b[; \mathbb{R}^k)$. Allora $\mathbf{U} \in C^1(]a, b[, \mathbb{R}^k)$ e $\mathbf{U}' = \mathbf{u}$.

Dimostrazione. Poniamo

$$\mathbf{V}(x) = \int_a^x \mathbf{u}(\xi) d\xi;$$

la funzione \mathbf{V} è di classe C^1 . Per ogni $\mathbf{v} \in C_c^\infty(]a, b[; \mathbb{R}^k)$ si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_a^b [\mathbf{U}(x) - \mathbf{V}(x)] \cdot \mathbf{v}'(x) dx &= \int_a^b [\mathbf{U}(x) \cdot \mathbf{v}'(x) + \mathbf{V}'(x) \cdot \mathbf{v}(x)] dx \\ &= \int_a^b [\mathbf{U}(x) \cdot \mathbf{v}'(x) + \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x)] dx = 0. \end{aligned}$$

Ma allora dal lemma precedente si ha che $\mathbf{U} - \mathbf{V}$ è costante, per cui \mathbf{U} è di classe C^1 e inoltre

$$\mathbf{U}'(x) = \mathbf{V}'(x) = \mathbf{u}(x). \quad \square$$

Naturalmente vale anche il viceversa del corollario precedente.

Nel seguito, se $W : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ porremo per brevità

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} = \left(\frac{\partial W}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial u_k} \right).$$

Teorema 1.3. *Sia Φ il funzionale definito su $C^1([a, b]; \mathbb{R}^k)$ da*

$$\Phi[\mathbf{u}] = \int_a^b W(x, \mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x)) dx,$$

dove W è una funzione continua nella variabile x e di classe C^1 nelle variabili \mathbf{u} e \mathbf{u}' .

Allora $\bar{\mathbf{u}}$ è un estremales per Φ se e solo se verifica l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}'}(x, \bar{\mathbf{u}}(x), \bar{\mathbf{u}}'(x)) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}(x, \bar{\mathbf{u}}(x), \bar{\mathbf{u}}'(x)). \quad (3)$$

Dimostrazione. Calcoliamo $g'_v(t)$, dove v è una funzione in $C_c^\infty(]a, b[; \mathbb{R}^k)$. Abbiamo

$$g_v(t) = \int_a^b W(x, \bar{u}(x) + tv(x), \bar{u}'(x) + tv'(x)) dx$$

per cui

$$g'_v(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}(x, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}') \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}'}(x, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}') \cdot \mathbf{v}' \right] dx.$$

A questo punto è chiaro che se $\bar{\mathbf{u}}$ è un estremo per Φ , si ha $g'_v(0) = 0$ per ogni v e dalla proposizione precedente si trae che $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}'}$ è di classe C^1 e la tesi. E viceversa. \square

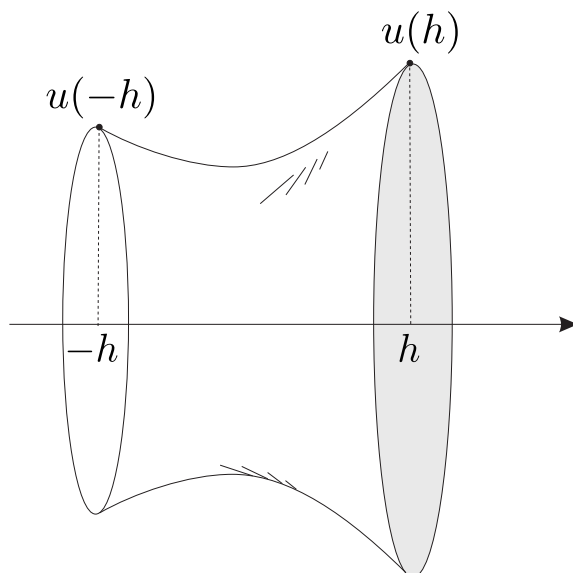
Si noti che, nel caso in cui W sia la lagrangiana di un sistema meccanico olonomo, la (3) corrisponde proprio alle equazioni del moto di Lagrange.

Osservazione 1.4. Se $\bar{\mathbf{u}}$ è un punto stazionario di classe C^2 , si ha

$$\frac{d}{dx} \left(\bar{\mathbf{u}}' \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}'} - W \right) = \bar{\mathbf{u}}'' \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}'} + \bar{\mathbf{u}}' \cdot \frac{d}{dx} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}'} - \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}' - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}'} \cdot \bar{\mathbf{u}}'' = - \frac{\partial W}{\partial x}.$$

Quindi se W non dipende esplicitamente da x la quantità a primo membro è un integrale primo (ovvero una quantità conservata) e può sostituire una delle equazioni di Eulero-Lagrange. \star

Esempio 1.5 (Superficie minima di rivoluzione). Consideriamo il problema di trovare una curva congiungente due punti dati di un piano in modo che il solido ottenuto dalla rotazione del piano stesso attorno a una data retta non passante per il segmento congiungente i due punti abbia superficie laterale minima.



Se si prende per asse x l'asse di rotazione e i punti hanno coordinate $(-h, u_1)$ e (h, u_2) , dalla condizione data si deve avere $u_1 u_2 > 0$. Se indichiamo con $u : [-h, h] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

che dà l'equazione della curva, l'area della superficie laterale del solido è data, secondo le formule della Geometria differenziale, da

$$\Phi[u] = 2\pi \int_{-h}^h u(x) \sqrt{1 + u'^2(x)} dx,$$

da cui si vede che $k = 1$, ossia che ci troviamo nel caso scalare. L'equazione di Eulero-Lagrange di questo problema è

$$\frac{d}{dx} \frac{u(x) u'(x)}{\sqrt{1 + u'^2(x)}} = \sqrt{1 + u'^2(x)}.$$

Poiché W non dipende esplicitamente da x , per l'Osservazione 1.4 si ha

$$\frac{u(x) u'^2(x)}{\sqrt{1 + u'^2(x)}} - u(x) \sqrt{1 + u'^2(x)} = -C.$$

Questa identità si può anche scrivere

$$u(x) = C \sqrt{1 + u'^2(x)} \tag{4}$$

e quindi dall'equazione di Eulero-Lagrange segue

$$\frac{d}{dx} (Cu'(x)) = \frac{u(x)}{C}$$

ossia

$$u''(x) - \frac{1}{C^2} u(x) = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione sono della forma

$$u(x) = Ae^{x/C} + Be^{-x/C}$$

che però contengono una costante sovrabbondante. Imponendo infatti la (4) si trova con facili passaggi

$$4AB = C^2$$

e quindi, ponendo

$$A = \frac{C}{2} e^{-K/C}, \quad B = \frac{C}{2} e^{K/C}$$

troviamo

$$u(x) = \frac{C}{2} (\exp((x - K)/C) + \exp(-(x - K)/C)) = C \cosh \frac{x - K}{C}.$$

Imponendo le condizioni $u(-h) = u_1$ e $u(h) = u_2$ si trovano delle relazioni per K e C . Se esse sono risolubili in queste incognite, avremo trovato degli estremali per il funzionale dato. La curva cercata è, in questi casi, una catenaria.

Osserviamo che la soluzione non sempre esiste: per esempio, se $u(-h) = u(h) = R$, imponendo la condizione $u(-h) = u(h)$ si trova facilmente, dalla parità del coseno iperbolico, che $K = 0$. Dunque resta da verificare

$$C \cosh \frac{h}{C} = R,$$

che, posto $z = h/C$, conduce a

$$\cosh z = \frac{R}{h}z. \quad (5)$$

Siccome da uno studio grafico si vede facilmente che l'equazione non ammette soluzioni per R/h piccolo, troviamo che in alcuni casi il problema non ammette una soluzione regolare (anche se l'estremo inferiore dei valori di Φ esiste, ed è pari a $2\pi R^2$, ma non corrisponde al grafico di una funzione). Negli altri casi, dallo studio grafico si trova che l'equazione (5) ammette due soluzioni (tranne che nel caso di tangenza), e quindi tra queste bisogna cercare quella che dà l'area minima. Calcolando

$$A = 2\pi \int_{-h}^h C \cosh^2 \frac{x}{C} dx = \dots = \pi C^2 \left[\sinh \frac{2h}{C} + \frac{2h}{C} \right] \quad (2)$$

e sostituendo i due valori di C trovati si può stabilire quale delle due soluzioni dia l'area minima. ★

Esempio 1.6 (Brachistocrona). Consideriamo ora il problema che storicamente ha dato origine al Calcolo delle Variazioni: quello di trovare la cosiddetta *brachistocrona*, ovvero la curva congiungente due punti in un piano verticale che minimizza il tempo di percorrenza di un punto che, partendo da fermo, scorre su di essa, senza attrito, sottoposto alla forza-peso.

Prendiamo l'asse x orizzontale e l'asse y rivolto verso il basso. Poniamo il punto di partenza nell'origine e quello di arrivo in (b, β) con $b, \beta > 0$. Supponiamo che la curva sia il grafico di una funzione $u : [0, b] \rightarrow]0, +\infty[$. Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgu(x) = E = 0$$

da cui si ricava la nota legge $v = \sqrt{2gu(x)}$. Quindi si ha

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{2gu(x)}}.$$

Integrando si ottiene

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{u(x)}} dx,$$

che deve essere minimizzato. Quindi bisogna trovare i punti critici del funzionale

$$\int_0^b W(u(x), u'(x)) dx, \quad W(u, u') = \frac{\sqrt{1 + u'^2}}{\sqrt{u}}$$

che non dipende esplicitamente da x (abbiamo tolto il fattore $1/\sqrt{2g}$). L'integrale primo è

$$\frac{\sqrt{1 + u'^2}}{\sqrt{u}} - u' \frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1 + u'^2}} = c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1 + u'^2}} = c$$

che possiamo riscrivere, ponendo $2R = 1/c^2$, come

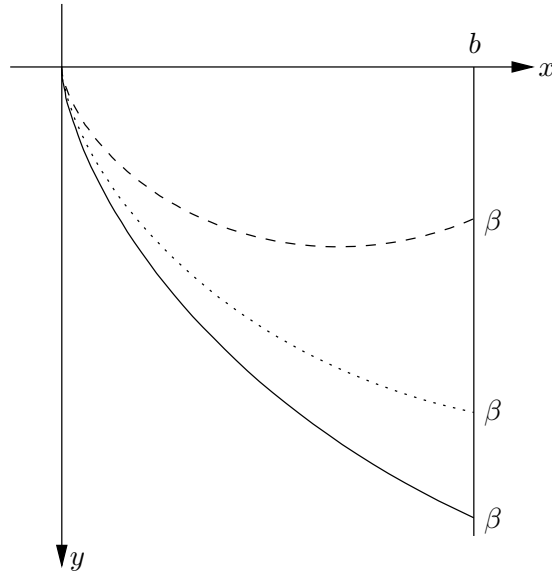
$$u(1 + u'^2) = 2R.$$

⁽²⁾Si usi la formula $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$.

Si può mostrare che sono soluzioni dell'equazione differenziale le *cicloidi*⁽³⁾ di equazione

$$u(x) = R \left(1 - \cos \theta^{-1} \left(\frac{x}{R} \right) \right)$$

dove $\theta(t) = t - \sin t$. Poiché si ha già $u(0) = 0$, resta solo da trovare R in modo che $u(b) = \beta$.



1.2 Il caso multidimensionale

Veniamo ora al caso delle funzioni di più variabili, cioè $n \geq 1$. In questo caso non possiamo più ridurre la regolarità della funzione, come abbiamo fatto nel caso scalare, e la tecnica da usare è molto simile a quella della Meccanica Analitica. Il lemma che segue quindi è una versione semplificata del lemma di Du Bois-Reymond, adatta al caso multidimensionale.

Lemma 1.7. *Sia Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^n e sia $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funzione continua. Se per ogni funzione $\mathbf{v} \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^k)$ si ha*

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dV = 0,$$

allora $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $x \in \Omega$ e $1 \leq j \leq k$ tale che $u_j(x) > 0$. Allora, siccome u_j è continua, esisterà una palla $B(x, \delta)$ di centro x e raggio δ contenuta in Ω sulla quale $u_j > 0$. Prendendo allora per \mathbf{v} una funzione C_c^∞ tale che $v_i \equiv 0$ per $i \neq j$ e v_j sia nulla fuori da $B(x, \delta)$ e positiva all'interno, si otterrebbe che l'integrale non è nullo, contro l'ipotesi. \square

⁽³⁾In forma parametrica una cicloide ha equazione

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

dove R è il raggio della circonferenza che genera la cicloide.

Teorema 1.8. Una funzione $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^2 è punto stazionario del funzionale

$$\Phi[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} W(x, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) dV \quad (6)$$

(con W di classe C^2 nei suoi argomenti) se e solo se

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}},$$

dove $\partial W / \partial (\nabla \mathbf{u})$ è il tensore di componenti $\partial W / \partial (\partial u_i / \partial x_k)$.

Dimostrazione. Calcoliamo la funzione $g'(t; \mathbf{v})$ per $\mathbf{v} \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^k)$:

$$g'(0; \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] dV.$$

Ora trasformiamo l'integrale del secondo addendo usando la formula di Gauss-Green⁽⁴⁾

$$\int_{\Omega} \mathbb{T} \cdot \nabla \mathbf{v} dV = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbb{T} dV + \int_{\partial \Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbb{T} \mathbf{n} dS$$

dove dS denota l'integrazione nella misura (di superficie) di Hausdorff $(n-1)$ -dimensionale \mathcal{H}^{n-1} , con $\mathbb{T} = \partial W / \partial \nabla \mathbf{u}$ e troviamo

$$g'(0; \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} - \operatorname{div} \frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right] \mathbf{v} dV + \int_{\partial \Omega} \mathbf{v}(x) \cdot \frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{u}}(x) \mathbf{n}(x) dS.$$

Ma l'ultimo addendo si annulla in quanto $\mathbf{v} = 0$ sul bordo di Ω , quindi

$$g'(0; \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} - \operatorname{div} \frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right] \cdot \mathbf{v} dV;$$

per cui una parte dell'enunciato è dimostrata. Il viceversa segue invece dal Lemma 1.7, dopo aver osservato che la funzione tra parentesi quadre è continua in x . \square

Pertanto l'equazione

$$\operatorname{div} \frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{u}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}$$

è l'equazione di Eulero-Lagrange per il funzionale (6). Si noti che l'equazione è stata ottenuta nell'ipotesi di W di classe C^2 , mentre nel caso unidimensionale le richieste sulla regolarità di W erano più deboli.

Esempio 1.9. Consideriamo il funzionale

$$\Phi[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] dV$$

⁽⁴⁾Tale formula si ricava a partire da

$$\operatorname{div}(\mathbb{T}' \mathbf{v}) = \mathbb{T} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbb{T}$$

integrando e usando il Teorema della Divergenza.

dove $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ è un campo vettoriale continuo assegnato.

Allora

$$\frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{u}} = \nabla \mathbf{u}, \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{f}$$

e quindi l'equazione di Eulero-Lagrange per questo funzionale è

$$\operatorname{div} \nabla \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f},$$

che è l'equazione di Poisson vettoriale. Accanto a questa equazione va considerata la condizione al contorno, che di solito è codificata nello spazio funzionale in cui si cerca la soluzione. \star

Esempio 1.10. Se consideriamo invece il funzionale con

$$W(x, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{p} |\nabla \mathbf{u}|^p + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad (p \geq 1)$$

avremo

$$\frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{u}} = |\nabla \mathbf{u}|^{p-1} \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} = |\nabla \mathbf{u}|^{p-2} \nabla \mathbf{u}$$

e quindi l'equazione di Eulero-Lagrange in questo caso è

$$\operatorname{div}(|\nabla \mathbf{u}|^{p-2} \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{f}.$$

L'operatore differenziale (a valori vettoriali) $\operatorname{div}(|\nabla \mathbf{u}|^{p-2} \nabla \mathbf{u})$ viene denotato con $\Delta_p \mathbf{u}$ e si chiama *p-laplaciano*. Nel caso $p \neq 2$ esso non è lineare. \star

Esempio 1.11. Consideriamo il funzionale

$$\Phi[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} + \mu \nabla \mathbf{u}^{\top} : \nabla \mathbf{u} - 2\rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \right] dV$$

dove $\rho_0 \mathbf{b}$ è un campo assegnato.

In questo caso calcolando l'equazione di Eulero ritroviamo l'equazione di Navier

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{b} = 0. \quad \star$$

2 Principi variazionali in Elasticità lineare

Richiamiamo il problema misto statico ai valori al contorno in elasticità lineare:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{S} = \mathbf{C}[\mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\top}) & \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{su } \Gamma_0 \\ \mathbf{S} \mathbf{n} = \mathbf{s} & \text{su } \Gamma_1 \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial \Omega, \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset & \end{array} \right. \quad (\text{PM})$$

nel quale ricordiamo che \mathbf{u} rappresenta il campo di spostamento (piccolo rispetto alla configurazione di riferimento), ρ_0 la densità (assegnata), \mathbf{b} il campo di forze di volume (assegnate), \mathbf{S} il

tensore di Piola-Kirchhoff e \mathbf{C} il tensore quadruplo di elasticità. Ad esempio, per un materiale isotropo \mathbf{C} ha la forma

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}[\mathbf{E}] = \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}, \quad (7)$$

dove i coefficienti λ, μ sono detti *coefficienti di Lamé*. Ricordiamo anche che \mathbf{C} manda tensori simmetrici in tensori simmetrici e che è nullo sui tensori antisimmetrici. Inoltre si suppone usualmente che \mathbf{C} soddisfi la *grande simmetria*, ovvero che sia autoaggiunto rispetto al prodotto scalare dei tensori simmetrici:

$$\mathbf{C}[\mathbf{E}_1] \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{C}[\mathbf{E}_2].$$

Queste condizioni lasciano 21 coefficienti liberi per \mathbf{C} .

In questo paragrafo supporremo valide le seguenti condizioni di regolarità:

- Ω è un dominio connesso con frontiera regolare;
- $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}(\mathbf{x})$ è una funzione regolare su $\overline{\Omega}$;
- $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{b}(\mathbf{x})$ è continua su $\overline{\Omega}$;
- $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ è continua su Γ_0 ;
- $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{s}(\mathbf{x})$ è regolare a tratti su Γ_1 ;

e la seguente condizione di positività:

- \mathbf{C} è *definita positiva*, ossia

$$\forall \mathbf{E} \in \text{Sym}(\mathbb{R}^n) : \quad \mathbf{E} : \mathbf{C}[\mathbf{E}] \geq 0, \quad \mathbf{E} : \mathbf{C}[\mathbf{E}] = 0 \text{ se e solo se } \mathbf{E} = \mathbf{0}.^{(5)}$$

2.1 Energia di deformazione

Definizione 2.1. Se \mathbf{E} è un campo tensoriale simmetrico su $\overline{\Omega}$, poniamo

$$U_{\mathbf{C}}[\mathbf{E}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E} : \mathbf{C}[\mathbf{E}] dV$$

che viene detta energia di deformazione.

Proposizione 2.2. L'energia di deformazione verifica l'identità

$$U_{\mathbf{C}}[\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2] = U_{\mathbf{C}}[\mathbf{E}_1] + U_{\mathbf{C}}[\mathbf{E}_2] + \int_{\Omega} \mathbf{E}_1 : \mathbf{C}[\mathbf{E}_2] dV.$$

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{C} : \text{Sym}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^n)$ e vale la grande simmetria, abbiamo

$$\mathbf{E}_1 : \mathbf{C}[\mathbf{E}_2] = \mathbf{E}_2 : \mathbf{C}[\mathbf{E}_1]$$

e quindi

$$(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) : \mathbf{C}[\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2] = \mathbf{E}_1 : \mathbf{C}[\mathbf{E}_1] + \mathbf{E}_2 : \mathbf{C}[\mathbf{E}_2] + 2\mathbf{E}_1 : \mathbf{C}[\mathbf{E}_2]$$

da cui la tesi. □

⁽⁵⁾Si può verificare che nel caso di un materiale isotropo la condizione di definitezza positiva del tensore \mathbf{C} equivale a richiedere $\mu > 0$ e $3\lambda + 2\mu > 0$.

Definizione 2.3. Diremo che uno spostamento \mathbf{u} è cinematicamente ammissibile per il problema elastico (PM) se vale

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})\Big|_{\Gamma_0} = \mathbf{u}_0.$$

Denotiamo con \mathcal{S} l'insieme degli spostamenti cinematicamente ammissibili per il problema elastico (PM).

Ricordiamo che uno spostamento rigido infinitesimo è uno spostamento \mathbf{u} tale che

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Lemma 2.4. Siano dati due campi di spostamento $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e siano $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ i corrispondenti tensori di deformazione. Allora

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 \quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \text{ è uno spostamento rigido infinitesimo.}$$

Dimostrazione. Poniamo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$; allora $\mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top)/2$ è nullo. La tesi consiste nel vedere che ciò è equivalente a vedere che \mathbf{u} è spostamento rigido infinitesimo.

Se $\mathbf{E} = 0$, allora $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{x})$, con \mathbf{W} antisimmetrica. Presi \mathbf{x}, \mathbf{y} in una palla aperta del corpo, e detto ℓ il segmento che li congiunge, abbiamo

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\ell} \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \int_0^1 \mathbf{W}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dt.$$

Da qui, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ e ricordando l'antisimmetria, troviamo subito

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{y})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0.$$

Prendendo il gradiente di questa identità rispetto a \mathbf{x} abbiamo allora

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{W}^\top(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{y}) = 0$$

e prendendo il gradiente rispetto a \mathbf{y} risulta

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) - \mathbf{W}(\mathbf{y}) = 0$$

dal che si trae che \mathbf{W} è costante. Ma allora

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

cioè \mathbf{u} è spostamento rigido infinitesimo. Il viceversa è ovvio. □

Teorema 2.5 (Principio di minima energia potenziale). Sia

$$\Phi[\mathbf{u}] = U_{\mathbf{C}}[\mathbf{E}] - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_1} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} dS$$

e sia $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ una soluzione di (PM). Allora per ogni spostamento $\mathbf{u}' \in \mathcal{S}$ si ha

$$\Phi[\mathbf{u}] \leq \Phi[\mathbf{u}']$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$ a meno di uno spostamento rigido infinitesimo.

Dimostrazione. Poniamo $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}$, e conseguentemente

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}' - \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}' - \mathbf{S}, \quad \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_0} = 0.$$

A questo punto dalla Proposizione 2.2 applicata a \mathbf{E}' segue

$$U_{\mathbf{C}}[\mathbf{E}'] - U_{\mathbf{C}}[\mathbf{E}] = U_{\mathbf{C}}[\tilde{\mathbf{E}}] + \int_{\Omega} \mathbf{S} : \tilde{\mathbf{E}} dV.$$

Ma dal Teorema di Gauss-Green si ha

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} : \tilde{\mathbf{E}} dV = \int_{\Gamma_1} \mathbf{S} \mathbf{n} : \tilde{\mathbf{u}} dS - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{div} \mathbf{S} dV$$

e dunque

$$\Phi[\mathbf{u}'] - \Phi[\mathbf{u}] = U_{\mathbf{C}}[\tilde{\mathbf{E}}] - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dV + \int_{\Gamma_1} (\mathbf{S} \mathbf{n} - \mathbf{s}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS.$$

Siccome però \mathbf{u} è soluzione del problema, abbiamo

$$\Phi[\mathbf{u}'] - \Phi[\mathbf{u}] = U_{\mathbf{C}}[\tilde{\mathbf{E}}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{E}} : \mathbf{C}[\tilde{\mathbf{E}}] dV.$$

Dalla positività di \mathbf{C} si trae allora $\Phi[\mathbf{u}] \leq \Phi[\mathbf{u}']$. Se poi $\Phi[\mathbf{u}] = \Phi[\mathbf{u}']$, allora $\tilde{\mathbf{E}} = 0$, cioè, per il Lemma 2.4, $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}$ è uno spostamento rigido infinitesimo. \square

Il principio di minima energia potenziale dice che ogni soluzione del problema elastostatico (PM) rende minima la differenza tra l'energia di deformazione e il lavoro compiuto dalle forze esterne (sia di volume che di superficie). Dal teorema ora dimostrato segue facilmente il

Teorema 2.6 (di unicità). *La soluzione del problema misto (PM), se esiste, è unica a meno di uno spostamento rigido infinitesimo.*

Dimostrazione. Basta osservare che, dette $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ due soluzioni, si deve avere

$$\Phi[\mathbf{u}_1] \leq \Phi[\mathbf{u}_2], \quad \Phi[\mathbf{u}_2] \leq \Phi[\mathbf{u}_1],$$

e quindi $\Phi[\mathbf{u}_1] = \Phi[\mathbf{u}_2]$. Ma allora $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ è uno spostamento rigido infinitesimo. \square

Vogliamo ora dimostrare l'inverso del principio di minima energia potenziale. Per questo serve una generalizzazione del Lemma 1.7.

Lemma 2.7. *Sia Γ_1 una superficie regolare a tratti e sia $\mathbf{u} : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ una funzione continua e tale che*

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dS = 0$$

per ogni funzione di classe C^∞ su $\bar{\Omega}$ e tale che esista un intorno di Γ_0 su cui $\mathbf{v} = 0$. Allora $\mathbf{u} = 0$ su Γ_1 .

Dimostrazione. Sia \mathbf{x}_0 un punto regolare di Γ_1 , interno a Γ_1 nella topologia indotta sul bordo. In componenti rispetto a una base ortonormale sarà $\mathbf{u}(x) = u_i(x)\mathbf{e}_i$. Supponiamo per assurdo che $u_k(\mathbf{x}_0) > 0$. Allora, per continuità, ciò sarà vero anche in una palla di centro $B(\mathbf{x}_0, r)$, intersecata con Γ_1 . Presa $\varphi \in C_c^\infty(B(\mathbf{x}_0, r))$ con $\varphi \geq 0$ e $\varphi(\mathbf{x}_0) > 0$, poniamo $\mathbf{v} = \varphi \mathbf{e}_k$. Allora $\mathbf{v} \in C^\infty$ su $\bar{\Omega}$ e $\mathbf{v} = 0$ su un intorno di Γ_0 , però

$$0 = \int_{\Gamma_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dS = \int_{\Gamma_1 \cap B(\mathbf{x}_0, r)} u_k \varphi dS > 0$$

che è assurdo. Al variare di \mathbf{x}_0 , dalla regolarità a tratti di \mathbf{u} , si trae la tesi. \square

Chiaramente, ragionando in componenti, un risultato analogo vale per funzioni a valori tensoriali, o tensoriali simmetriche.

Siamo ora in grado di dimostrare il

Teorema 2.8 (Inverso del principio di minima energia potenziale). *Sia $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ uno spostamento cinematicamente ammissibile, e supponiamo che*

$$\forall \mathbf{u}' \in \mathcal{S} : \quad \Phi[\mathbf{u}] \leq \Phi[\mathbf{u}'].$$

Allora \mathbf{u} è a una soluzione del problema misto.

