**Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 10 luglio 2015
a cura di Sara Mastaglio**

1) Innanzitutto indichiamo con G_1 e G_2 i baricentri delle aste AB e BC e scegliamo come parametri lagrangiani

$$\xi := x_A \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \vartheta := y^- \widehat{A}B \in [\,0, 2\pi\,)\,.$$

Calcoliamo i vettori principali

$$(A - O) = \xi \boldsymbol{e}_1$$

$$(G_1 - O) = (\xi + \ell \operatorname{sen} \vartheta)\, \boldsymbol{e}_1 - \ell \cos \vartheta \boldsymbol{e}_2$$

$$(G_2 - O) = (\xi + 2\ell \operatorname{sen} \vartheta + \ell \cos \vartheta)\, \boldsymbol{e}_1 + (\ell \operatorname{sen} \vartheta - 2\ell \cos \vartheta)\, \boldsymbol{e}_2.$$

1. Per determinare le posizioni di equilibrio calcoliamo innanzitutto il pontenziale:

$$U = -mgy_{G_1} - mgy_{G_2} - \frac{k}{2} |A - C|^2 = 3mg\ell \cos \vartheta - mg\ell \operatorname{sen} \vartheta - \frac{k}{2} \xi^2 + c.$$

Le posizioni di equilibrio sono date da

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -3mg\ell \operatorname{sen} \vartheta - mg\ell \cos \vartheta = 0 \end{cases},$$

dalla prima troviamo subito $\xi = 0$, mentre dalla seconda troviamo $\operatorname{tg} \vartheta = -\dfrac{1}{3}$ da cui

$$\vartheta = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) \text{ e } \vartheta = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right);$$

otteniamo quindi le due posizioni di equilibrio

$$P_1 \left(0, -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right) \text{ e } P_2 \left(0, \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right).$$

Per il calcolo della stabilità determiniamo l'hessiano:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = -3mg\ell \cos \vartheta + mg\ell \operatorname{sen} \vartheta,$$

quindi

$$\mathcal{H}(\xi, \vartheta) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -3mg\ell \cos \vartheta + mg\ell \operatorname{sen} \vartheta \end{bmatrix}.$$

Ora valutiamo l'hessiano nelle posizioni di equilibrio:

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -\sqrt{10}\,mg\ell \end{bmatrix}$$

quindi, dato che i due autovalori sono entrambi negativi, la posizione P_1 è di equilibrio stabile;

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & \sqrt{10}\,mg\ell \end{bmatrix}$$

quindi, dato che ho un autovalore positivo e uno negativo, la posizione P_2 è di equilibrio instabile.

2. L'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2}mv_{G_1}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathsf{J}_{G_1}\boldsymbol{\omega}_1 + \frac{1}{2}mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathsf{J}_{G_2}\boldsymbol{\omega}_2$$

con $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_3$; per un opportuno sistema di riferimento, tenuto conto che le aste misurano 2ℓ sia ha

$$\mathsf{J}_{G_1} = \mathsf{J}_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{v}_{G_1} = \left(\dot{\xi} + \ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 + \ell\dot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{v}_{G_2} = \left(\dot{\xi} + 2\ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \ell\dot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta + 2\ell\dot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2;$$

dopo un po' di conti l'energia cinetica risulta

$$K = \frac{m}{2}\left(2\dot{\xi}^2 + \frac{20}{3}\ell^2\dot{\vartheta}^2 + 2\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\left(3\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta\right)\right)$$

3. Per determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile P_1 dobbiamo calcolare

$$\det\left(\omega^2\mathsf{J}(\overline{\boldsymbol{q}}) + \mathcal{H}(\overline{\boldsymbol{q}})\right) = 0,$$

con $\overline{\boldsymbol{q}} = \left(0, -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$. Calcoliamo $\mathsf{J}(\overline{\boldsymbol{q}})$:

$$\mathsf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 2m & m\ell\left(3\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta\right) \\ m\ell\left(3\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta\right) & \frac{20}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}$$

quindi calcolata nella posizione di equilibrio stabile diventa

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} 2m & \sqrt{10}\,m\ell \\ \sqrt{10}\,m\ell & \dfrac{20}{3}m\ell^2 \end{bmatrix};$$

