Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 30 giugno 2017 a cura di Sara Mastaglio

1) Denotiamo con G il baricentro dell'asta e con C il centro del disco.

1. Per determinare la matrice d'inerzia richiesta dovremo sommare le matrici d'inerzia dell'asta e del disco, ognuna rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$.

Quella dell'asta, tenendo conto che è lunga $4R$, è

$$\mathsf{J}_O^{asta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Occupiamoci ora della matrice d'inerzia del disco. Rispetto al suo baricentro la matrice è

$$\mathsf{J}_C^{disco} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Dobbiamo quindi spostarci nel polo O utilizzando la formula di Huygens-Steiner. Abbiamo che

$$\boldsymbol{d} = (C - O) = (4R, -R, 0)$$

e quindi $d^2 = 17R^2$; applicando la formula otteniamo

$$\mathsf{J}_O^{disco} = \mathsf{J}_C^{disco} + m\,(d^2\mathsf{I} - \boldsymbol{d} \otimes \boldsymbol{d}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix} + m \left(\begin{bmatrix} 17R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 17R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 17R^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16R^2 & -4R^2 & 0 \\ -4R^2 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Quindi

$$\mathsf{J}_O^{disco} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}mR^2 & 4mR^2 & 0 \\ 4mR^2 & \frac{65}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{35}{2}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Infine

$$\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_O^{asta} + \mathsf{J}_O^{disco} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}mR^2 & 4mR^2 & 0 \\ 4mR^2 & \frac{259}{12}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{137}{6}mR^2 \end{bmatrix}.$$

2. Innanzitutto determiniamo le quote dei baricentri:

$$z_G = 2R \operatorname{sen} \vartheta,$$

$$z_C = 4R \operatorname{sen} \vartheta - R \cos \varphi \cos \vartheta$$

e il vettore

$$(A - E) = 4R(\cos \vartheta - 1)\boldsymbol{e}_y + 4R \operatorname{sen} \vartheta \boldsymbol{e}_z,$$

da cui $|A - E|^2 = 32R^2 - 32R^2 \cos \vartheta$.
Il potenziale è quindi dato da

$$U = -mgz_G - mgz_C - \frac{k}{2}|A - E|^2 = -6mgR \operatorname{sen} \vartheta + mgR \cos \varphi \cos \vartheta + 16kR^2 \cos \vartheta + c$$

da cui

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -6mgR \cos \vartheta - mgR \cos \varphi \operatorname{sen} \vartheta - 16kR^2 \operatorname{sen} \vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = -mgR \operatorname{sen} \varphi \cos \vartheta = 0; \end{cases}$$

andando a risolvere il sistema si trovano le posizioni di equilibrio

$$\begin{gathered} P_1\left(\frac{\pi}{2}; \arccos\left(-\frac{16}{\lambda}\right)\right), \quad P_2\left(\frac{\pi}{2}; -\arccos\left(-\frac{16}{\lambda}\right)\right), \\ P_3\left(\frac{3}{2}\pi; \arccos\left(-\frac{16}{\lambda}\right)\right), \quad P_4\left(\frac{3}{2}\pi; -\arccos\left(-\frac{16}{\lambda}\right)\right), \\ P_5\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{6\lambda}{16+\lambda}\right); 0\right), \quad P_6\left(\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{6\lambda}{16+\lambda}\right); 0\right), \\ P_7\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{6\lambda}{\lambda - 16}\right); \pi\right), \quad P_8\left(\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{6\lambda}{\lambda - 16}\right); \pi\right), \end{gathered}$$

con $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ valide se $\lambda > 16$.
Calcoliamo la matrice hessiana per discuterne la stabilità:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = 6mgR \operatorname{sen} \vartheta - mgR \cos \varphi \cos \vartheta - 16kR^2 \cos \vartheta,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta\partial\varphi} = mgR\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = -mgR\cos\varphi\cos\vartheta,$$

da cui, valutando l'hessiano nelle varie posizioni di equilibrio, troviamo

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} 6mgR & mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} \\ mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

quindi P_1 è instabile dato che la traccia è positiva;

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} 6mgR & -mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} \\ -mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

quindi P_2 è instabile dato che la traccia è positiva;

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} -6mgR & -mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} \\ -mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

quindi P_3 è instabile dato che il determinante è negativo;

$$\mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} -6mgR & mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} \\ mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

quindi P_4 è instabile dato che il determinante è negativo; posto

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{6\lambda}{16+\lambda}\right)^2}} > 0,$$

risulta

$$\mathcal{H}(P_5) = \gamma\begin{bmatrix} -\frac{36mgR\lambda}{16+\lambda} - mgR - 16kR^2 & 0 \\ 0 & -mgR \end{bmatrix}$$

e, dato che gli autovalori sono entrambi negativi, P_5 è stabile;

$$\mathcal{H}(P_6) = \gamma \begin{bmatrix} \dfrac{36mgR\lambda}{16+\lambda} + mgR + 16kR^2 & 0 \\ 0 & mgR \end{bmatrix}$$

e, dato che gli autovalori sono entrambi positivi, P_6 è instabile; posto

$$\delta := \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{6\lambda}{\lambda - 16}\right)^2}} > 0,$$

risulta, nel caso $\lambda > 16$,

$$\mathcal{H}(P_7) = \delta \begin{bmatrix} \dfrac{36mgR\lambda}{\lambda - 16} + mgR - 16kR^2 & 0 \\ 0 & mgR \end{bmatrix}$$

e, dato che almeno un autovalore è positivo, P_7 è instabile; il caso $\lambda < 16$ è del tutto analogo; nel caso $\lambda > 16$