Dimostrazione. Sia $\tilde{\mathbf{u}}$ un arbitrario campo vettoriale C^∞ che si annulla in un intorno di Γ_0 e poniamo $\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}$. Si ha allora che \mathbf{u}' appartiene ad \mathcal{S} . Poiché

$$\Phi[\mathbf{u}'] - \Phi[\mathbf{u}] = U_{\mathbf{C}}[\tilde{\mathbf{E}}] - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dV + \int_{\Gamma_1} (\mathbf{S}\mathbf{n} - \mathbf{s}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS$$

avremo

$$0 \leq U_{\mathbf{C}}[\tilde{\mathbf{E}}] - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dV + \int_{\Gamma_1} (\mathbf{S}\mathbf{n} - \mathbf{s}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS.$$

Sostituendo $\alpha \tilde{\mathbf{u}}$ a $\tilde{\mathbf{u}}$ (e di conseguenza $\alpha \tilde{\mathbf{E}}$ a $\tilde{\mathbf{E}}$), troviamo

$$0 \leq \alpha^2 U_{\mathbf{C}}[\tilde{\mathbf{E}}] - \alpha \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dV + \alpha \int_{\Gamma_1} (\mathbf{S}\mathbf{n} - \mathbf{s}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS$$

e dall'arbitrarietà di α troviamo

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dV + \int_{\Gamma_1} (\mathbf{S}\mathbf{n} - \mathbf{s}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS = 0.$$

Considerando ora un campo $\tilde{\mathbf{u}} \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$, il secondo integrale nella precedente relazione si annulla e

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dV = 0,$$

per cui dal Lemma 1.7 segue

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

in Ω . A questo punto riprendiamo $\tilde{\mathbf{u}}$ come all'inizio, quindi vale

$$\int_{\Gamma_1} (\mathbf{S}\mathbf{n} - \mathbf{s}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS = 0$$

per ogni campo $\tilde{\mathbf{u}}$ di classe C^∞ che si annulla vicino a Γ_0 . Dal Lemma 2.7 abbiamo allora che $\mathbf{S}\mathbf{n} = \mathbf{s}$ su Γ_1 , quindi \mathbf{u} è una soluzione del problema misto. \square

2.2 Energia complementare

Un risultato di Algebra Lineare afferma che quando il tensore elastico è definito positivo, si può invertire la sua restrizione a $\operatorname{Sym}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}^{-1}$$

che viene detta *tensore di conformità* (*compliance tensor*). Per esempio, nel caso di un corpo isotropo, dalla (7) segue

$$\operatorname{tr} \mathbf{S} = 3\lambda \operatorname{tr} \mathbf{E} + 2\mu \operatorname{tr} \mathbf{E}$$

e quindi

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(\text{tr } \mathbf{S})\mathbf{I} + \frac{1}{2\mu}\mathbf{S} = \mathbf{H}[\mathbf{S}].$$

In questo modo è possibile anche definire l'energia di sforzo

$$U_{\mathbf{H}}[\mathbf{S}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{S} : \mathbf{H}[\mathbf{S}] dV.$$

Dalla commutatività del prodotto scalare appare poi evidente che

$$U_{\mathbf{C}}[\mathbf{E}] = U_{\mathbf{H}}[\mathbf{C}[\mathbf{E}]].$$

Vale poi una proprietà analoga a quella della Proposizione 2.2.

Introduciamo una nozione di ammissibilità per gli sforzi.

Definizione 2.9. Diremo che un campo tensoriale simmetrico regolare \mathbf{S} è uno sforzo staticamente ammissibile per il problema elastico (PM) se valgono le relazioni

$$\text{div } \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad \mathbf{S} \mathbf{n} = \mathbf{s} \quad \text{in } \Gamma_1.$$

In maniera, per così dire, duale rispetto alla sezione precedente, si può dimostrare il

Teorema 2.10 (Principio di minima energia complementare). Sia

$$\Psi[\mathbf{S}] = U_{\mathbf{H}}[\mathbf{S}] - \int_{\Gamma_0} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_0 dS$$

e sia \mathbf{S} il campo di sforzi corrispondente a una soluzione del problema misto ai valori al contorno. Allora per ogni altro campo di sforzo staticamente ammissibile si ha

$$\Psi[\mathbf{S}] \leq \Psi[\mathbf{S}']$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $\mathbf{S}' = \mathbf{S}$.

Dimostrazione. Sviluppando $U_{\mathbf{H}}[\mathbf{S}'] = U_{\mathbf{H}}[(\mathbf{S}' - \mathbf{S}) + \mathbf{S}]$ abbiamo

$$U_{\mathbf{H}}[\mathbf{S}'] - U_{\mathbf{H}}[\mathbf{S}] = U_{\mathbf{H}}[\mathbf{S}' - \mathbf{S}] + \int_{\Omega} (\mathbf{S}' - \mathbf{S}) : \mathbf{E} dV$$

e stavolta, siccome $\text{div}(\mathbf{S}' - \mathbf{S}) = 0$ e $(\mathbf{S}' - \mathbf{S})\mathbf{n}|_{\Gamma_1} = 0$, avremo

$$\int_{\Omega} (\mathbf{S}' - \mathbf{S}) : \mathbf{E} dV = \int_{\Gamma_0} (\mathbf{S}' - \mathbf{S})\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS = \int_{\Gamma_0} (\mathbf{S}' - \mathbf{S})\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_0 dS$$

in quanto $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ su Γ_0 . Ne segue facilmente che

$$\Psi[\mathbf{S}'] - \Psi[\mathbf{S}] = U_{\mathbf{H}}[\mathbf{S}' - \mathbf{S}]$$

e l'asserto segue dalla positività di \mathbf{H} . □

Il principio di minima energia complementare dice che lo sforzo corrispondente a una soluzione del problema elastostatico (PM) rende minima la differenza tra l'energia di sforzo e il lavoro compiuto sullo spostamento prescritto. Enunciamo anche il

Teorema 2.11 (Inverso del principio di minima energia complementare). Sia Ω un dominio semplicemente connesso e convesso rispetto a Γ_0 (nel senso che ogni segmento congiungente due punti arbitrari di Γ_0 non ha altre intersezioni con $\partial\Omega$). Sia \mathbf{S} uno sforzo staticamente ammissibile tale che

$$\Psi[\mathbf{S}] \leq \Psi[\mathbf{S}']$$

per ogni altro sforzo staticamente ammissibile \mathbf{S}' . Allora \mathbf{S} è lo sforzo corrispondente a una soluzione del problema misto (PM).

Per la sua dimostrazione si può vedere [Gurtin72, Sect. 36].

3 Spazi funzionali, convergenza debole, semicontinuità

Sin qui non abbiamo fatto cenno al problema dell'esistenza di funzioni minimizzanti gli integrali che sono via via comparsi, e neppure di estremali. In effetti, può benissimo capitare che esistano funzionali inferiormente limitati per i quali non esiste un minimo, perlomeno nella classe delle funzioni per il quale l'integrale ha senso.

Esempio 3.1. Consideriamo il seguente funzionale per l'incognita $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Phi[u] = \int_{-1}^1 x^4 u'^2(x) dx.$$

Ci proponiamo di trovare un minimo di questo funzionale tale che $u(-1) = -1$, $u(1) = 1$. Constatiamo subito che il funzionale è inferiormente limitato da zero.

L'equazione di Eulero-Lagrange per questo funzionale è

$$\frac{d}{dx}(x^4 u'(x)) = 0,$$

la quale, integrata, dà

$$u(x) = -\frac{A}{x^3} + B$$

e che imponendo le condizioni date, fornisce

$$u(x) = \frac{1}{x^3}.$$

È ora evidente che questa soluzione non è di classe C^2 , né può minimizzare il funzionale dato, in quanto l'integrale diverge in un intorno dell'origine.

Ma non è tutto: se si considerano $0 < \varepsilon < 1$ e la funzione

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -\varepsilon \\ \frac{x}{\varepsilon} & -\varepsilon < x < \varepsilon \\ 1 & x \geq \varepsilon \end{cases}$$

si vede subito che

$$\Phi[v_\varepsilon] = \frac{2}{5}\varepsilon^3.$$

Pertanto il valore del funzionale può essere reso piccolo a piacere, ma non è possibile passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, in quanto si otterrebbe la funzione

$$v_0(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

che non è continua, quindi neppure di classe C^1 . Per la verità nemmeno le funzioni v_ε sono di classe C^1 , ma è possibile modificare il discorso fatto sopra (per esempio, prendendo $\sin(\pi x/2\varepsilon)$ in luogo di x/ε) senza alterare la qualità del risultato.

Infine, ci rendiamo conto che se si rinuncia a chiedere che la derivata della funzione limite esista ovunque, ma ci si accontenta che esista quasi ovunque, allora la funzione v_0 è il minimo del funzionale dato, così come anche tutte le funzioni del tipo

$$v_0(x) = \begin{cases} -1 & x < \alpha \\ 1 & x > \alpha \end{cases}$$

con $\alpha \in]0, 1[$.

★

Da questo esempio appaiono evidenti due cose: primo, che il fatto che un funzionale sia inferiormente limitato non assicura l'esistenza del minimo e, secondo, che se si vuole passare al limite su una successione minimizzante di funzioni può servire una nozione di convergenza diversa da quella delle funzioni continue con derivate continue.

Per questo richiamiamo brevemente alcune nozioni di convergenza che ci saranno indispensabili in seguito.

3.1 Convergenza debole

Definizione 3.2. *Sia X uno spazio di Banach, X^* il suo duale topologico. Diremo che una successione $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$ converge debolmente a $x \in X$ (e scriveremo $x_h \rightharpoonup x$) se per ogni $x^* \in X^*$ si ha*

$$\langle x^*, x_h \rangle \rightarrow \langle x^*, x \rangle.$$

Diremo poi che una successione $(x_h^)_{h \in \mathbb{N}}$ converge debolmente* a $x^* \in X^*$ (e scriveremo $x_h^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$) se per ogni $x \in X$ si ha*

$$\langle x_h^*, x \rangle \rightarrow \langle x^*, x \rangle.$$

Si dimostra in Analisi Funzionale il seguente risultato.

Teorema 3.3. *Sia X uno spazio di Banach. Allora valgono i seguenti fatti:*

(1) *se $x_h \rightharpoonup x$, allora la successione $\|x_h\|$ è limitata, e*

$$\|x\| \leq \liminf_h \|x_h\|;$$

(2) *se $x_h^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$, allora la successione $\|x_h^*\|_{X^*}$ è limitata, e*

$$\|x^*\|_{X^*} \leq \liminf_h \|x_h^*\|_{X^*};$$

(3) *se $x_h \rightarrow x$, allora $x_h \rightharpoonup x$;*

(4) *se $x_h^* \rightarrow x^*$, allora $x_h^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$.*

Ma la proprietà principale della convergenza debole sta nel seguente teorema, valido per spazi riflessivi.⁽⁶⁾

⁽⁶⁾Ricordiamo che uno spazio di Banach X si dice *riflessivo* se l'iniezione canonica (o *mappa di valutazione*) $J : X \rightarrow X^{**}$, che va da X al suo bidual topologico X^{**} , è biiettiva (si veda [Brezis, Sezione 3.5]). La mappa J è definita da

$$\langle J(x), x^* \rangle := \langle x^*, x \rangle$$

ed è sempre iniettiva.

Teorema 3.4. Se X è riflessivo e una successione $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$ in X è limitata, allora esistono $x \in X$ e una sottosuccessione $(x_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ della successione data tali che $x_{h_k} \rightharpoonup x$.

Il teorema precedente è anche una caratterizzazione degli spazi riflessivi, ovvero: se ogni successione limitata ammette una sottosuccessione debolmente convergente, allora lo spazio è riflessivo (Teorema di Eberlein-Šmulian).

Osservazione 3.5. Nell'importante caso $X = L^p(\Omega)$, Ω aperto di \mathbb{R}^n , è noto che se $1 \leq p < \infty$, allora $X^* = L^{p'}(\Omega)$, dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. (Lo spazio duale di $L^\infty(\Omega)$ è invece strettamente più grande di $L^1(\Omega)$). Quindi la convergenza debole si esprime con

$$\forall g \in L^{p'}(\Omega) : \int_{\Omega} f_h(x)g(x) dV \rightarrow \int_{\Omega} f(x)g(x) dV.$$

In particolare, se $1 < p < \infty$ si ha che $L^p(\Omega)$ è uno spazio riflessivo. ★

Esempio 3.6. Si consideri la successione di funzioni $f_h \in L^p(0, 1)$ definite da

$$f_h(x) := \sin(2\pi hx).$$

Allora (f_h) è limitata in L^p e si può dimostrare che $f_h \rightharpoonup 0$ in L^p per ogni $1 < p < \infty$, anche se $f_h \not\rightarrow 0$ (la successione non converge puntualmente, neanche a meno di sottosuccessioni).⁽⁷⁾

Più in generale, se $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ è una funzione 1-periodica e si definisce la successione

$$f_h(x) := f(hx),$$

si ha

$$\|f_h\|_p^p = \int_0^1 |f_h(x)|^p dx = \int_0^1 |f(hx)|^p dx = \int_0^1 |f(y)|^p dy$$

dove abbiamo effettuato il cambio di variabile $hx = y$ e sfruttato la 1-periodicità di f . Quindi (f_h) è limitata in $L^p(0, 1)$ e dunque converge debolmente. Più precisamente, si può dimostrare che $f_h \rightharpoonup \bar{f}$ in L^p , dove la costante \bar{f} è data dalla media di f :

$$\bar{f} := \int_0^1 f(x) dx$$

(si veda l'Appendice in [Ball & Murat]). ★

Si noti che la convergenza debole non è stabile per composizione con mappe non lineari: può benissimo capitare, come si vede dall'esempio precedente, che

$$f_h \rightharpoonup f \quad \text{ma} \quad f_h^2 \not\rightarrow f^2.$$

⁽⁷⁾Domanda: che cosa succede alla successione f_h^2 ?

3.2 Spazi di Sobolev

Veniamo ora alla definizione che maggiormente ci interessa, ossia quella degli spazi di Sobolev. Dato Ω aperto in \mathbb{R}^n , introduciamo preliminarmente l'insieme

$$W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega) = \left\{ u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega) : \exists w_j \in L_{\text{loc}}^1(\Omega), \right. \\ \left. \int_{\Omega} u \frac{\partial f}{\partial x_j} dV = - \int_{\Omega} f w_j dV \quad \forall j = 1, \dots, n, \forall f \in C_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

Si può mostrare che le funzioni w_j sono univocamente determinate: esse prendono il nome di *derivate di u nel senso delle distribuzioni o derivate deboli*.⁽⁸⁾ È anche facile vedere, usando il teorema di Gauss-Green, che se $u \in C^1(\Omega)$, allora la derivata debole e quella ordinaria coincidono. Per questo, se non vi è pericolo di confusione, si usano gli stessi simboli per le derivate deboli e quelle ordinarie.

Esempio 3.7. La funzione $|x|$ sta in $W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R})$ e la sua derivata debole è

$$v_0(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Infatti, se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, abbiamo facilmente

$$\int_{\mathbb{R}} |x| f'(x) dx = - \int_{-\infty}^0 x f'(x) dx + \int_0^{\infty} x f'(x) dx \\ = \int_{-\infty}^0 f(x) dx - \int_0^{\infty} f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} v_0(x) f(x) dx. \quad \star$$

Poniamo poi, per $p \geq 1$,

$$W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega) : u, \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{\text{loc}}^p(\Omega), \quad j = 1, \dots, n \right\}.$$

Se \mathbf{u} è a valori in \mathbb{R}^k , scriveremo $W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k)$.

Definizione 3.8. Sia $p \in [1, \infty]$. Poniamo

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega) : u, \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), \quad j = 1, \dots, n \right\}.$$

$W^{1,p}(\Omega)$ si dirà spazio di Sobolev.

Le norme introdotte in questi spazi sono⁽⁹⁾

$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p \right)^{1/p} \\ \|u\|_{1,\infty} = \max\{ \|u\|_\infty, \|\nabla u\|_\infty \}.$$

⁽⁸⁾Osserviamo che questa definizione, pur coincidendo formalmente con quella di derivata di una distribuzione, è più restrittiva in quanto le funzioni e le loro derivate sono vere e proprie funzioni (a meno della solita classe di equivalenza in L^p).

⁽⁹⁾Se $\mathbf{v} \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^k)$ si intende che $\|\mathbf{v}\|_p^p = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k |v_j|^p$ per $1 \leq p < \infty$ e che $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_j \|v_j\|$.

Inoltre, se $p = 2$ è usuale la notazione $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Si dimostra in Analisi Funzionale che gli spazi sopra introdotti, con le rispettive norme, sono spazi di Banach, separabili se $p \neq \infty$ e riflessivi se $p \neq \infty$ e $p \neq 1$. $H^1(\Omega)$ è poi uno spazio di Hilbert (gli spazi di Hilbert sono sempre riflessivi), dotato del prodotto scalare

$$(u, v)_{1,2} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

che induce la norma sopra introdotta.

L'importanza di questi spazi sta nel fondamentale risultato che segue, che è l'unione dei teoremi di immersione di Sobolev e Morrey e del teorema di compattezza di Rellich, che danno condizioni affinché una funzione che sta in uno spazio di Sobolev sia anche in qualche L^q e che da successioni limitate si possano estrarre sottosuccessioni convergenti.

Per $p < n$, chiamiamo per brevità p^* il numero tale che

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{n}.$$

Teorema 3.9 (di Sobolev-Rellich-Morrey). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera lipschitziana e sia $p \in [1, \infty]$. Allora*

(1) se $1 \leq p < n$:

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega) \quad \text{per ogni } 1 \leq q \leq p^*$$

e l'immersione è compatta se $q < p^*$;

(2) se $p = n$:

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega) \quad \text{per ogni } 1 \leq q < \infty$$

e l'immersione è compatta;

(3) se $p > n$:

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq C(\overline{\Omega})$$

e l'immersione è compatta.

Osservazione 3.10. In realtà "l'unione" fatta qui sopra è riduttiva rispetto all'insieme dei risultati dei tre teoremi; abbiamo citato solo quello di cui necessiteremo in seguito. Per una discussione più completa si veda [Degiovanni]. ★

Infine, se si completa lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma di $W^{1,p}(\Omega)$ ($p \neq \infty$) si trovano i cosiddetti spazi $W_0^{1,p}(\Omega)$. Essi risultano essere spazi di Banach con le stesse proprietà di separabilità e riflessività dei loro omologhi. In particolare $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert separabile. Gli spazi $W_0^{1,p}(\Omega)$ verificano la seguente proprietà molto importante, valida per un dominio di misura finita.

Teorema 3.11 (Disuguaglianza di Poincaré). *Per ogni $p \in [1, \infty[$ e per ogni Ω di misura finita esiste una costante $C(p, \Omega) > 0$ tale che per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$\|u\|_p \leq C(p, \Omega) \|\nabla u\|_p$$

e dunque

$$\|u\|_{1,p} \leq \widehat{C}(p, \Omega) \|\nabla u\|_p.$$

3.3 Funzioni convesse e semicontinuità inferiore

Nel Calcolo delle Variazioni ci si è presto resi conto che i funzionali *convessi* giocano un ruolo principale. Non a caso tutti i funzionali introdotti finora sono convessi. Per questo ci servono alcune definizioni e risultati in proposito. Si veda [Brezis, Capitolo 1] per alcune dimostrazioni.

Definizione 3.12. Sia X uno spazio di Banach e sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.

(i) f si dice inferiormente semicontinua (lower semicontinuous, lsc) in x se per ogni successione (x_h) che converge a x si ha

$$f(x) \leq \liminf_{x_h \rightarrow x} f(x_h).$$

(ii) f si dice convessa se per ogni $x, y \in X$, $\lambda \in [0, 1]$, si ha

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

(iii) Il dominio e l'epigrafico di f sono definiti rispettivamente da

$$\text{dom } f = \{x \in X : f(x) < +\infty\}, \quad \text{epi } f = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\}.$$

(iv) La funzione f si dice propria se $f(x) > -\infty$ per ogni $x \in X$ e se $\text{dom } f \neq \emptyset$.

È facile dimostrare le seguenti caratterizzazioni.

Proposizione 3.13. Sia X uno spazio di Banach e sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Allora

$$\begin{aligned} f \text{ è inferiormente semicontinua} &\iff \text{epi } f \text{ è chiuso,} \\ f \text{ è convessa} &\iff \text{epi } f \text{ è un insieme convesso.} \end{aligned}$$

In particolare, poiché l'intersezione di convessi è convessa, si ha che l'estremo superiore (puntuale) di una famiglia di funzioni convesse è convessa, ovvero se $\{f_i : i \in I\}$ è una famiglia di funzioni convesse, anche la funzione

$$f(x) := \sup_{i \in I} f_i(x)$$

è convessa.

Un modo per capire se una funzione è convessa è dato dalla seguente

Proposizione 3.14. Sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ con la proprietà che per ogni $x \in X$ esista $\eta(x) \in X^*$ tale che

$$\forall y \in X : f(y) \geq f(x) + \langle \eta(x), y - x \rangle. \quad (8)$$

Allora f è convessa.

Dimostrazione. Per ogni $\lambda \in [0, 1]$ e per ogni $a, b \in X$ si ha, scegliendo $y = a$ e $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ nella (8),

$$f(a) \geq f(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \langle \eta(\lambda a + (1 - \lambda)b), (1 - \lambda)(a - b) \rangle.$$

Scegliendo invece $y = b$ e di nuovo $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ si ottiene

$$f(b) \geq f(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \langle \eta(\lambda a + (1 - \lambda)b), \lambda(b - a) \rangle.$$

Moltiplicando la prima disuguaglianza per λ e la seconda per $1 - \lambda$ e sommando, segue la convessità. \square

La proposizione precedente diventa una caratterizzazione delle funzioni convesse nel caso importante della differenziabilità. Ricordiamo che $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in x se esiste il limite (derivata direzionale)

$$f'(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + hy) - f(x)}{h}$$

e si dice *differenziale secondo Gâteaux* la forma lineare $f'(x) \in X^*$ tale che

$$\langle f'(x), y \rangle = f'(x, y).$$

Allora vale il

Teorema 3.15. *Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile secondo Gâteaux. Allora f è convessa se e solo se*

$$\forall x, y \in X : f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y - x \rangle. \quad (9)$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia convessa. Allora per ogni $0 < h < 1$ si ha

$$\frac{1}{h} (f(x + h(y - x)) - f(x)) \leq f(y) - f(x).$$

Passando al limite per $h \rightarrow 0^+$ si trova la tesi. Il viceversa si ottiene dalla Proposizione 3.14. \square

Osservazione 3.16. Anche la Proposizione 3.14 ammette un viceversa: se $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ è convessa, propria e semicontinua inferiormente, allora per ogni $x \in X$ esiste $\eta(x) \in X^*$ tale che

$$\forall y \in X : f(y) \geq f(x) + \langle \eta(x), y - x \rangle.$$

La dimostrazione di questo fatto però è più articolata e si basa sul concetto di *funzione coniugata* e sul Teorema di Hahn-Banach (l'insieme degli elementi $\eta(x) \in X^*$ che soddisfano la disuguaglianza viene detto *sottodifferenziale* di f in x). \star

Il risultato principale di questa sezione collega la nozione di convergenza debole al concetto di convessità. La sua dimostrazione si basa ancora sul Teorema di Hahn-Banach.

Teorema 3.17. *Sia X uno spazio di Banach e $C \subseteq X$ un insieme chiuso e convesso. Allora C è debolmente chiuso, cioè C contiene tutti i limiti deboli di successioni in C .*

Sugli spazi a dimensione finita vale poi la seguente disuguaglianza per funzioni sommabili.

Teorema 3.18 (Disuguaglianza di Jensen). *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto di misura finita, $\mathbf{u} \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$ e $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Allora si ha*

$$f\left(\frac{1}{V(\Omega)} \int_{\Omega} \mathbf{u}(x) dV\right) \leq \frac{1}{V(\Omega)} \int_{\Omega} f(\mathbf{u}(x)) dV.$$

Dimostrazione. Intanto poniamo

$$\bar{\mathbf{u}} := \frac{1}{V(\Omega)} \int_{\Omega} \mathbf{u}(x) dV$$

e osserviamo che $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^k$ è ben definito. Poiché f è convessa ed è definita su uno spazio di dimensione finita, allora è anche continua. Quindi per l'Osservazione 3.16 esiste $\eta(\bar{\mathbf{u}}) \in \mathbb{R}^k$ tale che⁽¹⁰⁾

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k : f(\mathbf{z}) \geq f(\bar{\mathbf{u}}) + \langle \eta(\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{z} - \bar{\mathbf{u}} \rangle.$$

Prendendo $\mathbf{z} = \mathbf{u}(x)$ e integrando su Ω otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\mathbf{u}(x)) dV &\geq \int_{\Omega} [f(\bar{\mathbf{u}}) + \langle \eta(\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}(x) - \bar{\mathbf{u}} \rangle] dV \\ &= V(\Omega)f(\bar{\mathbf{u}}) + \langle \eta(\bar{\mathbf{u}}), \int_{\Omega} [\mathbf{u}(x) - \bar{\mathbf{u}}] dV \rangle. \end{aligned}$$

Ma l'ultimo integrale è nullo, dunque dividendo tutto per la misura di Ω si ha la tesi. \square

4 Metodo diretto del Calcolo delle variazioni

In questa sezione vogliamo vedere alcuni risultati di esistenza dei minimi dei funzionali introdotti sopra, e di altri ancora. Sia dato un problema di minimo della forma

$$\min_{x \in X} \Phi[x]$$

dove X è uno spazio di Banach e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Il cosiddetto *metodo diretto* consiste nell'attuare la seguente strategia:

- (1) mostrare che Φ è inferiormente limitata e che non fa costantemente $+\infty$;
- (2) prendere una successione minimizzante $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$, ossia tale che

$$\lim_h \Phi[x_h] = \inf_{x \in X} \Phi[x];$$

- (3) trovare una sottosuccessione $(x_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a $x \in X$ (in un senso opportuno, eventualmente);
- (4) mostrare che Φ è inferiormente semicontinuo rispetto alla convergenza introdotta sopra, ossia che

$$\Phi[x] \leq \liminf_j \Phi[x_j].$$

A questo punto segue che

$$\Phi[x] \leq \liminf_k \Phi[x_{h_k}] = \lim_h \Phi[x_h] = \inf_{x \in X} \Phi$$

per cui Φ è inferiormente limitato e ammette minimo, e x è il minimo cercato.

Siccome 1 è una richiesta evidentemente necessaria e 2 segue da 1, la prima difficoltà riguarda il punto 3. Se X è di dimensione finita, basta dimostrare che (x_h) appartiene a un chiuso limitato, ma in generale gli spazi funzionali non hanno dimensione finita. Invece

⁽¹⁰⁾Si noti che nel caso di dimensione finita $X = \mathbb{R}^k$ la dimostrazione dell'Osservazione 3.16 è molto più semplice e non richiede l'uso del Teorema di Hahn-Banach!

sappiamo che se la norma di x_h è uniformemente limitata e X è riflessivo, allora da (x_h) si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente. Quindi nella 4 sarà opportuno considerare la *debole* inferiore semicontinuità.