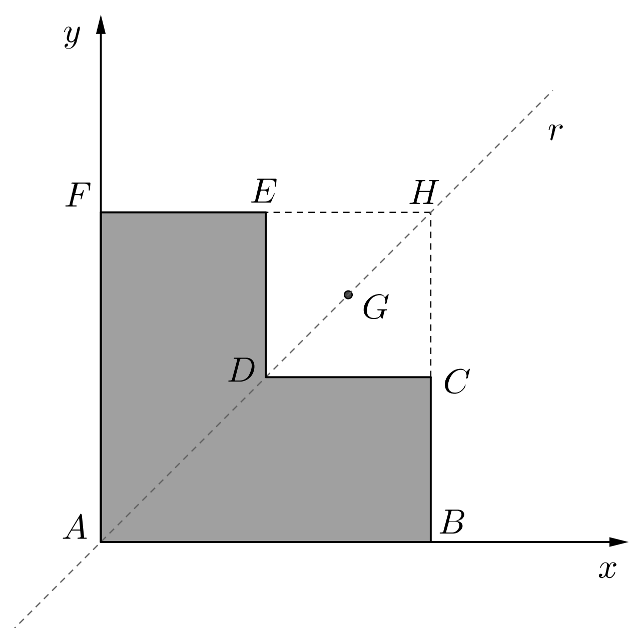
dato che $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ è già stata determinata per lo studio della stabilità, possiamo subito calcolare

$$\det \begin{bmatrix} 2m\omega^2 - k & \sqrt{10}\,m\ell\omega^2 \\ \sqrt{10}\,m\ell\omega^2 & \dfrac{20}{3}m\ell^2\omega^2 - \sqrt{10}mg\ell \end{bmatrix} = 0.$$

Quindi le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile sono soluzioni dell'equazione

$$\frac{10}{3}m^2\ell^2\omega^4 - \left(2\sqrt{10}\,m^2 g\ell + \frac{20}{3}m\ell^2 k\right)\omega^2 + \sqrt{10}\,mg\ell k = 0.$$

2) Per calcolare la matrice d'inerzia della lamina L consideriamo la differenza tra la matrice d'inerzia



della lamina quadrata piena $ABHF$ (che chiameremo P) e quella della lamina quadrata vuota $DCHE$ (che chiameremo V) entrambe rispetto al sistema di riferimento $Axyz$ indicato in figura.

Cominciamo con il calcolo delle masse delle lamine P e V. La lamina P ha massa $m_P = 4\ell^2\rho$, mentre la lamina V ha massa $m_V = \ell^2\rho$, dove ρ è la densità di massa. Per l'additività delle masse la lamina L, che ha massa m, è data da

$$m = m_P - m_V = \rho\left(4\ell^2 - \ell^2\right)$$

da cui si può ricavare la densità di massa

$$\rho = \frac{m}{3\ell^2};$$

sostituendo ρ nelle espressioni di m_P e m_V otteniamo

$$m_P = \frac{4}{3}m, \quad m_V = \frac{m}{3}.$$

La matrice d'inerzia della lamina P rispetto al punto A, tenuto conto che la lamina quadrata ha lato 2ℓ, è

$$\mathsf{J}_A^P = \begin{bmatrix} \frac{16}{9}m\ell^2 & -\frac{4}{3}m\ell^2 & 0 \\ -\frac{4}{3}m\ell^2 & \frac{16}{9}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32}{9}m\ell^2 \end{bmatrix},$$

La matrice d'inerzia della lamina V rispetto al punto G è

$$\mathsf{J}_G^V = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{36} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{36} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{18} \end{bmatrix}$$

quindi, rispetto al punto A, utilizzando Huygens-Steiner, è

$$\mathsf{J}_A^V = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{36} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{36} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{18} \end{bmatrix} + \frac{m}{3}\begin{bmatrix} \frac{9}{4}\ell^2 & -\frac{9}{4}\ell^2 & 0 \\ -\frac{9}{4}\ell^2 & \frac{9}{4}\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2}\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9}m\ell^2 & -\frac{3}{4}m\ell^2 & 0 \\ -\frac{3}{4}m\ell^2 & \frac{7}{9}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{9}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

La matrice d'inerzia cercata è quindi data dalla differenza $\mathsf{J}_A^P - \mathsf{J}_A^V$:

$$\mathsf{J}_A^L = \begin{bmatrix} m\ell^2 & -\dfrac{7}{12}m\ell^2 & 0 \\ -\dfrac{7}{12}m\ell^2 & m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m\ell^2 \end{bmatrix}. \tag{0.1}$$

Infine, il momento d'inerzia della lamina rispetto alla retta r è dato da $J_r = \boldsymbol{r} \cdot \mathsf{J}_A^L \boldsymbol{r}$ con $\boldsymbol{r}$ il versore dell'asse r; essendo $B\widehat{A}D = \dfrac{\pi}{4}$, il versore risulta $\boldsymbol{r} = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]^{\mathsf{T}}$ e quindi il momento d'inerzia, dopo alcuni conti è

$$J_r = \frac{5}{12}m\ell^2.$$