Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 23 gennaio 2015
a cura di Sara Mastaglio

A) Come già indicato in figura i gradi di libertà sono due e i parametri lagrangiani sono tali che $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ e $\varphi \in [0; 2\pi)$.
Calcoliamo le coordinate del baricentro G della lamina quadrata, G_1 dell'asta e $(B-K)$ (dove K è l'estremo della molla sull'asse x):

$$(G-O) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\cos\vartheta \boldsymbol{e}_2$$

$$(G_1 - O) = \left(\frac{\ell}{2}\sin\varphi + \sqrt{2}\ell\sin\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 - \left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi + \sqrt{2}\ell\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2$$

$$(B-K) = -\sqrt{2}\ell\cos\vartheta \boldsymbol{e}_2$$

1) Il potenziale è dato da:

$$U = -mgy_G - mgy_{G_1} - \frac{k}{2}|B-K|^2 = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell\cos\vartheta + mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi + \sqrt{2}mg\ell\cos\vartheta - k\ell^2\cos^2\vartheta.$$

Ora calcoliamo le posizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}mg\ell\sin\vartheta - \sqrt{2}mg\ell\sin\vartheta + 2k\ell^2\cos\vartheta\sin\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = -mg\dfrac{\ell}{2}\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda segue subito $\sin\varphi = 0$ da cui $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$.
Dalla prima invece

$$\sin\vartheta\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell + 2k\ell^2\cos\vartheta\right) = 0$$

da cui $\sin\vartheta = 0$ quindi $\vartheta = 0$ oppure $\vartheta = \pi$ che però non è accettabile dato che $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$; abbiamo poi

$$\cos\vartheta = \frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}$$

quindi $\vartheta = \pm\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right)$ accettabile se

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell} \leq 1,$$

cioè $3\frac{\sqrt{2}}{2}mg \leq 2k\ell < 3mg$.
Riassumendo:

- $P_1\left(0,0\right)$,

- $P_2\left(0,\pi\right)$,

- $P_{3/4}\left(\pm\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right),0\right)$,

- $P_{5/6}\left(\pm\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right),\pi\right)$,

con $3\frac{\sqrt{2}}{2}mg \leq 2k\ell < 3mg$.
2) Valutiamo la stabilità delle posizioni di equilibrio appena trovate.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell\cos\vartheta - 2k\ell^2\sin^2\vartheta + 2k\ell^2\cos^2\vartheta,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = -mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi$$

Valutiamo l'hessiano nei punti di equilibrio.

$$H\left(P_1\right) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell + 2k\ell^2 & 0 \\ 0 & -mg\frac{\ell}{2} \end{bmatrix}$$

quindi P_1 è di equilibrio stabile solo se i due autovalori sono entrambi negativi, cioè se $-\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell + 2k\ell^2 < 0$, da cui $3\sqrt{2}mg > 4k\ell$.

$$H(P_2) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell + 2k\ell^2 & 0 \\ 0 & mg\frac{\ell}{2} \end{bmatrix}$$

$H(P_2)$ ha due autovalori positivi, quindi P_2 è una posizione di equilibrio instabile.
Passiamo a $P_{3/4}$.

$$H(P_{3/4}) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right) - 2k\ell^2 + 4k\ell^2\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right)^2 & 0 \\ 0 & -mg\frac{\ell}{2} \end{bmatrix}$$

$P_{3/4}$ sono stabili se

$$-\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right) - 2k\ell^2 + 4k\ell^2\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right)^2 < 0$$

che, facendo qualche conto, equivale a

$$9m^2g^2 < 8k^2\ell^2$$

ed estraendo la radice

$$3mg < 2\sqrt{2}k\ell$$

che è verificata dato che deve valere la condizione $3\frac{\sqrt{2}}{2}mg \leq 2k\ell < 3mg$.
Passiamo a $P_{5/6}$

$$H(P_{5/6}) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right) - 2k\ell^2 + 4k\ell^2\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right)^2 & 0 \\ 0 & mg\frac{\ell}{2} \end{bmatrix}$$

di cui un autovalore è positivo quindi le posizioni di equilibrio $P_{5/6}$ sono instabili.
3) Cerchiamo le posizioni di equilibrio per $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$ e $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ e φ arbitrario.
Cominciamo da $\left(-\frac{\pi}{4}, \varphi\right)$. Innanzitutto $w_\vartheta \geq 0$ e $w_\varphi \in \mathbb{R}$, quindi si dovrà avere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} \le 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}mg\ell - 2k\ell^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le 0 \\ -mg\dfrac{\ell}{2}\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

dalla prima risulta $3mg \le 2k\ell$, dalla seconda troviamo $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$. Quindi se vale la condizione $3mg \le 2k\ell$, allora $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ sono posizioni di equilibrio di confine.

