Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 26 giugno 2015 a cura di Sara Mastaglio

1) Indicando con G il baricentro dell'asta AB e con G_1 quello dell'asta OA, troviamo

$$(G_1 - O) = \ell \cos\vartheta \boldsymbol{e}_1 + \ell \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_2$$

$$(G - O) = (2\ell\cos\vartheta - \ell \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta)\,\boldsymbol{e}_1 + (2\ell\operatorname{sen}\vartheta + \ell\operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta)\,\boldsymbol{e}_2 + \ell\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_3,$$

inoltre,

$$(A - C) = 2\ell\,(\cos\vartheta - 1)\,\boldsymbol{e}_1 + 2\ell\sin\vartheta \boldsymbol{e}_2.$$

1. Per trovare le posizioni di equilibrio del sistema calcoliamo il potenziale:

$$\begin{aligned}
U =& - mgz_{G_1} - mgz_G - \frac{k}{2}\,|A - C|^2 = \\
=& - mg \cdot 0 - mg\ell\cos\varphi - \frac{k}{2}4\ell^2\left(1 + \cos^2\vartheta - 2\cos\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta\right) = \\
=& - mg\ell\cos\varphi - 4k\ell^2\,(1 - \cos\vartheta) = \\
=& - mg\ell\cos\varphi + 4k\ell^2\cos\vartheta + c.
\end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio sono date da:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = -4k\ell^2\operatorname{sen}\vartheta = 0 \\
\dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = mg\ell\operatorname{sen}\varphi = 0
\end{cases}$$

Dalla prima segue $\operatorname{sen}\vartheta = 0$, da cui $\vartheta = 0; \pi$; dalla seconda $\operatorname{sen}\varphi = 0$, da cui $\varphi = 0; \pi$. Dato che $\vartheta, \varphi \in [0, 2\pi]$, le posizioni di equilibrio sono, quindi,

$$P_1(0,0), \quad P_2(0,\pi), \quad P_3(\pi,0), \quad P_4(\pi,\pi).$$

Valutiamo la stabilità delle posizioni di equilibrio trovate.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} = -4k\ell^2\cos\vartheta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = mgl\cos\varphi;$$

ora calcoliamo l'hessiano nelle posizioni di equilibrio.

$$\mathcal{H}\,(P_1) = \begin{bmatrix} -4k\ell^2 & 0 \\ 0 & mg\ell \end{bmatrix}$$

quindi P_1 è una posizione di equilibrio instabile.

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -4k\ell^2 & 0 \\ 0 & -mg\ell \end{bmatrix}$$

quindi P_2 è una posizione di equilibrio stabile.

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} 4k\ell^2 & 0 \\ 0 & mg\ell \end{bmatrix}$$

quindi P_3 è una posizione di equilibrio instabile.

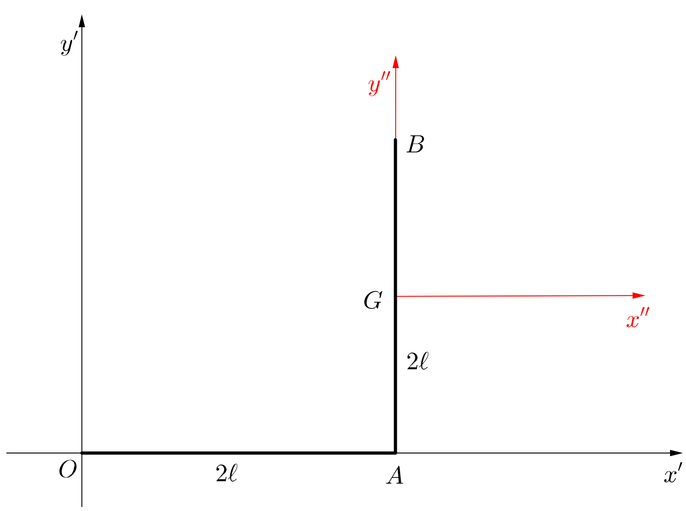
$$\mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} 4k\ell^2 & 0 \\ 0 & -mg\ell \end{bmatrix}$$

quindi P_4 è una posizione di equilibrio instabile.

2. L'energia cinetica del corpo rigido, dato che O è un punto fisso, è data da

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_O \boldsymbol{\omega}.$$

Dobbiamo quindi calcolare la matrice d'inerzia J_O del corpo rigido e la sua velocità angolare. Cominciamo con la matrice d'inerzia. Come prima cosa scegliamo un opportuno sistema di riferimento, come quello in figura,



e calcoliamo la matrice d'inerzia rispetto all'origine O. La matrice J_O sarà data dalla somma delle matrici d'inerzia delle due aste rispetto al sistema di riferimento indicato in figura. La matrice d'inerzia della lamina OA è

$$\mathsf{J}_O^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}$$

mentre quella dell'asta AB si ottiene utilizzando la formula di Huygens-Steiner, spostandosi al sistema di riferimento $Ox'y'z'$ da quello baricentrale $Gx''y''z''$, per cui la matrice d'inerzia, tenuto conto che il lato misura 2ℓ, è diag $[m\ell^2/3, 0, m\ell^2/3]$:

$$\mathsf{J}_O^2 = \begin{bmatrix} m\frac{\ell^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{\ell^2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & 4m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 5m\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & 4m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Quindi, essendo $\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_O^1 + \mathsf{J}_O^2$, otteniamo