$$\mathcal{H}(P_8) = \delta \begin{bmatrix} -\dfrac{36mgR\lambda}{\lambda - 16} - mgR + 16kR^2 & 0 \\ 0 & -mgR \end{bmatrix}$$

e, dato che $-\dfrac{36mgR\lambda}{\lambda - 16} - mgR + 16kR^0$ è una quantità sempre negativa e quindi entrambi gli autovalori sono negativi, P_8 è stabile; nel caso $\lambda < 16$

$$\mathcal{H}(P_8) = \delta \begin{bmatrix} -\dfrac{36mgR\lambda}{\lambda - 16} - mgR + 16kR^2 & 0 \\ 0 & -mgR \end{bmatrix}$$

e, dato $-\dfrac{36mgR\lambda}{\lambda - 16} - mgR + 16kR^2$ è una quantità sempre positiva, gli autovalori sono uno positivo e uno negativo, quindi P_8 è instabile.

3. Per calcolare la lagrangiana dobbiamo prima calcolare l'energia cinetica. Dato che O è un punto fisso per il corpo rigido, possiamo calcolare l'energia cinetica proprio in O:

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_O \boldsymbol{\omega},$$

dove J_O è la matrice d'inerzia calcolata nel punto 1. rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il corpo rigido e centrato in O, mentre $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare, data da

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_x - \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{x'},$$

con $\boldsymbol{e}_x = -\cos\varphi \boldsymbol{e}_{y'} + \operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{e}_{z'}$ e quindi

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{x'} - \dot{\vartheta}\cos\varphi \boldsymbol{e}_{y'} + \dot{\vartheta}\operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{e}_{z'}.$$

Dopo qualche conto l'energia cinetica risulta

$$K = \frac{mR^2}{12}\left(274 - 15\cos^2\vartheta\right)\dot{\vartheta} + 4mR^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{5}{8}mR^2\dot{\varphi}^2.$$

La lagrangiana è infine data da

$$\mathcal{L} = K + U,$$

dove l'energia cinetica K è appena stata calcolata e il potenziale U è stato calcolato nel punto 2.

2) Denotiamo con $\overline{OA}$ l'asta, con G il suo baricentro e con G_1 il baricentro della lamina triangolare. Dato che la densità dell'asta è $\rho(y) = \rho y^n$ con $\rho \in \mathbb{R}$, dalla definizione di baricentro possiamo dedurre che

$$y_G = \frac{\displaystyle\int_0^\ell \rho y^{n+1} d\,y}{\displaystyle\int_0^\ell \rho y^n d\,y} = \frac{\ell^{n+2}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{\ell^{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}\ell = \frac{4}{5}\ell$$

da cui ricaviamo $n = 3$. La densità dell'asta è quindi

$$\rho(y) = \rho y^3,\ \ \rho \in \mathbb{R}.$$

Sapendo poi che l'asta ha massa m, possiamo ricavare anche

$$m = \int_0^\ell \rho y^3 d\,y = \rho\frac{\ell^4}{4},$$

da cui

$$\rho = \frac{4m}{\ell^4}.$$

Conoscendo la densità dell'asta possiamo calcolare anche la sua matrice d'inerzia. Innanzitutto osserviamo che per questioni di simmetria rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$, i prodotti d'inerzia $J_{12}^{asta},\ J_{13}^{asta},\ J_{23}^{asta}$ sono nulli e, dato che la lamina è piana, possiamo calcolare

$$J_{11}^{asta} = J_{33}^{asta} = \int_0^\ell \rho y^3 \cdot y^2 d\,y = \rho\frac{\ell^6}{6} = \frac{4m}{\ell^4}\cdot\frac{\ell^6}{6} = \frac{2}{3}m\ell^2,$$

quindi

$$\mathsf{J}_O^{asta} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Se consideriamo il sistema di riferimento $Ax'y'z'$ con assi paralleli a x, y, z, la lamina triangolare ha matrice d'inerzia

$$\mathsf{J}_A^{triangolo} = \begin{bmatrix} \frac{m}{6}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{bmatrix}.$$

Utilizziamo ora il teorema di Huygens-Steriner per spostare la matrice d'inerzia prima nel baricentro G_1 e successivamente in O. Rispetto al sistema di riferimento centrato in G_1 e con assi paralleli a $x,\ y,\ z$, i prodotti d'inerzia saranno ancora nulli. Inoltre,

$$J_{G_1}^{11} = \frac{m\ell^2}{24} - m\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{72},$$

$$J_{G_1}^{22} = J_A^{22} = \frac{m\ell^2}{24},$$

$$J_{G_1}^{33} = J_{G_1}^{11} + J_{G_1}^{22} = \frac{m\ell^2}{72} + \frac{m\ell^2}{24} = \frac{m\ell^2}{18}.$$

Passiamo adesso al sistema di riferimento centrato nel sistema di riferimento $Oxyz$. Anche questa volta i prodotti d'inerzia saranno nulli.

$$J_O^{11} = \frac{m\ell^2}{72} + m\left(\ell + \frac{\ell}{6}\right)^2 = \frac{11}{8}m\ell^2,$$

$$J_O^{22} = J_{G_1}^{22} = \frac{m\ell^2}{24},$$

$$J_O^{33} = J_O^{11} + J_O^{22} = \frac{17}{12}m\ell^2,$$

quindi

$$\mathsf{J}_O^{triangolo} = \begin{bmatrix} \frac{11}{8}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{12}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Infine, per determinare la matrice d'inerzia dell'intera lamina basta sommare le matrici d'inerzia appena calcolate rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$:

$$\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_O^{asta} + \mathsf{J}_O^{triangolo} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{11}{8}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{12}m\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{49}{24}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{12}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$