Risoluzione della prova di Meccanica Analitica dell'11 gennaio 2019

I) 1. Scegliamo come parametri lagrangiani gli angoli (antiorari) $\vartheta \in [0, 2\pi[$ tra la verticale discendente e OA e $\varphi \in [0, 2\pi[$ tra la verticale discendente e BC.
Denotando con G il punto medio dell'asta BC, il potenziale è dato da

$$U = -2mgy_B - mgy_C - \frac{1}{2}k|C - D|^2.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
&(B - O) = \ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_1 - \ell\cos\vartheta \boldsymbol{e}_2,\\
&(G - O) = (G - B) + (B - O) = \left(\frac{\ell}{2}\sin\varphi + \ell\sin\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 - \left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi + \ell\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2,\\
&(C - D) = -\ell\left(\cos\varphi + \cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2,
\end{aligned}$$

da cui

$$U(\vartheta, \varphi) = 3mg\ell\cos\vartheta + \frac{1}{2}mg\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}k\ell^2\left(\cos\varphi + \cos\vartheta\right)^2 + \text{cost.}$$

Poiché O è fisso, scriviamo l'energia cinetica come

$$K = \frac{1}{2}J_O^{OA}\omega_\vartheta^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}J_G^{BC}\omega_\varphi^2.$$

Si ha

$$\omega_\vartheta = \dot\vartheta, \quad \omega_\varphi = \dot\varphi, \quad J_O^{OA} = \frac{8}{3}m\ell^2, \quad J_G^{BC} = \frac{m\ell^2}{12},$$
$$\boldsymbol{v}_G = \left(\frac{\ell}{2}\dot\varphi\cos\varphi + \ell\dot\vartheta\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\ell}{2}\dot\varphi\sin\varphi + \ell\dot\vartheta\sin\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2$$

e dunque

$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = \ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot\varphi^2 + \ell^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\varphi - \vartheta).$$

Quindi l'energia cinetica diventa

$$\begin{aligned}
K(\vartheta, \varphi, \dot\vartheta, \dot\varphi) &= \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{m\ell^2}{12}\dot\varphi^2 + m\ell^2\dot\vartheta^2 + m\frac{\ell^2}{4}\dot\varphi^2 + m\ell^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\varphi - \vartheta)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{11}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{3}m\ell^2\dot\varphi^2 + m\ell^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\varphi - \vartheta)\right]
\end{aligned}$$

da cui si ricava la lagrangiana

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\vartheta, \varphi, \dot\vartheta, \dot\varphi) = \frac{1}{2}&\left[\frac{11}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{3}m\ell^2\dot\varphi^2 + m\ell^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\varphi - \vartheta)\right]\\
&+ 3mg\ell\cos\vartheta + \frac{1}{2}mg\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}k\ell^2\left(\cos\varphi + \cos\vartheta\right)^2
\end{aligned}$$

2. Le posizioni di equilibrio si trovano nei punti stazionari del potenziale:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = -3mg\ell\sin\vartheta + k\ell^2(\cos\varphi + \cos\vartheta)\sin\vartheta = 0\\
\dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = -\dfrac{1}{2}mg\ell\sin\varphi + k\ell^2(\cos\varphi + \cos\vartheta)\sin\varphi = 0.
\end{cases}$$

Dalla prima raccogliamo $\sin\vartheta$, da cui

$$\sin\vartheta = 0 \quad \vee \quad \cos\varphi + \cos\vartheta = 3\lambda$$

dove $\lambda = mg/k\ell$.
Il primo caso dà $\vartheta = 0, \pi$, e sostituito nella seconda equazione risulta

$$\begin{aligned} \vartheta = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sin\varphi = 0 \quad \vee \quad -\frac{1}{2}mg + k\ell(\cos\varphi + 1) = 0 \\ \vartheta = \pi \quad &\Rightarrow \quad \sin\varphi = 0 \quad \vee \quad -\frac{1}{2}mg + k\ell(\cos\varphi - 1) = 0. \end{aligned}$$

L'equazione $-\frac{1}{2}mg + k\ell(\cos\varphi + 1) = 0$ diventa

$$\cos\varphi = \frac{\lambda}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm \arccos\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) \quad \text{se } \lambda < 4,$$

quindi per $\vartheta = 0$ abbiamo le posizioni

$$P_1(0,0), \quad P_2(0,\pi), \quad P_{3,4} = \left(0, \pm \arccos\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right)\right)$$

dove le ultime due esistono solo se $\lambda < 4$.
In modo simile, per $\vartheta = \pi$ l'equazione $-\frac{1}{2}mg + k\ell(\cos\varphi - 1) = 0$ diventa

$$\cos\varphi = \frac{\lambda}{2} + 1$$

che stavolta non ha mai soluzioni, quindi si aggiungono solamente le posizioni

$$P_5(\pi, 0), \quad P_6(\pi,\pi).$$

Se invece sostituiamo l'equazione $\cos\varphi + \cos\vartheta = 3\lambda$ nella seconda, otteniamo

$$\sin\varphi\left(-\frac{1}{2}mg\ell + 3k\ell^2\lambda\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi\frac{5}{2}\lambda = 0$$

da cui $sin\varphi = 0$, ovvero $\varphi = 0, \pi$. Sostituendo $\varphi = 0$ si ha

$$1 + \cos\vartheta = 3\lambda \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \pm\arccos(3\lambda - 1)$$

che esistono solo se $\lambda < 2/3$. Quindi troviamo altre due posizioni di equilibrio

$$P_{7,8}\left(\pm\arccos(3\lambda - 1), 0\right)$$

per $\lambda < 2/3$.
Sostituendo $\varphi = \pi$ si ha invece

$$-1 + \cos\vartheta = 3\lambda \quad \Rightarrow \quad \cos\vartheta = 1 + 3\lambda$$

che non ha soluzioni.

