Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica
dell'11 settembre 2015
a cura di Sara Mastaglio

1) Il campo di variabilità dei parametri lagrangiani è dato da $\xi \in [0, 2\ell]$ e $\vartheta \in [\,0, 2\pi\,)$.
I vettori principali, avendo denotato con G il baricentro dell'asta, sono dati da

$$(G - O) = \ell \cos\vartheta \boldsymbol{e}_1 + \ell \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_2,$$

$$(B - O) = \xi \cos\vartheta \boldsymbol{e}_1 + \xi \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_2,$$

$$(C - O) = (\xi \cos\vartheta - R \operatorname{sen}\vartheta)\, \boldsymbol{e}_1 + (\xi \operatorname{sen}\vartheta + R\cos\vartheta)\, \boldsymbol{e}_2.$$

1. Per determinare le configurazioni di equilibrio calcoliamo innanzitutto il potenziale:

$$U = -mgy_G - mgy_C - \frac{k}{2}\left|C - O\right|^2 + U_A = -mg\ell \operatorname{sen}\vartheta - mg\xi \operatorname{sen}\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + c.$$

Le posizioni di equilibrio sono quindi date da

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -mg \operatorname{sen}\vartheta - k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\ell \cos\vartheta - mg\xi \cos\vartheta = 0; \end{cases}$$

dalla prima equazione troviamo $\xi = -\dfrac{mg}{k} \operatorname{sen}\vartheta$, dalla seconda invece, sostituendo la ξ così trovata

$$\cos\vartheta \left(\frac{mg}{k}\operatorname{sen}\vartheta - \ell\right) = 0,$$

da cui troviamo $\vartheta_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\vartheta_2 = \dfrac{3}{2}\pi$ e ϑ_3, ϑ_4 dati da $\operatorname{sen}\vartheta = \dfrac{k\ell}{mg}$; quest'ultima soluzione chiaramente esiste se $\dfrac{k\ell}{mg} < 1$, cioè, posto $\lambda = \dfrac{k\ell}{mg}$, $\lambda < 1$. Le posizioni di equilibrio, dopo aver calcolato le ξ corrispondenti ad ogni angolo trovato, sono:

- $\left(-\dfrac{mg}{k}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ che però non è accettabile in quanto la ξ deve essere compresa tra 0 e 2ℓ, quindi in particolare deve essere positiva;

- $\left(\dfrac{mg}{k}, \dfrac{3}{2}\pi\right)$ accettabile se $\xi_2 = \dfrac{mg}{k} \in [0, 2\ell]$: chiaramente $\xi_2 > 0$, se imponiamo poi $\xi_2 < 2\ell$, troviamo la condizione $\lambda > \dfrac{1}{2}$;

- $(-\ell, \operatorname{arcsen}\lambda)$ che non è accettabile in quanto $\xi_3 = -\ell < 0$;
- $(-\ell, \pi - \operatorname{arcsen}\lambda)$ non accettabile per lo stesso motivo.

L'unica posizione di equilibrio è quindi

$$P\left(\frac{mg}{k}, \frac{3}{2}\pi\right),$$

con la condizione $\lambda > \dfrac{1}{2}$. Studiamone la stabilità, determinando innanzitutto l'hessiano, le cui componenti sono:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = -mg\cos\vartheta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = mg\,(l+\xi)\operatorname{sen}\vartheta$$

e quindi

$$\mathcal{H}\left(\xi, \vartheta\right) = \begin{bmatrix} -k & -mg\cos\vartheta \\ -mg\cos\vartheta & mg\,(\ell+\xi)\operatorname{sen}\vartheta \end{bmatrix},$$

che calcolato nell'unica configurazione di equilibrio P dà

$$\mathcal{H}\left(P\right) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -mg\left(\ell + \dfrac{mg}{k}\right) \end{bmatrix}.$$

La posizione P è di equilibrio stabile se entrambi gli autovalori sono negativi e, quindi, essendo $-k$ sempre negativa, la condizione per avere la stabilità è data da $-mg\left(\ell + \dfrac{mg}{k}\right) < 0$; ricordando che $\lambda = \dfrac{k\ell}{mg}$, tale condizione fornisce $\lambda > -1$ e considerando che per definizione $\lambda > 0$, si ha stabilità per ogni valore di λ. Come determinato in precedenza, la posizione di equilibrio P esiste solo se $\lambda > \dfrac{1}{2}$, quindi in definitiva la posizione $P\left(\dfrac{mg}{k}, \dfrac{3}{2}\pi\right)$ è di equilibro stabile per ogni $\lambda > \dfrac{1}{2}$.