Si noti che i punti 3 e 4 sono in competizione tra loro: infatti, per avere la possibilità di trovare una sottosuccessione convergente conviene usare delle topologie più deboli, ma allora la semicontinuità del funzionale diventa più difficile da soddisfare.

4.1 Semicontinuità debole e coercitività

Definizione 4.1. *Siano X uno spazio di Banach e $\Phi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Φ si dirà debolmente inferiormente semicontinua (weakly lower semi-continuous, wpsc) su X se per ogni successione (x_h) con $x_h \rightharpoonup x$ si ha*

$$\Phi[x] \leq \liminf_h \Phi[x_h].$$

Si osservi che Φ è wpsc se e solo se $\text{epi } \Phi$ è debolmente chiuso.

Introduciamo poi un concetto utile per garantirsi che la successione minimizzante sia limitata.

Definizione 4.2. *Siano X uno spazio di Banach e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Φ si dirà coercitiva su X se esistono $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\Phi[x] \geq \alpha \|x\| + \beta$$

per ogni $x \in X$.

In generale si definisce coercitività ogni proprietà che garantisca che i sottolivelli di un funzionale siano limitati, per lo meno vicino all'estremo inferiore. La definizione precedente fornisce una nozione di coercitività che ben si adatta a funzionali convessi come quelli che tratteremo noi.

Poiché il nostro principale interesse verso la convergenza debole sta nel fatto di poter estrarre delle successioni convergenti da una successione limitata, d'ora in poi ci porremo nel caso di X spazio di Banach *riflessivo*.

Teorema 4.3 (Weierstrass). *Siano X uno spazio di Banach riflessivo e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione propria. Se Φ è debolmente inferiormente semicontinua su X e coercitiva, allora esiste il minimo della funzione Φ su X .*

Dimostrazione. Dalla coercitività, intanto $\Phi[x] \geq \beta > -\infty$. Presa poi una successione minimizzante $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$ abbiamo che esisterà \bar{h} tale che per ogni $h \geq \bar{h}$ valga

$$\Phi[x_h] \leq \inf_X \Phi + 1.$$

Dalla coercitività deduciamo allora che

$$\|x_h\| \leq \frac{1}{\alpha} \Phi[x_h] - \frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} (\inf \Phi[x] + 1) - \frac{\beta}{\alpha}$$

per cui esisterà $K > 0$ tale che $\|x_h\| \leq K$ per ogni $h \in \mathbb{N}$.

A questo punto la successione è limitata, dunque debolmente convergente a $x \in X$. Siccome Φ è debolmente inferiormente semicontinuo su X , x è punto di minimo per quanto visto sopra. \square

Il vero problema consiste nel verificare che Φ è debolmente inferiormente semicontinua, cosa in generale difficile. Esiste però una vasta classe di funzionali debolmente inferiormente semicontinui: quelli convessi, come mostra il seguente teorema.

Teorema 4.4. *Sia X uno spazio di Banach e sia $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa e inferiormente semicontinua. Allora Φ è debolmente inferiormente semicontinua.*

Dimostrazione. Poiché Φ è inferiormente semicontinua, il suo epigrafico è chiuso. Inoltre, dalla convessità si ha che è anche convesso, quindi debolmente chiuso. Ne segue che Φ è debolmente inferiormente semicontinua. \square

Vediamo ora che per un funzionale convesso l'equazione di Eulero-Lagrange è anche sufficiente per l'esistenza di un minimo.

Teorema 4.5. *Sia $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, differenziabile secondo Gâteaux e supponiamo che esista $\bar{x} \in X$ tale che*

$$\langle \Phi'[\bar{x}], x \rangle = 0 \quad \forall x \in X.$$

Allora

$$\Phi[\bar{x}] = \inf_{x \in X} \Phi[x].$$

Dimostrazione. Dal Teorema 3.15 abbiamo che per ogni $x \in X$

$$\Phi[x] \geq \Phi[\bar{x}] + \langle \Phi'[\bar{x}], x - \bar{x} \rangle = \Phi[\bar{x}]$$

da cui la tesi. \square

4.2 Convessità degli integrandi

Definizione 4.6. *Sia $W : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione. Diciamo che W è una funzione di Carathéodory se:*

- (i) per ogni $z \in \mathbb{R}^m$, la funzione $W(\cdot, z)$ è misurabile in Ω ;
- (ii) per quasi ogni $x \in \Omega$ la funzione $W(x, \cdot)$ è continua.

Le funzioni di Carathéodory sono importanti perché godono di una proprietà di composizione che le semplici funzioni misurabili non hanno. Infatti, si può mostrare (vedi [Dacorogna, Proposition 3.7]) che se $W : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è una funzione di Carathéodory e $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione misurabile, allora la funzione $x \rightarrow W(x, w(x))$ è misurabile. Inoltre, esse permettono di considerare anche integrandi non continui rispetto a x .

Enunciamo ora un primo risultato riguardante integrandi convessi del tipo

$$\Phi[u] = \int_{\Omega} W(x, \nabla \mathbf{u}(x)) dV.$$

Notiamo che se W è di Carathéodory e inferiormente limitata e $\nabla \mathbf{u}(x)$ è misurabile, allora $\Phi[u]$ è ben definita a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Per questo nel prossimo teorema supporremo $W \geq 0$.

Teorema 4.7. Sia $W : \Omega \times M^{k \times n} \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione di Carathéodory tale che per q.o. $x \in \Omega$

$$W(x, \cdot) \text{ è convessa}$$

e sia $p \in [1, +\infty[$.

Allora il funzionale $\Phi : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k) \rightarrow [0, +\infty]$ dato da

$$\Phi[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} W(x, \nabla \mathbf{u}(x)) dV$$

è debolmente inferiormente semicontinuo in $W^{1,p}$.

Dimostrazione. Poiché Φ è evidentemente convesso, basta vedere che Φ è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza forte in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k)$.

Sia allora $\mathbf{u}_h \rightarrow \mathbf{u}$ rispetto alla norma di $W^{1,p}$. In particolare si ha che $\nabla \mathbf{u}_h \rightarrow \nabla \mathbf{u}$ in L^p . Sia quindi (\mathbf{u}_{h_j}) una sottosuccessione tale che

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u}_{h_j}(x) &\rightarrow \nabla \mathbf{u}(x) \quad \text{q.o. in } \Omega, \\ \lim_j \Phi[\mathbf{u}_{h_j}] &= \liminf_h \Phi[\mathbf{u}_h]. \end{aligned}$$

Siccome $W(x, \cdot)$ è continua per q.o. $x \in \Omega$, troviamo che

$$W(x, \nabla \mathbf{u}(x)) = \lim_j W(x, \nabla \mathbf{u}_{h_j}(x))$$

per q.o. $x \in \Omega$. Quindi dal lemma di Fatou abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi[\mathbf{u}] &= \int_{\Omega} W(x, \nabla \mathbf{u}(x)) dV \leq \liminf_j \int_{\Omega} W(x, \nabla \mathbf{u}_{h_j}(x)) dV \\ &= \liminf_j \Phi[\mathbf{u}_{h_j}] = \liminf_h \Phi[\mathbf{u}_h] \end{aligned}$$

da cui il risultato. □

Corollario 4.8. Sia W come nel teorema precedente e sia \mathcal{G} un funzionale lineare e continuo su $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k)$.

Allora il funzionale $\Phi : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k) \rightarrow [0, +\infty]$ dato da

$$\Phi[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} W(x, \nabla \mathbf{u}(x)) dV + \mathcal{G}(\mathbf{u})$$

è debolmente inferiormente semicontinuo in $W^{1,p}$.

Dimostrazione. Basta osservare che il funzionale \mathcal{G} , essendo lineare e continuo, è convesso e fortemente inferiormente semicontinuo, quindi lo è anche la somma. □

Proposizione 4.9. Sia X uno spazio di Banach e sia $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione strettamente convessa, cioè

$$\forall x, y \in X, \lambda \in (0, 1) : x \neq y \quad \Rightarrow \quad \Phi(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda \Phi(x) + (1 - \lambda)\Phi(y).$$

Allora, se Φ ammette punto di minimo (assoluto), tale punto è unico.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $x_1, x_2 \in X$ siano due punti di minimo con $x_1 \neq x_2$. Allora per ogni $\lambda \in (0, 1)$ si ha

$$\Phi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda\Phi(x_1) + (1 - \lambda)\Phi(x_2) = \min_X \Phi$$

che è assurdo. □

Esempio 4.10. Facciamo a questo punto un semplice ma importante esempio con il funzionale

$$\Phi[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV + \int_{\Omega} f u dV$$

dove Ω è limitato, $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Questo funzionale è evidentemente debolmente inferiormente semicontinuo dal Corollario 4.8, poiché il primo integrando è convesso in ∇u e il secondo è lineare e continuo. Vediamo che è anche coercitivo: innanzitutto, per la disuguaglianza di Poincaré la norma $\|\nabla u\|_2$ è una norma equivalente a quella naturale su $H_0^1(\Omega)$, quindi

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq C \|u\|_{1,2}^2.$$

Dalla disuguaglianza di Hölder segue che

$$\Phi[u] \geq \frac{C}{2} \|u\|_{1,2}^2 - \|f\|_2 \|u\|_2 \geq \frac{C}{2} \|u\|_{1,2}^2 - \|f\|_2 \|u\|_{1,2}.$$

Quindi è evidente che esistono $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\Phi[u] \geq \alpha \|u\|_{1,2} + \beta$$

e pertanto Φ è coercitivo.

Quindi esiste in $H_0^1(\Omega)$ un punto di minimo del funzionale dato, che risulta essere la soluzione dell'equazione $\Delta u = f$ con dato nullo al bordo. Poiché W è strettamente convessa, anche Φ risulta strettamente convesso e dunque il minimo è unico. ★

Esempio 4.11. Sia $1 < p < \infty$ e

$$\Phi[u] = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dV + \int_{\Omega} f u dV$$

dove Ω è limitato, $f \in L^{p'}(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Allo stesso modo dell'esempio precedente si dimostra che Φ ammette un unico minimo, e dunque il problema $\Delta_p u = f$ ammette soluzione in $W_0^{1,p}(\Omega)$. ★

4.3 Esistenza della soluzione per il problema misto dell'elasticità lineare

Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n con frontiera regolare e sia $\Gamma_0 \subseteq \partial\Omega$. Poniamo

$$H_{\Gamma_0}^1 := \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) : \mathbf{u} = 0 \text{ su } \Gamma_0 \text{ nel senso delle tracce}\}.^{(11)}$$

Denotiamo con $\mathbf{E}u$ la parte simmetrica di ∇u e vediamo alcune disuguaglianze che coinvolgono $\mathbf{E}u$.

⁽¹¹⁾Per un aperto Ω limitato e regolare e per $1 < p < \infty$, si può dimostrare che l'applicazione di traccia $\gamma : C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ definita da $\gamma[v] = v|_{\partial\Omega}$ può essere estesa in modo unico ad un operatore lineare e continuo $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$. Quindi ha senso parlare del valore sul bordo di una funzione di Sobolev.

Proposizione 4.12 (Disuguaglianza di Korn, caso omogeneo). Sia $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Allora si ha

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_2^2 \leq 2\|\mathbf{E}\mathbf{u}\|_2^2.$$

Dimostrazione. Supponiamo $\mathbf{u} \in C_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Il caso generale segue per densità. Si ha

$$\|\mathbf{E}\mathbf{u}\|_2^2 = \sum_{i,j} \frac{1}{4} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV.$$

Usando due volte la formula per parti sull'ultimo integrale si ha

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV = - \sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} u_j dV = \sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dV = \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2^2.$$

Quindi abbiamo ottenuto la formula

$$2\|\mathbf{E}\mathbf{u}\|_2^2 = \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2^2,$$

da cui in particolare

$$2\|\mathbf{E}\mathbf{u}\|_2^2 \geq \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2. \quad \square$$

Enunciamo senza dimostrazione il caso più generale in cui \mathbf{u} non faccia zero al bordo.

Teorema 4.13 (Disuguaglianza di Korn, caso generale). Sia Ω limitato e $p < \infty$.

Allora esiste $c > 0$ tale che per ogni $\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$

$$\|\mathbf{u}\|_{1,p} \leq c(\|\mathbf{u}\|_p + \|\mathbf{E}\mathbf{u}\|_p).$$

Corollario 4.14. Sia $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ tale che

$$\mathbf{u} \in H_{\Gamma_0}^1, \mathbf{E}\mathbf{u} = 0 \text{ su } \Omega \Rightarrow \mathbf{u} = 0 \text{ su } \Omega. \quad (12)$$

Allora esiste $\hat{c} > 0$ tale che per ogni $\mathbf{u} \in H_{\Gamma_0}^1$

$$\|\mathbf{u}\|_{1,2} \leq \hat{c}\|\mathbf{E}\mathbf{u}\|_2.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista (\mathbf{u}_h) in $H_{\Gamma_0}^1$ con $\|\mathbf{u}_h\|_{1,2} = 1$ e $\|\mathbf{E}\mathbf{u}_h\|_2 \rightarrow 0$. Dal fatto che (\mathbf{u}_h) sia limitata in H^1 segue che esiste $\mathbf{u} \in H_{\Gamma_0}^1$ con $\mathbf{u}_h \rightharpoonup \mathbf{u}$ in H^1 , a meno di sottosuccessione. Allora il Teorema 3.9 (SRM) garantisce la convergenza forte in L^q di una sottosuccessione per ogni $q < 2^*$, quindi in particolare la convergenza forte di (\mathbf{u}_h) ad \mathbf{u} in L^2 .

Poiché $\|\mathbf{E}\mathbf{u}_h\|_2 \rightarrow 0$, si ha $\|\mathbf{E}\mathbf{u}\|_2 = 0$ e dunque, per la proprietà (10), $\mathbf{u} = 0$. Ma allora dal Teorema 4.13 segue che

$$1 = \lim_h \|\mathbf{u}_h\|_{1,2} \leq c \lim_h (\|\mathbf{u}_h\|_2 + \|\mathbf{E}\mathbf{u}_h\|_2) = 0,$$

da cui l'assurdo. □

A questo punto possiamo dimostrare l'esistenza della soluzione per il problema misto dell'elasticità lineare (PM). Cominciamo dal caso omogeneo in cui $\mathbf{u} = 0$ su Γ_0 .

⁽¹²⁾Questa condizione è verificata, per esempio, quando Γ_0 ha misura (superficiale) strettamente positiva.

Teorema 4.15. *Supponiamo che Γ_0 soddisfi l'ipotesi (10) e che $\mathbf{u} = 0$ su Γ_0 . Allora il funzionale*

$$\Phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E}\mathbf{u} \cdot \mathbf{C}\mathbf{E}\mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma_1} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} \, dS$$

definito su $H_{\Gamma_0}^1$ ammette minimo, e dunque il problema (PM) ammette soluzione. Inoltre tale minimo è unico.

Dimostrazione. Il funzionale Φ è ben definito sullo spazio riflessivo $H_{\Gamma_0}^1$ ed è inferiormente limitato. Dimostriamo che su tale spazio ammette un unico minimo assoluto.

Poiché Φ è convesso in $\nabla \mathbf{u}$ e la parte in \mathbf{u} è lineare e continua,⁽¹³⁾ il Corollario 4.8 garantisce che Φ sia debolmente inferiormente semicontinuo. Inoltre, essendo \mathbf{C} definito positivo, si ha

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}\mathbf{A} \geq \nu |\mathbf{A}|^2,$$

e dunque, applicando il Corollario 4.14 otteniamo

$$\Phi(\mathbf{u}) \geq \frac{\nu}{2} \|\mathbf{E}\mathbf{u}\|_2^2 - c \|\mathbf{u}\|_2 \geq \frac{\nu}{2\hat{c}^2} \|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 - c \|\mathbf{u}\|_{1,2} \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_{1,2} - \beta$$

per opportuni $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, da cui la coercività. Il metodo diretto del calcolo delle variazioni (Teorema 4.3) ci garantisce l'esistenza del minimo.

Poiché Φ è strettamente convesso in $\nabla \mathbf{u}$, tale minimo è unico. \square

Nel caso non omogeneo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ su Γ_0 , aggiungiamo l'ipotesi necessaria che \mathbf{u}_0 si possa estendere a tutto Ω , ovvero che esista $\tilde{\mathbf{u}}_0 \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tale che $\tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_0$ su Γ_0 nel senso delle tracce. Poi cerchiamo una soluzione della forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad \mathbf{z} \in H_{\Gamma_0}^1,$$

che quindi avrà le giuste condizioni al contorno su Γ_0 . Per questo sarà sufficiente risolvere il problema

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{u}}_0) + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{S}(\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{u}}_0) \mathbf{n} = \mathbf{s} & \text{su } \Gamma_1 \end{cases}$$

dove abbiamo usato la notazione $\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}\mathbf{E}(\mathbf{u})$. Per la linearità, tale problema può essere riscritto nell'incognita $\mathbf{z} \in H_{\Gamma_0}^1$ come

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{z}) = -\rho_0 \mathbf{b} - \operatorname{div} \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{u}}_0) & \text{in } \Omega \\ \mathbf{S}(\mathbf{z}) \mathbf{n} = \mathbf{s} - \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{u}}_0) \mathbf{n} & \text{su } \Gamma_1 \end{cases}$$

e quindi risolto come nel teorema precedente.

4.4 Dipendenza non lineare da u

La dipendenza solo lineare da \mathbf{u} può escludere dei risultati di interesse. Nel caso di carichi esterni, infatti, si può distinguere tra *dead loads* e *live loads* (si veda [Ciarlet, Sect. 2.7]); i primi danno luogo a termini nel funzionale che dipendono linearmente da \mathbf{u} , mentre i secondi in generale no. Mostriamo allora che è possibile anche considerare funzionali dipendenti non linearmente da \mathbf{u} , purché positivi e convessi in $\nabla \mathbf{u}$.

⁽¹³⁾Per l'integrale su Γ_1 , si può dimostrare che l'operatore di traccia è lineare e continuo da H^1 a L^2 .

Teorema 4.16. *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n e $W : \Omega \times (\mathbb{R}^k \times M^{k \times n}) \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione di Carathéodory tale che per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$, $W(x, \mathbf{u}, \cdot)$ è convessa. Allora, posto per ogni $\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k)$, $p \in [1, +\infty[$,*

$$\Phi[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} W(x, \mathbf{u}(x), \nabla \mathbf{u}(x)) dV$$

si ha che Φ è debolmente inferiormente semicontinuo rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}$.

Dimostrazione. Data una successione \mathbf{u}_h convergente debolmente in $W^{1,p}$ to \mathbf{u} , il Teorema 3.9 (SRM) garantisce la convergenza forte in L^q di una sottosuccessione per ogni $q < p^*$, quindi in particolare la convergenza forte in L^p . Quindi possiamo supporre, passando a una sottosuccessione:

$$\begin{cases} \liminf_h \Phi[\mathbf{u}_h] = \lim_h \Phi[\mathbf{u}_h] \\ \mathbf{u}_h \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{in } L^p \\ \mathbf{u}_h(x) \rightarrow \mathbf{u}(x) \quad \text{q.o. in } \Omega. \end{cases} \quad (11)$$

Per proseguire abbiamo bisogno del seguente risultato di carattere tecnico, che non dimostriamo.

Lemma 4.17. *Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un insieme misurabile $E_\varepsilon \subset \Omega$ e una successione $\{\mathbf{u}_{h_j}\}$ tali che*

$$\forall j \in \mathbb{N} : \begin{cases} V(\Omega \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon \\ \int_{E_\varepsilon} |W(x, \mathbf{u}_{h_j}(x), \nabla \mathbf{u}_{h_j}(x)) - W(x, \mathbf{u}(x), \nabla \mathbf{u}_{h_j}(x))| dV < \varepsilon V(\Omega). \end{cases}$$

Ammettendo questo risultato, concludiamo la dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e applichiamo il Lemma. Dalla (11) abbiamo che, poiché $W \geq 0$,

$$\begin{aligned} \liminf_h \Phi[\mathbf{u}_h] &= \lim_h \Phi[\mathbf{u}_h] = \lim_j \Phi[\mathbf{u}_{h_j}] \\ &\geq \liminf_j \int_{E_\varepsilon} W(x, \mathbf{u}_{h_j}(x), \nabla \mathbf{u}_{h_j}(x)) dV \\ &\geq -\varepsilon V(\Omega) + \liminf_j \int_{E_\varepsilon} W(x, \mathbf{u}(x), \nabla \mathbf{u}_{h_j}(x)) dV. \end{aligned} \quad (12)$$

Osserviamo che se poniamo per ogni $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}^{kn}$

$$G_\varepsilon(x, z) := \chi_{E_\varepsilon}(x) W(x, \mathbf{u}(x), z)$$

G_ε è una funzione di Carathéodory, convessa in z . Dunque, dal Corollario 4.7 segue

$$\begin{aligned} \liminf_j \int_{E_\varepsilon} W(x, \mathbf{u}(x), \nabla \mathbf{u}_{h_j}(x)) dV &= \liminf_j \int_{\Omega} G_\varepsilon(x, \nabla \mathbf{u}_{h_j}) \\ &\geq \int_{\Omega} G_\varepsilon(x, \nabla \mathbf{u}(x)) dV = \int_{E_\varepsilon} W(x, \mathbf{u}(x), \nabla \mathbf{u}(x)) dV. \end{aligned} \quad (13)$$

Da (12) e (13) troviamo allora

$$\liminf_h \Phi[\mathbf{u}_h] \geq \int_{E_\varepsilon} W(x, \mathbf{u}(x), \nabla \mathbf{u}(x)) dV$$

e quindi, facendo tendere ε a 0, dato che $V(\Omega \setminus E_\varepsilon) \rightarrow 0$ si ha la tesi. \square

Questo teorema, molto potente, afferma che la convessità in $\nabla \mathbf{u}$ è sufficiente per avere la debole inferiore semicontinuità (anche nel caso scalare, cioè $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$). Assieme a delle condizioni che implicano la coercitività, esso dà un teorema di esistenza del minimo. Ad esempio, è facile verificare che la condizione

$$W(x, \xi, z) \geq a|z|^p, \quad a > 0$$

garantisce la coercitività del funzionale Φ su $W_0^{1,p}$ per $p \in]1, +\infty[$. Si possono però trattare anche altri tipi di condizioni al contorno, basta che garantiscano il fatto che *le successioni minimizzanti siano limitate*. Quindi si può considerare il caso in cui $\mathbf{u} \in \mathbf{u}_0 + W_0^{1,p}$, oppure il caso delle funzioni a media nulla, oppure ancora il caso delle funzioni a media fissata.

Non è detto, invece, in generale, che la convessità sia necessaria ai fini della debole inferiore semicontinuità. Tuttavia, nel caso scalare o nel caso di funzioni di una sola variabile, ciò è vero, come mostreremo nella Sezione 6.3.

5 Elasticità finita e iperelasticità

Dato un corpo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, denoteremo con $\boldsymbol{\chi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ la *deformazione*, con $\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}}$ il *gradiente di deformazione* e con $J = \det \mathbf{F}$ il *coefficiente di dilatazione cubica*. Ricordiamo che la deformazione è per ipotesi un campo sufficientemente regolare (ad esempio sta in uno spazio di Sobolev), iniettivo e che soddisfa la condizione $J > 0$, per evitare interpenetrazione della materia. La condizione $J > 0$ implica l'iniettività *locale* della deformazione; quella *globale* è molto più ardua da verificare sulle soluzioni. Ad esempio, una condizione sufficiente per l'iniettività globale, se la deformazione è molto regolare, è che $J > 0$ e che la deformazione ristretta a $\partial\Omega$ sia iniettiva (vedi [Gurtin83, pag. 31]); ma per una deformazione che sta in uno spazio di Sobolev molte questioni sono ancora aperte. Per questo motivo, d'ora in poi prenderemo come ammissibili anche quelle deformazioni che hanno solo l'iniettività locale.

Nell'elasticità non linearizzata (detta anche *elasticità finita*, dove l'aggettivo *finita* sta in opposizione all'aggettivo *infinitesima*), all'equilibrio l'equazione del moto si scrive

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega$$

dove \mathbf{S} , il (primo) tensore di Piola-Kirchhoff, deve soddisfare la condizione aggiuntiva

$$\mathbf{S}\mathbf{F}^\top = \mathbf{F}\mathbf{S}^\top$$

poiché vale la relazione che lega \mathbf{S} col *tensore degli sforzi di Cauchy* \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = (\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{S}\mathbf{F}^\top \tag{14}$$

e \mathbf{T} è un tensore simmetrico. Inoltre si devono dare anche delle condizioni al contorno tipo problema misto.

Un'*equazione costitutiva* deve poi metter in relazione il tensore degli sforzi \mathbf{S} con il gradiente di deformazione \mathbf{F} , ovvero

$$\mathbf{S} = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{X}, \mathbf{F}).$$

L'esempio che maggiormente ci interessa è quello dei cosiddetti *materiali iperelastici*, che sono caratterizzati da un potenziale elastico, detto anche *densità di energia elastica*, $\Psi : \Omega \times M_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 nella seconda variabile che verifica la relazione

$$S_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial F_{ij}} \quad \text{per } i, j = 1, 2, 3, \quad \text{ossia } \mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} = \nabla \Psi$$

dove $M_+^{3 \times 3}$ indica l'insieme di tutte le matrici 3×3 con determinante strettamente positivo e dove \mathbf{F} è il gradiente della deformazione $\boldsymbol{\chi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, che è l'incognita del problema.

Se indichiamo con $V : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la densità volumetrica di energia potenziale delle forze di volume, allora l'energia associata alla deformazione è data da

$$\Phi[\boldsymbol{\chi}] = \int_{\Omega} \Psi(x, \mathbf{W}(x)) dV + \int_{\Omega} V(x, \boldsymbol{\chi}(x)) dV.$$

Ci interessa il problema

$$\min\{\Phi[\boldsymbol{\chi}] : \boldsymbol{\chi} \in W\},$$

$$W = \{\boldsymbol{\chi} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3) : \boldsymbol{\chi}(x) = \mathbf{x}(x) \text{ su } \partial\Omega, \det(\nabla\boldsymbol{\chi}(x)) > 0 \text{ in } \Omega\},$$

o, nel caso di materiali incomprimibili,

$$\min\{\Phi[\boldsymbol{\chi}] : \boldsymbol{\chi} \in W_0\},$$

$$W_0 = \{\boldsymbol{\chi} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3) : \boldsymbol{\chi}(x) = \mathbf{x}(x) \text{ on } \partial\Omega, \det(\nabla\boldsymbol{\chi}(x)) = 1 \text{ in } \Omega\}.$$

In ogni caso il minimo verifica le equazioni di equilibrio (di Eulero-Lagrange)

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial F_{ij}}(x, \mathbf{F}(x)) \right) = \frac{\partial}{\partial \chi_j} V(x, \boldsymbol{\chi}(x)) \quad \text{per } j = 1, 2, 3$$

con la condizione $\det \nabla\boldsymbol{\chi}(x) > 0$ (o $\det \nabla\boldsymbol{\chi}(x) = 1$). Tale equazione è proprio l'equazione di bilancio

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

che corrisponde al problema di equilibrio dell'elasticità.

