Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 9 giugno 2017 a cura di Sara Mastaglio

1) Un parametro lagrangiano è già fornito dall'esercizio, cioè $\vartheta \in [0, 2\pi]$, mentre come secondo parametro lagrangiano possiamo scegliere $\xi := \overline{PB} \in [0, 2R]$, dove le posizioni $\xi = 0$ e $\xi = 2R$ sono di confine.
Chiamiamo poi C il baricentro del disco, G il baricentro dell'asta e scriviamo i vettori posizione

$$\begin{aligned}
(C - O) &= R \operatorname{sen} \vartheta \boldsymbol{e}_x - R \cos \vartheta \boldsymbol{e}_y, \\
(G - O) &= 3R \operatorname{sen} \vartheta \boldsymbol{e}_x - R \cos \vartheta \boldsymbol{e}_y, \\
(P - O) &= (4R - \xi) \operatorname{sen} \vartheta \boldsymbol{e}_x - \xi \cos \vartheta \boldsymbol{e}_y.
\end{aligned}$$

1. Il potenziale è dato dalla somma del potenziale delle forze peso del disco, dell'asta e del punto e dal potenziale della forza elastica:

$$\begin{aligned}
U = U_{disco} + U_{asta} + U_P + U_{el} &= -mgy_C - mgy_G - mgy_P - \frac{k}{2}|P - B|^2 = \\
&= -mg(-R\cos\vartheta) - mg(-R\cos\vartheta) - mg(-\xi\cos\vartheta) - \frac{k}{2}\xi^2 = \\
&= 2mgR\cos\vartheta + mg\xi\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + c.
\end{aligned}$$

Troviamo le posizioni di equilibrio:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg\cos\vartheta - k\xi = 0 \\
\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -2mgR\operatorname{sen}\vartheta - mg\xi\operatorname{sen}\vartheta = 0;
\end{cases}$$

dalla prima equazione ricaviamo $\xi := \frac{mg}{k}\cos\vartheta$ che sostituita nella seconda equazione dà

$$mg\operatorname{sen}\vartheta\left(2R + \frac{mg}{k}\cos\vartheta\right) = 0$$

da cui $\operatorname{sen}\vartheta = 0$ e $\cos\vartheta_3 = -\frac{2kR}{mg}$; dalla prima equazione ricaviamo $\vartheta_1 = 0$ e $\vartheta_2 = \pi$ a cui corrispondono $\xi_1 = \frac{mg}{k}$ e $\xi_2 = -\frac{mg}{k}$, che essendo negativa non è accettabile; notiamo che affinché ξ_1 sia accettabile deve valere la condizione $\frac{mg}{k} < 2R$, cioè $\lambda < 2$. Infine, utilizzando la seconda equazione troviamo $\xi_3 = -2R$, che essendo negativo non è accettabile. L'unica posizione di equilibrio ordinaria è dunque

$$P\left(\frac{mg}{k}, 0\right).$$

Calcoliamo ora l'hessiano:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = -mg \operatorname{sen} \vartheta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = -2mgR \cos\vartheta - mg\xi \cos\vartheta$$

che calcolato in P è

$$\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -2mg - \dfrac{m^2 g^2}{k} \end{bmatrix};$$

dato che $\mathcal{H}(P)$ ha due autovalori negativi, P è una posizione di equilibrio stabile.

2. Cerchiamo le posizioni di confine $\overline{P}_1 \left(0, \overline{\vartheta}_1\right)$ e $\overline{P}_2 \left(2R, \overline{\vartheta}_2\right)$.

Per quanto riguarda $\overline{P}_1$ le velocità virtuali sono $w_\xi \geq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi si dovrà avere

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right|_{\overline{P}_1} = mg\cos\overline{\vartheta}_1 \leq 0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}\right|_{\overline{P}_1} = -2mgR\operatorname{sen}\overline{\vartheta}_1 = 0 \end{cases};$$

tale sistema ha come unica soluzione accettabile $\overline{P}_1(0, \pi)$.

Nel caso di $\overline{P}_2$ le velocità virtuali sono $w_\xi \leq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi si dovrà avere

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right|_{\overline{P}_2} = mg\cos\overline{\vartheta}_2 - 2kR \geq 0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}\right|_{\overline{P}_2} = -2mgR\operatorname{sen}\overline{\vartheta}_2 - 2mgR\operatorname{sen}\overline{\vartheta}_2 = 0 \end{cases};$$

tale sistema ci dà come unica soluzione accettabile $\overline{\vartheta} = 0$ con la condizione $\lambda \geq 2$, quindi la posizone di confine è $\overline{P}_2(2R, 0)$ se $\lambda \geq 2$.