2. Le posizioni di confine si hanno per $\xi = 0$ e $\xi = 2\ell$ e per un generico $\overline{\vartheta}$.

   - Per la posizione $\left(0, \overline{\vartheta}\right)$ le velocità virtuali sono $w_\xi \geq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi si deve avere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} \leq 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -mg\operatorname{sen}\overline{\vartheta} \leq 0 \\ -mg\ell\cos\overline{\vartheta} = 0 \end{cases}$$

     che ci fornisce come unica soluzione ammissibile $\overline{\vartheta} = \dfrac{\pi}{2}$ e quindi la posizione $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ è di equilibrio di confine.

- Per la posizione $\left(2\ell, \overline{\vartheta}\right)$ le velocità virtuali sono $w_\xi \leq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi si deve avere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} \geq 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mg \operatorname{sen} \overline{\vartheta} - 2k\ell \leq 0 \\ -mg\ell \cos \overline{\vartheta} - 2mg\ell \cos \overline{\vartheta} = 0 \end{cases}.$$

  La seconda equazione ci fornisce le soluzioni $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3}{2}\pi$, la prima invece dà $\operatorname{sen} \overline{\vartheta} \leq -2\lambda$; considerando il fatto che λ sia sempre strettamente positivo, la soluzione $\overline{\vartheta} = \dfrac{\pi}{2}$ non è accettabile mentre $\overline{\vartheta} = \dfrac{3}{2}\pi$ lo è chiaramente se $-2\lambda \geq -1$, cioè se $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$. In definitiva la posizione $\left(2\ell, \dfrac{3}{2}\pi\right)$ è di confine se $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$.

3. L'energia cinetica è data da

$$K = K_A + K_D$$

dove K_A e K_D sono i contributi dell'energia cinetica rispettivamente dell'asta e del disco; per il calcolo teniamo conto del fatto che il punto O è fisso per l'asta, quindi, utilizzando il teorema di König, otteniamo

$$K_A = \frac{1}{2} \mathsf{J}_O^A \boldsymbol{\omega}_A \cdot \boldsymbol{\omega}_A$$

$$K_D = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \mathsf{J}_C^D \boldsymbol{\omega}_D \cdot \boldsymbol{\omega}_D.$$

Dato che l'asta misura 2ℓ, la sua matrice d'inerzia è

$$\mathsf{J}_O^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} m\ell^2 \end{bmatrix}$$

mentre quella del disco è

$$\mathsf{J}_C^D = \begin{bmatrix} \dfrac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{mR^2}{2} \end{bmatrix}$$

e le velocità angolari sono $\boldsymbol{\omega}_A = \dot{\vartheta} \boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{\omega}_D = \left(\dot{\vartheta} + \dfrac{\dot{\xi}}{R}\right) \boldsymbol{e}_3$ dove il termine $\dfrac{\dot{\xi}}{R}$ è dato dal puro rotolamento per cui vale $\dot{\xi} = R\dot{\varphi}$ dove φ è l'angolo di rotazione propria del disco. Resta da calcolare la velocità di C:

$$\boldsymbol{v}_C = \left(\dot{\xi}\cos\vartheta - \xi\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta - R\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\dot{\xi}\operatorname{sen}\vartheta + \xi\dot{\vartheta}\cos\vartheta - R\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2$$

e quindi $v_C^2 = \dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{\xi}\dot{\vartheta}$.
Dopo qualche conto risulta

$$K = \frac{m}{2}\left[\frac{3}{2}\dot{\xi}^2 - R\dot{\xi}\dot{\vartheta} + \left(\frac{3}{2}R^2 + \frac{4}{3}\ell^2 + \xi^2\right)\dot{\vartheta}^2\right].$$

