Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 15 luglio 2016
a cura di Sara Mastaglio

1) Uno dei parametri lagrangiani è già suggerito in figura, cioè $\vartheta := z^{-}\widehat{B}C \in [\,0, 2\pi\,)$, mentre come secondo parametro lagrangiano possiamo scegliere $\xi := \overline{AO} \in \mathbb{R}$.
Denotiamo con G il baricentro della lamina quadrata; per il seguito ci serviranno

$$z_G = -\frac{\ell}{2}\cos\vartheta$$

$$(D - E) = \xi\boldsymbol{e}_x + \ell\operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{e}_y - (\ell + \ell\cos\vartheta)\,\boldsymbol{e}_z$$

e dunque $|D - E|^2 = \xi^2 + 2\ell^2 + 2\ell^2\cos\vartheta$.
1. Il potenziale risulta

$$U = -mgz_G - \frac{k}{2}|D - E|^2 = \frac{1}{2}mg\ell\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 - k\ell^2\cos\vartheta + c.$$

Le posizioni di equilibrio sono date dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = \left(-\dfrac{1}{2}mg\ell + k\ell^2\right)\operatorname{sen}\vartheta = 0 \end{cases}$$

che ci dà $\xi = 0$ e $\operatorname{sen}\vartheta = 0$ da cui $\vartheta = 0, \pi$; le due posizioni di equilibrio sono quindi

$$P_1(0, 0) \quad \text{e} \quad P_2(0, \pi).$$

2. Determiniamo l'hessiano:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = \left(-\frac{1}{2}mg\ell + k\ell^2\right)\cos\vartheta,$$

quindi, calcolato nelle posizioni di equilibrio, otteniamo

$$\mathcal{H}\,(P_1) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2}mg\ell + k\ell^2 \end{bmatrix}$$

quindi P_1 è una posizione di equilibrio stabile se $\mathcal{H}\,(P_1)$ ha due autovalori negativi, quindi se $\frac{1}{2}mg\ell - k\ell^2 < 0$, cioè se $k < \dfrac{mg}{2\ell}$;

$$\mathcal{H}\,(P_2) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2}mg\ell - k\ell^2 \end{bmatrix}$$

quindi P_2 è una posizione di equilibrio stabile se $k > \dfrac{mg}{2\ell}$.

3. Per determinare la lagrangiana del sistema dobbiamo prima calcolare l'energia cinetica, che in questo caso particolare, dato che la velocità di A si mantiene sempre parallela alla velocità angolare, possiamo scrivere come

$$K = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_A\boldsymbol{\omega}$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare della lamina quadrata e J_A è la matrice d'inerzia della lamina calcolata rispetto ad un sistema di riferimento centrato in A. La velocità di A è $\boldsymbol{v}_A = \dot{\xi}\boldsymbol{e}_x$, quindi $v_A^2 = \dot{\xi}^2$, mentre $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_x$ e la matrice d'inerzia è

$$\begin{bmatrix} \dfrac{m\ell^2}{3} & -\dfrac{m\ell^2}{4} & 0 \\ -\dfrac{m\ell^2}{4} & \dfrac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

L'energia cinetica, dopo qualche semplice conto, risulta

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{m\ell^2}{6}\dot{\vartheta}^2$$

e quindi la lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = U + K = \frac{1}{2}mg\ell\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 - k\ell^2\cos\vartheta + \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{m\ell^2}{6}\dot{\vartheta}^2.$$

4. Determiniamo le equazioni del moto linearizzate attorno alla posizione $P_1(0,0)$, stabile per $k < mg/2\ell$. Calcoliamo la lagrangiana linearizzata

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}}\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})^{\mathsf{T}}\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)(\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})$$

con $\boldsymbol{q} = [\vartheta, \varphi]^{\mathsf{T}}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}]^{\mathsf{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = [0,0]^{\mathsf{T}}$,

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \mathsf{J}(\overline{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \dfrac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix};$$

avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{m\ell^2}{6}\dot{\vartheta}^2 - \frac{k}{2}\xi^2 + \frac{\ell}{4}\left(2k\ell - mg\right)\vartheta^2.$$

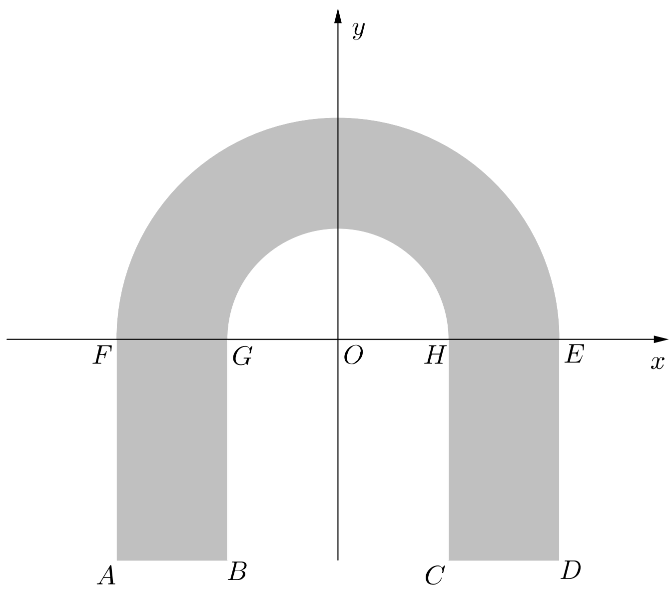
Andando a scrivere

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \boldsymbol{q}}$$

otteniamo le equazioni del moto linearizzate:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -\dfrac{k}{m}\xi \\ \ddot{\vartheta} = \dfrac{3\,(2k\ell - mg)}{2m\ell}\vartheta. \end{cases}$$

2)



Con riferimento alla figura, indichiamo con $\mathcal{L}_1$ il rettangolo $ADEF$, con $\mathcal{L}_2$ il rettangolo $BCHG$, con $\mathcal{L}_3$ il semicerchio di raggio $\overline{OE}$ e con $\mathcal{L}_4$ quello di raggio $\overline{OH}$; in questo modo la lamina data $\mathcal{L}$ è ottenibile per additività (e sottrattività) come $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_4$.