Vediamo ora $\left(\frac{\pi}{4}, \varphi\right)$. Questa volta $w_\vartheta \le 0$ e $w_\varphi \in \mathbb{R}$, quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} \ge 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}mg\ell + 2k\ell^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \ge 0 \\ -mg\dfrac{\ell}{2}\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

dalla prima risulta ancora $3mg \le 2k\ell$, dalla seconda troviamo $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$. Quindi se vale la condizione $3mg \le 2k\ell$, allora $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ e $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ sono posizioni di equilibrio di confine.

4) L'energia cinetica è data da

$$K = \frac{1}{2}J_O^{33}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}mv_{G_1}^2 + \frac{1}{2}J_{G_1}^{33}\dot{\varphi}^2$$

dato che O è un punto fisso e che la velocità angolare della lamina quadrata è $\boldsymbol{\omega}_Q = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_3$ e quella dell'asta è $\boldsymbol{\omega}_A = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$.

Calcoliamo la velocità di G_1

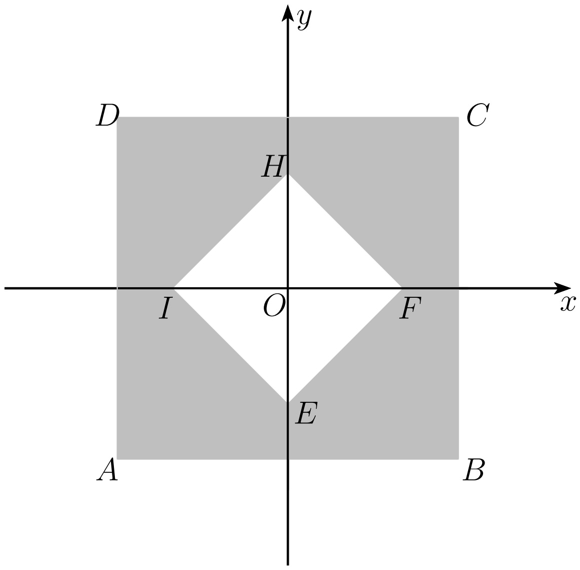
$$\boldsymbol{v}_{G_1} = \left(\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi + \sqrt{2}\ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi + \sqrt{2}\ell\dot{\vartheta}\sin\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2$$

e quindi $v_{G_1}^2 = \frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + 2\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \sqrt{2}\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\vartheta + \sqrt{2}\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\vartheta$.

Ora, dato che $J_O^{33} = \frac{2}{3}m\ell^2$ e $J_{G_1}^{33} = \frac{m\ell^2}{12}$, otteniamo

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + 2\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \sqrt{2}\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\vartheta + \sqrt{2}\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\vartheta\right) + \frac{m\ell^2}{24}\dot{\varphi}^2 = \\ &= \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m\ell^2}{24}\dot{\varphi}^2 + \frac{m\ell^2}{8}\dot{\varphi}^2 + m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\left(\cos\varphi\cos\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta\right) = \\ &= \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m\ell^2}{6}\dot{\varphi}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\left(\varphi - \vartheta\right) \end{aligned}$$

B)



Il corpo è rigido piano, quindi $J_{11} + J_{22} = J_{33}$, i piani xy, yz e xz sono di simmetria materiale, quindi $J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0$ e per simmetria si ha $J_{11} = J_{22}$.
Vediamo la figura scomposta nel quadrato $ABCD$ (figura 1) e nel quadrato $EFHI$ (figura 2).
La densità di massa è

$$\rho = \frac{m}{\ell^2 - \dfrac{\ell^2}{4}} = \frac{4m}{3\ell^2}$$

e le masse sono

$$m_1 = \rho\overline{AB}^2 = \frac{4m\ell^2}{3\ell^2} = \frac{4}{3}m, \qquad m_2 = \rho\overline{EF}^2 = \frac{4m}{3\ell^2}\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m$$

(per l'additività delle masse $m = m_1 - m_2$).
I momenti d'inerzia della lamina $ABCD$ di massa m_1 e lato ℓ sono:

$$J^1_{11} = J^1_{22} = \frac{m_1\ell^2}{12} = \frac{4m}{3}\frac{\ell^2}{12} = \frac{m\ell^2}{9}.$$

I momenti d'inerzia della lamina $EFHI$ di massa m_2 e lato $\ell/2$, dato che il quadrato ha una struttura giroscopica, sono:

$$J^2_{11} = J^2_{22} = \frac{m_2\ell^2}{12 \cdot 4} = \frac{m}{3}\frac{\ell^2}{48} = \frac{m\ell^2}{144}.$$

Quindi

$$J_{11} = J_{22} = J_{11}^1 - J_{11}^2 = \frac{m\ell^2}{9} - \frac{m\ell^2}{144} = \frac{5}{48}m\ell^2, \quad J_{33} = 2J_{11} = \frac{5}{24}m\ell^2.$$

La matrice d'inerzia risulta

$$\mathsf{J}_O = \frac{5}{48}m\ell^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$