Il potenziale elastico deve anche soddisfare alcuni requisiti tipici della teoria delle Equazioni costitutive:

- **Indifferenza:** la cosiddetta *frame indifference* (o indipendenza dall'osservatore) richiede che

$$\Psi(x, \mathbf{QF}) = \Psi(x, \mathbf{F}) \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in M_+^{3 \times 3} \text{ e per ogni rotazione } \mathbf{Q}. \quad (15)$$

Tale condizione afferma che $\Psi(x, \cdot)$ è indipendente dalla scelta del sistema di riferimento. Per il Teorema di decomposizione polare,⁽¹⁴⁾ è facile mostrare che il potenziale elastico è indifferente se e solo se

$$\Psi(x, \mathbf{F}) = \tilde{\Psi}(x, \mathbf{C})$$

per ogni $\mathbf{F} \in M_+^{3 \times 3}$, dove $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$ è il tensore (destro) di Cauchy-Green. Se si esprime l'energia in termini di \mathbf{C} , si ha che

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{C}}; \quad (16)$$

infatti in componenti si ha, usando la convenzione della somma sugli indici ripetuti:

$$S_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial F_{ij}} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial C_{hk}} \frac{\partial (F_{ph} F_{pk})}{\partial F_{ij}} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial C_{hk}} (\delta_{ip} \delta_{jh} F_{pk} + \delta_{ip} \delta_{jk} F_{ph}) = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial C_{jk}} F_{ik} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial C_{hj}} F_{ih}$$

⁽¹⁴⁾Il Teorema di decomposizione polare afferma che ogni matrice quadrata \mathbf{F} con $\det \mathbf{F} > 0$ può essere scritta in modo unico come prodotto $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{U}$, dove \mathbf{U} è una matrice simmetrica definita positiva e \mathbf{Q} è una rotazione. Vale inoltre che $\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$.

e sfruttando la simmetria di \mathbf{C} si ottiene la formula cercata. Da questa formula si ottiene anche che un materiale iperelastico indifferente soddisfa automaticamente la condizione $\mathbf{S}\mathbf{F}^\top = \mathbf{F}\mathbf{S}^\top$, infatti:

$$\mathbf{S}\mathbf{F}^\top = 2\mathbf{F}\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\mathbf{C}}\mathbf{F}^\top, \quad \mathbf{F}\mathbf{S}^\top = 2\mathbf{F}\left(\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\mathbf{C}}\right)^\top\mathbf{F}^\top$$

e le due quantità coincidono grazie alla simmetria di \mathbf{C} .

- **Non degenericità:** per evitare paradossi di tipo energetico, si richiede che

$$\Psi(x, \mathbf{F}) \rightarrow +\infty \quad \text{per } \det \mathbf{F} \rightarrow 0^+, \quad (17)$$

$$\Psi(x, \mathbf{F}) \rightarrow +\infty \quad \text{per } |\mathbf{F}| \rightarrow +\infty. \quad (18)$$

L'indifferenza e la non degenericità sono condizioni che devono valere per ogni materiale iperelastico. Proprio queste condizioni, però, ci costringeranno a rinunciare all'ipotesi di convessità, come vedremo nelle prossime due proposizioni.

Proposizione 5.1. *Un'energia convessa e indifferente non può descrivere tutti gli stati di sforzo.*

Dimostrazione. Fissiamo le matrici \mathbf{Q} e \mathbf{F} . Visto che Ψ è di classe C^1 , scriviamo la condizione di convessità per Ψ usando il Teorema 3.15 sulle matrici $\mathbf{Q}\mathbf{F}$ e \mathbf{F} (per comodità non denotiamo la possibile dipendenza da x):

$$\Psi(\mathbf{Q}\mathbf{F}) - \Psi(\mathbf{F}) - \nabla\Psi(\mathbf{F}) \cdot (\mathbf{Q}\mathbf{F} - \mathbf{F}) \geq 0.$$

L'indifferenza materiale di Ψ fa cancellare i primi due termini, quindi

$$\nabla\Psi(\mathbf{F}) \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{F} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\Psi(\mathbf{F})\mathbf{F}^\top \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{I}) \leq 0.$$

Ricordando il legame (14) tra il primo tensore di Piola-Kirchhoff e il tensore degli sforzi di Cauchy si ha

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{I}) \leq 0 \quad \text{per ogni rotazione } \mathbf{Q};$$

ma questo implica, denotando con τ_i gli autovalori di \mathbf{T} (che ricordiamo essere simmetrico), che

$$\tau_1 + \tau_2 \geq 0, \quad \tau_2 + \tau_3 \geq 0, \quad \tau_1 + \tau_3 \geq 0,$$

e quindi \mathbf{T} non può essere un tensore simmetrico generale. \square

Proposizione 5.2. *La condizione (17) di non degenericità è incompatibile con la convessità di Ψ .*

Dimostrazione. L'insieme $M_+^{3 \times 3}$ non è convesso, come si vede ad esempio dal fatto che, ponendo $\mathbf{A} = \text{diag}(-3, 1, -1)$, $\mathbf{B} = \text{diag}(1, -3, -1)$,

$$-\mathbf{I} = \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}.$$

Se per assurdo Ψ fosse convesso, si avrebbe

$$\Psi(x, \lambda\mathbf{A} + (1 - \lambda)\mathbf{B}) \leq \lambda\Psi(x, \mathbf{A}) + (1 - \lambda)\Psi(x, \mathbf{B}),$$

ma esiste una successione di λ che rende la prima combinazione convessa arbitrariamente vicina ad avere il determinante nullo, e quindi il membro di sinistra può esplodere, mentre quello di destra resta limitato. \square

Osservazione 5.3. Le due proposizioni precedenti ci mostrano che l'ipotesi di convessità è spesso troppo forte per i problemi di iperelasticità. Esiste anche un'altra motivazione che ci porta a trattare con funzioni non convesse, almeno strettamente: in presenza di convessità *stretta* abbiamo visto nella Proposizione 4.9 che il minimo quando esiste è unico. Ma l'unicità della soluzione di equilibrio non si ha quasi mai in elasticità finita, poiché in presenza di grandi deformazioni è ragionevole pensare che il corpo elastico possa avere più posizioni di equilibrio (si pensi al fenomeno del *buckling*, ovvero dell'incurvamento di una trave compressa per questioni di instabilità, o al guscio elastico rovesciato). \star

5.1 Materiali isotropi

Definizione 5.4 (Isotropia). *Un materiale è detto isotropo se vale che*

$$\Psi(x, \mathbf{F}\mathbf{Q}) = \Psi(x, \mathbf{F}) \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in M_+^{3 \times 3} \text{ e per ogni rotazione } \mathbf{Q}. \quad (19)$$

Definizione 5.5 (Invarianti e valori singolari). *Dato un gradiente di deformazione \mathbf{F} , denotiamo con v_1, v_2, v_3 i valori singolari di \mathbf{F} , cioè le radici quadrate degli autovalori (necessariamente positivi) di $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$, il tensore destro di Cauchy-Green. Denotiamo poi con I_1, I_2, I_3 i tre invarianti principali di \mathbf{C} , ovvero*

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr } \mathbf{C}^2), \quad I_3 = \det \mathbf{C}.$$

Esiste anche il *tensore sinistro di Cauchy-Green*: $\mathbf{B} := \mathbf{F}\mathbf{F}^\top$, e si può verificare che i tre invarianti principali non cambiano se si sostituisce \mathbf{C} con \mathbf{B} .

Per i materiali indifferenti e isotropi vale la seguente proposizione.

Proposizione 5.6. *Se un materiale è indifferente e isotropo, allora si ha*

$$\Psi(x, \mathbf{F}) = \widehat{\Psi}(x, v_1, v_2, v_3) = \overline{\Psi}(x, I_1, I_2, I_3)$$

con $\widehat{\Psi}$ simmetrica in (v_1, v_2, v_3) .

Dimostrazione. Sappiamo già per l'indifferenza che Ψ deve essere solo una funzione $\widetilde{\Psi}$ di \mathbf{C} . Inoltre, dall'isotropia segue che

$$\widetilde{\Psi}(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{F}\mathbf{Q}) = \widetilde{\Psi}(\mathbf{Q}^\top \mathbf{C} \mathbf{Q})$$

e dunque $\widetilde{\Psi}$ deve dipendere solo dagli invarianti di \mathbf{C} , cioè deve essere una funzione simmetrica degli autovalori di \mathbf{C} . \square

Si ha che

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} = \overline{\Psi}_1 \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{F}} + \overline{\Psi}_2 \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{F}} + \overline{\Psi}_3 \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{F}}, \quad \overline{\Psi}_j := \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial I_j}.$$

Quindi per calcolare il tensore degli sforzi è utile conoscere le derivate degli invarianti di \mathbf{C} rispetto a \mathbf{F} . Si provi a mostrare che⁽¹⁵⁾

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{F}} = 2 \left(I_1 \mathbf{F} - \mathbf{F}\mathbf{F}^\top \mathbf{F} \right), \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{F}} = 2J^2 \mathbf{F}^{-\top}. \quad (20)$$

⁽¹⁵⁾Più in generale, per matrici \mathbf{A} quadrate di ordine n si può dimostrare che

$$\frac{\partial I_k(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j I_{k-j-1}(\mathbf{A}) (\mathbf{A}^\top)^j, \quad 1 \leq k \leq n, \quad I_0(\mathbf{A}) := 1$$

(vedi [Ciarlet, Chapter 1, Exercise 1.5]). Attenzione però ad applicare questa formula nel nostro caso: I_1, I_2, I_3 sono gli invarianti di \mathbf{C} e noi stiamo derivando rispetto a \mathbf{F} .

Tra i materiali iperelastici isotropi troviamo l'importante classe dei materiali di Ogden, che definiamo.

Definizione 5.7. *Si chiamano materiali di Ogden quei materiali iperelastici per cui il potenziale elastico è dato da*

$$\Psi(x, \mathbf{F}) = a(x) + \sum_{i=1}^m b_i(x)(v_1^{\alpha_i} + v_2^{\alpha_i} + v_3^{\alpha_i}) + \sum_{j=1}^n c_j(x) \left((v_1 v_2)^{\beta_j} + (v_2 v_3)^{\beta_j} + (v_1 v_3)^{\beta_j} \right) + \gamma(\det \mathbf{F}), \quad (21)$$

dove $a, b_i, c_j : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$ sono funzioni limitate e positive, α_i, β_j sono costanti strettamente positive e $\gamma :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione convessa e inferiormente limitata tale che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t) = +\infty.$$

I materiali di Ogden soddisfano automaticamente indifferenza materiale, non degenericità e isotropia.

Ad esempio, nel caso particolare $m = n = 1$, $\alpha_i = \beta_j = 2$ abbiamo

$$\begin{aligned} \Psi(x, \mathbf{F}) &= a(x) + b(x)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + c(x)((v_1 v_2)^2 + (v_1 v_3)^2 + (v_2 v_3)^2) + \gamma(\det \mathbf{F}) \\ &= a(x) + b(x)|\mathbf{F}|^2 + c(x)|\text{Cof } \mathbf{F}|^2 + \gamma(\det \mathbf{F}), \end{aligned}$$

dove la matrice $\text{Cof } \mathbf{F}$ è la *matrice dei cofattori* di \mathbf{F} , cioè la matrice dei complementi algebrici.

Osservazione 5.8 (Matrice dei cofattori). Se \mathbf{F} è invertibile, è noto che

$$(\det \mathbf{F})\mathbf{I} = \mathbf{F}^\top \text{Cof } \mathbf{F} = (\text{Cof } \mathbf{F})\mathbf{F}^\top.$$

Tale relazione ha senso anche per matrici non invertibili e caratterizza la matrice dei cofattori. In particolare si ha

$$\text{Cof } (\mathbf{F}\mathbf{G}) = (\text{Cof } \mathbf{F})(\text{Cof } \mathbf{G}).$$

Inoltre si verifica che l'invariante del secondo ordine di una matrice è proprio la traccia della matrice dei cofattori. ★

Esempio 5.9 (Materiale di Mooney-Rivlin). Una densità di energia elastica della forma

$$\bar{\Psi}(I_1, I_2) = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3)$$

definisce un *materiale di Mooney-Rivlin incomprimibile*. Nel caso comprimibile, solitamente si aggiunge un termine del tipo $k(I_3 - 1)^2$. Se $c_2 = 0$, il materiale si chiama *neo-Hookeano*.

I materiali di Mooney-Rivlin sono utili per descrivere materiali soffici e soggetti a grandi deformazioni, come la gomma. ★

5.2 Materiali ortotropi

Siano ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tre vettori ortonormali in \mathbb{R}^3 , e siano

$$\mathbf{L}_i := \ell_i \otimes \ell_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Si può verificare facilmente che

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 = \mathbf{I}, \quad \text{tr } \mathbf{L}_i = 1, \quad \mathbf{L}_i \mathbf{L}_j = 0 \text{ per } i \neq j.$$

Definizione 5.10 (Ortotropia). Sia \mathcal{G}_{or} l'insieme delle matrici di rotazione \mathbf{Q} tali che

$$\mathbf{Q} \mathbf{L}_i \mathbf{Q}^\top = \mathbf{L}_i \quad \forall i = 1, 2$$

(e quindi vale anche che $\mathbf{Q} \mathbf{L}_3 \mathbf{Q}^\top = \mathbf{L}_3$). Un materiale indifferente è detto ortotropo se vale che

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{Q}^\top) = \tilde{\Psi}(\mathbf{C}) \quad \text{per ogni } \mathbf{C} \text{ e per ogni } \mathbf{Q} \in \mathcal{G}_{or}. \quad (22)$$

Le direzioni ℓ_i vengono dette direzioni materiali principali del materiale ortotropo.

Si può dimostrare (Teorema di Rychlewski) che il potenziale elastico di un materiale iperelastico ortotropo e indifferente si scrive come funzione di 7 quantità scalari:

$$I_1, I_2, I_3, \mathbf{C} \cdot \mathbf{L}_1, \mathbf{C} \cdot \mathbf{L}_2, \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{L}_1, \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{L}_2.$$

5.3 Materiali trasversalmente isotropi

Nel caso trasversalmente isotropo abbiamo un materiale che ha una direzione materiale principale ℓ_1 e si comporta in modo isotropo nel piano perpendicolare a questa. Introduciamo quindi il tensore

$$\mathbf{L}_1 := \ell_1 \otimes \ell_1.$$

Definizione 5.11 (Materiale trasversalmente isotropo). Sia \mathcal{G}_{tr} l'insieme delle matrici di rotazione \mathbf{Q} tali che

$$\mathbf{Q} \mathbf{L}_1 \mathbf{Q}^\top = \mathbf{L}_1.$$

Un materiale indifferente è detto trasversalmente isotropo se vale che

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{Q}^\top) = \tilde{\Psi}(\mathbf{C}) \quad \text{per ogni } \mathbf{C} \text{ e per ogni } \mathbf{Q} \in \mathcal{G}_{tr}. \quad (23)$$

Naturalmente un materiale trasversalmente isotropo è anche ortotropo.

Anche qui, usando il Teorema di Rychlewski, si può dimostrare che il potenziale iperelastico per materiali indifferenti e trasversalmente isotropi si può scrivere in funzione delle cinque quantità scalari

$$I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}), I_4(\mathbf{C}), I_5(\mathbf{C})$$

dove $I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})$ sono i tre invarianti della matrice \mathbf{C} e si pone

$$I_4(\mathbf{C}) := \mathbf{C} \cdot \mathbf{L}_1, \quad I_5(\mathbf{C}) := \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{L}_1.$$

Esempio 5.12 (Deformazione di un cubo). Vediamo un semplice esempio di soluzione di un problema elastico non lineare: la deformazione omogenea di un cubo incomprimibile neo-Hookeano (e dunque isotropo).

Sia Ω un cubo di lato ℓ con le facce parallele ai piani coordinati e supponiamo che il tensore di Piola-Kirchhoff abbia la forma

$$\mathbf{S} = c\mathbf{F} - p\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

come capita nel caso di un materiale neo-Hookeano incomprimibile (p è il moltiplicatore di Lagrange del vincolo $\det W = 1$). Supponiamo nulle le forze esterne e imponiamo le condizioni al contorno di trazione

$$\mathbf{S}\mathbf{e}_i = \alpha\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha \text{ costante.}$$

Cerchiamo quindi una soluzione omogenea $\mathbf{F} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ con $\lambda_i > 0$ e sforzo costante $\mathbf{S} = \alpha\mathbf{I}$.

Dall'incomprimibilità segue subito $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ e dalla relazione tra \mathbf{S} e \mathbf{F} si ha

$$\alpha = c\lambda_i - \frac{p}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

da cui $p = c\lambda_i^2 - \alpha\lambda_i$. Prendendo le differenze a due a due delle equazioni, si ottiene

$$\alpha(\lambda_i - \lambda_j) = c(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)$$

e quindi

$$\lambda_i = \lambda_j \quad \text{o} \quad \lambda_i + \lambda_j = \frac{\alpha}{c} \quad \text{per } i \neq j.$$

Una soluzione ovvia è $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, ovvero la matrice identica. Se poi supponiamo $\alpha < 0$, allora da $\lambda_i + \lambda_j = \alpha/c$ segue che almeno un λ_i è negativo, contro le ipotesi.

Se invece $\alpha > 0$, oltre alla soluzione identica esistono soluzioni della forma $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Infatti: combinando la condizione $\lambda_1 + \lambda_3 = \alpha/c$ con l'incomprimibilità, si ottiene

$$\phi(\lambda_3) := (\lambda_3 - \alpha/c)^2\lambda_3 - 1 = 0.$$

La funzione ϕ è una cubica con coefficiente positivo e tale che $\phi(0) = -1$, e siamo interessati a vedere se ha soluzioni positive più piccole di α/c . Da un facile studio grafico, tenendo conto che i punti critici si trovano in $\alpha/3c$ e α/c e che $\phi(\alpha/c) = -1$, andando a studiare il segno del valore di massimo relativo risulta che:

- se $\alpha/c < 3/\sqrt[3]{4}$, allora non ci sono soluzioni;
- se $\alpha/c = 3/\sqrt[3]{4}$, allora c'è una sola soluzione;
- se $\alpha/c > 3/\sqrt[3]{4}$, allora ci sono due soluzioni (tranne che per $\alpha/c = 2$ in cui una delle due soluzioni è 1 e quindi torna ad essere la matrice identica).

Poiché lo stesso discorso si può fare per λ_1 e λ_2 , ne segue che il problema della deformazione del cubo non lineare può avere fino a 7 soluzioni omogenee distinte! Naturalmente le soluzioni possono essere anche di più se si considerano altri tipi di deformazione.

Questo esempio è stato preso da [Gurtin83, Chapter 14].

★

5.4 Materiali di St.Venant-Kirchhoff

Una delle più semplici classi di materiali iperelastici veramente non lineari è data dai materiali di St.Venant-Kirchhoff, in cui l'energia è molto semplice (una forma quadratica) ma è data come funzione di un descrittore non lineare.

Introduciamo il *tensore di Green-St.Venant*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^\top \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{u})$$

(che nel caso di piccoli gradienti di spostamento, ipotesi tipica dell'elasticità lineare, corrisponde alla parte simmetrica di $\nabla \mathbf{u}$), osservando che è simmetrico. Possiamo allora scrivere il potenziale degli sforzi $\tilde{\Psi}(\mathbf{C})$ in funzione di \mathbf{E} :

$$\Psi_E(\mathbf{E}) := \tilde{\Psi}(\mathbf{I} + 2\mathbf{E}).$$

Siccome il potenziale è definito a meno di una costante, possiamo supporre che $\Psi_E(\mathbf{0}) = 0$. Se sviluppiamo con Taylor tale funzione attorno alla configurazione di riferimento (caratterizzata da $\mathbf{E} = \mathbf{0}$) e supponiamo che nella configurazione di riferimento gli sforzi siano nulli (*stress-free configuration*) allora abbiamo

$$\Psi_E(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \mathbf{E} + O(|\mathbf{E}|^3),$$

dove \mathbf{C} è un tensore del quarto ordine che soddisfa le piccole simmetrie e la grande simmetria, quindi è caratterizzato da 21 coefficienti. Per definizione, un *materiale di St.Venant-Kirchhoff* è un materiale iperelastico per cui il resto dello sviluppo di Taylor viene trascurato, ovvero

$$\Psi_E(\mathbf{E}) = \Psi_{\text{SVK}}(\mathbf{E}) := \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \mathbf{E}.$$

Il potenziale elastico per tali materiali è una forma quadratica in \mathbf{E} , allo stesso modo dei materiali elastici lineari, ma stavolta \mathbf{E} non è più solo la parte simmetrica di $\nabla \mathbf{u}$ ma ha un termine aggiuntivo. In particolare tale potenziale non è quadratico in \mathbf{u} .

È possibile dimostrare che il primo tensore di Piola-Kirchhoff in questo caso diventa

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi_{\text{SVK}}}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{F} \mathbf{C} \mathbf{E}.$$

- Nel caso isotropo si ha

$$\mathbf{C} \mathbf{E} = \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \Psi_{\text{SVK}}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \mathbf{E})^2 + \mu |\mathbf{E}|^2$$

e quindi il materiale dipende soltanto da due coefficienti. L'espressione dello sforzo si scrive

$$\mathbf{S} = \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{F} + 2\mu \mathbf{F} \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2} |\mathbf{F}|^2 \mathbf{F} + \mu \mathbf{F} \mathbf{F}^\top \mathbf{F} - \left(\frac{3}{2} \lambda + \mu \right) \mathbf{F}.$$

- Nel caso ortotropo, poiché gli invarianti di \mathbf{C} sono legati in modo semplice agli invarianti del tensore di Green-St.Venant \mathbf{E} , il potenziale elastico si scrive come combinazione quadratica di $\text{tr } \mathbf{C} \mathbf{L}_i$ e $\text{tr } \mathbf{C}^2 \mathbf{L}_i$. L'invariante del terzo ordine infatti è cubico in \mathbf{E} e deve essere scartato. Si giunge quindi all'espressione

$$\Psi_{\text{SVK}}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} (\text{tr } \mathbf{E} \mathbf{L}_i) (\text{tr } \mathbf{E} \mathbf{L}_j) + \sum_{i=1}^3 b_i \text{tr } \mathbf{E}^2 \mathbf{L}_i;$$

risulta che i materiali di St.Venant-Kirchhoff ortotropi sono caratterizzati da 9 coefficienti.

- Nel caso trasversalmente isotropo, procedendo come nel caso ortotropo si trova l'espressione

$$\Psi_{\text{SVK}}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} (\text{tr } \mathbf{E} \mathbf{L}_i) (\text{tr } \mathbf{E} \mathbf{L}_j) + \sum_{i=2}^3 b_i \text{tr } \mathbf{E}^2 \mathbf{L}_i$$

che dipende solo da cinque coefficienti e può anche essere riscritta in altro modo come

$$\Psi_{\text{SVK}}(\mathbf{E}) = aI_1(\mathbf{C})^2 + bI_1(\mathbf{C})I_4(\mathbf{C}) + cI_4(\mathbf{C})^2 + dI_2(\mathbf{C}) + eI_5(\mathbf{C}),$$

dove a, b, c, d, e sono cinque coefficienti (ed e non è necessariamente il numero di Nepero).

6 Oltre la convessità

6.1 Quasiconvessità

Abbiamo visto che la convessità è una condizione sufficiente per la debole inferiore semicontinuità. La definizione che segue introduce una nozione più debole, comunque necessaria per la debole inferiore semicontinuità come vedremo nel Teorema 6.4.

Definizione 6.1 (Morrey, 1952). *Sia Ω un aperto limitato e $W : M^{k \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. La funzione W si dice quasiconvessa se per ogni $\mathbf{A} \in M^{k \times n}$ e per ogni funzione $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ vale la seguente disuguaglianza:*

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{A} + \nabla \varphi(x)) dV \geq V(\Omega)W(\mathbf{A}) \quad (24)$$

o, introducendo il valore medio,

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{A} + \nabla \varphi) dV \geq W(\mathbf{A}).$$

Osservazione 6.2. Se (24) vale per qualche aperto limitato Ω , allora vale anche per ogni altro aperto limitato Ω' . Infatti, se Ω' è un aperto qualsiasi, esistono $\lambda > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$x_0 + \lambda\Omega' \subset \Omega.$$

Fissati $\mathbf{A} \in M^{k \times n}$ e $\varphi \in C_0^1(\Omega'; \mathbb{R}^k)$, la funzione

$$\psi(x) = \begin{cases} \lambda\varphi\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right) & \text{se } x \in x_0 + \lambda\Omega' \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus (x_0 + \lambda\Omega') \end{cases}$$

appartiene a $C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$. Allora, dalla (24) troviamo

$$\begin{aligned} W(\mathbf{A})V(\Omega) &\leq \int_{\Omega} W(\mathbf{A} + \nabla \psi(x)) dV = \\ &= W(\mathbf{A})V(\Omega \setminus (x_0 + \lambda\Omega')) + \int_{x_0 + \lambda\Omega'} W\left(\mathbf{A} + \nabla \varphi\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\right) dV, \end{aligned}$$

e quindi

$$W(\mathbf{A})V(x_0 + \lambda\Omega') \leq \int_{x_0 + \lambda\Omega'} W\left(\mathbf{A} + \nabla \varphi\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\right) dV.$$

Osserviamo che $V(x_0 + \lambda\Omega') = \lambda^n V(\Omega')$; quindi, grazie al cambio di variabili $y = (x - x_0)/\lambda$, abbiamo

$$W(\mathbf{A})\lambda^n V(\Omega') \leq \lambda^n \int_{\Omega'} W(\mathbf{A} + \nabla\varphi(y)) dV(y)$$

e, dividendo per λ^n ,

$$W(\mathbf{A})V(\Omega') \leq \int_{\Omega'} W(\mathbf{A} + \nabla\varphi(y)) dV(y),$$

cioè (24) vale anche per Ω' . ★

Osservazione 6.3. La condizione (24) dice che se $\mathbf{U}(x)$ è una funzione affine, $\mathbf{U}(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$, allora \mathbf{U} minimizza Φ rispetto ad ogni campo $\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k)$ tale che $\mathbf{u} = \mathbf{U}$ su $\partial\Omega$; infatti, se $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \varphi$ con $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$, (24) dice esattamente che $\Phi[\mathbf{u}] \geq \Phi[\mathbf{U}]$, e per densità troviamo che

$$\Phi[\mathbf{u}] \geq \Phi[\mathbf{U}]$$

per ogni $\mathbf{u} \in \mathbf{U} + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k) \equiv \{\mathbf{v} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k) : \mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{w}, \mathbf{w} \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k)\}$ per qualche $p \geq 1$. ★

Teorema 6.4. Sia Ω un aperto limitato e $W : M^{k \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Se il funzionale $\Phi : W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dato da

$$\Phi[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} W(\nabla\mathbf{u}(x)) dV$$

è debolmente inferiormente semicontinuo rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ per qualche $p \geq 1$, allora W è quasiconvessa.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema nel caso particolare $\Omega = (0, 1)^n$. Fissiamo $\mathbf{A} \in M^{k \times n}$ e $\varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$ e estendiamo φ a \mathbb{R}^n in modo periodico. Ponendo per ogni h

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{h} \varphi(hx)$$

troviamo che

$$\varphi_h(x) \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente.}$$

Inoltre, essendo $\nabla\varphi_h$ limitato in L^p per ogni $p \geq 1$, si ha

$$\nabla\varphi_h \rightharpoonup 0 \quad \text{debolmente in } L^p(\Omega, M^{k \times n}) \text{ per ogni } p \geq 1.$$

Quindi, ponendo

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{A}x, \quad \mathbf{u}_h(x) = \mathbf{A}x + \varphi_h(x),$$

abbiamo che $\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u}$ debolmente in $W^{1,p}$ per ogni $p \geq 1$.

