Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 24 giugno 2016 a cura di Sara Mastaglio

1) I parametri lagrangiani, come suggerito dalla figura, sono $\xi := \overline{PA} \in [0, 2\ell]$ e $\vartheta := O\widehat{A}B \in [0, 2\pi)$. Le coordinate significative, posto G il baricentro dell'asta, sono

$$(G - O) = \ell \cos\vartheta \boldsymbol{e}_x - \ell \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_y,$$

$$(P - O) = (2\ell - \xi)\cos\vartheta \boldsymbol{e}_x - \xi \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_y,$$

$$(P - C) = -\xi \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_y.$$

Il potenziale è dato da

$$U = -mgy_P - mgy_G - \frac{k}{2}|P - C|^2 = mg\ell \operatorname{sen}\vartheta + mg\xi \operatorname{sen}\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 \operatorname{sen}^2\vartheta.$$

Le posizioni di equilibrio si trovano dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg \operatorname{sen}\vartheta - k\xi \operatorname{sen}^2\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = (mg\ell + mg\xi)\cos\vartheta - k\xi^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta = 0, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\vartheta\,(mg - k\xi \operatorname{sen}\vartheta) = 0 \\ \cos\vartheta\,((mg\ell + mg\xi) - k\xi^2 \operatorname{sen}\vartheta) = 0, \end{cases}$$

da cui si ricavano

- $\operatorname{sen}\vartheta = 0$ dà $\xi = -\ell$ che non è accettabile;
- $\cos\vartheta = 0$ e quindi $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ per cui ottendiamo $\xi = \dfrac{mg}{k}$ che è accettabile solo se $\dfrac{mg}{k} < 2\ell$; per $\vartheta = \dfrac{3}{2}\pi$ otteniamo $\xi = -\dfrac{mg}{k}$, che essendo negativo non è accettabile;
- dalla prima delle due equazioni si ha $\xi \operatorname{sen}\vartheta = \dfrac{mg}{k}$ che sostituita nella seconda dà l'assurdo $mg\ell = 0$.

L'unica posizione di equilibrio è quindi $P\left(\dfrac{mg}{k};\dfrac{\pi}{2}\right)$ con $\dfrac{mg}{k}<2\ell$.
Valutiamo la stabilità di P. L'hessiano è costituito dagli elementi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}=-k\operatorname{sen}^2\vartheta,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial\vartheta}=mg\cos\vartheta-2k\xi\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}=-(mg\ell+mg\xi)\operatorname{sen}\vartheta-k\xi^2\cos^2\vartheta+k\xi^2\operatorname{sen}^2\vartheta,$$

quindi l'hessiano calcolato in P è

$$\mathcal{H}(P)=\begin{bmatrix}-k & 0\\ 0 & -mg\ell\end{bmatrix}$$

che con due autovalori negativi ci dà una posizione di equilibrio stabile.
2) Le posizioni di confine si hanno per $\xi=0$ e $\xi=2\ell$.

- Per la posizione $\overline{P}_1(0,\overline{\vartheta})$ le velocità virtuali sono $w_\xi\geq 0$ e $w_\vartheta\in\mathbb{R}$, quindi si deve avere

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial\xi}\leq 0\\ \dfrac{\partial U}{\partial\vartheta}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}mg\operatorname{sen}\overline{\vartheta}\leq 0\\ mg\ell\cos\overline{\vartheta}=0\end{cases}$$

  che ci dà la soluzione $\overline{\vartheta}=\dfrac{3}{2}\pi$ e quindi la posizione di equilibrio di confine è $\overline{P}_1\left(0,\dfrac{3}{2}\pi\right)$.

- Per la posizione $\overline{P}_2(2\ell,\overline{\vartheta})$ le velocità virtuali sono $w_\xi\leq 0$ e $w_\vartheta\in\mathbb{R}$, quindi si deve avere

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial\xi}\geq 0\\ \dfrac{\partial U}{\partial\vartheta}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}\overline{\vartheta}\left(mg-2k\ell\operatorname{sen}\overline{\vartheta}\right)\geq 0\\ \cos\overline{\vartheta}\left(3mg\ell-4k\ell^2\operatorname{sen}\overline{\vartheta}\right)=0\end{cases}$$

che ci dà come unica soluzione accettabile $\overline{\vartheta}=\dfrac{\pi}{2}$ con $k\leq\dfrac{mg}{2\ell}$ e quindi la posizione di equilibrio di confine è $\overline{P}_2\left(2\ell,\dfrac{\pi}{2}\right)$.
3) Per determinare la lagrangiana del sistema dobbiamo prima calcolare l'energia cinetica:

$$K=\frac{1}{2}mv_P^2+\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathsf{J}_G\boldsymbol{\omega}.$$