4. Poniamo $\lambda = 1$. La posizione di equilibrio risulta in questo caso $\left(\ell, \frac{3}{2}\pi\right)$. Per determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni calcoliamo

$$\det\left(\omega^2 \mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) + \mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\right) = 0,$$

con $\overline{\boldsymbol{q}} = \left(\ell, \frac{3}{2}\pi\right)$. La matrice associata alla forma quadratica dell'energia cinetica è

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & -m\frac{R}{2} \\ -m\frac{R}{2} & m\left(\frac{3}{2}R^2 + \frac{4}{3}\ell^2 + \xi^2\right) \end{bmatrix}$$

che calcolata nella pozione di equilibrio stabile diventa

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & -m\frac{R}{2} \\ -m\frac{R}{2} & m\left(\frac{3}{2}R^2 + \frac{7}{3}\ell^2\right) \end{bmatrix};$$

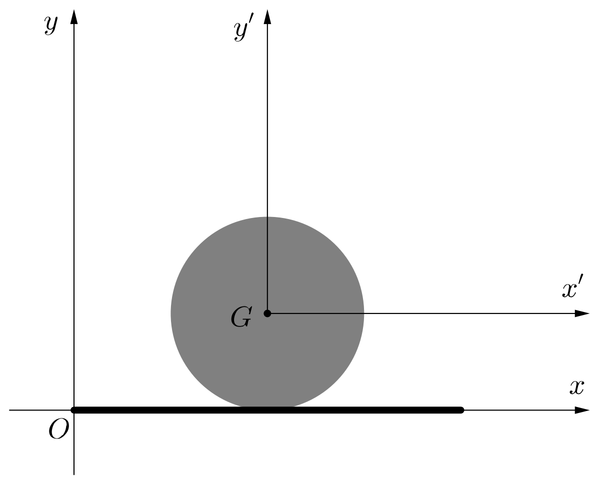
la matrice hessiana è stata calcolata in precedenza e con $\lambda = 1$ risulta

$$\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -2mg\ell \end{bmatrix}.$$

Dopo aver calcolato il determinante e imposto che sia nullo, risulta che le pulsazioni delle piccole oscillazioni sono soluzioni dell'equazione

$$\left(\frac{5}{2}mR^2 + \frac{7}{2}m\ell^2\right)\omega^4 - \left(\frac{3}{2}\frac{mg}{l}R^2 + \frac{16}{3}mg\ell\right)\omega^2 + 2mg^2 = 0.$$

2) Per determinare la matrice d'inerzia del corpo rigido dato sfruttiamo la proprietà di additività dei momenti d'inerzia e calcoliamo separatamente le matrici d'inerzia dell'asta e del disco rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$ indicato in figura.



La matrice d'inerzia J_O^A dell'asta, lunga 4ℓ, è

$$\mathsf{J}_O^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{16}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{16}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Per il calcolo della matrice d'inerzia J_O^D del disco procediamo prima al calcolo di J_G^D:

$$\mathsf{J}_G^D = \begin{bmatrix} \dfrac{m\ell^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m\ell^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m\ell^2}{2} \end{bmatrix};$$

calcoliamo le componenti della matrice J_O^D con il teorema di Huygens per passare dal sistema di riferimento $Gx'y'z'$ a $Oxyz$:

$$J_O^{11} = \frac{m\ell^2}{4} + m\ell^2 = \frac{5}{4}m\ell^2$$

$$J_O^{22} = \frac{m\ell^2}{4} + 4m\ell^2 = \frac{17}{4}m\ell^2$$

$$J_O^{33} = J_O^{11} + J_O^{22} = \frac{5}{4}m\ell^2 + \frac{17}{4}m\ell^2 = \frac{11}{2}m\ell^2$$
$$J_O^{12} = 0 - 2m\ell^2 = -2m\ell^2,$$

dove per il calcolo di J_O^{33} abbiamo sfruttato il fatto che la lamina sia piana; la matrice d'inerzia è quindi

$$\mathsf{J}_O^D = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & \frac{17}{4}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Infine la matrice cercata è

$$\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_O^A + \mathsf{J}_O^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3}m\ell^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{4}m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & \frac{17}{4}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2}m\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & \frac{115}{12}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{65}{6}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$