Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 10 giugno 2016 a cura di Sara Mastaglio

1) Determiniamo innanzitutto

$$(D-O)=\ell\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x+\ell\operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{e}_y,$$

$$(D-E)=\ell\left(\cos\vartheta-1\right)\boldsymbol{e}_x+\ell\operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{e}_y$$

e, detto G il baricentro della lamina quadrata,

$$(G-O)=\frac{\ell}{2}\left(3\cos\vartheta-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x+\frac{\ell}{2}\left(3\operatorname{sen}\vartheta+\operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y+\frac{\ell}{2}\cos\varphi\boldsymbol{e}_z.$$

1. Per determinare le posizioni di equilibrio ci serve innanzitutto il potenziale

$$\begin{aligned}U=&-mgz_D-mgz_G-\frac{k}{2}|D-E|^2=\\=&-mg\cdot 0-mg\left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)-\frac{k}{2}\left(\ell^2+\ell^2-2\ell^2\cos\vartheta\right)=\\=&-\frac{1}{2}mg\ell\cos\varphi+k\ell^2\cos\vartheta+c.\end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio sono quindi date dal sistema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta}=-k\ell^2\operatorname{sen}\vartheta=0\\ \dfrac{\partial U}{\partial\varphi}=\dfrac{1}{2}mg\ell\operatorname{sen}\varphi=0,\end{cases}$$

da cui si ricavano subito $\operatorname{sen}\vartheta=\operatorname{sen}\varphi=0$ che forniscono le seguenti posizioni di equilibrio:

$$P_1(0,0),\quad P_2(0,\pi),\quad P_3(\pi,0),\quad P_4(\pi,\pi).$$

Per discuterne la stabilità calcoliamo

$$\frac{\partial^2U}{\partial\vartheta^2}=-k\ell^2\cos\vartheta,\quad\frac{\partial^2U}{\partial\vartheta\partial\varphi}=0,\quad\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{2}mgl\cos\varphi,$$

e quindi l'hessiano è

$$\mathcal{H}\left(\vartheta,\varphi\right)=\begin{bmatrix}-k\ell^2\cos\vartheta & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2}mgl\cos\varphi\end{bmatrix}.$$

L'hessiano valutato nelle quattro posizioni di equilibrio è

$$
\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k\ell^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k\ell^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}mgl \end{bmatrix},
$$
$$
\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} k\ell^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} k\ell^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix},
$$

quindi, dato che otteniamo due autovalori negativi solo per P_2, risulta che P_2 è l'unica posizione di equilibrio stabile.

2. La matrice d'inerzia J_O^A dell'asta, tenuto conto del sistema di riferimento $Ox'y'z'$ della figura (con $z \equiv z'$ e l'asse x' ortogonale agli altri due e uscente dal foglio) e della lunghezza 2ℓ dell'asta è

$$
\mathsf{J}_O^A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.
$$

Per determinare la matrice d'inerzia J_O^Q della lamina quadrata dobbiamo utilizzare il teorema di Huygens-Steiner, ossia $\mathsf{J}_O^Q = \mathsf{J}_G^Q + m\left(d^2\mathsf{I} - \boldsymbol{d} \otimes \boldsymbol{d}\right)$, con $\boldsymbol{d} = (G - O) = \left(0, \frac{3}{2}\ell, \frac{\ell}{2}\right)$ e

$$
\mathsf{J}_G^Q = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{bmatrix},
$$

dove J_G^Q è la matrice d'inerzia della lamina quadrata rispetto ad un sistema di riferimento centrato nel baricentro G della lamina e con assi paralleli a quelli indicati in figura (x', y', z'); la matrice d'inerzia cercata è dunque

$$
\mathsf{J}_O^Q = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{4} & -\frac{3}{4}m\ell^2 \\ 0 & -\frac{3}{4}m\ell^2 & \frac{9}{4}m\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{3} & -\frac{3}{4}m\ell^2 \\ 0 & -\frac{3}{4}m\ell^2 & \frac{7}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.
$$

Otteniamo infine la matrice d'inerzia J_O dell'intero corpo rigido per additività:

$$\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_O^A + \mathsf{J}_O^Q = \begin{bmatrix} 4m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m\ell^2}{3} & -\dfrac{3}{4}m\ell^2 \\ 0 & -\dfrac{3}{4}m\ell^2 & \dfrac{11}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

3. Considerando che O per il corpo rigido è un punto fisso, possiamo scrivere l'energia cinetica come

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_O\boldsymbol{\omega},$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del corpo rigido. Dato che J_O è stata calcolata nel punto precedente ci resta da calcolare la velocità angolare, che è data da $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z - \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{y'}$, con $\boldsymbol{e}_z = \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{e}_{x'} + \cos\varphi\boldsymbol{e}_{z'}$ e quindi, espressa rispetto al sistema di riferimento solidale al corpo rigido, diventa