3. L'energia cinetica è data dalla somma delle energie cinetiche di disco, asta e punto:

$$K = K_{disco} + K_{asta} + K_P.$$

Le velocità angolari sono $\boldsymbol{\omega}_{disco} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ mentre $\boldsymbol{\omega}_{asta} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$; le velocità sono

$$\boldsymbol{v}_G = 3R\dot{\vartheta}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x + R\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{e}_y,$$

$$\boldsymbol{v}_P = \left(-\dot{\xi}\operatorname{sen}\vartheta + (4R-\xi)\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x + \left(-\dot{\xi}\cos\vartheta + \xi\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y.$$

I tre contributi dell'energia cinetica, tenendo conto che O è un punto fisso per il disco, sono

$$K_{disco} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{disco} \cdot \mathsf{J}_O \boldsymbol{\omega}_{disco} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2\right),$$

$$K_{asta} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{asta}\cdot \mathsf{J}_G\boldsymbol{\omega}_{asta} = \frac{1}{2}\left(9R^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + R^2\dot{\vartheta}^2\operatorname{sen}^2\vartheta\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m(2R)^2}{12}\dot{\vartheta}^2\right),$$

$$K_P = \frac{1}{2}mv_P^2 = \frac{1}{2}\Big(\dot{\xi}^2\operatorname{sen}^2\vartheta + (4R-\xi)^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + \dot{\xi}^2\cos^2\vartheta + \xi^2\dot{\vartheta}^2\operatorname{sen}^2\vartheta + \\ -2(4R-\xi)\dot{\xi}\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - 2\xi\dot{\xi}\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\Big),$$

che sommati, dopo qualche conto, danno

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{6}mR^2\dot{\vartheta}^2 + 24mR^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + m\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2 - 8mR\xi\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta - 8mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\right).$$

4. La lagrangiana linearizzata si ottiene da

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}}\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})^{\mathsf{T}}\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})$$

con $\boldsymbol{q} = [\xi,\vartheta]^{\mathsf{T}}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\xi},\dot{\vartheta}]^{\mathsf{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = \left[\frac{mg}{k},0\right]^{\mathsf{T}}$ con $\lambda < 2$,

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} m & -4mR\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta \\ -4R\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta & \frac{17}{6}mR^2 + 24mR^2\cos^2\vartheta + \xi^2 - 8mR\xi\cos^2\vartheta \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{161}{6}mR^2 + \frac{m^2g^2}{k} - 8\frac{m^2gR}{k} \end{bmatrix}.$$

Avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta, dopo qualche conto,

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2}\left(-k\xi^2 - \frac{mg}{k} + 2mg\xi - 2mg\vartheta^2 - \frac{m^2g^2}{k}\vartheta^2 + m\dot{\xi}^2 + \frac{161}{6}mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m^2g^2}{k}\dot{\vartheta}^2 - 8\frac{m^2gR}{k}\vartheta^2\right).$$

2) La matrice richiesta è data dalla somma delle matrici dei quattro rettangoli, cioè

$$\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_O^1 + \mathsf{J}_O^2 + \mathsf{J}_O^3 + \mathsf{J}_O^4,$$

dove la numerazione delle matrici d'inerzia si riferisce ai rettangoli che si trovano rispettivamente nel 1°, 2°, 3° e 4° quadrante.

Essendo una lamina piana possiamo subito dedurre che $J_{13} = J_{23} = 0$. Possiamo anche osservare che

$$J_{12}^1 = J_{12}^3 = -\frac{ma^2}{2},$$

mentre

$$J_{12}^2 = J_{12}^4 = \frac{ma^2}{2}$$

e quindi

$$J_{12} = J^{1}_{12} + J^{2}_{12} + J^{3}_{12} + J^{4}_{12} = 0.$$

Gli altri momenti d'inerzia sono:

$$J^{1}_{11} = J^{3}_{11} = \frac{ma^2}{3}, \qquad J^{1}_{22} = J^{3}_{22} = \frac{4}{3}ma^2,$$

$$J^{2}_{11} = J^{4}_{11} = \frac{4}{3}ma^2, \qquad J^{2}_{22} = J^{4}_{22} = \frac{ma^2}{3},$$

quindi

$$J_{11} = J^{1}_{11} + J^{2}_{11} + J^{3}_{11} + J^{4}_{11} = \frac{10}{3}ma^2$$

$$J_{22} = J^{1}_{22} + J^{2}_{22} + J^{3}_{22} + J^{4}_{22} = \frac{10}{3}ma^2$$

ed infine

$$J_{33} = J_{11} + J_{22} = \frac{10}{3}ma^2 + \frac{10}{3}ma^2 = \frac{20}{3}ma^2,$$

da cui

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \frac{10}{3}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3}ma^2 \end{bmatrix}.$$

Dalla matrice trovata si può dedurre che la lamina ha una struttura giroscopica.