Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 14 luglio 2017 a cura di Sara Mastaglio

1) I parametri lagrangiani sono già forniti dal testo dell'esercizio e sono

$$\xi := (D - O) \in [-4R; 4R] \quad \text{e} \quad \vartheta := x^+\widehat{O}B \in [\,0; 2\pi\,)\,.$$

Calcoliamo le coordinate del baricentro del disco:

$$(C - O) = (\xi \cos\vartheta - R \operatorname{sen}\vartheta)\boldsymbol{e}_x + (\xi \operatorname{sen}\vartheta + R\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_y$$

da cui

$$|C - O|^2 = \xi^2 + R^2.$$

(a) Il potenziale risulta

$$\begin{aligned} U &= -mgy_O - mgy_C - \frac{k}{2}|C - O|^2 = \\ &= -mg\,(\xi \operatorname{sen}\vartheta + R\cos\vartheta) - \frac{k}{2}\left(\xi^2 + R^2\right) = -mg\xi \operatorname{sen}\vartheta - mgR\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + c. \end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio si trovano dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -mg \operatorname{sen}\vartheta - k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\xi\cos\vartheta + mgR\operatorname{sen}\vartheta = 0; \end{cases}$$

dalla prima equazione troviamo $\xi = -\dfrac{mg}{k}\operatorname{sen}\vartheta$, che sostituito nella seconda ci dà

$$\operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{mg}{k}\cos\vartheta + R\right) = 0,$$

da cui ricaviamo $\operatorname{sen}\vartheta = 0$, cioè $\vartheta = 0, \pi$, e $\cos\vartheta = -\dfrac{kR}{mg} = -\dfrac{1}{\lambda}$, cioè $\vartheta = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{\lambda}\right)$. Utilizziamo i valori di ϑ trovati per ricavare le rispettive ξ e troviamo le posizioni di equilibrio:

- $P_1(0; 0)$;
- $P_2(0; \pi)$;
- $P_3\left(-R\sqrt{\lambda^2 - 1}; \arccos\left(-\dfrac{1}{\lambda}\right)\right)$

  valida se $-\dfrac{1}{\lambda} \geq -1$, cioè se $\lambda \geq 1$, ed inoltre se $-R\sqrt{\lambda^2 - 1} > -4R$, cioè $\lambda < \sqrt{17}$ e quindi $1 < \lambda < \sqrt{17}$.

- $P_4\left(R\sqrt{\lambda^2-1}; -\arccos\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right)$

  valida se $-\frac{1}{\lambda} \geq -1$, cioè se $\lambda \geq 1$, ed inoltre se $R\sqrt{\lambda^2-1} < 4R$, cioè $\lambda < \sqrt{17}$ e quindi anche in questo caso $1 \leq \lambda < \sqrt{17}$.

(b) Per valutare la stabilità delle posizioni di equilibrio calcoliamo l'hessiano:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -k, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = -mg\cos\vartheta, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = mg\xi \operatorname{sen}\vartheta + mgR\cos\vartheta.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & -mg \\ -mg & mgR \end{bmatrix}$$

da cui risulta che P_1 è instabile dato che $\det \mathcal{H}(P_1) = -mgkR - m^2g^2 < 0$.

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k & mg \\ mg & -mgR \end{bmatrix}$$

da cui $\operatorname{tr} \mathcal{H}(P_2) = -k - mgR < 0$ e $\det \mathcal{H}(P_2) = mgkR - m^2g^2$ è positivo se $mgkR - m^2g^2 > 0$, cioè se $\lambda < 1$; quindi P_2 è stabile per $\lambda < 1$.

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} -k & kR \\ kR & -kR^2\lambda^2 \end{bmatrix}$$

da cui $\operatorname{tr} \mathcal{H}(P_3) = -k - kR^2\lambda^2 < 0$ e $\det \mathcal{H}(P_3) = k^2R^2(\lambda^2-1)$ è positivo se $\lambda > 1$; quindi, ricordando le condizioni di esistenza, P_3 è stabile per $1 < \lambda < \sqrt{17}$.

$$\mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} -k & kR \\ kR & -kR^2\lambda^2 \end{bmatrix}$$

quindi ricadiamo nella situazione precedente, cioè P_4 è stabile per $1 < \lambda < \sqrt{17}$.

(c) Le posizioni di confine sono del tipo $\overline{P}_1(4R, \overline{\vartheta})$ e $\overline{P}_2(-4R, \overline{\vartheta})$.

