Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 12 febbraio 2016
a cura di Sara Mastaglio

1) Definiamo i seguenti parametri lagrangiani:

$$\xi := |B - O| \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \vartheta := y^{-}\widehat{B}C \in [0, 2\pi).$$

Indichiamo con G_1 il baricentro dell'asta AB, con G_2 quello dell'asta BC e con H e K le proiezioni sull'asse x rispettivamente di A e C; determiniamo ora i vettori che ci serviranno in seguito:

$$(G_1 - O) = -\frac{\ell}{2}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_1 - \left(\xi + \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2,$$

$$(G_2 - O) = \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{e}_1 - \left(\xi + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2,$$

$$(A - H) = -\left(\xi + \ell\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2,$$

$$(C - K) = -\left(\xi + \ell\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2.$$

A) Per trovare le posizioni di equilibrio del sistema calcoliamo innanzitutto il potenziale:

$$\begin{aligned} U &= -mgy_{G_1} - mgy_{G_2} - \frac{k}{2}|A-K|^2 - \frac{k}{2}|C-H|^2 = \\ &= mg\left(\xi + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\right) + mg\left(\xi + \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\vartheta\right) - \frac{k}{2}|\xi + \ell\operatorname{sen}\vartheta|^2 - \frac{k}{2}|\xi + \ell\cos\vartheta|^2 = \\ &= 2mg\xi - k\xi^2 + \left(\frac{1}{2}mg\ell - k\ell\xi\right)(\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta) + c. \end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio sono date da:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = 2mg - 2k\xi - k\ell(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = \left(\dfrac{1}{2}mg\ell - k\ell\xi\right)(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) = 0 \end{cases};$$

dalla seconda otteniamo immediatamente $\operatorname{tg}\vartheta = 1$ da cui $\vartheta_{1/2} = \pi/4;\ 5\pi/4$, che sostituiti nella prima equazione ci danno i relativi valori per delle ξ e quindi due posizioni di equilibrio sono

$$P_1\left(\frac{mg}{k} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(\frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{5}{4}\pi\right);$$

sempre dalla seconda equazione troviamo $\xi = \dfrac{mg}{2k}$, valore che sostituito nella prima equazione ci dà

$$\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta - \frac{mg}{k\ell} = 0,$$

da cui

$$\operatorname{sen}\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{mg}{k\ell}$$

e per avere soluzioni si deve avere la condizione $-1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{mg}{k\ell} < 1$, quindi $-\sqrt{2} < \dfrac{mg}{k\ell} < \sqrt{2}$; inoltre $\dfrac{mg}{k\ell} > 0$, quindi $0 < \dfrac{mg}{k\ell} < \sqrt{2}$; troviamo infine gli angoli

$$\vartheta_3 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{mg}{k\ell}\right) - \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \vartheta_4 = \frac{3}{4}\pi - \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{mg}{k\ell}\right).$$

Riassumendo otteniamo quattro posizioni di equilibrio:

$$P_1\left(\frac{mg}{k} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{\pi}{4}\right), \quad P_2\left(\frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{5}{4}\pi\right), \quad P_3\left(\frac{mg}{2k}, \vartheta_3\right), \quad P_4\left(\frac{mg}{2k}, \vartheta_4\right).$$

B) Per calcolare la stabilità delle posizioni di equilibrio appena trovate, dobbiamo determinare l'hessiano:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -2k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = -k\ell(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = \left(k\ell\xi - \frac{1}{2}mg\ell\right)(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta),$$

quindi

$$\mathcal{H}(\xi, \vartheta) = \begin{bmatrix} -2k & -k\ell(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) \\ -k\ell(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) & \left(k\ell\xi - \frac{1}{2}mg\ell\right)(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta) \end{bmatrix}.$$

Calcoliamolo nelle posizioni di equilibrio:

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -2k & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell - k\ell^2 \end{bmatrix}$$

e troviamo quindi che P_1 è stabile se $\dfrac{\sqrt{2}}{2}mg\ell - k\ell^2 < 0$, cioè se $k > \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{mg}{\ell}$. Passiamo alla stabilità di P_2:

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -2k & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell - k\ell^2 \end{bmatrix}$$

e dato che otteniamo due autovalori negativi, troviamo che P_2 è una posizione di equilibrio stabile. Per quanto riguarda P_3, l'hessiano è

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} -2k & -\sqrt{2k^2\ell^2 - m^2g^2} \\ -\sqrt{2k^2\ell^2 - m^2g^2} & 0 \end{bmatrix}$$

che ha traccia negativa e determinante negativo, quindi è una posizione di equilibrio instabile. Infine, l'hessiano calcolato in P_4 è

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} -2k & \sqrt{2k^2\ell^2 - m^2g^2} \\ \sqrt{2k^2\ell^2 - m^2g^2} & 0 \end{bmatrix}$$

e anche in questo caso otteniamo traccia negativa e determinante negativo, quindi P_4 è una posizione di equilibrio instabile.

C) Per determinare le equazioni differenziali del moto dobbiamo prima calcolare l'energia cinetica, che è data da

$$K = K_{AB} + K_{BC} = \frac{1}{2}mv_{G_1}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{AB} \cdot \mathsf{J}_{G_1}\boldsymbol{\omega}_{AB} + \frac{1}{2}mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{BC} \cdot \mathsf{J}_{G_2}\boldsymbol{\omega}_{BC}$$

dove J_{G_1} e J_{G_2} sono le matrici d'inerzia delle aste AB e BC calcolate rispetto ad un sistema di riferimento centrato nei baricentri; $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ e $\boldsymbol{\omega}_{BC}$ sono le velocità angolari delle due aste. Dato che siamo nel piano il secondo e il quarto termine risultano semplicemente $\frac{1}{2}J_{G_1}^{zz}\omega_{AB}^2$ e $\frac{1}{2}J_{G_2}^{zz}\omega_{BC}^2$. I momenti d'inerzia valgono entrambi $J_{G_1}^{zz} = J_{G_2}^{zz} = m\ell^2/12$ e anche le velocità angolari sono le medesime $\boldsymbol{\omega}_{AB} = \boldsymbol{\omega}_{BC} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_3$. Restano da calcolare le velocità dei due baricentri:

$$\boldsymbol{v}_{G_1} = -\frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{e}_1 - \left(\dot{\xi} + \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{v}_{G_2} = \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_1 - \left(\dot{\xi} - \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2,$$

quindi

$$v_{G_1}^2 = \dot{\xi}^2 + \ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \frac{\ell^2}{4}\dot{\vartheta}^2 \quad \text{e} \quad v_{G_2}^2 = \dot{\xi}^2 - \ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta + \frac{\ell^2}{4}\dot{\vartheta}^2.$$

L'energia cinetica, dopo qualche calcolo risulta

$$K = \frac{1}{2}\left(2m\dot{\xi}^2 + m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\left(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta\right) + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2\right).$$

Possiamo quindi determinare anche la lagrangiana

$$\mathcal{L} = K + U = m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\left(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta\right) + \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + 2mg\xi - k\xi^2 + \left(\frac{1}{2}mg\ell - k\ell\xi\right)\left(\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta\right)$$

e da

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

con $q = \xi, \vartheta$ troviamo le equazioni differenziali del moto. Cominciando dalla ξ troviamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 2mg - 2k\xi - k\ell(\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = 2m\dot{\xi} + \frac{1}{2}m\ell\dot{\vartheta}(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = 2m\ddot{\xi} + \frac{1}{2}m\ell\ddot{\vartheta}(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) - \frac{1}{2}m\ell\dot{\vartheta}^2(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta),$$

da cui otteniamo la prima equazione differenziale del moto:

$$2m\ddot{\xi} + \frac{1}{2}m\ell\ddot{\vartheta}(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) + \left(k\ell - \frac{1}{2}m\ell\dot{\vartheta}^2\right)(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta) + 2k\xi = 2mg;$$

per quanto riguarda la ϑ, invece

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{2}m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta) + \left(\frac{1}{2}mg\ell - k\ell\xi\right)(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{1}{2}m\ell\dot{\xi}(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{1}{2}m\ell\ddot{\xi}(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) - \frac{1}{2}m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta) + \frac{2}{3}m\ell^2\ddot{\vartheta},$$

da cui otteniamo la seconda equazione differenziale del moto

$$3\left(m\ddot{\xi} - mg + 2k\xi\right)(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) + 4m\ell\ddot{\vartheta} = 0.$$

