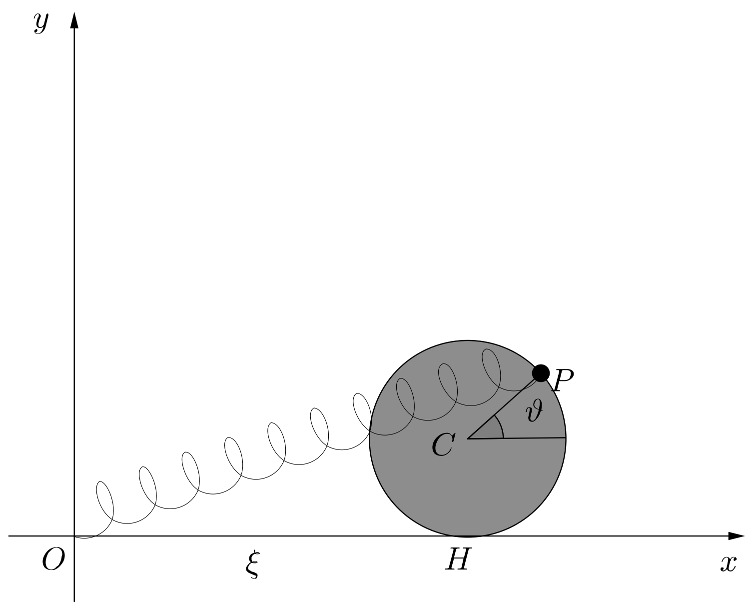
Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del
29 settembre 2015
a cura di Sara Mastaglio

1) Possiamo scegliere come parametri lagrangiani $\xi := |H - O| \in \mathbb{R}$ e $\vartheta := x^+\widehat{C}P \in [\,0, 2\pi\,)$ proprio come indicato in figura.



Ora calcoliamo i vettori fondamentali per il nostro sistema:

$$(C - O) = \xi \boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_2$$

$$(P - O) = (\xi + R\cos\vartheta)\,\boldsymbol{e}_1 + (R + R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,\boldsymbol{e}_2.$$

1. Per calcolare le posizioni di equilibrio del sistema procediamo al calcolo del potenziale, che risulta

$$U = -mgy_C - mgy_P - \frac{k}{2}|P - O|^2 = -mgR\,\mathrm{sen}\,\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 - kR\xi\cos\vartheta - kR^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta + c.$$

Le posizioni di equilibrio sono date da

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi - kR\cos\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mgR\cos\vartheta + kR\xi \operatorname{sen}\vartheta - kR^2\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava subito $\xi = -R\cos\vartheta$, che sostituito nella seconda equazione dà

$$\cos\vartheta \left(-mg - kR\operatorname{sen}\vartheta - kR\right) = 0;$$

da $\cos\vartheta = 0$ troviamo $\vartheta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ e $\vartheta_2 = \dfrac{3}{2}\pi$, mentre il secondo fattore uguagliato a 0 ci fornisce

$$\operatorname{sen}\vartheta = -\frac{mg + kR}{kR} = -\frac{mg}{kR} - 1 < -1,$$

che quindi non dà alcuna soluzione.
Calcolando la ξ per i due valori degli angoli trovati otteniamo le due configurazioni di equilibrio

$$P_1\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(0, \frac{3}{2}\pi\right).$$

2. Per studiare la stabilità determiniamo l'hessiano, le cui componenti sono

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = kR\operatorname{sen}\vartheta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = mgR\operatorname{sen}\vartheta + kR\xi\cos\vartheta + kR^2\operatorname{sen}\vartheta$$

e quindi

$$\mathcal{H}\left(\xi, \vartheta\right) = \begin{bmatrix} -k & kR\operatorname{sen}\vartheta \\ kR\operatorname{sen}\vartheta & mgR\operatorname{sen}\vartheta + kR\xi\cos\vartheta + kR^2\operatorname{sen}\vartheta \end{bmatrix}.$$

Valutiamo la matrice hessiana nelle due posizioni di equilibrio trovate:

$$\mathcal{H}\left(P_1\right) = \begin{bmatrix} -k & kR \\ kR & mgR + kR^2 \end{bmatrix},$$

da cui si può subito calcolare il determinante che risulta minore di zero, quindi P_1 è una configurazione di equilibrio instabile;

$$\mathcal{H}\left(P_2\right) = \begin{bmatrix} -k & -kR \\ -kR & -mgR - kR^2 \end{bmatrix}$$

che ha traccia negativa e determinante positivo quindi P_2 è una posizione di equilibrio stabile.

3. Per determinare le equazioni differenziali del moto dobbiamo calcolare la lagrangiana; avendo già determinato il potenziale, non ci resta che calcolare l'energia cinetica K del sistema che ha due contributi K_P relativa al punto materiale P e K_D che è quella del disco:

$$K = K_P + K_D,$$

con $K_P = \frac{1}{2} m v_P^2$ e, sfruttando il fatto che il punto di contatto H abbia velocità nulla, $K_D = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_H \boldsymbol{\omega}$; la velocità angolare del disco è data da $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi} \boldsymbol{e}_3$, dove φ è l'angolo di rotazione propria del disco, e per l'ipotesi di puro rotolamento sappiamo che $\dot{\varphi} = \frac{\dot{\xi}}{R}$, così otteniamo $K_D = \frac{1}{2} J_H^{33} \omega^2$. La velocità del punto P è

$$v_P = \left(\dot{\xi} - R\dot{\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta\right) \boldsymbol{e}_1 + R\dot{\vartheta} \cos \vartheta \boldsymbol{e}_2$$

e quindi $v_P^2 = \dot{\xi}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{\xi}\dot{\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta$; il momento d'inerzia è $J_H^{33} = \frac{3}{2} m R^2$. Dopo alcuni conti otteniamo

$$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{5}{2} \dot{\xi}^2 - 2R\dot{\xi}\dot{\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta + R^2 \dot{\vartheta}^2 \right).$$