Poiché per ipotesi Φ è debolmente inferiormente semicontinua, abbiamo

$$\Phi[\mathbf{u}] \leq \liminf_h \Phi[\mathbf{u}_h]. \tag{25}$$

Indichiamo con $\Omega_{h,i}$ gli h^n cubi ottenuti dividendo Ω in cubetti congruenti più piccoli di lato $1/h$. Dalla (25), usando il fatto che φ è periodica, troviamo

$$\begin{aligned}\Phi[\mathbf{u}] &= W(\mathbf{A})V(\Omega) \leq \liminf_h \sum_{i=1}^{h^n} \int_{\Omega_{h,i}} W(\mathbf{A} + \nabla\varphi(hx)) dV \\ &= \liminf_h h^n \int_{\Omega_{h,1}} W(\mathbf{A} + \nabla\varphi(hx)) dV.\end{aligned}$$

Col cambio di variabili $y = hx$, che porta $\Omega_{h,1}$ in Ω , troviamo

$$W(\mathbf{A})V(\Omega) \leq \int_{\Omega} W(\mathbf{A} + \nabla\varphi(y)) dV$$

e questo dimostra il teorema. □

Esiste anche un risultato molto significativo, che però non dimostriamo, che afferma una sorta di viceversa del teorema precedente, cioè che una funzione quasiconvessa, con alcune proprietà aggiuntive, è debolmente inferiormente semicontinua. Lo enunciamo direttamente nel caso più generale in cui W può dipendere anche da x e da \mathbf{u} .

Teorema 6.5 (Acerbi-Fusco, 1984). *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n e $W : \Omega \times \mathbb{R}^k \times M^{k \times n} \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione di Carathéodory tale che esistano $L \geq 0$ e $p \geq 1$ per cui si abbia*

$$0 \leq W(x, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \leq L(1 + |\mathbf{u}|^p + |\mathbf{z}|^p).$$

Se per q.o. $x \in \Omega$, per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$, la funzione $W(x, \mathbf{u}, \cdot)$ è quasiconvessa, allora il funzionale

$$\Phi[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} W(x, \mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) dV$$

è debolmente inferiormente semicontinuo rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k)$.

Osservazione 6.6. Si noti il precedente teorema non è adatto per essere applicato ai problemi dell'Elasticità non lineare, poiché l'ipotesi di non degenericità (17) entra in conflitto con la condizione di crescita in \mathbf{z} . ★

Il Teorema 6.4 ci dice, in particolare, che la quasiconvessità è in generale una nozione più debole della convessità, visto che la convessità implica la debole inferiore semicontinuità, che a sua volta implica la quasiconvessità. Il confronto tra quasiconvessità e convessità però può essere mostrato direttamente usando la disuguaglianza di Jensen, come vediamo ora.

Proposizione 6.7. *Sia $W : M^{k \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora W è quasiconvessa.*

Dimostrazione. Per mostrare che W è quasiconvessa, fissiamo $\mathbf{A} \in M^{k \times n}$, un aperto limitato $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e $\varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$. Dalla disuguaglianza di Jensen abbiamo

$$\overline{W(\mathbf{A} + \nabla\varphi)} \geq W(\overline{\mathbf{A} + \nabla\varphi}).$$

Poiché dalla formula di Gauss-Green segue $\int_{\Omega} \nabla\varphi(x) dV = 0$, abbiamo

$$\overline{W(\mathbf{A} + \nabla\varphi)} \geq W(\mathbf{A}),$$

e quindi la (24). □

Esempio 6.8 (di funzione quasiconvessa ma non convessa). Prendiamo $n = k = 2$ e consideriamo la funzione determinante $\det : M^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$. Tale funzione non è convessa: prese le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si ha

$$\det \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right) = 0 > -1 = \frac{1}{2} \det A + \frac{1}{2} \det B.$$

Però la funzione determinante è quasiconvessa. Per mostrarlo, sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^2 e $\mathbf{u} \in C_0^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$; allora si ha, applicando il Lemma di Schwarz,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \det \nabla \mathbf{u} \, dV &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dV = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] dV \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, -u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \int_{\partial \Omega} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, -u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS. \end{aligned}$$

Ora prendiamo una matrice \mathbf{A} e una funzione $\varphi \in C_0^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Applicando la formula appena trovata e tenendo conto che φ si annulla al bordo abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \det(\mathbf{A} + \nabla \varphi) \, dV &= \int_{\Omega} \det \nabla(\mathbf{A}x + \varphi) \, dV \\ &= \int_{\partial \Omega} \left((A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \varphi_1) \left(A_{22} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right), -(A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \varphi_1) \left(A_{21} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right) \right) \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \int_{\partial \Omega} \left((A_{11}x_1 + A_{12}x_2)A_{22}, -(A_{11}x_1 + A_{12}x_2)A_{21} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS = |\Omega| \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Quindi la disuguaglianza di quasiconvessità è verificata addirittura come uguaglianza⁽¹⁶⁾ sui test di classe C^2 . Con un argomento di densità si può vedere che vale anche sui test di classe C^1 . ★

6.2 Convessità di rango 1

Introduciamo un nuovo concetto legato alla convessità, che si rivelerà essere una condizione *necessaria* per la quasiconvessità.

Definizione 6.9 (Convessità di rango 1). Una funzione $W : M^{k \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si dice convessa di rango 1 (o anche 1-convessa) se per ogni coppia di matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M^{k \times n}$ con $\operatorname{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \leq 1$ e per ogni $0 < \lambda < 1$ si ha

$$W(\lambda \mathbf{A} + (1 - \lambda)\mathbf{B}) \leq \lambda W(\mathbf{A}) + (1 - \lambda)W(\mathbf{B}).$$

Fissata una componente della matrice \mathbf{A} , è chiaro che se \mathbf{B} è una matrice che differisce da \mathbf{A} per al più quella componente, allora la differenza $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ha rango al più 1. Quindi in particolare $W(\mathbf{A})$ è convessa in ogni singola componente di \mathbf{A} . Inoltre, poiché ogni matrice di $M^{k \times n}$ di rango al più 1 si può scrivere nella forma $\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta}$ con $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$, allora la convessità di rango 1 di W equivale alla convessità della funzione di variabile reale

$$g(t) = W(\mathbf{A} + t\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta})$$

⁽¹⁶⁾Le funzioni che soddisfano la disuguaglianza di quasiconvessità come uguaglianza sono tali che anche le loro opposte sono quasiconvesse, e vengono dette *funzioni quasiaffini*, in analogia con le funzioni affini per la convessità. Si veda anche il Teorema 6.28.

al variare di \mathbf{A} , $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$.

Una caratterizzazione semplice della convessità di rango 1, nel caso regolare, è data dalla definizione seguente, che esprime una condizione sulle derivate.

Definizione 6.10 (Condizione di Legendre-Hadamard). *Una funzione $W \in C^2(M^{k \times n})$ soddisfa la condizione di Legendre-Hadamard se per ogni $\mathbf{A} \in M^{k \times n}$ e ogni $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$\frac{\partial^2 W(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}^2} (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta}) \cdot (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta}) \geq 0,$$

ossia, in componenti,

$$\sum_{p,q=1}^k \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 W(\mathbf{A})}{\partial A_{pi} \partial A_{qj}} \xi_p \xi_q \eta_i \eta_j \geq 0.$$

Proposizione 6.11. *Sia $W : M^{k \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 . Allora W è convessa di rango 1 se e solo se W verifica la condizione di Legendre-Hadamard.*

Dimostrazione. Essendo $W \in C^2$, la funzione g introdotta sopra è convessa se e solo se $g''(t) \geq 0$, ossia

$$\frac{\partial^2 W(\mathbf{A} + t\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta})}{\partial A_{pi} \partial A_{qj}} \xi_p \xi_q \eta_i \eta_j \geq 0$$

che è la condizione di Legendre-Hadamard. □

Proposizione 6.12. *Sia $W \in C^2(M^{k \times n})$ una funzione quasiconvessa. Allora W soddisfa la condizione di Legendre-Hadamard.*

Dimostrazione. Fissata $\mathbf{A} \in M^{k \times n}$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$, prendiamo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\gamma \in C_0^1(\Omega)$, e poniamo

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \gamma(x) \sin(\lambda \boldsymbol{\eta} \cdot x) \boldsymbol{\xi} \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^k), \\ \psi(x) &= \gamma(x) \cos(\lambda \boldsymbol{\eta} \cdot x) \boldsymbol{\xi} \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^k). \end{aligned}$$

Per ipotesi, la quasiconvessità dice che la funzione

$$g(t) = \int_{\Omega} W(\mathbf{A} + t\nabla \varphi) dV$$

ha un minimo in 0, quindi $g''(0) \geq 0$, cioè

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \sum_{p,q=1}^k \frac{\partial^2 W(\mathbf{A})}{\partial A_{pi} \partial A_{qj}} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_j}(x) dV \geq 0 \quad (26)$$

e allo stesso modo

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \sum_{p,q=1}^k \frac{\partial^2 W(\mathbf{A})}{\partial A_{pi} \partial A_{qj}} \frac{\partial \psi_p}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \psi_q}{\partial x_j}(x) dV \geq 0. \quad (27)$$

Poiché

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i} &= \xi_p \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \sin(\lambda \boldsymbol{\eta} \cdot x) + \lambda \xi_p \eta_i \gamma \cos(\lambda \boldsymbol{\eta} \cdot x), \\ \frac{\partial \psi_p}{\partial x_i} &= \xi_p \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \cos(\lambda \boldsymbol{\eta} \cdot x) - \lambda \xi_p \eta_i \gamma \sin(\lambda \boldsymbol{\eta} \cdot x), \end{aligned}$$

inserendo queste uguaglianze nelle (26) e (27) e sommando troviamo

$$\sum_{i,j=1}^n \sum_{p,q=1}^k \int_{\Omega} \frac{\partial^2 W(\mathbf{A})}{\partial A_{pi} \partial A_{qj}} \left[\xi_p \xi_q \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} + \lambda^2 \xi_p \xi_q \eta_i \eta_j \gamma^2 \right] dV \geq 0.$$

Dividendo per λ^2 e facendo tendere $\lambda \rightarrow +\infty$ troviamo

$$\sum_{i,j=1}^n \sum_{p,q=1}^k \int_{\Omega} \frac{\partial^2 W(\mathbf{A})}{\partial A_{pi} \partial A_{qj}} \xi_p \xi_q \eta_i \eta_j \gamma^2(x) dV \geq 0$$

e quindi

$$\left(\int_{\Omega} \gamma^2(x) dV \right) \sum_{i,j=1}^n \sum_{p,q=1}^k \frac{\partial^2 W(\mathbf{A})}{\partial A_{pi} \partial A_{qj}} \xi_p \xi_q \eta_i \eta_j \geq 0. \quad \square$$

Lemma 6.13. *Sia W quasiconvessa. Allora esiste una successione (W_h) di funzioni di classe C^∞ tale che W_h è quasiconvessa per ogni h e $W_h \rightarrow W$ uniformemente sui compatti.*

Dimostrazione. Poniamo per ogni $h \geq 1$

$$W_h(\mathbf{X}) = \int \rho_h(\mathbf{Y}) W(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) dV(\mathbf{Y}) = (\rho_h * W)(\mathbf{X})$$

dove ρ è un mollificatore nello spazio delle matrici $M^{k \times n}$, cioè $\rho \in C_c^\infty(M^{k \times n})$, $\rho \geq 0$, $\rho(\mathbf{X}) = 0$ per $|\mathbf{X}| \geq 1$ e $\int_{M^{k \times n}} \rho dV = 1$, e $\rho_h(\mathbf{X}) = h^{kn} \rho(h\mathbf{X})$. Allora W_h è C^∞ e $W_h \rightarrow W$ uniformemente sui compatti. Verifichiamo che è ancora quasiconvessa: dato un aperto limitato $\Omega \in \mathbb{R}^n$, una matrice $\mathbf{A} \in M^{k \times n}$ e una funzione $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_h(\mathbf{A} + \nabla \varphi(x)) dV &= \int_{\Omega} \int \rho_h(\mathbf{Y}) W(\mathbf{A} + \nabla \varphi(x) - \mathbf{Y}) dV(\mathbf{Y}) dV(x) \\ &= \int \rho_h(\mathbf{Y}) \left(\int_{\Omega} W(\mathbf{A} - \mathbf{Y} + \nabla \varphi(x)) dV(x) \right) dV(\mathbf{Y}) \\ &\geq \int \rho_h(\mathbf{Y}) V(\Omega) W(\mathbf{A} - \mathbf{Y}) dV(\mathbf{Y}) = V(\Omega) W_h(\mathbf{A}), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la quasiconvessità di W in $\mathbf{A} - \mathbf{Y}$ e la positività di ρ_h . □

Ora possiamo dimostrare il teorema principale di questa sezione, per cui la convessità di rango 1 è una condizione *necessaria* per avere la quasiconvessità.

Teorema 6.14. *Sia W una funzione quasiconvessa. Allora W è convessa di rango 1.*

Dimostrazione. Sia W_h come nel Lemma 6.13. Poiché W_h è regolare e quasiconvessa per ogni h , dalla Proposizione 6.11 si ha che W_h soddisfa la condizione di Legendre-Hadamard, e dunque è anche convessa di rango 1.

Dalla convergenza uniforme di W_h a W , passando al limite nella disuguaglianza della convessità di rango 1, si ottiene la tesi. □

Dal teorema precedente possiamo ricavare anche il seguente fatto.

Corollario 6.15. *Nel caso $n = 1$ o $k = 1$ la nozione di quasiconvessità e di convessità coincidono.*

Dimostrazione. Poiché nel caso $n = 1$ o $k = 1$ tutte le matrici hanno rango 1, la convessità di rango 1 equivale alla convessità. □

6.3 Policonvessità

L'ipotesi di quasiconvessità è necessaria, ma è molto difficile da controllare, poiché si tratta di una nozione non locale. Nelle applicazioni sarebbe preferibile avere a che fare con nozioni che possano essere verificate più facilmente. Introduciamo in questa sezione una speciale famiglia di funzioni, le cosiddette funzioni *policonvesse*, che hanno una definizione di tipo algebrico, quindi più semplice da controllare, e che sono quasiconvesse.

Premettiamo un risultato sulla matrice dei cofattori di un gradiente.

Lemma 6.16. *Sia $\mathbf{u} \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Allora $\operatorname{div}(\operatorname{Cof} \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, cioè*

$$\text{per } i = 1, \dots, n : \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{Cof} \nabla \mathbf{u})_{ij} = 0,$$

ovvero le righe della matrice $\operatorname{Cof} \nabla \mathbf{u}$ hanno divergenza nulla.

Dimostrazione. Ricordiamo che la matrice dei cofattori verifica

$$(\det \mathbf{A})\mathbf{I} = \mathbf{A}^\top \operatorname{Cof} \mathbf{A}$$

per cui, ponendo $\mathbf{C} = \operatorname{Cof} \mathbf{A}$, in componenti si ha

$$(\det \mathbf{A})\delta_{ij} = \sum_{p=1}^n A_{pi} C_{pj}. \quad (28)$$

In particolare, ponendo $i = j$, troviamo che

$$\frac{\partial \det \mathbf{A}}{\partial A_{kj}} = C_{kj} \quad (29)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che C_{kj} non dipende da A_{kj} . Applicando la (28) alla matrice $\mathbf{A} = \nabla \mathbf{u}$ (calcolata in un punto x_0 fissato) abbiamo

$$(\det \nabla \mathbf{u})\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i} C_{kj},$$

dove stavolta $\mathbf{C} = \operatorname{Cof} \nabla \mathbf{u}$. Prendendo la divergenza (a i fissato) di questa relazione otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\det \nabla \mathbf{u}) = \sum_{k,j=1}^n \left[\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} C_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial C_{kj}}{\partial x_j} \right]. \quad (30)$$

Applicando la (29) al primo membro, derivando per composizione si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\det \nabla \mathbf{u}) = \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial (\det \nabla \mathbf{u})}{\partial A_{kj}} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \sum_{k,j=1}^n C_{kj} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Quindi, tornando alla (30) e usando il Lemma di Schwarz,

$$\sum_{k,j=1}^n C_{kj} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{k,j=1}^n \left[\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} C_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial C_{kj}}{\partial x_j} \right].$$

Semplificando i termini uguali si ottiene

$$\sum_{k,j=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial C_{kj}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

Ora, se $\det \nabla \mathbf{u}(x_0) \neq 0$ vuol dire che la matrice $\nabla \mathbf{u}(x_0)$ è non singolare e quindi

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial C_{kj}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{per } k = 1, \dots, n,$$

ovvero $\operatorname{div}(\operatorname{Cof} \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Se invece la matrice $\nabla \mathbf{u}(x_0)$ è singolare, esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$

$$\det(\nabla \mathbf{u}(x_0) + \varepsilon \mathbf{I}) \neq 0,$$

e quindi si può rifare il ragionamento per $\tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{u}(x) + \varepsilon x$ e poi mandare $\varepsilon \rightarrow 0^+$. \square

Una conseguenza di questo lemma, che dimostriamo anche se non useremo nel resto del corso, è l'analogo del Lemma 2.4. Denotiamo con $SO(n)$ l'insieme delle matrici ortogonali di ordine n .

Proposizione 6.17 (Teorema di Liouville). *Sia $\mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\nabla \mathbf{u} \in SO(n) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega.$$

Allora \mathbf{u} è affine.

Dimostrazione. Poiché per le matrici ortogonali $Q \in SO(n)$ si ha $Q = \pm \operatorname{Cof} Q$, dal lemma precedente segue che

$$0 = \operatorname{div}(\operatorname{Cof} \nabla \mathbf{u}) = \pm \operatorname{div} \nabla \mathbf{u} = \pm \Delta \mathbf{u},$$

quindi \mathbf{u} è armonica. In particolare, \mathbf{u} è regolare. Ora osserviamo che, essendo $\nabla \mathbf{u}$ una matrice ortogonale, fissato $i = 1, \dots, n$ si ha

$$|\nabla u_i|^2 = 1 = \operatorname{cost}.$$

e dunque, usando alcune note formule del calcolo vettoriale,⁽¹⁷⁾ si ottiene

$$0 = \Delta(|\nabla u_i|^2) = 2\nabla u_i \cdot \Delta \nabla u_i + 2|\nabla \nabla u_i|^2$$

da cui $\nabla \mathbf{u} = \operatorname{cost}$. \square

Come conseguenza del lemma precedente abbiamo anche il seguente risultato, che può essere interpretato dicendo che “il determinante di un gradiente è una divergenza”, e che avevamo già trovato nel caso 2×2 nell'Esempio 6.8.

Teorema 6.18. *Sia $\mathbf{u} \in W^{1,n}(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Allora per $i = 1, \dots, n$ si ha*

$$\det \nabla \mathbf{u} = \operatorname{div} (u_i (\operatorname{Cof} \nabla \mathbf{u})_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i (\operatorname{Cof} \nabla \mathbf{u})_{ij}), \quad (31)$$

dove la divergenza si intende nel senso delle distribuzioni, ovvero per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \varphi \det \nabla \mathbf{u} \, dV = - \int_{\Omega} u_i \sum_{j=1}^n (\operatorname{Cof} \nabla \mathbf{u})_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dV.$$

⁽¹⁷⁾Le formule che servono sono:

$$\nabla(|\mathbf{v}|^2) = 2\nabla \mathbf{v}^\top \mathbf{v}, \quad \operatorname{div}(\mathbf{T}^\top \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad \Delta \nabla u_i = \nabla \Delta u_i.$$

Dimostrazione. Procediamo per densità: sia $(\mathbf{u}^h) \subset C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una successione tale che $\mathbf{u}^h \rightarrow \mathbf{u}$ in $W^{1,n}(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Essendo \mathbf{u}^h di classe C^2 , il Lemma 6.16 implica che, per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i^h (\text{Cof } \nabla \mathbf{u}^h)_{ij}) = \sum_{j=1}^n (\nabla \mathbf{u}^h)_{ij} (\text{Cof } \nabla \mathbf{u}^h)_{ij} = \det \nabla \mathbf{u}^h$$

che è la tesi nel caso regolare.

Moltiplicando per un test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e integrando su Ω si trova

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varphi \det \nabla \mathbf{u}^h \, dV \\ &= \int_{\Omega} \varphi \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i^h (\text{Cof } \nabla \mathbf{u}^h)_{ij}) \, dV = - \int_{\Omega} u_i^h \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} (\text{Cof } \nabla \mathbf{u}^h)_{ij} \, dV. \end{aligned}$$

Dal fatto che $\mathbf{u} \in W^{1,n}$ segue che

$$\begin{aligned} u_i^h &\rightarrow u_i \quad \text{in } L^n(\Omega), \\ \det \nabla \mathbf{u}^h &\rightarrow \det \nabla \mathbf{u} \quad \text{in } L^1(\Omega), \\ \text{Cof } \nabla \mathbf{u}^h &\rightarrow \text{Cof } \nabla \mathbf{u} \quad \text{in } L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega), \end{aligned}$$

visto che $\det \nabla \mathbf{u}$ è somma di prodotti di n funzioni di L^n e gli elementi di $\text{Cof } \nabla \mathbf{u}$ sono somme di prodotti di $n-1$ funzioni di L^n . Quindi il primo integrale converge a

$$\int_{\Omega} \varphi \det \nabla \mathbf{u} \, dV$$

per il Teorema della convergenza dominata. Essendo $\frac{n}{n-1}$ l'esponente coniugato di n , si ha che per lo stesso motivo l'ultimo integrale converge a

$$- \int_{\Omega} u_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} (\text{Cof } \nabla \mathbf{u})_{ij} \, dV$$

e quindi la tesi. □

Osservazione 6.19. Il teorema precedente ammette alcune naturali estensioni.

- (1) Si possono fare ad esempio altre scelte degli esponenti: se $p \geq 2$, $\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ e $\text{Cof } \nabla \mathbf{u} \in L^{p'}$, allora si ha ancora che $\det \nabla \mathbf{u} \in L^1$ e dunque il teorema vale.
- (2) Poiché anche i cofattori di $\nabla \mathbf{u}$ sono dei determinanti (di ordine 2), anche essi sono delle divergenze in senso debole. In particolare, se $n = 3$ e $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, si ha che $\text{Cof } \nabla \mathbf{u} \in L^1$ e vale la formula

$$(\text{Cof } \nabla \mathbf{u})_{ip} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_q} \left(\sum_{j,k,r=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_r} \right)$$

nel senso delle distribuzioni. ★

Proposizione 6.20. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sono tali che $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in W_0^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, allora

$$\int_{\Omega} \det \nabla \mathbf{u} \, dV = \int_{\Omega} \det \nabla \mathbf{v} \, dV. \quad (32)$$

Dimostrazione. Vediamo prima il caso $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in C_c^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dalla (31) abbiamo (scegliendo ad esempio $i = 1$):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \det \nabla \mathbf{u} \, dV &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(u_1(\operatorname{Cof} \nabla \mathbf{u})_1) \, dV = \int_{\partial\Omega} u_1(\operatorname{Cof} \nabla \mathbf{u})_1 \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \int_{\partial\Omega} v_1(\operatorname{Cof} \nabla \mathbf{v})_1 \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \det \nabla \mathbf{v} \, dV \end{aligned}$$

che è la tesi nel caso C^2 . Il caso generale si ottiene procedendo come nella dimostrazione precedente: si prendono $\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con $\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h \in C_c^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tali che

$$\mathbf{u}^h \rightarrow \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}^h \rightarrow \mathbf{v} \quad \text{in } W^{1,n}(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

e si usa il fatto che

$$\det \nabla \mathbf{u}^h \rightarrow \det \nabla \mathbf{u}, \quad \det \nabla \mathbf{v}^h \rightarrow \det \nabla \mathbf{v} \quad \text{in } L^1(\Omega; \mathbb{R}^n). \quad \square$$

Da questa identità segue un primo risultato interessante per l'iperelasticità.

Teorema 6.21. Sia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora la funzione

$$W(\mathbf{F}) = \gamma(\det \mathbf{F})$$

è quasiconvessa.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{A} \in M^{n \times n}$ e $\varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Allora, dalla disuguaglianza di Jensen,

$$\overline{W(\mathbf{A} + \nabla \varphi)} = \overline{\gamma(\det(\mathbf{A} + \nabla \varphi))} \geq \gamma(\overline{\det(\mathbf{A} + \nabla \varphi)}).$$

Siccome \mathbf{A} e $\mathbf{A} + \nabla \varphi$ hanno lo stesso valore al bordo, dalla precedente proposizione segue

$$\overline{\det(\mathbf{A} + \nabla \varphi)} = \det \mathbf{A}$$

e quindi

$$\overline{W(\mathbf{A} + \nabla \varphi)} \geq \gamma(\det \mathbf{A}) = W(\mathbf{A}). \quad \square$$

Osservazione 6.22. Il Teorema 6.18 e la Proposizione 6.20 si estendono anche a tutti i determinanti dei minori della matrice $\nabla \mathbf{u}$. In particolare, nel caso $n = 3$ si può generalizzare il Teorema 6.21 mostrando che se $g : \mathbb{R}^{19} \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa, allora la funzione

$$W(\mathbf{F}) = g(\mathbf{F}, \operatorname{Cof} \mathbf{F}, \det \mathbf{F})$$

è quasiconvessa. ★

Questo suggerisce la seguente definizione.

Definizione 6.23. Una funzione $W : M^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ della forma

$$W(\mathbf{F}) = g(\mathbf{F}, \text{Cof } \mathbf{F}, \det \mathbf{F})$$

con $g : \mathbb{R}^{19} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convessa, si dice policonvessa.⁽¹⁸⁾

Quindi le funzioni policonvesse (e finite) sono quasiconvesse. Il viceversa non è vero, ma la policonvessità è molto più semplice della quasiconvessità, poiché si verifica con una condizione algebrica su W .