Calcoliamo le velocità:

$$\boldsymbol{v}_P=\left(-\dot{\xi}\cos\vartheta-(2\ell-\xi)\,\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x-\left(\dot{\xi}\operatorname{sen}\vartheta+\xi\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y$$

e quindi $v_P^2 = \dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 + 4\ell^2\dot\vartheta^2 \operatorname{sen}^2\vartheta + 4\ell\dot\xi\dot\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - 4\ell\xi\dot\vartheta^2 \operatorname{sen}^2\vartheta$,

$$\boldsymbol{v}_G = -\ell\dot\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_x - \ell\dot\vartheta\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y$$

e quindi $v_G^2 = \ell^2\dot\vartheta^2$; inoltre la velocità angolare è $\boldsymbol{\omega} = \dot\vartheta\boldsymbol{e}_z$ e l'unico momento d'inerzia che ci interessa è $J_G^{33} = \dfrac{m\ell^2}{3}$. L'energia cinetica risulta

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot\xi^2 + 4\ell \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\,\dot\xi\dot\vartheta + \left(\xi^2 + \frac{4}{3}\ell^2 + 4\ell^2\operatorname{sen}^2\vartheta - 4\ell\xi\operatorname{sen}^2\vartheta\right)\dot\vartheta^2\right).$$

Infine la lagrangina, che è data da $\mathcal{L} = K + U$, è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot\xi^2 + 2m\ell\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\,\dot\xi\dot\vartheta + \frac{1}{2}m\xi^2\dot\vartheta^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \\ + 2m\ell^2\operatorname{sen}^2\vartheta\dot\vartheta^2 - 2m\ell\xi\operatorname{sen}^2\vartheta\dot\vartheta^2 + mg\ell\operatorname{sen}\vartheta + mg\xi\operatorname{sen}\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2\operatorname{sen}^2\vartheta.$$

4)La posizione di equilibrio stabile è $P\left(\dfrac{mg}{k}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Per determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni calcoliamo

$$\det\left(\omega^2 \mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) + \mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\right) = 0,$$

con $\overline{\boldsymbol{q}} = \left(\dfrac{mg}{k}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. La matrice associata alla forma quadratica dell'energia cinetica è

$$\mathsf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} m & 2\ell\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta \\ 2\ell\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta & m\left(\xi^2 + \frac{4}{3}\ell^2 + 4\ell^2\operatorname{sen}^2\vartheta - 4\ell\xi\operatorname{sen}^2\vartheta\right)\end{bmatrix},$$

che calcolata nella pozione di equilibrio stabile diventa

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m\left(\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{16}{3}\ell^2 - \frac{4mg\ell}{k}\right)\end{bmatrix};$$

la matrice hessiana è stata calcolata in precedenza e quindi dopo aver calcolato il determinante e imposto che sia nullo, risulta che le pulsazioni delle piccole oscillazioni sono soluzioni dell'equazione

$$m\left(3m^2g^2 + 16k^2\ell^2 - 12mg\ell k\right)\omega^4 - \left(3m^2g^2k + 16k^3\ell^2 - 9mg\ell k^2\right)\omega^2 + 3k^3g\ell = 0.$$

2) Per determinare la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$ dobbiamo prima calcolare la matrice d'inerzia baricentrale e spostarci in O con Huygens-Steiner. Pensiamo quindi al sistema di riferimento $Gx'y'z'$ con assi paralleli a x, y, z e centrato nel baricentro G del corpo

rigido. Per applicare Huygens-Steiner notiamo che il corpo rigido è costituito dall'asta e dal punto materiale entrambi di massa m, quindi l'intero corpo rigido ha massa $2m$ e otteniamo

$$\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_G + 2m\left(d^2\mathsf{I} - \boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{d}\right).$$

L'asta è inclinata di $\pi/4$ rispetto agli assi x' e y' e quindi

$$J_G^{xx} = \frac{m(2\ell)^2}{12}\operatorname{sen}^2(\pi/4) = \frac{m\ell^2}{6},\quad J_G^{yy} = \frac{m(2\ell^2)}{12}\cos^2(\pi/4) = \frac{m\ell^2}{6},\quad J_G^{zz} = J_G^{xx} + J_G^{yy} = \frac{m\ell^2}{3},$$

$$J_G^{xy} = -\frac{m(2\ell)^2}{12}\operatorname{sen}(\pi/4)\cos(\pi/4) = -\frac{m\ell^2}{6},\quad J_G^{xz} = J_G^{yz} = 0,$$

quindi

$$\mathsf{J}_G = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{6} & -\frac{m\ell^2}{6} & 0 \\ -\frac{m\ell^2}{6} & \frac{m\ell^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Ora ci serve la distanza

$$\boldsymbol{d} = (G-O) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, -\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, 0\right)$$

da cui $d^2 = \ell^2$ e

$$\boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \frac{\ell^2}{2} & -\frac{\ell^2}{2} & 0 \\ -\frac{\ell^2}{2} & \frac{\ell^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Infine otteniamo

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{6} & -\frac{m\ell^2}{6} & 0 \\ -\frac{m\ell^2}{6} & \frac{m\ell^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m\ell^2 & m\ell^2 & 0 \\ m\ell^2 & m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6}m\ell^2 & \frac{5}{6}m\ell^2 & 0 \\ \frac{5}{6}m\ell^2 & \frac{7}{6}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$