Per quanto riguarda $\overline{P}_1$ le velocità virtuali sono $w_\xi \leq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right|_{P_1} \geq 0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}\right|_{P_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mg\operatorname{sen}\overline{\vartheta} - 4kR \geq 0 \\ -4mgR\cos\overline{\vartheta} + mgR\operatorname{sen}\overline{\vartheta} = 0, \end{cases}$$

che dà come soluzione $\overline{\vartheta} = \pi + \operatorname{arctg} 4$ se $\lambda \geq \sqrt{17}$; quindi la posizione di equilibrio di confine è $\overline{P}_1(4R; \pi + \operatorname{arctg} 4)$.
Per quanto riguarda $\overline{P}_2$ le velocità virtuali sono $w_\xi \geq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right|_{P_2} \leq 0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}\right|_{P_2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -mg \operatorname{sen} \overline{\vartheta} + 4kR \leq 0 \\ 4mgR \cos \overline{\vartheta} + mgR \operatorname{sen} \overline{\vartheta} = 0, \end{cases}$$

che dà come soluzione $\overline{\vartheta} = \pi + \operatorname{arctg}(-4)$ se $\lambda \geq \sqrt{17}$; quindi la posizione di equilibrio di confine è $\overline{P}_2(-4R; \pi + \operatorname{arctg}(-4))$.
(d) L'energia cinetica del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica dell'asta K_a e di quella del disco K_d. Notiamo che l'asta ha un punto fisso (il punto O), mentre il disco no (si potrebbe essere tratti in inganno dal punto di contatto D tra asta e disco, ma questo non ha velocità nulla in quanto si muove con l'asta), quindi l'energia cinetica totale è

$$K = K_a + K_d = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathsf{J}_O \boldsymbol{\omega}_a + \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_d \cdot \mathsf{J}_C \boldsymbol{\omega}_d.$$

La velocità del punto C è

$$\boldsymbol{v}_C = \left(\dot{\xi}\cos\vartheta - \xi\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta - R\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\dot{\xi}\operatorname{sen}\vartheta + \xi\dot{\vartheta}\cos\vartheta - R\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y$$

e quindi $v_C^2 = \dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{\xi}\dot{\vartheta}$.
Le velocità angolari sono $\boldsymbol{\omega}_a = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ e $\boldsymbol{\omega}_d = \left(\dot{\vartheta} + \dot{\varphi}\right)\boldsymbol{e}_z$ dove φ è l'angolo di rotazione propria del disco; la condizione di rotolamento senza strisciamento è $\dot{\xi} = -R\dot{\varphi}$, e quindi la velocià angolare del disco risulta $\boldsymbol{\omega}_d = \left(\dot{\vartheta} - \dfrac{\dot{\xi}}{R}\right)\boldsymbol{e}_z$. Nel caso piano ci basta ricordare $J_O^{33} = \dfrac{m\ell^2}{12}$ e $J_C^{33} = \dfrac{mR^2}{2}$. Dopo qualche conto, tenendo conto che $\ell = 8R$, l'energia cinetica risulta

$$K = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 - \frac{3}{2}mR\dot{\xi}\dot{\vartheta} + \frac{m}{12}\left(41R^2 + 6\xi^2\right)\dot{\vartheta}^2.$$

2) Per ottenere una trasformazione canonica poniamo le parentesi di Poisson uguali a 1:

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

con

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = kp, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = kq, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{1}{q}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{k}{kp}\ .$$

Quindi

$$kp \cdot \frac{k}{kp} - kq \cdot \left(-\frac{1}{q}\right) = 1$$

cioè

$$k + k = 1$$

da cui otteniamo $k = \dfrac{1}{2}$.
La trasformazione, quindi, diventa

$$\begin{cases} Q = Q(q,p) = \dfrac{qp}{2} \\ P = P(q,p) = \log\left(\dfrac{p}{2q}\right) \end{cases}.$$

Troviamo ora una funzione generatrice $F(q,P)$:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P}$$

quindi $p = 2qe^P = \dfrac{\partial F}{\partial q}$, da cui si può ricavare $F(q,P) = q^2e^P + g(P)$. Inolte

$$q^2e^P + g'(P) = \frac{\partial F}{\partial P} = Q = q^2e^P$$

da cui, confrontando il primo e l'ultimo termine, risulta che $g'(P) = 0$ e quindi $g(P) = $ costante. In definitiva

$$F(q,P) = q^2e^P + \text{costante},$$

in particolare, scegliendo la costante $= 0$, troviamo

$$F(q,P) = q^2e^P.$$