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{e}_{x'} - \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{y'} + \dot{\vartheta}\cos\varphi\boldsymbol{e}_{z'}.$$

Dopo qualche conto l'energia cinetica risulta

$$K = \frac{1}{2}\left(\left(4 - \frac{1}{3}\cos^2\varphi\right)m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{2}m\ell^2\cos\varphi\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + \frac{m\ell^2}{3}\dot{\varphi}^2\right).$$

4. Determiniamo le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile $P_2(0,\pi)$. Calcoliamo

$$\det\left(\omega^2\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) + \mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\right) = 0,$$

con $\overline{\boldsymbol{q}} = (0,\pi)$:

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} 4m\ell^2 - \dfrac{1}{3}m\ell^2\cos^2\varphi & \dfrac{3}{4}m\ell^2\cos\phi \\ \dfrac{3}{4}m\ell^2\cos\varphi & \dfrac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix}$$

che calcolata in $(0,\pi)$ diventa

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{11}{3}m\ell^2 & -\dfrac{3}{4}m\ell^2 \\ -\dfrac{3}{4}m\ell^2 & \dfrac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix};$$

avendo già calcolato l'hessiano nel primo punto, otteniamo

$$\det\begin{bmatrix} \dfrac{11}{3}m\ell^2\omega^2 - k\ell^2 & -\dfrac{3}{4}m\ell^2\omega^2 \\ -\dfrac{3}{4}m\ell^2\omega^2 & \dfrac{m\ell^2}{3}\omega^2 - \dfrac{1}{2}mg\ell \end{bmatrix} = 0,$$

che ci dà l'equazione

$$95m\ell\omega^4 - 24\,(11mg + 2k\ell)\,\omega^2 + 72gk = 0.$$

5. La quantità di moto del sistema è data da

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_A + \boldsymbol{P}_Q = m\boldsymbol{v}_D + m\boldsymbol{v}_G;$$

le due velocità sono

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_D =& -\ell\dot\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_x + \ell\dot\vartheta\cos\vartheta\boldsymbol{e}_y,\\
\boldsymbol{v}_G =& \frac{\ell}{2}\left(-3\dot\vartheta\operatorname{sen}\vartheta - \dot\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta - \dot\vartheta\operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x +\\
&+\frac{\ell}{2}\left(3\dot\vartheta\cos\vartheta + \dot\varphi\cos\varphi\cos\vartheta - \dot\vartheta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y - \frac{\ell}{2}\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{e}_z,
\end{aligned}$$

e quindi la quantità di moto è

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} =& -\frac{m\ell}{2}\left(5\dot\vartheta\operatorname{sen}\vartheta + \dot\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta + \dot\vartheta\operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x +\\
+\frac{m\ell}{2}&\left(5\dot\vartheta\cos\vartheta + \dot\varphi\cos\varphi\cos\vartheta - \dot\vartheta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y - \frac{m\ell}{2}\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{e}_z.
\end{aligned}$$

2) Per ottenere una trasformazione canonica poniamo le parentesi di Poisson uguali a 1:

$$[Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

con

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = 2qe^{-\frac{p}{kq}} + \frac{p}{k}e^{-\frac{p}{kq}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{q}{k}e^{-\frac{p}{kq}}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{p}{kq^2}e^{\frac{p}{kq}}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{1}{kq}e^{\frac{p}{kq}}\ ,$$

che ci fornisce subito $k = 2$.

La trasformazione, quindi, diventa

$$\begin{cases} Q = Q(q,p) = q^2 e^{-\frac{p}{2q}} \\ P = P(q,p) = e^{\frac{p}{2q}} \end{cases}.$$

Troviamo ora una funzione generatrice $F(q,P)$:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P}$$

quindi $p = 2q\log P = \dfrac{\partial F}{\partial q}$, da cui si può ricavare $F(q,P) = q^2\log P + g(P)$. Inoltre

$$\frac{q^2}{P} + g'(P) = \frac{\partial F}{\partial P} = Q = q^2 e^{-\log P} = \frac{q^2}{P}$$

da cui, confrontando il primo e l'ultimo termine, risulta che $g'(P) = 0$ e quindi $g(P) =$ costante. In definitiva

$$F(q, P) = q^2 \log P + \text{costante},$$

in particolare, scegliendo la costante $= 0$, troviamo

$$F(q, P) = q^2 \log P.$$