Osservazione 6.24. Si noti che la funzione g della definizione precedente non è unica. Facciamo un semplice esempio nel caso $n = 2$, per cui i cofattori coincidono con le entrate della matrice e dunque $g : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$. Consideriamo la funzione

$$W(\mathbf{F}) := |\mathbf{F}|^2 = F_{11}^2 + F_{12}^2 + F_{21}^2 + F_{22}^2.$$

Allora W è policonvessa (anzi, è addirittura convessa) e una scelta possibile per la funzione g è proprio $g(f, \delta) = |f|^2$, che è ovviamente convessa in (f, δ) . Ma riscrivendo $W(\mathbf{F})$ come

$$W(\mathbf{F}) = (F_{11} - F_{22})^2 + (F_{12} + F_{21})^2 + 2 \det \mathbf{F},$$

si può fare la scelta

$$g(f, d) = (f_{11} - f_{22})^2 + (f_{12} + f_{21})^2 + 2\delta,$$

che è ancora convessa in (f, δ) , in quanto somma di funzioni convesse, ma è diversa dalla precedente. ★

Osservazione 6.25. La nozione di policonvessità è ovviamente più ampia di quella di convessità nel caso $n \geq 2$. Ad esempio, nel caso $n = 2$, la funzione

$$W(\mathbf{F}) = \det \mathbf{F} = F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}$$

non è convessa, come sappiamo, ma scegliendo

$$g(f, \delta) = \delta$$

si ha che g è convessa in (f, δ) e $W(\mathbf{F}) = g(\mathbf{F}, \det \mathbf{F})$. ★

Pertanto lo schema finale è il seguente⁽¹⁹⁾

$$\begin{array}{ccccccc} \text{convessità} & \Rightarrow & \text{policonvessità} & \Rightarrow & \text{quasiconvessità} & \Rightarrow & \text{convessità di rango 1} \\ & & \uparrow & & \Downarrow & & \Updownarrow \\ & & \text{esempi fisici} & & \text{debole} & & \text{condizioni di} \\ & & & & \text{inferiore} & & \text{Legendre-Hadamard} \\ & & & & \text{semicontinuità} & & \end{array}$$

Per quanto riguarda le implicazioni inverse si ha, nel caso $n \geq 2$ e $k \geq 2$:

⁽¹⁸⁾Per una definizione su $M^{k \times n}$ si veda [Dacorogna, Capitolo 5].

⁽¹⁹⁾Se l'immagine della funzione contiene anche $+\infty$, non si parla di quasiconvessità, e quindi si ha soltanto la catena di implicazioni

$$\text{convessità} \Rightarrow \text{policonvessità} \Rightarrow \text{convessità di rango 1}.$$

- policonvessità $\not\equiv$ convessità: il controesempio è quello della funzione $W(F) = \det F$
- quasiconvessità $\not\equiv$ policonvessità: qui il controesempio è più laborioso ed è essenzialmente dovuto all'olandese F. J. Terpstra nel 1938
- convessità di rango 1 $\not\equiv$ quasiconvessità: in questo caso si ha un famoso controesempio di Vladimír Šverák del 1992, che però vale solo nel caso $n \geq 3$, $k \geq 2$. Nel caso $n = k = 2$ non si sa ancora se le due nozioni siano veramente distinte.

Grazie al Corollario 6.15, nel caso $n = 1$ o $k = 1$ le nozioni di convessità, policonvessità, quasiconvessità, convessità di rango 1 coincidono.

6.4 Approfondimento sulle funzioni policonvesse

Vediamo un'altra caratterizzazione delle funzioni policonvesse.

Teorema 6.26. *Sia $W : M^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora W è policonvessa se e solo se esistono $H, K \in M^{3 \times 3}$ e $d \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $A, B \in M^{3 \times 3}$*

$$W(B) \geq W(A) + H \cdot (B - A) + K \cdot (\text{Cof } B - \text{Cof } A) + d(\det B - \det A). \quad (33)$$

Dimostrazione. L'implicazione " \Rightarrow " viene direttamente dalla convessità della funzione g . Per mostrare il viceversa, definiamo

$$g(B, C, \delta) := \sup_{A \in M^{3 \times 3}} [W(A) + H \cdot (B - A) + K \cdot (\text{Cof } B - \text{Cof } A) + d(\det B - \det A)].$$

Essendo l'estremo superiore di funzioni affini (e quindi convesse), g è convessa. Inoltre dalla (33) si ha facilmente

$$g(B, \text{Cof } B, \det B) = W(B).$$

Si noti inoltre che la funzione g assume solo valori finiti, poiché si può dimostrare che l'involuppo convesso dell'insieme

$$\{(B, \text{Cof } B, \det B) : B \in M^{3 \times 3}\}$$

è tutto lo spazio $M^{3 \times 3} \times M^{3 \times 3} \times \mathbb{R}$. □

Osservazione 6.27. Sostituendo $A+B$ al posto di B nella disuguaglianza (33), si ottiene, per ogni $A, B \in M^{3 \times 3}$, la disuguaglianza equivalente

$$W(A+B) \geq W(A) + \tilde{H} \cdot B + \tilde{K} \cdot \text{Cof } B + \tilde{d} \det B$$

per opportuni $\tilde{H}, \tilde{K} \in M^{3 \times 3}$ e $\tilde{d} \in \mathbb{R}$.

In particolare, tale disuguaglianza permette di dimostrare facilmente che le funzioni policonvesse sono quasiconvesse. Infatti, dato Ω aperto limitato in \mathbb{R}^3 , $A \in M^{3 \times 3}$ e $\varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, si ha

$$\int_{\Omega} W(A + \nabla \varphi) dV \geq \int_{\Omega} W(A) dV + \int_{\Omega} [\tilde{H} \cdot \nabla \varphi + \tilde{K} \cdot \text{Cof } \nabla \varphi + \tilde{d} \det \nabla \varphi] dV$$

e il secondo integrale è nullo per il Teorema della Divergenza. ★

Ora caratterizziamo le funzioni *quasiaffini*.

Teorema 6.28. *Sia $W : M^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che W e $-W$ siano convesse di rango 1. Allora W è una funzione affine dei minori delle matrici. In particolare nel caso $n = 3$ W ha la forma*

$$W(A) = a + H \cdot A + K \cdot \text{Cof } A + d \det A$$

per opportuni $H, K \in M^{3 \times 3}$ e $a, d \in \mathbb{R}$.

Si noti che il teorema implica che W e $-W$ sono anche policonvesse, e dunque W è quasiaffine. In particolare, le nozioni di poliaffinità, quasiaffinità, affinità di rango 1 coincidono.

Dimostrazione. Per semplicità facciamo la dimostrazione nel caso $n = 2$.

Vediamo prima il caso $W \in C^2$. Poiché W e $-W$ sono convesse di rango 1 e regolari, le condizioni di Legendre-Hadamard diventano

$$\sum_{i,j,p,q=1}^2 \frac{\partial^2 W(\mathbf{A})}{\partial A_{pi} \partial A_{qj}} \xi_p \xi_q \eta_i \eta_j = 0 \quad (34)$$

per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{A} \in M^{2 \times 2}$. Poniamo

$$\mathbf{M} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}^2}, \quad M_{piqj} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{A})}{\partial A_{pi} \partial A_{qj}}$$

che è un campo tensoriale del quart'ordine dipendente da \mathbf{A} .

Dalla (34) si ha (gli indici non sono sommati):

$$M_{piqj} = -M_{qipj} = M_{qjpi}, \quad M_{pipj} = M_{piqi} = 0.$$

In particolare, poiché $M_{1111} = M_{2222} = 0$, si ha che W è affine nelle variabili A_{11} , A_{22} , e dunque

$$W(\mathbf{A}) = W_0(A_{12}, A_{21})A_{11}A_{22} + \theta_1(A_{12}, A_{21})A_{22} + \theta_2(A_{12}, A_{21})A_{11} + \chi(A_{12}, A_{21}),$$

dove le W_0, θ_i, χ sono di classe C^2 .

Ora dal fatto, ad esempio, che $M_{1112} = 0$, ne segue che

$$\frac{\partial W_0}{\partial A_{12}} A_{22} + \frac{\partial \theta_2}{\partial A_{12}} = 0$$

da cui, per l'arbitrarietà di A_{22} si ottiene

$$\frac{\partial W_0}{\partial A_{12}} = \frac{\partial \theta_2}{\partial A_{12}} = 0.$$

Allo stesso modo, da $M_{1121} = M_{2212} = M_{2221} = 0$ si ottiene che

$$\frac{\partial W_0}{\partial A_{21}} = \frac{\partial \theta_2}{\partial A_{21}} = \frac{\partial \theta_1}{\partial A_{12}} = \frac{\partial \theta_1}{\partial A_{21}} = 0$$

e dunque W_0, θ_1, θ_2 sono costanti. Per cui si giunge a

$$W(\mathbf{A}) = W_0 A_{11} A_{22} + \theta_1 A_{22} + \theta_2 A_{11} + \chi(A_{12}, A_{21}).$$

Ora sfruttiamo il fatto che anche $M_{1212} = 0$ e $M_{2121} = 0$, ottenendo

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial A_{12}^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_{21}^2} = 0,$$

da cui

$$\chi(A_{12}, A_{21}) = \chi_0 A_{12} A_{21} + \chi_1 A_{12} + \chi_2 A_{21} + \chi_3$$

con χ_i costanti. Dunque otteniamo

$$W(\mathbf{A}) = W_0 A_{11} A_{22} + \theta_1 A_{22} + \theta_2 A_{11} + \chi_0 A_{12} A_{21} + \chi_1 A_{12} + \chi_2 A_{21} + \chi_3.$$

Infine imponiamo che $M_{1122} = -M_{1221}$, da cui $W_0 = -\chi_0$ e quindi

$$W(\mathbf{A}) = W_0(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) + \theta_1 A_{22} + \theta_2 A_{11} + \chi_1 A_{12} + \chi_2 A_{21} + \chi_3.$$

Abbiamo mostrato che W è affine in \mathbf{A} e in $\det \mathbf{A}$.

Se ora W è soltanto continua, regolarizziamo per convoluzione. Sia $\rho \in C_c^\infty(M^{2 \times 2})$ con $\rho \geq 0$, $\rho(\mathbf{A}) = 0$ per $|\mathbf{A}| \geq 1$ e $\int_{M^{2 \times 2}} \rho dV^4 = 1$. Sia

$$\rho_\varepsilon(\mathbf{A}) = \varepsilon^{-4} \rho\left(\frac{\mathbf{A}}{\varepsilon}\right)$$

e poniamo $W_\varepsilon = \rho_\varepsilon * W$. Allora W_ε e $-W_\varepsilon$ sono convesse di rango 1 e regolari, quindi

$$W_\varepsilon(\mathbf{A}) = a_\varepsilon + \mathbf{H}_\varepsilon \cdot \mathbf{A} + d_\varepsilon \det \mathbf{A}.$$

Sia ora $\mathbf{A} = t\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_i$ e poniamo

$$g_\varepsilon(t) = W_\varepsilon(t\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_i) = a_\varepsilon + t(\mathbf{H}_\varepsilon)_{pi};$$

poiché $\det \mathbf{A} = 0$ e $W_\varepsilon \rightarrow W$ uniformemente sui compatti, si ha che $g_\varepsilon \rightarrow g$ uniformemente sui compatti, e si vede subito che g è della forma

$$g(t) = a + t\mathbf{H}_{pi}.$$

Quindi $a_\varepsilon \rightarrow a$ e $\mathbf{H}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{H}$. Per differenza si ottiene anche che $d_\varepsilon \rightarrow d$ e quindi la tesi. \square

Teorema 6.29. Sia $\Phi : M^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione quasilineare non costante, e sia

$$W(\mathbf{A}) = g(\Phi(\mathbf{A}))$$

per qualche $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora

$$W \text{ è policonvessa} \Leftrightarrow W \text{ è quasiconvessa} \Leftrightarrow W \text{ è convessa di rango 1} \Leftrightarrow g \text{ è convessa.}$$

Dimostrazione. Ovviamente basta dimostrare che

$$W \text{ convessa di rango 1} \Rightarrow g \text{ è convessa.}$$

Dal teorema precedente sappiamo che Φ è della forma

$$\Phi(\mathbf{A}) = a + \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{K} \cdot \text{Cof } \mathbf{A} + d \det \mathbf{A}$$

per opportuni $\mathbf{H}, \mathbf{K} \in M^{3 \times 3}$ e $a, d \in \mathbb{R}$ e con almeno uno tra $\mathbf{H}, \mathbf{K}, d$ non nullo.

Se $\mathbf{H} \neq 0$, sia $H_{pi} \neq 0$ e poniamo

$$A_{pi} = \frac{x-a}{H_{pi}}, \quad B_{pi} = \frac{y-a}{H_{pi}}, \quad A_{qj} = B_{qj} = 0 \text{ altrimenti.}$$

Allora si ha che $\text{Cof } \mathbf{A} = \text{Cof } \mathbf{B} = 0$, $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ha rango 1 e

$$\Phi(\mathbf{A}) = x, \quad \Phi(\mathbf{B}) = y.$$

Poiché

$$\Phi(\lambda \mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}) = \lambda x + (1-\lambda)y,$$

ne segue

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) = W(\lambda \mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}) \leq \lambda W(\mathbf{A}) + (1-\lambda)W(\mathbf{B}) = \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y),$$

quindi g è convessa.

Se invece $\mathbf{H} = 0$ e $\mathbf{K} \neq 0$, sia $K_{pi} \neq 0$ e poniamo

$$A_{p+1,i+1} = \frac{x-a}{K_{pi}}, \quad A_{p+2,i+2} = 1, \quad B_{p+1,i+1} = \frac{y-a}{K_{pi}}, \quad B_{p+2,i+2} = 1, \\ A_{qj} = B_{qj} = 0 \text{ altrimenti.}$$

In questo modo si ha nuovamente che $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ha rango 1 e $\Phi(\mathbf{A}) = x$, $\Phi(\mathbf{B}) = y$, e si può ripetere l'argomento precedente.

Infine, se $\mathbf{H} = \mathbf{K} = 0$, si ha $d \neq 0$ e consideriamo le matrici

$$\mathbf{A} = \text{diag} \left(\frac{x-a}{d}, 1, 1 \right), \quad \mathbf{B} = \text{diag} \left(\frac{y-a}{d}, 1, 1 \right),$$

in modo che ancora $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ha rango 1 e $\Phi(\mathbf{A}) = x$, $\Phi(\mathbf{B}) = y$. □

Vediamo ora un teorema che riguarda il caso quadratico.

Teorema 6.30. Sia $W : M^{k \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica data da

$$W(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = C_{piqj} A_{pi} A_{qj}$$

dove \mathbf{C} è un tensore del quarto ordine con la grande simmetria, cioè $C_{piqj} = C_{qjpi}$.

Allora W è convessa di rango 1 se e solo se W è quasiconvessa.

Dimostrazione. Intanto la quasiconvessità equivale a dire che

$$\forall \varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^k) : \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, dV \geq 0;$$

infatti si ha

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{A} + \nabla \varphi) \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{C}(\mathbf{A} + \nabla \varphi) \cdot (\mathbf{A} + \nabla \varphi) \, dV \\ = |\Omega| W(\mathbf{A}) \, dV + 2 \mathbf{C} \mathbf{A} \cdot \int_{\Omega} \nabla \varphi \, dV + \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, dV$$

e il secondo integrale è nullo per le condizioni al contorno. Inoltre osserviamo che la convessità di rango 1 equivale alle condizioni di Legendre-Hadamard, visto che la funzione è regolare.

Ora estendiamo φ a 0 fuori da Ω e consideriamo la sua trasformata di Fourier; il teorema di Plancherel afferma che il prodotto in L^2 di due funzioni coincide col prodotto in L^2 delle loro trasformate,⁽²⁰⁾ dove \hat{f} denota la trasformata di Fourier di f , ovvero

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} f(x) dV.$$

Applicando il risultato a $\mathbf{C}\nabla\varphi$ e $\nabla\varphi$ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{C}\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi dV &= \int \mathbf{C}\nabla\varphi \cdot \overline{\nabla\varphi} dV = \int \mathbf{C}\widehat{\nabla\varphi} \cdot \widehat{\overline{\nabla\varphi}} dV \\ &= \int C_{piqj} i \xi_p \hat{\varphi}_i \overline{i \xi_q \hat{\varphi}_j} dV = \int C_{piqj} \xi_p \xi_q (\operatorname{Re} \hat{\varphi}_i + i \operatorname{Im} \hat{\varphi}_i) (\operatorname{Re} \hat{\varphi}_j - i \operatorname{Im} \hat{\varphi}_j) dV \\ &= \int C_{piqj} \xi_p \xi_q \operatorname{Re} \hat{\varphi}_i \operatorname{Re} \hat{\varphi}_j + \int C_{piqj} \xi_p \xi_q \operatorname{Im} \hat{\varphi}_i \operatorname{Im} \hat{\varphi}_j dV \geq 0 \end{aligned}$$

e la disuguaglianza è data dalle condizioni di Legendre-Hadamard. \square

Inoltre si può dimostrare che nel caso $k = 2$ o $n = 2$ le forme quadratiche sono policonvesse se e solo se sono quasiconvesse, mentre ciò non è vero se $k, n \geq 3$.

7 Il teorema di John Ball

In questa sezione enunciamo e dimostriamo un teorema riassuntivo che applica i risultati della policonvessità a un materiale iperelastico. Premettiamo prima due lemmi; il primo generalizza la disuguaglianza di Poincaré.

Lemma 7.1. *Sia Ω un aperto connesso e limitato di \mathbb{R}^n con frontiera regolare, e sia $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ un sottoinsieme regolare tale che $|\Gamma_0| > 0$. Allora esiste una costante $d > 0$ tale che*

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega) : \quad \|u\|_p^p \leq d \left(\|\nabla u\|_p^p + \left(\int_{\Gamma_0} |u| dS \right)^p \right),$$

dove l'ultimo integrale va inteso nel senso delle tracce.

Dimostrazione. Per assurdo sia (u_h) in $W^{1,p}(\Omega)$ tale che $\|u_h\|_p = 1$ e

$$\|\nabla u_h\|_p^p + \left(\int_{\Gamma_0} |u_h| dS \right)^p \leq \frac{1}{h}.$$

Si ha subito che (u_h) è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, quindi a meno di sottosuccessioni

$$u_h \rightharpoonup u \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega).$$

In particolare dalla semicontinuità inferiore debole della norma si ha $\|\nabla u\|_p = 0$, da cui $u = c$ costante. Inoltre, poiché l'operatore di traccia è continuo in $L^p(\Gamma_0)$,

$$0 = \lim_h \int_{\Gamma_0} |u_h| dS = \int_{\Gamma_0} |u| dS = |c| |\Gamma_0|$$

⁽²⁰⁾Si osservi che in generale $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, e dunque

$$(f, g)_{L^2} = \int f(x) \cdot \overline{g(x)} dV,$$

dove $\overline{g(x)}$ è il complesso coniugato di $g(x)$.

e dunque $u \equiv 0$. D'altra parte, a meno di una ulteriore successione si ha anche $u_h \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$, e dunque la sottosuccessione tende a 0 fortemente in L^p ; questo è assurdo, poiché $\|u_h\|_p = 1$. \square

Naturalmente il lemma precedente si generalizza al caso $\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k)$. Il secondo lemma stabilisce una proprietà di convergenza dei determinanti e dei cofattori di gradienti.

Lemma 7.2. *Sia $n = 3$ e sia $\mathbf{u}^h \rightharpoonup \mathbf{u}$ in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ per qualche $p \geq 2$. Allora valgono i seguenti fatti:*

(1) *si ha, a meno di sottosuccessioni,*

$$\text{Cof } \nabla \mathbf{u}^h \rightharpoonup \text{Cof } \nabla \mathbf{u} \quad \text{nel senso distribuzionale,}$$

ovvero

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega; M^{3 \times 3}) : \int_{\Omega} \text{Cof } \nabla \mathbf{u}^h \cdot \varphi \, dV \rightarrow \int_{\Omega} \text{Cof } \nabla \mathbf{u} \cdot \varphi \, dV;$$

(2) *se in più $\text{Cof } \nabla \mathbf{u}^h \rightharpoonup \text{Cof } \nabla \mathbf{u}$ in $L^{p'}$, allora, a meno di sottosuccessioni,*

$$\det \nabla \mathbf{u}^h \rightharpoonup \det \nabla \mathbf{u} \quad \text{nel senso distribuzionale.}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (1). Per la (2) si procede in modo simile.

Per l'Osservazione 6.19, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ si ha

$$\int_{\Omega} (\text{Cof } \nabla \mathbf{u}^h)_{ip} \varphi \, dV = -\frac{1}{2} \sum_{q,j,k,r=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \int_{\Omega} u_j^h \frac{\partial u_k^h}{\partial x_r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_q} \, dV.$$

Sia ora $\Omega' \subset \Omega$ regolare e tale che $\text{supt } \varphi \subset \Omega'$. Poiché $\mathbf{u}^h \rightharpoonup \mathbf{u}$ in $W^{1,p}(\Omega'; \mathbb{R}^3)$, dal Teorema 3.9 si ha

$$\mathbf{u}^h \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{in } L^2(\Omega'; \mathbb{R}^3) \text{ a meno di sottosuccessioni.}$$

Quindi

$$u_j^h \frac{\partial u_k^h}{\partial x_r} \rightarrow u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_r} \quad \text{in } L^1$$

e dunque

$$\int_{\Omega} (\text{Cof } \nabla \mathbf{u}^h)_{ip} \varphi \, dV \rightarrow \int_{\Omega} (\text{Cof } \nabla \mathbf{u})_{ip} \varphi \, dV. \quad \square$$

Veniamo ora al teorema principale di esistenza del minimo.

Teorema 7.3. *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un aperto limitato connesso con frontiera regolare, e sia $\Psi : \Omega \times M_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ un potenziale elastico continuo tale che*

(i) *(policonvessità) esiste $g : \Omega \times M^{3 \times 3} \times M^{3 \times 3} \times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ di Carathéodory tale che $g(x, \cdot, \cdot, \cdot)$ è convessa per q.o. $x \in \Omega$ e*

$$\forall \mathbf{F} \in M_+^{3 \times 3} : \quad \Psi(x, \mathbf{F}) = g(x, \mathbf{F}, \text{Cof } \mathbf{F}, \det \mathbf{F});$$

(ii) (continuità all'infinito) se $F_h \rightarrow F$, $C_h \rightarrow C$, $\delta_h \rightarrow 0^+$, allora

$$\lim_h g(x, F_h, C_h, \delta_h) = +\infty;$$

(iii) (coercitività) esistono $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p \geq 2$, $q \geq p'$, $r > 1$ tali che

$$\forall F, C \in M^{3 \times 3}, \delta > 0 : \quad g(x, F, C, \delta) \geq \alpha(|F|^p + |C|^q + \delta^r) + \beta.$$

Supponiamo che $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ in modo disgiunto e con $|\Gamma_0| > 0$. Siano $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{t} : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ misurabili tali che l'applicazione

$$L[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS$$

sia continua su $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Infine sia $\mathbf{u}_0 : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ misurabile e tale che l'insieme

$$U = \{\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3) : \text{Cof } \nabla \mathbf{u} \in L^q, \det \nabla \mathbf{u} \in L^r, \det \nabla \mathbf{u} > 0 \text{ q.o. in } \Omega, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ su } \Gamma_0\}$$

non sia vuoto.⁽²¹⁾

Allora, definendo il funzionale $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ come

$$\Phi[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \Psi(x, \nabla \mathbf{u}) dV - L[\mathbf{u}]$$

e supponendo che $\inf \Phi[\mathbf{u}] < +\infty$, si ha che esiste

$$\min_{\mathbf{u} \in U} \Phi[\mathbf{u}].$$

Dimostrazione. Si noti che il funzionale Φ è ben definito in quanto g è di Carathéodory. Si noti inoltre che la funzione g è definita su tutto $M^{3 \times 3}$, e non solo su $M_+^{3 \times 3}$.

Passo 1: modifica del problema Definiamo una funzione $\bar{g} : \Omega \times M^{3 \times 3} \times M^{3 \times 3} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ nel seguente modo:

$$\bar{g}(x, F, C, \delta) = \begin{cases} g(x, F, C, \delta) & \text{se } \delta > 0 \\ +\infty & \text{se } \delta \leq 0. \end{cases}$$

Allora $\bar{g}(x, \cdot, \cdot, \cdot)$ resta continua e convessa; inoltre, $\bar{g}(x, F, C, \delta) \geq \beta$ dalla (iii). Se introduciamo l'insieme

$$\bar{U} = \{\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3) : \text{Cof } \nabla \mathbf{u} \in L^q, \det \nabla \mathbf{u} \in L^r, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ su } \Gamma_0\}$$

che contiene U e definiamo $\bar{\Phi} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\bar{\Phi}[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \bar{g}(x, \nabla \mathbf{u}(x), \text{Cof } \nabla \mathbf{u}(x), \det \nabla \mathbf{u}(x)) dV - L[\mathbf{u}],$$

otteniamo un'estensione di Φ , e in particolare

$$\min_U \Phi = \min_{\bar{U}} \bar{\Phi}.$$

⁽²¹⁾ Ad esempio, si può considerare il caso in cui \mathbf{u}_0 sia la traccia di un campo $\tilde{\mathbf{u}}_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tale che $\text{Cof } \nabla \tilde{\mathbf{u}}_0 \in L^q$, $\det \nabla \tilde{\mathbf{u}}_0 \in L^r$, $\det \nabla \tilde{\mathbf{u}}_0 > 0$ q.o. in Ω . In questo modo certamente $\tilde{\mathbf{u}}_0 \in U$ e dunque $U \neq \emptyset$.

Inoltre, $\bar{\Phi}[\mathbf{u}] < +\infty \Rightarrow \det \nabla \mathbf{u} > 0$ q.o. in Ω .

Passo 2: minorazione Usando (iii), stabiliamo una minorazione per Φ : per ogni $\mathbf{u} \in U$ si ha

$$\Phi[\mathbf{u}] \geq \alpha(\|\nabla \mathbf{u}\|_p^p + \|\text{Cof } \nabla \mathbf{u}\|_q^q + \|\det \nabla \mathbf{u}\|_r^r) + \beta|\Omega| - c\|\mathbf{u}\|_{1,p}$$

dove c è la costante di continuità di L . Poiché dal Lemma 7.1 abbiamo che per ogni $\mathbf{u} \in U$

$$\|\mathbf{u}\|_p^p \leq d \left(\|\nabla \mathbf{u}\|_p^p + \left(\int_{\Gamma_0} |\mathbf{u}_0| dS \right)^p \right) = d\|\nabla \mathbf{u}\|_p^p + \text{cost},$$

troviamo che

$$\Phi[\mathbf{u}] \geq c_0 + c_1(\|\mathbf{u}\|_{1,p}^p + \|\text{Cof } \nabla \mathbf{u}\|_q^q + \|\det \nabla \mathbf{u}\|_r^r) - c\|\mathbf{u}\|_{1,p}$$

con $c_1 > 0$, $c_2, c \in \mathbb{R}$. Poiché $p > 1$, esiste una costante $b \in \mathbb{R}$ tale che $c\|\mathbf{u}\|_{1,p} \leq \frac{c_1}{2}\|\mathbf{u}\|_{1,p}^p + b$,⁽²²⁾ e dunque si può migliorare l'ultimo addendo col primo, ottenendo

$$\Phi[\mathbf{u}] \geq \tilde{c} + \frac{c_1}{2}(\|\mathbf{u}\|_{1,p}^p + \|\text{Cof } \nabla \mathbf{u}\|_q^q + \|\det \nabla \mathbf{u}\|_r^r). \quad (35)$$

In particolare, Φ è coercitivo su U , e poiché la stessa stima vale per $\bar{\Phi}[\mathbf{u}]$ su \bar{U} , si ha che $\bar{\Phi}$ è coercitivo su \bar{U} .