Le masse delle quattro lamine, considerando che la lamina $\mathcal{L}$ è omogenea con densità costante ρ, sono

$$m_1 = \rho 8\ell^2,\ m_2 = \rho 4\ell^2,\ m_3 = \rho 2\pi\ell^2,\ m_4 = \rho\frac{\pi\ell^2}{2};$$

l'ascissa del baricentro di $\mathcal{L}$, per ragioni di simmetria, è chiaramente $\overline{x} = 0$, mentre le ordinate dei baricentri delle quattro lamine sono

$$y_1 = -\ell,\ y_2 = -\ell,\ y_3 = \frac{8\ell}{3\pi},\ y_4 = \frac{4\ell}{3\pi}.$$

L'ordinata del baricentro dell'intera lamina $\mathcal{L}$ è

$$\overline{y} = \frac{m_1 y_1 - m_2 y_2 + m_3 y_3 - m_4 y_4}{m}$$

dove la massa totale $m = m_1 - m_2 + m_3 - m_4$; quindi, dopo qualche conto, otteniamo

$$\overline{y} = \frac{4\ell}{3\,(8+3\pi)}.$$

Le coordinate del baricentro di $\mathcal{L}$ sono quindi

$$\left(0, \frac{4\ell}{3\,(8+3\pi)}\right).$$

3) Procediamo come nell'esercizio 2) sfruttando l'additività delle matrici d'inerzia. Come prima cosa indichiamo con m la massa totale, cioè

$$m = \rho\left(\frac{8+3\pi}{2}\right)\ell^2,$$

da cui si può ricavare la densità di massa

$$\rho = \frac{2m}{(8+3\pi)\,\ell^2};$$

dato che la densità di massa è la stessa per tutte e quattro le lamine che compongono $\mathcal{L}$ e avendo già calcolato le singole masse nel punto precedente, possiamo sostituire la ρ e ottenere le singole masse in dipedenza da m:

$$m_1 = \frac{16m}{8+3\pi},\;\; m_2 = \frac{8m}{8+3\pi},\;\; m_3 = \frac{4\pi m}{8+3\pi},\;\; m_4 = \frac{\pi m}{8+3\pi}.$$

Innanzitutto, per ragioni di simmetria di $\mathcal{L}$ rispetto al piano yz e poiché la lamina è piana, i prodotti d'inerzia sono tutti nulli e quindi la matrice d'inerzia che cerchiamo sarà del tipo

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$$

con $J_{zz} = J_{xx} + J_{yy}$. Occupiamoci di J_{xx} che sarà dato da $J^1_{xx} - J^2_{xx} + J^3_{xx} - J^4_{xx}$, dove questi ultimi momenti d'inerzia sono tutti fatti rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$:

$$J^1_{xx} = \frac{4}{3}m_1\ell^2, \quad J^2_{xx} = \frac{4}{3}m_2\ell^2, \quad J^3_{xx} = m_3\ell^2, \quad J^4_{xx} = \frac{m_4\ell^2}{4},$$

quindi

$$J_{xx} = \frac{4}{3}m_1\ell^2 - \frac{4}{3}m_2\ell^2 + m_3\ell^2 - \frac{m_4\ell^2}{4} = \frac{64m\ell^2}{3(8+3\pi)} - \frac{32m\ell^2}{3(8+3\pi)} + \frac{4\pi m\ell^2}{8+3\pi} - \frac{\pi m\ell^2}{4(8+3\pi)} = \frac{(128+45\pi)}{12(8+3\pi)}m\ell^2.$$

Analogamente J_{yy} sarà dato da $J_{yy}^1 - J_{yy}^2 + J_{yy}^3 - J_{yy}^4$ con

$$J_{yy}^1 = \frac{4}{3}m_1\ell^2, \quad J_{yy}^2 = \frac{m_2\ell^2}{3}, \quad J_{yy}^3 = m_3\ell^2, \quad J_{yy}^4 = \frac{m_4\ell^2}{4},$$

quindi

$$J_{yy} = \frac{4}{3}m_1\ell^2 - \frac{m_2\ell^2}{3} + m_3\ell^2 - \frac{m_4\ell^2}{4} = \frac{64m\ell^2}{3(8+3\pi)} - \frac{8m\ell^2}{3(8+3\pi)} + \frac{4\pi m\ell^2}{8+3\pi} - \frac{\pi m\ell^2}{4(8+3\pi)} = \frac{(224+45\pi)}{12(8+3\pi)}m\ell^2.$$

Infine

$$J_{zz} = J_{xx} + J_{yy} = \frac{(176+45\pi)}{6(8+3\pi)}m\ell^2,$$

quindi

$$\mathsf{J}_O = \frac{m\ell^2}{12(8+3\pi)}\begin{bmatrix} 128+45\pi & 0 & 0 \\ 0 & 224+45\pi & 0 \\ 0 & 0 & 352+90\pi \end{bmatrix}.$$