3. Nel caso $\lambda = 3$ si hanno in tutto sei posizioni di equilibrio:

$$P_1(0,0), \quad P_2(0,\pi), \quad P_{3,4} = \left(0, \pm\frac{\pi}{3}\right), \quad P_5(\pi, 0), \quad P_6(\pi,\pi).$$

Per la stabilità usiamo la matrice hessiana del potenziale $\mathcal{H}(\vartheta, \varphi)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{11} &= -3mg\ell\cos\vartheta - k\ell^2\sin^2\vartheta + k\ell^2(\cos\varphi + \cos\vartheta)\cos\vartheta \\
&= k\ell^2(-9\cos\vartheta - \sin^2\vartheta + (\cos\varphi + \cos\vartheta)\cos\vartheta) \\
\mathcal{H}_{12} &= \mathcal{H}_{21} = -k\ell^2\sin\varphi\sin\vartheta \\
\mathcal{H}_{22} &= -\frac{1}{2}mg\ell\cos\varphi - k\ell^2\sin^2\varphi + k\ell^2(\cos\varphi + \cos\vartheta)\cos\varphi \\
&= k\ell^2\left(-\frac{3}{2}\cos\varphi - \sin^2\varphi + (\cos\varphi + \cos\vartheta)\cos\varphi\right).
\end{aligned}$$

In tutti i sei casi la matrice risulta diagonale, e si ha:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{11}(P_1) = k\ell^2(-7) < 0, \quad \mathcal{H}_{22}(P_1) = k\ell^2\frac{1}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 \text{ instabile} \\
&\mathcal{H}_{11}(P_2) = k\ell^2(-9) < 0, \quad \mathcal{H}_{22}(P_2) = k\ell^2\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad P_2 \text{ instabile} \\
&\mathcal{H}_{11}(P_{3,4}) = k\ell^2\left(-\frac{15}{2}\right) < 0, \quad \mathcal{H}_{22}(P_2) = k\ell^2\left(-\frac{3}{4}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad P_{3,4} \text{ stabile} \\
&\mathcal{H}_{11}(P_5) = k\ell^2\,(9) > 0, \quad \mathcal{H}_{22}(P_2) = k\ell^2\left(-\frac{3}{2}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad P_5 \text{ instabile} \\
&\mathcal{H}_{11}(P_6) = k\ell^2\,(11) > 0, \quad \mathcal{H}_{22}(P_2) = k\ell^2\left(\frac{7}{2}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad P_6 \text{ instabile.}
\end{aligned}$$

4. Scegliamo ad esempio la posizione stabile $P_3(0, \pi/3)$. L'energia cinetica in P_3 diventa

$$K = \frac{1}{2}\left[\frac{11}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right]$$

e quindi la matrice dell'energia cinetica è

$$J = \begin{bmatrix} 11/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 \end{bmatrix} m\ell^2,$$

mentre l'hessiano nella posizione P_3 con $\lambda = 3$ si scrive

$$H = \begin{bmatrix} -15/2 & 0 \\ 0 & -3/4 \end{bmatrix} k\ell^2.$$

Quindi l'equazione delle pulsazioni delle piccole oscillazioni si scrive

$$\det[\omega^2 J + H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\begin{bmatrix} 11m\ell^2\omega^2/3 - 15k\ell^2/2 & m\ell^2\omega^2/4 \\ m\ell^2\omega^2/4 & m\ell^2\omega^2/3 - 3k\ell^2/4 \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$167m^2\omega^4 - 756km\omega^2 + 810k^2 = 0,$$

le cui soluzioni in ω danno le pulsazioni delle piccole oscillazioni.

II) Chiamiamo ℓ il lato di ogni triangolo e m la massa totale. Per simmetria, la matrice d'inerzia risulterà diagonale. Il momento d'inerzia rispetto all'asse y è facile perché possiamo dividere la lamina in quattro triangoli rettangoli uguali ed ognuno avrà lo stesso momento d'inerzia rispetto all'asse y, quindi basta sapere il momento d'inerzia rispetto all'asse verticale di una lamina a forma di triangolo rettangolo di lato orizzontale $\ell/2$:

$$J_{22} = \frac{1}{6}m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{24}m\ell^2$$

Per l'asse orizzontale invece dobbiamo usare il Teorema di Steiner, sapendo che il baricentro dista $2h/3$ dall'asse delle x, dove $h = \sqrt{3}\ell/2$. Denotando con J^G il momento baricentrale e con J^A quello lungo il cateto orizzontale, si ha

$$J_{11}^O = J_{11}^G + m\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = J_{11}^A - m\left(\frac{1}{3}h\right)^2 + m\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{6}mh^2 + \frac{1}{3}mh^2 = \frac{1}{2}m\frac{3}{4}\ell^2 = \frac{3}{8}m\ell^2.$$

Sapendo poi che la lamina è piana, risulta

$$J_{33} = J_{11} + J_{22} = \frac{3}{8}m\ell^2 + \frac{1}{24}m\ell^2 = \frac{5}{12}m\ell^2,$$

quindi

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \frac{3}{8}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Poiché il versore della linea tratteggiata è dato da

$$\boldsymbol{r} = (1/2, \sqrt{3}/2, 0),$$

si ha infine

$$J_r = \boldsymbol{r} \cdot \mathsf{J}_O \boldsymbol{r} = \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{24} \cdot \frac{3}{4}\right) m\ell^2 = \frac{1}{8}m\ell^2.$$