Ora si noti che la policonvessità di $\bar{\Phi}$ non implica automaticamente la wlsc, visto che la funzione \bar{g} assume anche il valore $+\infty$. Procediamo quindi in maniera diretta usando la convessità di \bar{g} .

Passo 3: successione minimizzante Sia \mathbf{u}_h in U una successione minimizzante per $\bar{\Phi}$, ovvero

$$\lim_h \bar{\Phi}[\mathbf{u}_h] = \inf_U \bar{\Phi}.$$

Per la disuguaglianza trovata al passo precedente, e poiché $\inf_U \bar{\Phi}$ è finito, si ha che

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h) & \text{ è limitata in } W^{1,p} \\ (\text{Cof } \nabla \mathbf{u}_h) & \text{ è limitata in } L^q \\ (\det \nabla \mathbf{u}_h) & \text{ è limitata in } L^r. \end{aligned}$$

Per la riflessività degli spazi si ha, a meno di sottosuccessioni,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h & \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{in } W^{1,p} \\ \text{Cof } \nabla \mathbf{u}_h & \rightharpoonup \mathbf{C} \quad \text{in } L^q \\ \det \nabla \mathbf{u}_h & \rightharpoonup \delta \quad \text{in } L^r. \end{aligned}$$

Poiché il limite debole negli spazi L^p implica quello distribuzionale, per l'unicità del limite il Lemma 7.2 garantisce che $\mathbf{C} = \text{Cof } \nabla \mathbf{u}$ e $\delta = \det \nabla \mathbf{u}$ (è qui che serve l'ipotesi $q \geq p'$), e dunque in particolare $\text{Cof } \nabla \mathbf{u} \in L^q$ e $\det \nabla \mathbf{u} \in L^r$.

⁽²²⁾Per trovare la costante b , si può minorare la funzione $\frac{c_1}{2}x^p$ con la retta tangente in un suo punto, scegliendo il punto in modo che il coefficiente angolare sia c . Facendo i conti, dovrebbe risultare

$$\frac{c_1}{2}x^p \geq cx - c \frac{p-1}{p} \left(\frac{2c}{pc_1} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Poiché abbiamo appena visto che

$$(\nabla \mathbf{u}_h, \text{Cof } \nabla \mathbf{u}_h, \det \nabla \mathbf{u}_h) \rightharpoonup (\nabla \mathbf{u}, \text{Cof } \nabla \mathbf{u}, \det \nabla \mathbf{u}) \quad \text{in } L^p \times L^q \times L^r,$$

la convessità di \bar{g} implica che

$$\bar{\Phi}(\mathbf{u}) \leq \liminf_h \bar{\Phi}(\mathbf{u}_h),$$

quindi si trova che

$$\bar{\Phi}(\mathbf{u}) = \min_{\bar{U}} \bar{\Phi}.$$

In particolare $\bar{\Phi}(\mathbf{u}) < +\infty$ e dunque $\det \nabla \mathbf{u} > 0$. Poiché è facile vedere che si ha anche $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ su Γ_0 , si ha $\mathbf{u} \in U$ e dunque \mathbf{u} è il minimo di Φ . \square

8 Policonvessità delle energie di Ogden

Ora vogliamo trovare una classe di materiali iperelastici a cui si possa applicare il Teorema di Ball (e dunque che ammettano un minimo dell'energia). Ci occuperemo in particolare di materiali isotropi, la cui energia dipende solo dai valori singolari del gradiente di deformazione.

Enunciamo il seguente importante teorema. Il lettore interessato può trovare una traccia della dimostrazione alla fine di questa sezione, a partire da pagina 59.

Teorema 8.1. *Sia $g : [0, +\infty[^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa, simmetrica, non decrescente in ogni variabile. Allora la funzione $\Psi : M^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$\Psi(\mathbf{F}) = g(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad v_1, v_2, \dots, v_n \text{ valori singolari di } \mathbf{F}$$

è convessa.

Tramite questo teorema, possiamo dimostrare il corollario seguente.

Corollario 8.2. *Sia $\Psi : \Omega \times M_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ l'energia di un materiale di tipo Ogden (21)*

$$\begin{aligned} \Psi(x, \mathbf{F}) = a(x) + \sum_{i=1}^m b_i(x) (v_1^{\alpha_i} + v_2^{\alpha_i} + v_3^{\alpha_i}) + \\ + \sum_{j=1}^n c_j(x) \left((v_1 v_2)^{\beta_j} + (v_2 v_3)^{\beta_j} + (v_1 v_3)^{\beta_j} \right) + \gamma(\det \mathbf{F}), \end{aligned}$$

dove $a, b_i, c_j : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$ sono funzioni limitate e positive e $\gamma :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione convessa.

Se $\alpha_i, \beta_j \geq 1$, allora Ψ è policonvessa e vale la disuguaglianza di coercitività:

$$\text{per q.o. } x \in \Omega, \forall \mathbf{F} \in M_+^{3 \times 3} : \quad \Psi(x, \mathbf{F}) \geq \alpha(|\mathbf{F}|^p + |\text{Cof } \mathbf{F}|^q) + \gamma(\det \mathbf{F}) - \|a\|_\infty$$

con $p = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $q = \max\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ e $\alpha > 0$.

In particolare, se $p \geq 2$, $q \geq p'$ e γ è tale che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t) = +\infty, \quad |\gamma(x)| \geq \beta|x|^r \quad \text{per qualche } \beta > 0, r > 1, \quad (23)$$

⁽²³⁾Un esempio di funzione convessa che soddisfa tali requisiti è dato da

$$\gamma(x) = x^r + \frac{1}{x^t}, \quad r > 1, t > 0.$$

allora si può applicare il Teorema di John Ball e il problema elastico ammette esistenza del minimo.

Dimostrazione. Introduciamo la notazione

$$\Psi_\alpha(\mathbf{F}) := v_1^\alpha + v_2^\alpha + v_3^\alpha.$$

Poiché per $\alpha \geq 1$ la funzione

$$(v_1, v_2, v_3) \mapsto v_1^\alpha + v_2^\alpha + v_3^\alpha$$

è convessa, simmetrica e non decrescente nelle sue componenti, dal Teorema 8.1 si ha che l'energia $\Psi_\alpha(\mathbf{F})$ è convessa. Inoltre è facile riscrivere l'energia di Ogden come

$$\Psi(x, \mathbf{F}) = a(x) + \sum_{i=1}^m b_i(x) \Psi_{\alpha_i}(\mathbf{F}) + \sum_{j=1}^n c_j(x) \Psi_{\beta_j}(\text{Cof } \mathbf{F}) + \gamma(\det \mathbf{F}).$$

Quindi per quasi ogni x l'energia di Ogden è convessa in $(\mathbf{F}, \text{Cof } \mathbf{F}, \det \mathbf{F})$, in quanto somma di funzioni convesse, e dunque è policonvessa.

Per la seconda parte, osserviamo che per $\alpha \geq 1$ la funzione

$$(v_1, v_2, v_3) \mapsto (v_1^\alpha + v_2^\alpha + v_3^\alpha)^{1/\alpha}$$

è una norma su \mathbb{R}^3 e dunque è equivalente alla norma euclidea. Dunque esiste $c_\alpha > 0$ tale che

$$v_1^\alpha + v_2^\alpha + v_3^\alpha \geq c_\alpha (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{\alpha/2} = c_\alpha (\text{tr } \mathbf{F}^\top \mathbf{F})^{\alpha/2} = c_\alpha |\mathbf{F}|^\alpha. \quad \square$$

Si noti che nel caso $\alpha_i = 2$ è immediato dimostrare la convessità della funzione

$$g(v_1, v_2, v_3) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$

in quanto $g(v_1, v_2, v_3) = |\mathbf{F}|^2$ che è evidentemente convessa. La dimostrazione nel caso $\alpha_i \neq 2$, invece, è sorprendentemente più sottile e articolata e si basa sul Lemma 8.5.

Per dimostrare il Teorema 8.1, premettiamo alcuni lemmi, partendo da un risultato di Von Neumann di cui non diamo la dimostrazione.

Lemma 8.3 (Von Neumann). *Siano \mathbf{A}, \mathbf{B} due matrici $n \times n$ con valori singolari rispettivamente*

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n.$$

Allora si ha

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i.$$

In particolare, si ha anche $|\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B})| \leq \sum \alpha_i \beta_i$.

Lemma 8.4. *Siano $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$ i valori singolari di \mathbf{F} e siano $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n \geq 0$. Allora la funzione $\Psi : M^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$\Psi(\mathbf{F}) := \sum_{i=1}^n r_i v_i$$

è convessa.

Dimostrazione. Il Teorema di decomposizione ai valori singolari (SVD) afferma che esistono due matrici ortogonali P, Q tali che

$$\text{diag}(v_1, \dots, v_n) = PFQ^\top. \quad (24)$$

Consideriamo la matrice diagonale $B = \text{diag}(r_1, \dots, r_n)$. Allora si ha

$$(PF) \cdot (BQ) = (PFQ^\top) \cdot B = \sum_{i=1}^n v_i r_i = \Psi(F).$$

Ma poiché A, RA e AR hanno gli stessi valori singolari per ogni matrice ortogonale R , dal Lemma di Von Neumann si ottiene

$$\Psi(F) = \max_{R_1, R_2} (R_1 F) \cdot (B R_2)$$

e dunque Ψ è convessa in quanto estremo superiore di funzioni affini. \square

In particolare, scegliendo $r_1 = \dots = r_k = 1$ e $r_{k+1} = \dots = r_n = 0$ si ha che la funzione

$$\Psi(F) = \sum_{i=1}^k v_i$$

è convessa.

Lemma 8.5. *Sia $g : [0, +\infty[^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa, simmetrica, non decrescente in ogni variabile. Allora per ogni $\lambda \in [0, 1]$ e per ogni $A, B \in M^{n \times n}$ con valori singolari rispettivamente $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, si ha*

$$g(\mathbf{u}) \leq g(\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}), \quad (36)$$

dove $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ sono i valori singolari di $\lambda A + (1 - \lambda) B$.

Dimostrazione. Chiamiamo per brevità $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ rispettivamente i valori singolari in ordine decrescente di $A, B, \lambda A + (1 - \lambda) B$, e poniamo $\mathbf{p} := \lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}$. Il problema è quello di confrontare \mathbf{p} con \mathbf{u} , cioè i valori singolari di una combinazione convessa di matrici con quelli delle matrici stesse. Poniamo anche

$$\mathbf{p}^0 = (0, \dots, 0), \quad \mathbf{p}^\ell = (p_1, \dots, p_\ell, 0, \dots, 0) \quad \text{per } 1 \leq \ell \leq n$$

e, per ogni permutazione $\sigma \in S_n$,

$$\mathbf{p}_\sigma^\ell = (p_{\sigma(1)}^\ell, \dots, p_{\sigma(n)}^\ell).$$

Affermiamo che \mathbf{u} è combinazione convessa dei \mathbf{p}_σ^ℓ . Infatti: posto

$$C = \{\mathbf{p}_\sigma^\ell : 0 \leq \ell \leq n, \sigma \in S_n\} \subset \mathbb{R}^n,$$

si ha che il convessificato di C è l'intersezione di tutti i semispazi chiusi che contengono C . Quindi dobbiamo dimostrare che, dati $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \in \mathbb{R}$,

$$\forall \sigma \in S_n, 0 \leq \ell \leq n : \mathbf{d} \cdot \mathbf{p}_\sigma^\ell \leq \delta \Rightarrow \mathbf{d} \cdot \mathbf{u} \leq \delta.$$

Dal Lemma 8.4 sappiamo che per ogni $r_1 \geq \dots \geq r_n \geq 0$ si ha, per convessità,

$$\sum_{i=1}^n r_i u_i \leq \lambda \sum_{i=1}^n r_i a_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n r_i b_i = \sum_{i=1}^n r_i p_i. \quad (37)$$

Siano ora $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{d} \cdot \mathbf{p}_\sigma^\ell \leq \delta$ per ogni $\sigma \in S_n$ e $0 \leq \ell \leq n$. In particolare, poiché \mathbf{p}^0 è il vettore nullo, si ha $\delta \geq 0$. Sia $\sigma^{-1} \in S_n$ la permutazione che ordina in modo decrescente le componenti di \mathbf{d} , ovvero tale che

$$d_{\sigma^{-1}(1)} \geq d_{\sigma^{-1}(2)} \geq \dots \geq d_{\sigma^{-1}(n)}.$$

⁽²⁴⁾Il Teorema SVD si può dimostrare così: poiché $F^\top F$ è simmetrica, si ha che esiste una matrice ortogonale Q per cui la matrice $QF^\top FQ^\top$ è diagonale con gli autovalori decrescenti in valore assoluto. Riscrivendo tale relazione come $(FQ^\top)^\top (FQ^\top)$, si ha che le colonne della matrice FQ^\top sono vettori ortogonali. Normalizzando e completando questo sistema di vettori e mettendolo per righe in una matrice ortogonale P si giunge alla tesi.

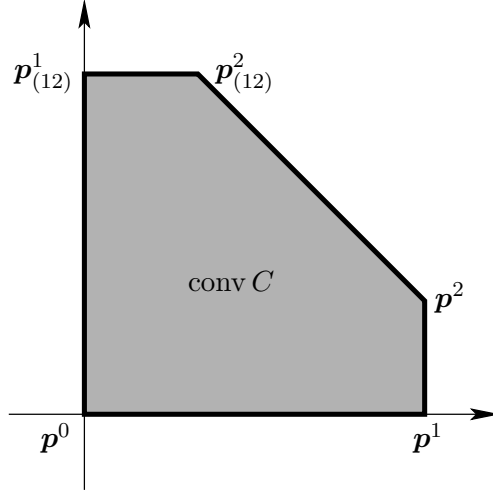


Figura 1: Un esempio di C nel caso $n = 2$ e $\mathbf{p} = (3, 1)$

Se tali componenti sono tutte negative allora è ovvio che $\mathbf{d} \cdot \mathbf{u} \leq \delta$ è vera (ricordiamo che \mathbf{u} è un vettore di valori singolari, quindi ha componenti non negative). Altrimenti esiste $1 \leq k \leq n$ tale che

$$d_{\sigma^{-1}(1)} \geq \dots \geq d_{\sigma^{-1}(k)} \geq 0 \geq d_{\sigma^{-1}(k+1)} \dots \geq d_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Allora si ha⁽²⁵⁾

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n d_{\sigma^{-1}(i)} u_{\sigma^{-1}(i)} \leq \sum_{i=1}^n d_{\sigma^{-1}(i)} u_i \leq \sum_{i=1}^k d_{\sigma^{-1}(i)} u_i \leq \sum_{i=1}^k d_{\sigma^{-1}(i)} p_i = \mathbf{d} \cdot \mathbf{p}_\sigma^k$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato la (37). Quindi $\mathbf{d} \cdot \mathbf{u} \leq \mathbf{d} \cdot \mathbf{p}_\sigma^k \leq \delta$ e dunque \mathbf{u} sta nel convessificato di C .

Se quindi \mathbf{u} è combinazione convessa dei \mathbf{p}_σ^ℓ , si ha che esistono dei coefficienti $\lambda_\sigma^\ell \in [0, 1]$ tali che

$$\sum_{\ell=0}^n \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma^\ell = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{u} = \sum_{\ell=0}^n \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma^\ell \mathbf{p}_\sigma^\ell.$$

Ora sfruttiamo, nell'ordine, la convessità, la simmetria, la non decrescenza di g :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}) &\leq \sum_{\ell=0}^n \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma^\ell g(\mathbf{p}_\sigma^\ell) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma^\ell g(\mathbf{p}^\ell) \leq \sum_{\ell=0}^n \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma^\ell g(\mathbf{p}) \\ &= g(\mathbf{p}) = g(\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}) \end{aligned}$$

e dunque la (36) è dimostrata. □

Dimostrazione (del Teorema 8.1). Dal Lemma 8.5 e dalla convessità di g segue che

$$\Psi(\lambda \mathbf{A} + (1 - \lambda) \mathbf{B}) = g(\mathbf{u}) \leq \lambda g(\mathbf{a}) + (1 - \lambda) g(\mathbf{b}) = \lambda \Psi(\mathbf{A}) + (1 - \lambda) \Psi(\mathbf{B})$$

e dunque Ψ è convessa. □

⁽²⁵⁾ Usiamo nella prima disuguaglianza il fatto che se $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ e $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$, allora per ogni permutazione $\sigma \in S_n$ si ha

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_{\sigma(i)}.$$

In generale, tutte le funzioni $g(\mathbf{v}, \mathbf{c}, \delta) = g_1(\mathbf{v}) + g_2(\mathbf{c}) + g_3(\delta)$ con g_1, g_2 convesse, simmetriche e non decrescenti e g_3 convessa danno luogo a funzioni Ψ policonvesse.

Le funzioni simmetriche dei valori principali possono essere combinate anche in altri modi tra loro, non solo sommate, purché sempre in modo convesso, come vediamo nel seguente teorema.

Teorema 8.6. *Sia $n = 3$ e $g : [0, +\infty[^7 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che*

$$\Psi(\mathbf{F}) = g(v_1, v_2, v_3, v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_1v_2v_3)$$

dove g è convessa, non decrescente nelle prime sei entrate e simmetrica nelle prime tre e nelle seconde tre entrate. Allora Ψ è policonvessa.

Dimostrazione. Sia $\gamma : M^{3 \times 3} \times M^{3 \times 3} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definita da

$$\gamma(\mathbf{F}, \mathbf{C}, \delta) = g(v_1, v_2, v_3, c_1, c_2, c_3, \delta),$$

dove c_i sono i valori singolari di \mathbf{C} (si noti che γ è ben definita grazie alle simmetrie di g). Allora si ha

$$\Psi(\mathbf{F}) = \gamma(\mathbf{F}, \text{Cof } \mathbf{F}, \det \mathbf{F})$$

e basta dimostrare che γ è convessa.

Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in M^{3 \times 3}$, con valori singolari (in ordine decrescente) rispettivamente $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$. Siano poi $\delta, \mu \geq 0$ e $\lambda \in [0, 1]$. Chiamiamo per brevità rispettivamente $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ i valori singolari (in ordine decrescente) delle matrici

$$\lambda \mathbf{A} + (1 - \lambda) \mathbf{B}, \quad \lambda \mathbf{C} + (1 - \lambda) \mathbf{D}.$$

Sfruttando la (36) sulle prime due componenti e la convessità di g si ottiene

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda \mathbf{A} + (1 - \lambda) \mathbf{B}, \lambda \mathbf{C} + (1 - \lambda) \mathbf{D}, \lambda \delta + (1 - \lambda) \mu) &= g(\mathbf{u}, \mathbf{h}, \lambda \delta + (1 - \lambda) \mu) \\ &\leq g(\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}, \mathbf{h}, \lambda \delta + (1 - \lambda) \mu) \leq g(\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}, \lambda \mathbf{c} + (1 - \lambda) \mathbf{d}, \lambda \delta + (1 - \lambda) \mu) \\ &\leq \lambda g(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \delta) + (1 - \lambda) g(\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mu) = \lambda \gamma(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \delta) + (1 - \lambda) \gamma(\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mu) \end{aligned}$$

e dunque γ è convessa. □

9 Esistenza di soluzioni con il Teorema di inversione locale

Quando i dati sono sufficientemente piccoli, si può dimostrare l'esistenza di soluzioni del problema elastico non lineare anche in assenza di policonvessità. In questa sezione daremo brevemente la linea dimostrativa nel caso di un materiale di St. Venant-Kirchhoff isotropo, che non è policonvesso (si veda l'Esercizio (5) a pagina 64), anche se questa ipotesi può essere generalizzata. Supporremo anche di avere delle condizioni al contorno di *puro spostamento*, cioè $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ su tutto $\partial\Omega$; questa ipotesi invece è cruciale. Per semplicità porremo anche $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$.

Enunciamo prima due fatti importanti. Per la dimostrazione del primo si veda ad esempio [Jost, Corollary 2.4.1]; per quella del secondo si veda [Adams, Theorem 4.39].

Teorema 9.1 (Teorema di inversione locale). *Siano X, Y spazi di Banach e $\Phi : X \rightarrow Y$ di classe C^1 con derivata di Fréchet in 0*

$$\Phi'(0) : X \rightarrow Y$$

che sia biiettiva, continua e con inversa continua (ovvero un isomorfismo).

Allora esistono $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ intorno di 0 tali che per ogni $f \in V$ esista un unico $u \in U$ con

$$\Phi(u) = f.$$

Inoltre l'applicazione $f \mapsto u$ è di classe C^1 .

Teorema 9.2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana. Se $kp > n$, allora $W^{k,p}(\Omega)$ è un'algebra di Banach, cioè è chiuso rispetto alla moltiplicazione. Inoltre esiste $c > 0$ tale che

$$\forall f, g \in W^{k,p}(\Omega) : \|fg\|_{k,p} \leq c \|f\|_{k,p} \|g\|_{k,p}.$$

In particolare, se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $W^{1,p}(\Omega)$ è un'algebra per $p > 3$.

Ora consideriamo il problema dell'elasticità per un materiale di St. Venant-Kirchhoff:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})\mathbf{S}] = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \lambda(\operatorname{tr} \mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{u}).$$

Teorema 9.3. Sia Ω di classe C^2 e $\mathbf{f} \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $p > 3$. Se $\|\mathbf{f}\|_p$ è sufficientemente piccola, allora il problema appena enunciato ha soluzione $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

Dimostrazione. Poniamo

$$\begin{aligned} X &= \{\mathbf{w} \in W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^3) : \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ su } \partial\Omega\} = W^{2,p} \cap W_0^{1,p} \\ Y &= L^p(\Omega; \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

e consideriamo il funzionale

$$\Phi : X \rightarrow Y, \quad \Phi(\mathbf{v}) = -\operatorname{div}[(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{v})\mathbf{S}].$$

Vogliamo dimostrare che l'equazione $\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{f}$ ha soluzione in X se \mathbf{f} è piccola in Y ; per questo useremo il Teorema di inversione locale. Verifichiamone le ipotesi:

- Φ è ben definita, cioè $\Phi(\mathbf{v}) \in Y$ per ogni $\mathbf{v} \in X$, proprio perché $W^{1,p}$ è un'algebra per $p > 3$;
- Φ è C^1 (anzi, addirittura C^∞ poiché è polinomiale);
- $\Phi'(\mathbf{0})\mathbf{u} = -\operatorname{div} \sigma$, dove

$$\sigma = \lambda(\operatorname{tr} \mathbf{e})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top),$$

quindi $\Phi'(\mathbf{0})\mathbf{u} = \mathbf{f}$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ su $\partial\Omega$ è proprio il problema dell'elasticità lineare per un materiale isotropo con condizioni omogenee di puro spostamento. Per l'esistenza e unicità del problema dell'elasticità lineare, si deduce che $\Phi'(\mathbf{0})$ è un isomorfismo tra X e Y .

Dal Teorema di inversione locale, per \mathbf{f} in un opportuno intorno di $\mathbf{0}$ si ottiene la tesi. \square

10 Esercizi

- (1) Sia $\alpha > 0$ e si consideri un materiale iperelastico omogeneo e isotropo che occupa la configurazione di riferimento $\bar{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$, soggetto a una deformazione

$$\chi_\alpha(x) = \alpha x$$

quando sottoposto a una forza di pressione della forma

$$g(x) = -p_\alpha (\det \nabla \chi_\alpha(x)) \nabla \chi_\alpha(x)^{-T} \mathbf{n}(x), \quad p_\alpha > 0.$$

Si supponga che l'energia totale

$$\Phi(\chi) = \int_{\Omega} \Psi(\nabla \chi(x)) dV - \int_{\partial\Omega} g(x) \cdot \chi(x) dS$$

verifichi

$$\Phi(\chi_\alpha) = \min_{\chi \in W} \Phi(\chi)$$

dove

$$W = \{\chi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \det \nabla \chi > 0, \int_{\Omega} \chi(x) dV = 0\}.$$

Si dimostri che

$$\lim_{\det F \rightarrow 0^+} \Psi(F) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} p_\alpha = +\infty$$

e si interpreti fisicamente il secondo limite.

- (2) Sia $p \geq 2$ e $q \geq 1$. Si mostri che l'insieme

$$\{\psi \in W^{1,p}(\Omega) : \text{Cof } \nabla \psi \in L^q(\Omega)\}$$

non è convesso in $W^{1,p}(\Omega)$.

- (3) Sia (ϕ_h) una successione di funzioni tale che

$$\phi_h \rightharpoonup \phi \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad \phi_h = \phi_0 \text{ su } \Gamma_0, \Gamma_0 \subset \partial\Omega.$$

Si dimostri che $\phi = \phi_0$ su Γ_0 .

- (4) Sia $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione simmetrica tale che la funzione $\Psi : M^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\Psi(F) = g(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

sia convessa (v_i sono i valori singolari di F). Si dimostri che la funzione g è convessa e non decrescente rispetto ad ogni variabile.

- (5) Un materiale elastico è detto *materiale di St. Venant-Kirchhoff isotropo* se soddisfa la prescrizione costitutiva

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \tag{38}$$

dove

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u})$$

è il cosiddetto *tensore di Green-St. Venant* (si veda la Sezione 5.4).

Si scriva l'energia elastica associata a tali materiali, mostrando che si ha, a meno di costante,

$$\Psi(\mathbf{F}) = -\frac{3\lambda + 2\mu}{4} \operatorname{tr} \mathbf{C} + \frac{\lambda + 2\mu}{8} \operatorname{tr}(\mathbf{C}^2) + \frac{\lambda}{4} \operatorname{tr} \operatorname{Cof} \mathbf{C}.$$

Si dimostri poi che tale energia non è policonvessa, seguendo [Ciarlet, Theorem 4.10-1].

11 Rilassamento di un funzionale

Quando un funzionale *non* è semicontinuo inferiormente, un modo per ottenere l'esistenza di un minimo è quello di passare al funzionale *rilassato*. In breve, si costruisce un funzionale diverso, associato a quello di partenza, e che abbia buone proprietà di semicontinuità, e si lavora su questo.

Definizione 11.1. *Sia X uno spazio metrico e $\Phi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Poniamo*

$$(\operatorname{sc}^- \Phi)(x) = \sup\{\mathcal{G}(x) : \mathcal{G} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{G} \leq \Phi, \mathcal{G} \text{ semicontinuo inferiormente}\}.$$

Si ha che $\operatorname{sc}^- \Phi$ è la più grande funzione semicontinua inferiormente minore o uguale a Φ .