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & \frac{16}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Ci resta da calcolare la velocità angolare. Considerando il sistema di riferimento $Ox'y'z'$ solidale alla lamina (come nella figura precedente), di versori $\left\{\boldsymbol{e}'_x, \boldsymbol{e}'_y, \boldsymbol{e}'_z\right\}$, la velocità angolare è data da

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z - \dot{\varphi}\boldsymbol{e}'_x;$$

il versore $\boldsymbol{e}_z$, espresso a partire dalla terna $\left\{\boldsymbol{e}'_x, \boldsymbol{e}'_y, \boldsymbol{e}'_z\right\}$, è

$$\boldsymbol{e}_z = \cos\varphi\boldsymbol{e}'_y + \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{e}'_z,$$

quindi la velocità angolare risulta

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}'_x + \dot{\vartheta}\cos\varphi\boldsymbol{e}'_y + \dot{\vartheta}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{e}'_z.$$

Dopo qualche conto si può verificare che l'energia cinetica risulta

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3}m\ell^2\left(4 + \operatorname{sen}^2\varphi\right)\dot{\vartheta}^2 + 4m\ell^2\cos\varphi\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right).$$

Osservazione. Per calcolare l'energia cinetica avremmo anche potuto considerare separatamente le energie cinetiche delle due aste e poi sommarle. L'energia cinetica dell'asta OA, dato che O è un punto fisso, è

$$K_{OA} = \frac{1}{2} J_O^{zz} \dot{\vartheta}^2,$$

mentre quella dell'asta AB è

$$K_{AB} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{AB} \cdot \mathsf{J}_G \boldsymbol{\omega}_{AB},$$

dove la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ va espressa con i versori di un opportuno sistema di riferimento baricentrale solidale all'asta e J_G è la matrice d'inerzia dell'asta rispetto a tale sistema di riferimento.

3. Determiniamo le equazioni del moto linearizzate attorno all'unica posizione di equilibrio stabile $P_2(0, \pi)$. Dapprima calcoliamo la lagrangiana linearizzata

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}} \mathsf{J} \left(\overline{\boldsymbol{q}} \right) \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})^{\mathsf{T}} \mathcal{H} \left(\overline{\boldsymbol{q}} \right) (\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})$$

con $\boldsymbol{q} = [\vartheta, \varphi]^{\mathsf{T}}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}]^{\mathsf{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = [0, \pi]^{\mathsf{T}}$,

$$\mathsf{J} \left(\boldsymbol{q} \right) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} m\ell^2 \left(4 + \operatorname{sen}^2 \varphi \right) & 2m\ell^2 \cos \varphi \\ 2m\ell^2 \cos \varphi & \frac{4}{3} m\ell^2 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathsf{J} \left(\overline{\boldsymbol{q}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} m\ell^2 & -2m\ell^2 \\ -2m\ell^2 & \frac{4}{3} m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

avendo già calcolato $\mathcal{H} \left(\overline{\boldsymbol{q}} \right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta

$$\widetilde{L} = \frac{8}{3} m\ell^2 \dot{\vartheta}^2 - 2m\ell^2 \dot{\vartheta} \dot{\varphi} + \frac{2}{3} m\ell^2 \dot{\varphi}^2 - 2k\ell^2 \theta^2 - \frac{1}{2} mg\ell\varphi^2 + mg\ell\pi\varphi.$$

Andando a scrivere

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \boldsymbol{q}}$$

otteniamo le equazioni del moto linearizzate attorno alla posizione di equilibrio stabile P_2:

$$\begin{cases} \frac{16}{3} m\ell^2 \ddot{\vartheta} - 2m\ell^2 \ddot{\varphi} = -4k\ell^2 \vartheta \\ 2m\ell^2 \ddot{\vartheta} - \frac{4}{3} m\ell^2 \ddot{\varphi} = mg\ell\varphi - mg\ell\pi \end{cases}.$$

2) Per ottenere una trasformazione canonica poniamo le parentesi di Poisson uguali a 1:

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

con

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = ae^q - bp^2 e^{-q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = 2bpe^{-q}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{pe^q}{e^{2q}+p^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{e^q}{e^{2q}+p^2} \ .$$

Dopo qualche conto risulta

$$\frac{(a-1)\, e^{2q} + (b-1)\, p^2}{e^{2q}+p^2} = 0$$

da cui otteniamo $a = 1$ e $b = 1$.

La trasformazione, quindi, diventa

$$\begin{cases} Q = Q(q,p) = e^q + p^2 e^{-q} \\ P = P(q,p) = \arctan \dfrac{p}{e^q} \end{cases} .$$

Troviamo ora una funzione generatrice $F(q, P)$:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P}$$

quindi $p = e^q \tan P = \dfrac{\partial F}{\partial q}$, da cui si può ricavare $F(q, P) = e^q \tan P + g(P)$. Ora

$$e^q \left(1 + \tan^2 P\right) + g'(P) = \frac{\partial F}{\partial P} = Q = e^q + e^{-q} \left(e^q \tan P\right)^2 = e^q \left(1 + \tan^2 P\right)$$

da cui, confrontando il primo e l'ultimo termine, risulta che $g'(P) = 0$ e quindi $g(P) = \text{costante}$. In definitiva

$$F(q, P) = e^q \tan P + \text{costante},$$

in particolare, scegliendo la costante $= 0$, troviamo

$$F(q, P) = e^q \tan P.$$