D) L'unica posizione di equilibrio che è sempre stabile è $P_2\left(\frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{5}{4}\pi\right)$ e quindi determineremo le equazioni del moto linearizzate attorno a P_2. Dapprima calcoliamo la lagrangiana linearizzata

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}}\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})^{\mathsf{T}}\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)(\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})$$

con $\boldsymbol{q} = [\xi, \vartheta]^{\mathsf{T}}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\xi}, \dot{\vartheta}]^{\mathsf{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = \left[\frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{5}{4}\pi\right]^{\mathsf{T}}$,

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} 2m & \frac{1}{2}m\ell(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) \\ \frac{1}{2}m\ell(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)=\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & \dfrac{2}{3}m\ell^2\end{bmatrix}.$$

Avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta, dopo qualche conto,

$$\widetilde{\mathcal{L}}=m\dot{\xi}^2+\frac{1}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2-k\xi^2+2mg\xi+\sqrt{2}k\ell\xi+\left(\frac{5}{8}\pi k\ell^2-\frac{\sqrt{2}}{4}mg\ell-\frac{k\ell^2}{2}\right)\vartheta^2+$$
$$+\left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\pi mg\ell-\frac{5}{8}\pi k\ell^2\right)\vartheta-\frac{m^2g^2}{k}-\sqrt{2}mg\ell-\frac{k\ell^2}{2}-\frac{25\sqrt{2}}{64}\pi^2mg\ell-\frac{25}{32}\pi^2k\ell^2.$$

Per determinare le equazioni del moto linearizzate basta ripetere il procedimento del punto C) e troviamo

$$2m\ddot{\xi}+2k\xi=2mg+\sqrt{2}k\ell$$

e

$$16m\ell\ddot{\vartheta}+\left(24k\ell+12\sqrt{2}mg-30\pi k\ell\right)\vartheta=15\pi\left(\sqrt{2}mg-k\ell\right).$$

2) La matrice d'inerzia del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$ è data da

$$\mathsf{J}_O=\mathsf{J}_O^{OA}+\mathsf{J}_O^{OB}$$

dove J_O^{OA} e J_O^{OB} sono le matrici d'inerzia delle aste OA e OB prese singolarmente (e rispetto al medesimo sistema di riferimento). Dato che il corpo rigido è piano si ottiene $J_O^{11}+J_O^{22}=J_O^{33}$; inoltre, considerando che xy e yz sono piani di simmetria materiale, otteniamo anche $J_O^{12}=J_O^{13}=J_O^{23}=0$. Ora, ricordando che la formula del momento d'inerzia di un'asta inclinata di una angolo α rispetto ad un asse r passante per O è

$$J_r=\frac{m\ell^2}{3}\operatorname{sen}^2\alpha$$

e visto che sia l'asta OA che l'asta OB sono inclinate di 45° rispetto agli assi x e y, otteniamo facilmente

$$J_O^{OA,11}=J_O^{OA,22}=J_O^{OB,11}=J_O^{OB,22}=\frac{m\ell^2}{3}\operatorname{sen}^2(45°)=\frac{m\ell^2}{6};$$

infine $J_O^{11}=J_O^{11,OA}+J_O^{11,OB}=\dfrac{m\ell^2}{3}$ e chiaramente $J_O^{22}=J_O^{11}$, da cui

$$\mathsf{J}_O=\begin{bmatrix}\dfrac{m\ell^2}{3} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{m\ell^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{2}{3}m\ell^2\end{bmatrix}.$$