Teorema 11.2 (Proprietà del rilassato). *Sia $\Phi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora*

- (1) $\inf_X \operatorname{sc}^- \Phi = \inf_X \Phi$;
- (2) se $x \in X$ è punto di minimo per Φ , allora x è punto di minimo per $\operatorname{sc}^- \Phi$;
- (3) se (x_h) è una successione minimizzante per Φ e $x_h \rightarrow x$, allora x è punto di minimo per $\operatorname{sc}^- \Phi$.

In particolare, se Φ è coercitiva allora $\operatorname{sc}^- \Phi$ ammette minimo.

Dimostrazione. (1) È chiaro che $\inf_X \operatorname{sc}^- \Phi \leq \inf_X \Phi$; viceversa, se $\inf_X \Phi = -\infty$ abbiamo finito, se invece $\inf_X \Phi > -\infty$, allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ con $t < \inf_X \Phi$ si ha $t \leq \inf_X \operatorname{sc}^- \Phi$ (scegliendo la funzione costante $\mathcal{G}(x) = t$), e dunque vale l'altra disuguaglianza.

(2) Segue immediatamente da (1).

(3) Dalla semicontinuità inferiore del rilassato si ha

$$\operatorname{sc}^- \Phi(x) \leq \liminf_h \operatorname{sc}^- \Phi(x_h) \leq \liminf_h \Phi(x_h) = \inf_X \Phi = \inf_X \operatorname{sc}^- \Phi$$

e dunque x è minimo per $\operatorname{sc}^- \Phi$. □

Teorema 11.3 (Caratterizzazioni alternative del rilassato). *Sia X spazio metrico e $\Phi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora:*

$$(\operatorname{sc}^- \Phi)(x) = \inf\{\liminf_h \Phi(x_h) : x_h \rightarrow x\}, \quad (39)$$

$$\mathcal{G} = \operatorname{sc}^- \Phi \iff \begin{cases} \text{(a) } \forall x \in X, \forall x_h \rightarrow x : \mathcal{G}(x) \leq \liminf_h \Phi(x_h) \\ \text{(b) } \forall x \in X, \exists x_h \rightarrow x : \mathcal{G}(x) \geq \limsup_h \Phi(x_h). \end{cases} \quad (40)$$

Le proprietà (a), (b) vengono anche dette, rispettivamente, *disuguaglianza del liminf* e *disuguaglianza del limsup*. Si noti che, se vale (a), allora (b) può essere riscritta come

$$(b') \forall x \in X, \exists x_h \rightarrow x : \mathcal{G}(x) = \lim_h \Phi(x_h).$$

Tale successione (x_h) viene spesso chiamata *recovery sequence* (successione di recupero).

Dimostrazione. Poniamo $\mathcal{G}(x) := \inf\{\liminf_h \Phi(x_h) : x_h \rightarrow x\}$; vogliamo mostrare che \mathcal{G} è il rilassato di Φ . Dalla disuguaglianza

$$\liminf_h \Phi(x_h) \geq \liminf_h \text{sc}^- \Phi(x_h) \geq \text{sc}^- \Phi(x) \quad (41)$$

segue subito che $\mathcal{G} \geq \text{sc}^- \Phi$. Ora mostriamo che \mathcal{G} è semicontinuo inferiormente: sia $x_h \rightarrow x$ e prendiamo una sottosuccessione tale che

$$\lim_k \mathcal{G}(x_{h_k}) = \liminf_h \mathcal{G}(x_h).$$

Se il limite vale $+\infty$, siamo a posto. Altrimenti sia (t_k) una successione in \mathbb{R} tale che

$$t_k > \mathcal{G}(x_{h_k}), \quad \lim_k t_k = \lim_k \mathcal{G}(x_{h_k}).$$

Per definizione di \mathcal{G} , esiste y_{h_k} tale che

$$d(x_{h_k}, y_{h_k}) \leq \frac{1}{k}, \quad t_k \geq \Phi(y_{h_k}).$$

Quindi $y_{h_k} \rightarrow x$ e

$$\liminf_h \mathcal{G}(x_h) = \lim_k \mathcal{G}(x_{h_k}) = \lim_k t_k \geq \liminf_k \Phi(y_{h_k}) \geq \mathcal{G}(x).$$

Ne segue che \mathcal{G} è semicontinua e dunque $\text{sc}^- \Phi \leq \mathcal{G}$.

Passiamo alla (40). Sia $\mathcal{G} = \text{sc}^- \Phi$; la proprietà (a) segue subito dalla (41). Per la (b): se $\text{sc}^- \Phi(x) = +\infty$, siamo a posto; altrimenti, sia (t_h) una successione in \mathbb{R} tale che

$$t_h > \text{sc}^- \Phi(x), \quad \lim_h t_h = \text{sc}^- \Phi(x) = \inf\{\liminf_h \Phi(x_h) : x_h \rightarrow x\}.$$

Allora per ogni h esiste x_h tale che

$$d(x, x_h) \leq \frac{1}{h}, \quad t_h \geq \Phi(x_h).$$

Quindi $x_h \rightarrow x$ e

$$\text{sc}^- \Phi(x) = \lim_h t_h \geq \limsup_h \Phi(x_h) \geq \liminf_h \Phi(x_h) \geq \text{sc}^- \Phi(x).$$

Viceversa, sia \mathcal{G} che verifica (a), (b). Usando la caratterizzazione (39), da (a) segue subito che $\mathcal{G} \leq \text{sc}^- \Phi$. Inoltre, dalla (b) per ogni x esiste una successione (x_h) tale che

$$\mathcal{G}(x) \geq \limsup_h \Phi(x_h) \geq \liminf_h \Phi(x_h) \geq \inf\{\liminf_h \Phi(x_h) : x_h \rightarrow x\} = \text{sc}^- \Phi(x). \quad \square$$

Dal teorema precedente si deduce immediatamente un corollario che garantisce che il funzionale rilassato non aggiunge “troppi” minimi al funzionale di partenza.

Corollario 11.4. *Ogni punto di minimo di $sc^- \Phi$ è limite di una successione minimizzante per Φ .*

Dimostrazione. Sia x punto di minimo di $sc^- \Phi$. Allora esiste una *recovery sequence* $x_h \rightarrow x$ tale che $\lim_h \Phi(x_h) = (sc^- \Phi)(x)$. Poiché $\min_X sc^- \Phi = \inf_X \Phi$, si ha

$$\lim_h \Phi(x_h) = (sc^- \Phi)(x) = \min_X sc^- \Phi = \inf_X \Phi$$

e dunque (x_h) è una successione minimizzante per Φ . □

Per rilassare un funzionale che ha un addendo continuo (attenzione: continuo rispetto alla topologia di X , che potrebbe anche essere quella debole), è sufficiente rilassare il resto del funzionale, come vediamo nella proposizione seguente.

Proposizione 11.5. *Se $\mathcal{G} : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ è una funzione continua e $\Phi + \mathcal{G}$ è ben definita su X , allora anche $sc^- \Phi + \mathcal{G}$ è ben definita e*

$$sc^-(\Phi + \mathcal{G}) = sc^- \Phi + \mathcal{G}.$$

Dimostrazione. Poiché \mathcal{G} , essendo continuo, è semicontinuo inferiormente, si ha che anche $sc^- \Phi + \mathcal{G}$ è semicontinuo inferiormente. Inoltre $sc^- \Phi + \mathcal{G} \leq \Phi + \mathcal{G}$, quindi

$$sc^- \Phi + \mathcal{G} \leq sc^-(\Phi + \mathcal{G}).$$

Sia ora \mathcal{H} un funzionale semicontinuo inferiormente con $\mathcal{H} \leq \Phi + \mathcal{G}$. Si ha che anche $\mathcal{H} - \mathcal{G}$ è semicontinuo inferiormente e $\mathcal{H} - \mathcal{G} \leq \Phi$, quindi $\mathcal{H} - \mathcal{G} \leq sc^- \Phi$ e dunque $\mathcal{H} \leq sc^- \Phi + \mathcal{G}$. □

Ma come si costruisce il rilassato di un funzionale dato in forma integrale su uno spazio di Sobolev, cioè il tipico funzionale che abbiamo studiato finora? Senza addentrarci nei dettagli, diciamo che se il funzionale è della forma

$$\Phi : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi[u] := \int_{\Omega} W(\nabla u) dV,$$

allora si ha

$$sc^- \Phi[u] = \int_{\Omega} \text{conv } W(\nabla u) dV,$$

dove $\text{conv } W$, il convessificato di W , è la più grande funzione convessa più piccola di W , ovvero

$$\text{conv } W(z) := \sup \left\{ G(z) : G \leq W, G \text{ convessa} \right\}.$$

Se invece u è a valori vettoriali, e dunque il dominio di W sta nelle matrici, si rimpiazza la nozione di convessificato con quella di *quasiconvessificato*:

$$QW(A) := \sup \left\{ G(A) : G \leq W, G \text{ quasiconvessa} \right\}.$$

Nel caso $W : \mathbb{R}^{k \times n} \rightarrow [0, \infty[$ si può anche mostrare la *formula di Dacorogna*:

$$QW(\mathbf{A}) = \inf \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} W(\mathbf{A} + \nabla \phi(x)) dV : \phi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^k) \right\},$$

dove Ω è un qualsiasi aperto limitato non vuoto in \mathbb{R}^n .

In generale le ipotesi di coercitività si trasmettono anche al rilassato: ad esempio, se si ha una stima di crescita del tipo

$$W(\mathbf{A}) \geq \alpha |\mathbf{A}|^p + \beta,$$

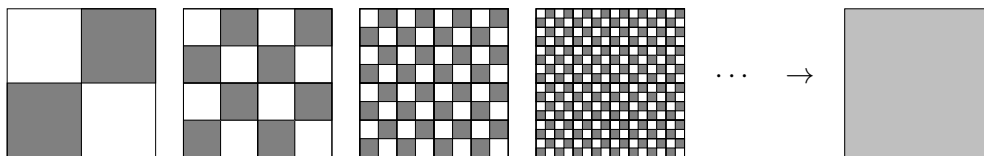
allora, poiché la funzione $h(\mathbf{A}) := \alpha |\mathbf{A}|^p + \beta$ è quasiconvessa (anzi, è addirittura convessa) ed è più piccola di W , si ha per definizione che $h \leq QW$, e dunque anche

$$QW(\mathbf{A}) \geq \alpha |\mathbf{A}|^p + \beta.$$

12 Breve cenno alla Γ -convergenza

La Γ -convergenza è una nozione di convergenza di funzionali che ben si adatta al Calcolo delle Variazioni, poiché i minimi convergeranno al minimo del funzionale limite. C'è spesso nella modellizzazione dei materiali di costruire un modello per approssimazioni successive, ne vediamo qualche esempio.

Esempio 12.1 (Omogeneizzazione). Supponiamo di avere una miscela di due materiali elastici lineari che si alternano periodicamente (rappresentati in bianco e grigio nella figura).



In questo caso si ha un tensore dell'elasticità $\mathbf{C}(x)$ periodico e un'energia elastica della forma

$$W_h(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C}(hx) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T),$$

ed è ragionevole chiedersi cosa succeda per $h \rightarrow \infty$. Questo processo viene chiamato *omogeneizzazione*. ★

Esempio 12.2 (Riduzione dimensionale). Supponiamo di avere un dominio cilindrico della forma $\Omega_h = S \times (0, \frac{1}{h})$, dove S è un aperto limitato di \mathbb{R}^2 , e un'energia elastica (anche non lineare)

$$W_h(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_h} W(\nabla \mathbf{u}) dV.$$

Effettuiamo un cambio di coordinate $x'_3 = hx_3$, in modo da mappare il dominio "sottile" Ω_h nel dominio fisso $\Omega = S \times (0, 1)$. L'energia si riscrive come

$$W_h(\mathbf{u}) = \frac{1}{h} \int_{\Omega} W \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2}, h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x'_3} \right) dx_1 dx_2 dx'_3,$$

ed è interessante chiedersi cosa succeda per $h \rightarrow \infty$, ovvero quando il dominio tende a diventare una lamina bidimensionale. ★

Definizione 12.3 (Γ -convergenza). Siano $\Phi_h, \Phi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dove X è uno spazio metrico. Diremo che Φ è il Γ -limite della successione Φ_h , e scriveremo

$$\Phi_h \xrightarrow{\Gamma} \Phi \quad \text{o anche} \quad \Phi = \Gamma\text{-}\lim_h \Phi_h,$$

se valgono le due condizioni seguenti:

(a) *disuguaglianza del liminf*: $\forall x \in X, \forall x_h \rightarrow x : \Phi(x) \leq \liminf_h \Phi_h(x_h);$

(b) *disuguaglianza del limsup*: $\forall x \in X, \exists \tilde{x}_h \rightarrow x : \Phi(x) \geq \limsup_h \Phi_h(\tilde{x}_h).$

Le due disuguaglianze ricordano molto una delle caratterizzazioni del rilassato di un funzionale; anche in questo caso è facile vedere che la successione del punto (b), se vale anche (a), è tale che

$$\Phi(x) = \lim_h \Phi_h(\tilde{x}_h),$$

e viene detta *recovery sequence*.

Osservazione 12.4.

(1) Per avere la disuguaglianza del liminf ci vuole una topologia *forte*, mentre per avere quella del limsup occorre una topologia più *debole*.

(2) Si verifica subito una “strana” proprietà di questa nozione di convergenza: se Φ_h è costantemente uguale a Φ , si ha

$$\Gamma\text{-}\lim_h \Phi = \text{sc}^- \Phi,$$

e dunque il Γ -limite di una successione costante di funzionali potrebbe essere un altro funzionale.

(3) In generale vale che

$$\Gamma\text{-}\lim_h \Phi_h = \Gamma\text{-}\lim_h \text{sc}^- \Phi_h.$$

(4) Spesso è utile calcolare il Γ -limite di opportuni riscaldamenti dei funzionali, ovvero si vuole vedere come è fatto

$$\Gamma\text{-}\lim_h \left(\frac{1}{h^\alpha} \Phi_h \right)$$

al variare di α .

(5) Se i funzionali Φ_h sono definiti su spazi diversi, ovvero $\Phi_h : X_h \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, si può prendere uno spazio metrico $X \supseteq X_h$ che li contenga tutti, e definire

$$\tilde{\Phi}_h(x) := \begin{cases} \Phi_h(x) & \text{se } x \in X_h, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In questo modo ci si riconduce a una famiglia di funzionali definiti sullo stesso spazio. ★

Esempio 12.5. Sia $X = \mathbb{R}$ e per $h \geq 1$ definiamo $f_h(x) := \sin(hx)$ una successione di funzioni di periodo $2\pi/h$. Allora si ha

$$f_h \xrightarrow{\Gamma} -1,$$

infatti:

- disuguaglianza del liminf: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall x_h \rightarrow x : -1 \leq \liminf_h \sin(xh).$

- disuguaglianza del limsup: per ogni $x \in \mathbb{R}$ definisco (\tilde{x}_h) tale che

$$h\tilde{x}_h = \frac{3}{2}\pi + 2k_h\pi \quad \text{e} \quad \tilde{x}_h \rightarrow x,$$

scegliendo ad esempio come k_h la parte intera di $\frac{hx}{2\pi}$. In questo modo $f_h(\tilde{x}_h) = -1$ per ogni h e dunque

$$\limsup_h f_h(\tilde{x}_h) = -1.$$

Si noti però che anche la successione $(-f_h)$ Γ -converge a -1 ! ★

Definizione 12.6 (Equicoercitività). Una famiglia $(\Phi_h) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ di funzionali si dice equicoercitiva se per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste un compatto $K_t \subseteq X$ tale che

$$\forall h : \{x \in X : \Phi_h(x) \leq t\} \subseteq K_t.$$

Teorema 12.7 (Teorema fondamentale della Γ -convergenza). Se $(\Phi_h) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una famiglia di funzionali equicoercitiva e $\Phi = \Gamma\text{-}\lim_h \Phi_h$, allora:

- (1) **esistenza:** esiste il minimo di Φ in X ;
- (2) **convergenza dei valori minimi:** si ha $\min_X \Phi = \lim_h \left(\inf_X \Phi_h \right)$;
- (3) **convergenza dei minimi:** se (x_h) è precompatta (ovvero la sua chiusura è compatta) in X e $\lim_h \Phi_h(x_h) = \lim_h (\inf_X \Phi_h)$, allora ogni limite di sottosuccessione di (x_h) è un minimo di Φ .

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza del limsup, per ogni $x \in X$ esiste una successione $\tilde{x}_h \rightarrow x$ tale che $\limsup_h \Phi_h(\tilde{x}_h) \leq \Phi(x)$, e dunque

$$\limsup_h \left(\inf_X \Phi_h \right) \leq \limsup_h \Phi_h(\tilde{x}_h) \leq \Phi(x);$$

passando all'estremo inferiore a destra, troviamo

$$\limsup_h \left(\inf_X \Phi_h \right) \leq \inf_X \Phi.$$

Costruiamo una successione “minimizzante”: dato $h \geq 1$, per definizione di estremo inferiore sia x_h tale che

$$\inf_X \Phi_h \leq \Phi_h(x_h) \leq \frac{1}{h} + \inf_X \Phi_h,$$

e dunque

$$\liminf_h \Phi_h(x_h) = \liminf_h \left(\inf_X \Phi_h \right).$$

Dall'equicoercitività esiste una sottosuccessione (x_{h_k}) convergente a $\bar{x} \in X$, e dunque, usando la disuguaglianza del liminf,

$$\limsup_h \left(\inf_X \Phi_h \right) \leq \inf_X \Phi \leq \Phi(\bar{x}) \leq \liminf_k \Phi_{h_k}(x_{h_k}) = \liminf_h \left(\inf_X \Phi_h \right),$$

da cui

$$\Phi(\bar{x}) = \min_X \Phi = \lim_h \left(\inf_X \Phi_h \right).$$

Sia ora (x_h) una generica successione precompatta tale che

$$\lim_h \Phi_h(x_h) = \lim_h \left(\inf_X \Phi_h \right) = \min_X \Phi.$$

Allora come prima si ha, per ogni $x_{h_k} \rightarrow x$,

$$\Phi(x) \leq \liminf_k \Phi_{h_k}(x_{h_k}) = \lim_k \Phi_{h_k}(x_{h_k}) = \min_X \Phi$$

e dunque x è punto di minimo. \square

Osservazione 12.8. Al contrario di ciò che accade per il rilassato di un funzionale, non è vero che tutti i punti di minimo del Γ -limite sono limiti di successioni minimizzanti per (Φ_h) . Un esempio banale è dato dalla famiglia $\Phi_h(x) = x^2/h$, che ha sempre soltanto un minimo in 0 ma il cui Γ -limite è la funzione nulla.

Questo fatto può essere usato come criterio di selezione dei punti di minimo, cioè delle soluzioni, per un funzionale Φ che ne ammetta tanti: se esiste un modo naturale per costruire una successione di problemi Φ_h che Γ -convergono a Φ , si potrebbero accettare soltanto quelle soluzioni che sono limiti di successioni minimizzanti. \star

Teorema 12.9 (Definizione equivalente). Siano $\Phi_h, \Phi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dove X è uno spazio metrico. Allora $\Phi_h \xrightarrow{\Gamma} \Phi$ se e solo se

$$\Phi(x) = \inf \left\{ \liminf_h \Phi_h(x_h) : x_h \rightarrow x \right\} = \inf \left\{ \limsup_h \Phi_h(x_h) : x_h \rightarrow x \right\}.$$

La dimostrazione è analoga a quella della formula (39) per il funzionale rilassato.

Poniamo anche

$$\begin{aligned} \Gamma\text{-}\liminf_h \Phi_h(x) &:= \inf \left\{ \liminf_h \Phi_h(x_h) : x_h \rightarrow x \right\}, \\ \Gamma\text{-}\limsup_h \Phi_h(x) &:= \inf \left\{ \limsup_h \Phi_h(x_h) : x_h \rightarrow x \right\}. \end{aligned}$$

Ora vediamo alcune proposizioni relative a successioni crescenti e decrescenti. La prima ci dice che una successione decrescente di funzionali ammette sempre Γ -limite, e tale limite è dato dal rilassato del limite puntuale (che esiste, visto che la successione è decrescente).

Proposizione 12.10 (Successioni decrescenti). Se $\Phi_{h+1} \leq \Phi_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, allora

$$\Gamma\text{-}\lim_h \Phi_h = \text{sc}^- \left(\inf_h \Phi_h \right) = \text{sc}^- \left(\lim_h \Phi_h \right).$$

Dimostrazione. Si ha $\Phi_h \rightarrow \inf_h \Phi_h$ puntualmente, quindi in particolare, scegliendo la successione costante,

$$\Gamma\text{-}\limsup_h \Phi_h(x) \leq \inf_h \Phi_h(x)$$

da cui (essendo $\Gamma\text{-}\limsup_h \Phi_h$ semicontinuo inferiormente)

$$\Gamma\text{-}\limsup_h \Phi_h \leq \text{sc}^- \left(\inf_h \Phi_h \right).$$

Inoltre per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha

$$\text{sc}^-\left(\inf_h \Phi_h\right) \leq \inf_h \Phi_h \leq \Phi_h.$$

Per ogni $x_h \rightarrow x$ si ha allora

$$\text{sc}^-\left(\inf_h \Phi_h\right)(x) \leq \liminf_h \left(\text{sc}^-\left(\inf_h \Phi_h\right)(x_h)\right) \leq \liminf_h \Phi_h(x_h).$$

Passando all'estremo inferiore su tutte le successioni convergenti a x si trova

$$\text{sc}^-\left(\inf_h \Phi_h\right) \leq \Gamma\text{-}\liminf_h \Phi_h. \quad \square$$

Proposizione 12.11 (Successioni crescenti). *Se $\Phi_h \leq \Phi_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, allora*

$$\Gamma\text{-}\lim_h \Phi_h = \sup_h \text{sc}^- \Phi_h = \lim_h \text{sc}^- \Phi_h.$$

In particolare, se Φ_h è semicontinuo inferiormente per ogni $h \in \mathbb{N}$, allora

$$\Gamma\text{-}\lim_h \Phi_h = \lim_h \Phi_h,$$

cioè il Γ -limite coincide col limite puntuale (che esiste sicuramente poiché la successione è monotona).

Dimostrazione. Essendo $\text{sc}^- \Phi_h \leq \Phi_h \leq \Phi_{h+1}$, si ha anche $\text{sc}^- \Phi_h \leq \text{sc}^- \Phi_{h+1}$, e dunque la successione dei rilassati è ancora crescente e

$$\text{sc}^- \Phi_h \rightarrow \sup_h (\text{sc}^- \Phi_h).$$

In particolare,

$$\Gamma\text{-}\limsup_h \Phi_h = \Gamma\text{-}\limsup_h (\text{sc}^- \Phi_h) \leq \sup_h (\text{sc}^- \Phi_h).$$

Viceversa, per ogni $j \leq h$ si ha

$$\text{sc}^- \Phi_j \leq \Phi_j \leq \Phi_h$$

e dunque, per ogni $x_h \rightarrow x$,

$$\text{sc}^- \Phi_j(x) \leq \liminf_h \text{sc}^- \Phi_j(x_h) \leq \liminf_h \Phi_h(x_h).$$

Passando all'estremo inferiore su tutte le successioni convergenti a x si trova

$$\text{sc}^- \Phi_j(x) \leq \Gamma\text{-}\liminf_h \Phi_h(x).$$

Ora passiamo all'estremo superiore su j :

$$\sup_j (\text{sc}^- \Phi_j) \leq \Gamma\text{-}\liminf_h \Phi_h(x). \quad \square$$

Proposizione 12.12 (Addendo continuo). *Sia $\mathcal{G} : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $\Phi = \Gamma\text{-}\lim_h \Phi_h$. Allora*

$$\Phi + \mathcal{G} = \Gamma\text{-}\lim_h (\Phi_h + \mathcal{G}).$$

Dimostrazione. Usando la continuità di \mathcal{G} e le caratterizzazioni di $\Gamma\text{-}\liminf$ e $\Gamma\text{-}\limsup$ si trova subito la tesi. \square

12.1 Il caso quadratico

Proposizione 12.13. *Se $\Phi_h : X \rightarrow [0, +\infty]$ sono tutte forme quadratiche definite positive e $\Phi = \Gamma\text{-lim}_h \Phi_h$, allora anche Φ è una forma quadratica definita positiva.*

Dimostrazione. (Solo una traccia). Usando l'identità del parallelogrammo, si può dimostrare che una funzione $\Phi : X \rightarrow [0, +\infty]$ è una forma quadratica definita positiva se e solo se

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0, \\ \forall x, y \in X : \quad \Phi(x+y) + \Phi(x-y) &\leq 2(\Phi(x) + \Phi(y)), \\ \forall x \in X, \forall t > 0 : \quad \Phi(tx) &\leq t^2\Phi(x). \end{aligned}$$

Poiché per Γ -convergenza “le disuguaglianze si conservano”, tutto passa al Γ -limite. □

Concludiamo con un teorema sui funzionali, di cui non diamo la dimostrazione.

Teorema 12.14. *Siano Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^n e $A_h : \Omega \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^n)$ una famiglia di funzioni tale che*

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \quad \alpha \mathbf{1} \leq A_h(x) \leq \beta \mathbf{1}$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $h \in \mathbb{N}$. Allora esiste $A : \Omega \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\alpha \mathbf{1} \leq A \leq \beta \mathbf{1}$ e

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla \mathbf{u}(x) \cdot \nabla \mathbf{u}(x) dV = \Gamma\text{-lim}_h \int_{\Omega} A(x)_h \nabla \mathbf{u}(x) \cdot \nabla \mathbf{u}(x) dV$$

a meno di sottosuccessioni, su $H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

In generale tale funzione A non è facilmente deducibile dalle A_h . Ad esempio, nel caso semplice di omogeneizzazione unidimensionale, con $a_h :]0, 1[\rightarrow [0, +\infty[$ data da

$$a_h(x) = g(hx), \quad g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[\text{ periodica di periodo 1 e limitata,}$$

si trova

$$a(x) = a := \left(\int_0^1 \frac{1}{g(y)} dy \right)^{-1}$$

che è una media armonica.

Riferimenti bibliografici

- [Adams] R.A. Adams, J.J.F. Fournier, *Sobolev spaces*, Academic Press, 2003.
- [Ball] J.M. Ball, Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **63** (1977), 337–403.
- [Ball & Murat] J.M. Ball, F. Murat, $W^{1,p}$ -quasiconvexity and variational problems for multiple integrals, *J. Functional Analysis*, **58** (1984), 225–253.
- [Brezis] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

- [Ciarlet] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol. I: Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [Dacorogna] B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations. Second edition*, Springer, 2008.
- [Degiovanni] M. Degiovanni, *Istituzioni di analisi superiore – unità 2*, 2006/2007, dispense.
- [Fusco] N. Fusco, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, dispense della XXIX Scuola Estiva di Fisica Matematica, Ravello, 2004.
- [Gurtin72] M. Gurtin, *The Linear Theory of Elasticity*, Handbuch der Physik, Vol. VI a/2, Springer-Verlag, 1972.
- [Gurtin83] M. Gurtin, *Topics in Finite Elasticity*, SIAM, 1983.
- [Jost] J. Jost, X. Li-Jost, *Calculus of variations*, Cambridge University Press, 1998.