Ora è possibile calcolare la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = K + U = \frac{5}{4} m\dot{\xi}^2 - mR\dot{\xi}\dot{\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta + \frac{1}{2} mR^2\dot{\vartheta}^2 - mgR \operatorname{sen} \vartheta - \frac{k}{2} \xi^2 - kR\xi \cos \vartheta - kR^2 \operatorname{sen} \vartheta.$$

Per determinare le equazioni differenziali del moto dovremo calcolare per ognuno dei due parametri lagrangiani $q = \xi, \vartheta$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}.$$

Cominciando da ξ abbiamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = -k\xi - kR \cos \vartheta,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = \frac{5}{2} m\dot{\xi} - mR\dot{\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = \frac{5}{2} m\ddot{\xi} - mR\ddot{\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta - mR\dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta,$$

da cui si ricava la prima equazione differenziale del moto

$$\frac{5}{2}m\ddot{\xi} - mR\ddot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta - mR\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta = -k\xi - kR\cos\vartheta;$$

ripetiamo lo stesso procedimento per ϑ:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} = -mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - mgR\cos\vartheta + kR\xi\operatorname{sen}\vartheta - kR^2\cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} = -mR\dot{\xi}\operatorname{sen}\vartheta + mR^2\dot{\vartheta},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} = -mR\ddot{\xi}\operatorname{sen}\vartheta - mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + mR^2\ddot{\vartheta},$$

da cui si ricava la seconda equazione differenziale del moto

$$-mR\ddot{\xi}\operatorname{sen}\vartheta - mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + mR^2\ddot{\vartheta} = -mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - mgR\cos\vartheta + kR\xi\operatorname{sen}\vartheta - kR^2\cos\vartheta.$$

4. Determiniamo le equazioni del moto linearizzate attorno alla posizione di equilibrio stabile $P_2\left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$. Dapprima calcoliamo la lagrangiana linearizzata

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^\mathsf{T}\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})^\mathsf{T}\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\left(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}}\right)$$

con $\boldsymbol{q} = [\xi, \vartheta]^\mathsf{T}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\xi}, \dot{\vartheta}]^\mathsf{T}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]^\mathsf{T}$,

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}m & -mR\operatorname{sen}\vartheta \\ -mR\operatorname{sen}\vartheta & mR^2 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}m & mR \\ mR & mR^2 \end{bmatrix}.$$

Avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta, dopo qualche conto,

$$\widetilde{L} = \frac{5}{4}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 + mR\dot{\xi}\dot{\vartheta} - \frac{k}{2}\xi^2 - kR\xi\vartheta - R\left(mg+kR\right)\vartheta^2 + 3\pi R\left(mg+kR\right)\vartheta.$$

Per determinare le equazioni del moto linearizzate basta ripetere il procedimento del punto 3. e otteniamo

$$\frac{5}{2}m\ddot{\xi} + mR\ddot{\vartheta} = -k\xi - kR\vartheta,$$

$$mR^2\ddot{\vartheta} + mR\ddot{\xi} = -kR\xi - 2R\left(mg + kR\right)\vartheta + 3\pi R\left(mg + kR\right).$$

2) La trasformazione

$$\begin{cases} Q(q,p) = \dfrac{k}{p}e^{2q} \\ P(q,p) = p^2 e^{-2q} \end{cases}$$

è canonica quando

$$[Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1.$$

Calcoliamo quindi le derivate parziali

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{2k}{p}e^{2q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{k}{p^2}e^{2q}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = -2p^2e^{-2q}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = 2pe^{-2q}.$$

Andando quindi a imporre che la parentesi di Poisson sia uguale a 1 troviamo subito $4k - 2k = 1$ e cioè $k = \frac{1}{2}$. La trasformazione per tale valore di k diventa

$$\begin{cases} Q(q,p) = \dfrac{1}{2p}e^{2q} \\ P(q,p) = p^2 e^{-2q} \end{cases}.$$

Vogliamo ora trovare una funzione generatrice. Sfruttiamo il fatto che

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\partial F}{\partial P}$$

quindi $p = \sqrt{P}e^q = \dfrac{\partial F}{\partial q}$, da cui si può ricavare $F(q,P) = \sqrt{P}e^q + g(P)$. Inoltre

$$\frac{1}{2\sqrt{P}}e^q + g'(P) = \frac{\partial F}{\partial P} = Q = \frac{1}{2\sqrt{P}}e^q;$$

uguagliando il primo e l'ultimo termine risulta subito che $g'(P) = 0$ e quindi $g(P) =$ costante. Dunque

$$F(q,P) = \sqrt{P}e^q + \text{costante}$$

e scegliendo la costante $= 0$ troviamo

$$F(q, P) = \sqrt{P} e^q.$$